ポアンカレ ホモロジー球面

ー生い立ちと使命ー

亡き先輩 中川洋子さんに捧げます

広島大学 作間 誠

予定

1. Binary icosahedral group の作用を見る.

   正12面体の対称性

   S^2 と S^3 の幾何

   Binary icosahedral group と 120 cell

2. 正12面体による S^3 と $\mathbb{H}^3$ のタイルばり

   及びそれからできる多様体

   ……

3. Hopf fibration と PH の Seifert fibered space としての構造

4. Mckay 対応　E_8-link による PH の記述

   exotic sphere, non-smoothable mfd の構成

5. A'Campo's divide から見た Mckay 対応

6. Knot Floer homology, Heegaard Floer homology と PH

生い立ち

Homology Poincare Conjecture

$$H_*(M^3) \cong H_*(S^3) \Rightarrow M^3 \cong S^3$$

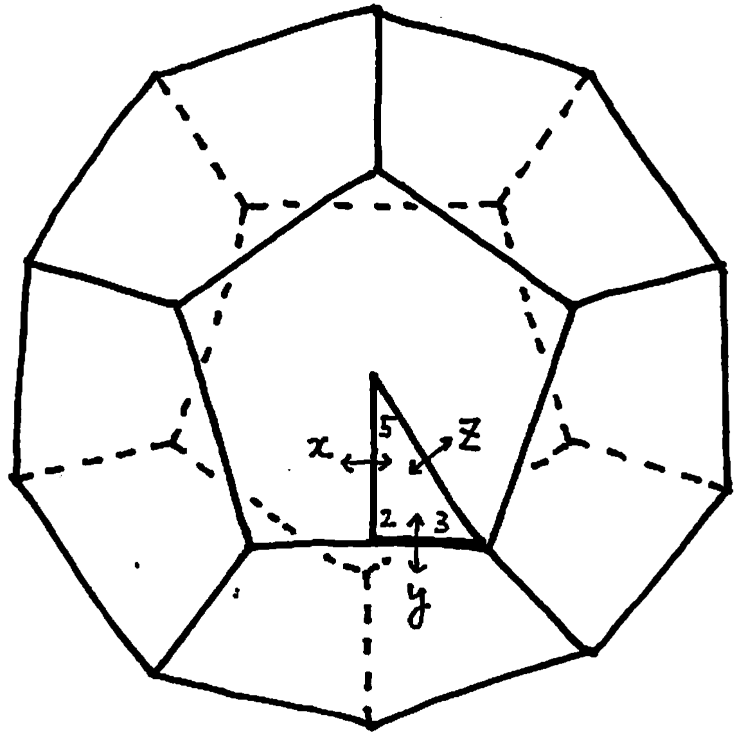
Heegaard 分解を用いて反例構成

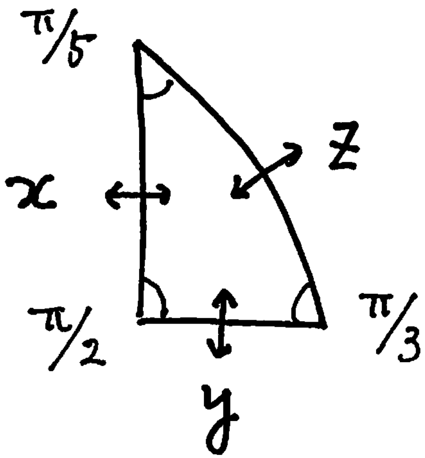
Poincaré homology sphere

本間-落合-高橋 HOTの定理

金戸の定理

正12面体の対称性





Aut (Dodecahedron)

$\cong [2,3,5]$ extended triangle group

$\cong \left\langle x, y, z \;\middle|\; \begin{array}{l} x^2 = y^2 = z^2 = 1 \\ (xy)^2 = (yz)^3 = (zx)^5 = 1 \end{array} \right\rangle$

Aut^+(Dodecahedron)

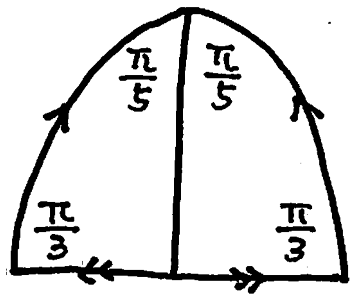
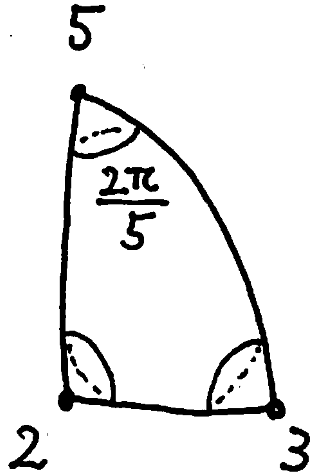
$\cong (2,3,5)$ triangle group

$\cong \left\langle a, b, c \;\middle|\; \begin{array}{l} a^2 = b^3 = c^5 = 1 \\ abc = 1 \end{array} \right\rangle$

$\cong I$ icosahedral group

$\cong A_5$

$$S^2(2,3,5) := S^2/(2,3,5) \left(= S^2/I\right)$$

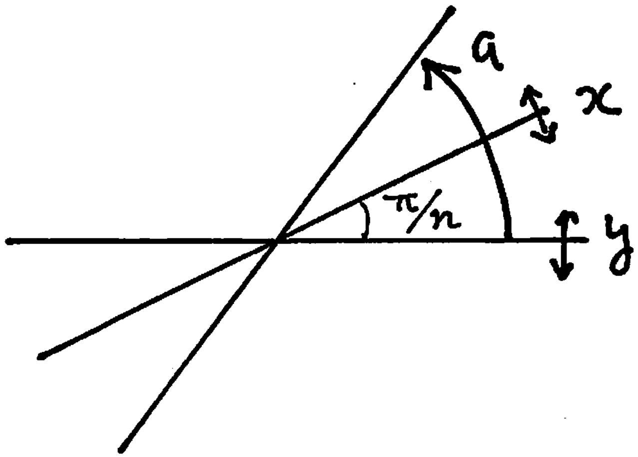
$\cong$  $\cong$  orbifold

$$T_1 S^2(2,3,5) = \text{unit tangent bundle of } S^2(2,3,5)$$

$$= T_1 S^2/(2,3,5)$$

<u>Prop</u> Poincaré homology sphere $PH \cong T_1 S^2(2,3,5)$

観察



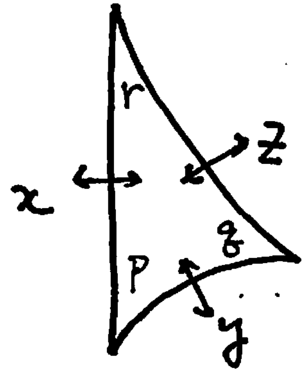
$a := xy$ $\quad \frac{2\pi}{n}$ 回転

Group generated by x, y

$\cong \langle x, y \mid x^2 = y^2 = (xy)^n = 1 \rangle$

$\cong D_{2n}$ dihedral group of order $2n$

Poincare の基本多面体定理



$\subset S^2, E^2$ or $\mathbb{H}^2$

The group generated by x, y, z

$$\cong \left\langle x, y, z \;\middle|\; \begin{array}{l} x^2 = y^2 = z^2 = 1 \\ (xy)^p = (yz)^q = (zx)^r = 1 \end{array} \right\rangle$$

$\cong [p, q, r]$ extended triangle group

$\triangledown$

(p, q, r) : triangle group

$$\cong \left\langle a, b, c \;\middle|\; \begin{array}{l} a^p = b^q = c^r = 1 \\ abc = 1 \end{array} \right\rangle$$

[Klimenko - S]

$$\mathrm{rank}\,[p, q, r] = 2 \iff \begin{array}{l} \text{(i)} \ \{p, q, r\} = \{2, q, r\} \quad q \text{ or } r \not\equiv 0 \ (2) \\ \text{or} \\ \text{(ii)} \ \{p, q, r\} = \{3, 3, r\} \quad r \not\equiv 0 \ (3) \end{array}$$

Otherwise, $\mathrm{rank}\,[p, q, r] = 3$

但し rank G = G の生成元の最小個数

Cor [Morimoto - S - Yokota]

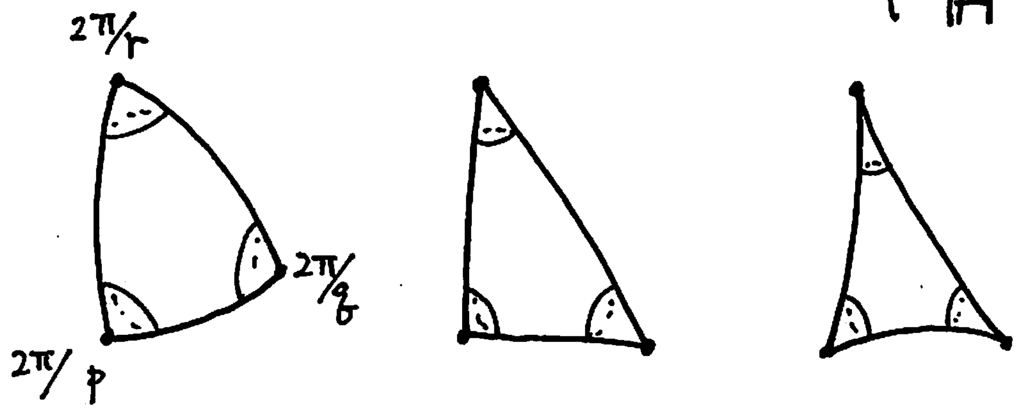
Tunnel number 1 Montesinos knot の決定

[Weidmann, Proc. London Math Soc. 95 (2007)]

Suff. large fuchsian group の rank の決定

問題　Fuchsian group の rank を決定せよ.

$$S^2(p,q,r) := \mathbb{X} \big/ (p,q,r) \qquad \mathbb{X} = \begin{cases} \mathbb{S}^2 & \frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r} > 1 \\ \mathbb{E}^2 & = 1 \\ \mathbb{H}^2 & < 1 \end{cases}$$



$$T_1 S^2(p,q,r) := \text{Unit tangent bundle of } S^2(p,q,r)$$

$$= T_1\mathbb{X} \big/ (p,q,r)$$

<u>Prop</u> $\quad T_1 S^2(p,q,r) \cong \Sigma(p,q,r)$ Brieskorn manifold

$$:= \{ z_1^p + z_2^q + z_3^r = 0 \} \cap S^5$$

特に $T_1 S^2(2,3,5) \cong \Sigma(2,3,5) \cong$ Poincaré homology sphere

Geometry of S^2 and S^3

$$H := \{ q = a + bi + cj + dk \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \}$$

Hamilton の 4元数体

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

$$ij = k = -ji$$

$$jk = i = -kj$$

$$ki = j = -ik$$

$$\begin{tikzcd} i \arrow[rr] & & j \arrow[dl] \\ & k \arrow[ul] & \end{tikzcd}$$

$$q = (a + bi) + (c + di)j = z_1 + z_2 j \quad (z_1, z_2 \in \mathbb{C})$$

- <u>Tip</u> $\quad zj = j\bar{z} \quad (\forall z \in \mathbb{C})$

$(\because)\quad zj = (a + bi)j = aj + bij = aj - bji = j(a - bi) = j\bar{z}$

- $\mathbb{H} \ni q = a + bi + cj + dk$

$$\bar{q} := a - bi - cj - dk$$

$$|q|^2 := q\bar{q} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

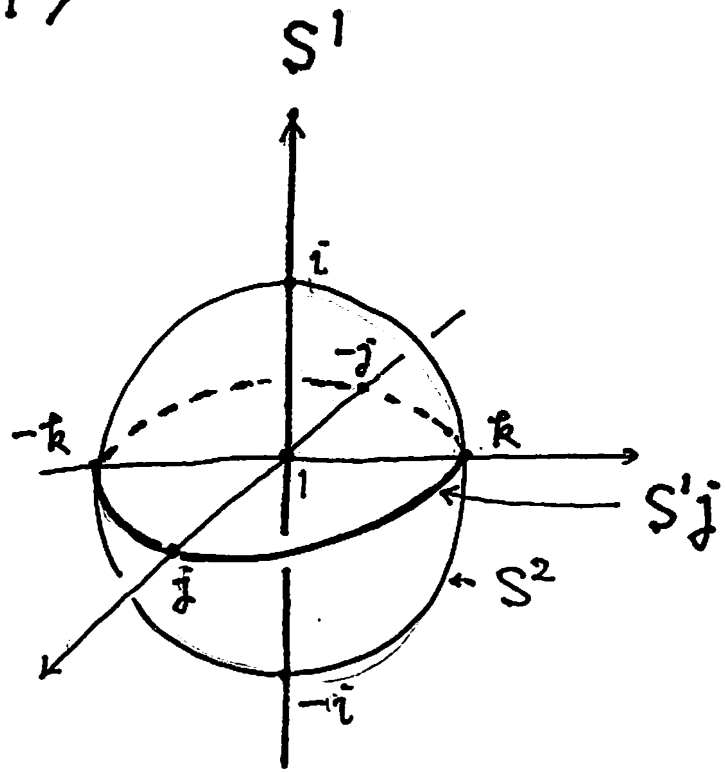
$$S^3 := \{ q \in \mathbb{H} \mid |q| = 1 \}$$

$$\cup$$

$$S^2 := S^3 \cap \langle i, j, k \rangle = S^3 \cap \langle 1 \rangle^{\perp}$$

$$S^1 := \{ z \in \mathbb{C} \subset \mathbb{H} \mid |z| = 1 \}$$

$$S^3 - \{-1\} =$$



- $\Phi : S^3 \times S^3 \twoheadrightarrow \mathrm{Isom}^+(S^3)$ double cover

$$\begin{array}{ccc} S^3 \times S^3 & \twoheadrightarrow & \mathrm{Isom}^+(S^3) \\ \Psi & & \Psi \\ (q_1, q_2) & \longmapsto & \Phi(q_1, q_2) : \begin{array}{ccc} S^3 & \longrightarrow & S^3 \\ \Psi & & \Psi \\ x & \longmapsto & q_1 x q_2^{-1} \end{array} \end{array}$$

- $\Psi : S^3 \twoheadrightarrow \mathrm{Isom}^+(S^2)$ double cover

$$\begin{array}{ccc} S^3 & \twoheadrightarrow & \mathrm{Isom}^+(S^2) \\ \Psi & & \Psi \\ q & \longmapsto & \Psi(q) : \begin{array}{ccc} S^2 & \longrightarrow & S^2 \\ \Psi & & \Psi \\ x & \longmapsto & q x q^{-1} \end{array} \end{array}$$

- Binary icosahedral group

$$I^* := \Psi^{-1}(I) \subset S^3 \quad \left(I \cong (2,3,5) < \mathrm{Isom}^+ S^2 \right)$$

$$|I^*| = 2|I| = 120$$

Definition

Poincare homology sphere

$$PH := S^3 / \phi(1 \times I^*)$$

$$= -\left(S^3 / \phi(I^* \times 1) \right)$$

(注) しばらくは 向きを無視して

$$PH = S^3 / \phi(I^* \times 1) = I^* \backslash S^3$$ 左 I^* 作用

とみなす.

$\mathrm{Isom}^+(S^3)$ を見る

- $\mathrm{Isom}^+(S^1)$ の場合

$$\mathbb{C} \supset S^1 \ni {}^\forall \omega = \exp(i\theta) = \cos\theta \cdot 1 + \sin\theta \cdot i$$

$$L_\omega : \begin{array}{ccc} S^1 & \longrightarrow & S^1 \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ z & \longmapsto & \omega z \end{array} \quad \theta \text{ 回転}$$

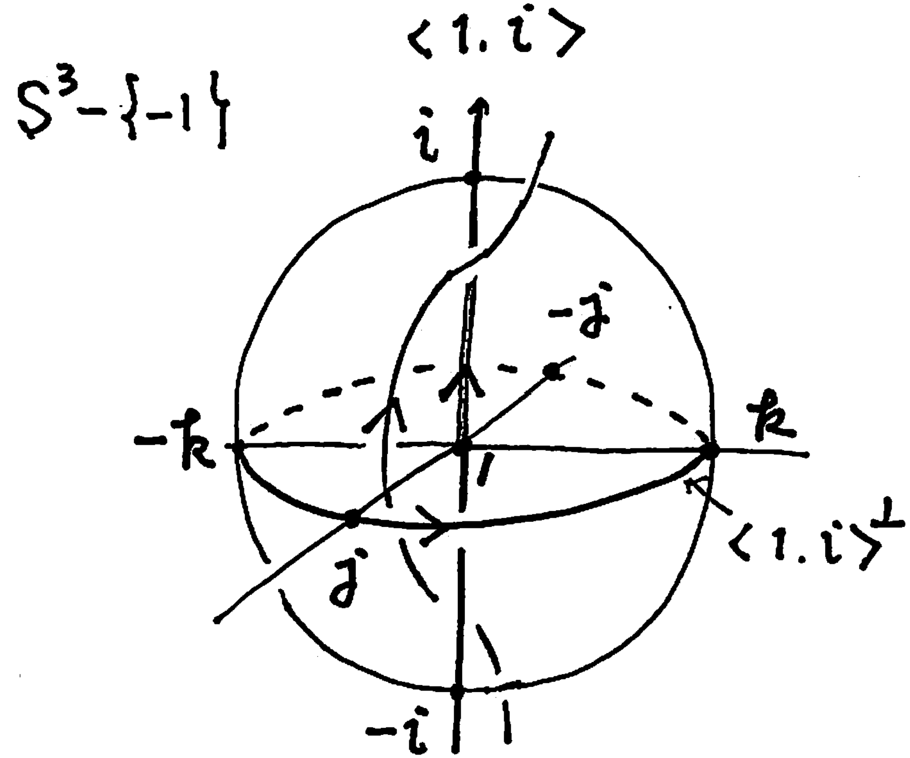
- $H \supset S^2 \ni q_0 \Rightarrow q_0^2 = -1$, i と conjugate
- $H \supset S^3 \ni {}^\forall q = \exp(q_0\theta) := \cos\theta \cdot 1 + \sin\theta \cdot q_0$

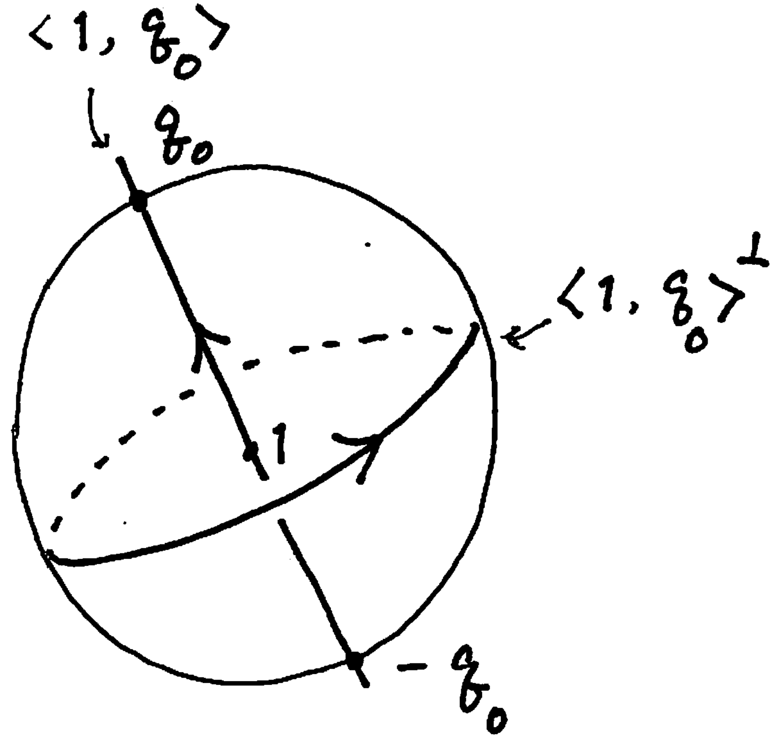
for some $q_0 \in S^2$

$$L_q : \begin{array}{ccc} S^3 & \longrightarrow & S^3 \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ x & \longmapsto & q x \end{array}$$

: right screw motion of angle θ with axis $\langle 1, q_0 \rangle$, $\langle 1, q_0 \rangle^\perp$.

$$
\begin{array}{cccc}
L_q : & S^3 & \longrightarrow & S^3 \\
& \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\
& x & \longmapsto & qx
\end{array}
$$





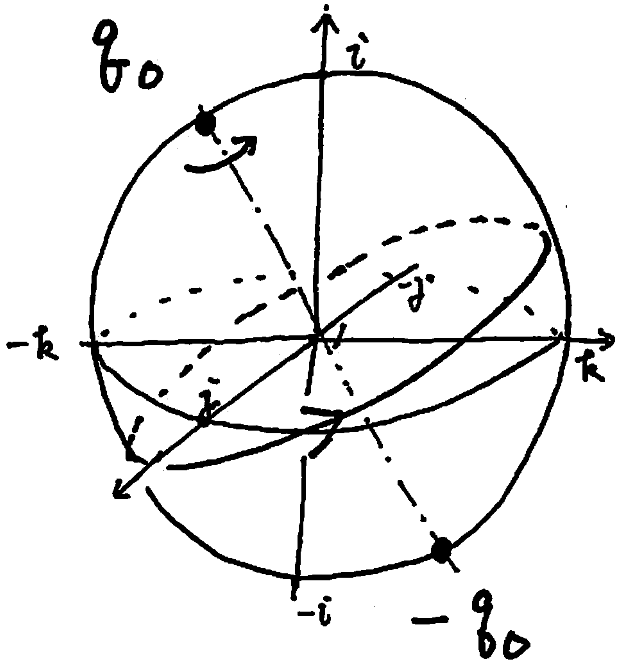
$q = \exp(i\theta)$ $\qquad$ $q = \exp(q_0 \theta)$ $\qquad$ $(q_0 \in S^2)$

(注) $^\forall q_0 \in S^2$ は i と対等

$\mathrm{Isom}^+(S^2)$ を見る

$$S^3 \ni q = \exp(q_0\theta) = \cos\theta\cdot 1 + \sin\theta\cdot q_0$$

$$\begin{array}{cccc} \psi(q): & S^2 & \longrightarrow & S^2 \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & x & \longmapsto & q x q^{-1} \end{array}$$



2θ-rotation

with fixed point set $\{\pm q_0\}$

Binary icosahedral group $I^* = \Psi^{-1}(I) \subset S^3$ の記述

I^* の典型的な元

- Face の中心 $f \in S^2$ のまわりの $\frac{2\pi}{5}$ 回転 $r_f \in I$:

  $\Psi^{-1}(r_f) = \pm \exp\left(f \frac{\pi}{5}\right) = \pm \left\{\cos\frac{\pi}{5} + \sin\frac{\pi}{5} \cdot f\right\} \subset S^3$

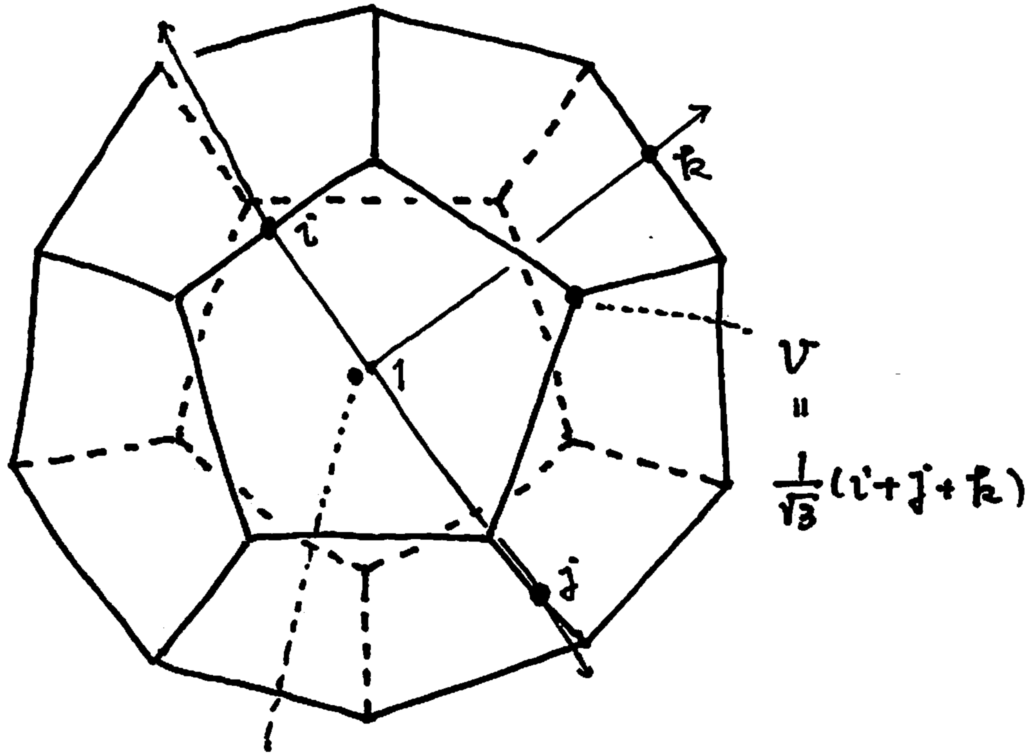
- Edge の中点 $e \in S^2$ のまわりの π 回転 $r_e \in I$:

  $\Psi^{-1}(r_e) = \pm \exp\left(e \frac{\pi}{2}\right) = \pm e \qquad \subset S^3$

- Vertex $v \in S^2$ のまわりの $\frac{2\pi}{3}$ 回転 $r_v \in I$:

  $\Psi^{-1}(r_v) = \pm \exp\left(v \frac{\pi}{3}\right) = \pm \left\{\cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3} v\right\} \subset S^3$

I^* の4元数表示



$$f = \frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\,i + \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\,j$$

$V = \{$頂点$\} \subset S^2$

$E = \{$辺の中点$\} \subset S^2$

$F = \{$面の中心$\} \subset S^2$

$$I^* = \left\{ \cos\frac{n\pi}{3} + \sin\frac{n\pi}{3} v \;\middle|\; \begin{array}{l} v \in V \\ n \in \mathbb{Z} \end{array} \right\}$$

$$\cup \; \{ e \mid e \in E \}$$

$$\cup \; \left\{ \cos\frac{n\pi}{5} + \sin\frac{n\pi}{5} f \;\middle|\; \begin{array}{l} f \in F \\ n \in \mathbb{Z} \end{array} \right\}$$

$I^* \subset S^3$

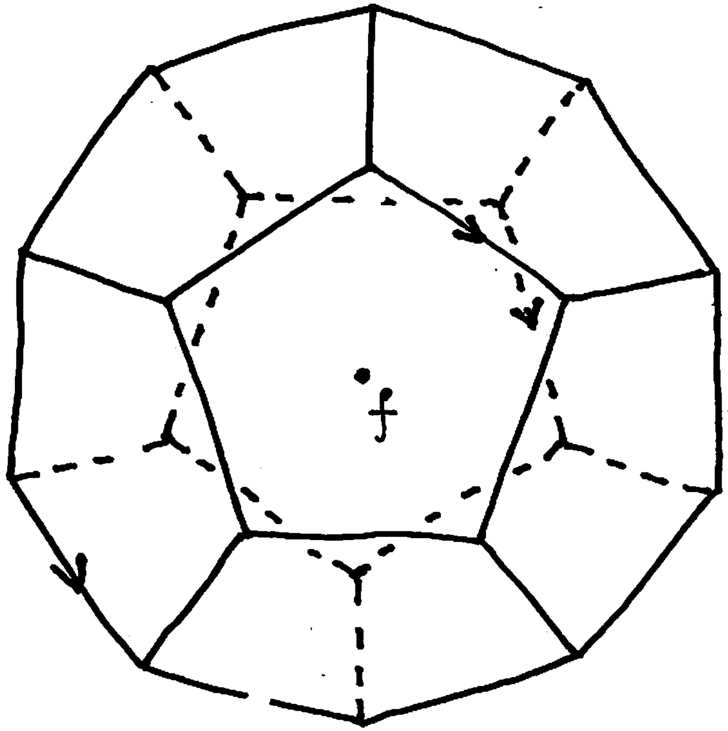
$$d_{S^3}\left(1, \cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3} v\right) = \frac{\pi}{3}$$

$$d_{S^3}(1, e) = \frac{\pi}{2}$$

$$d_{S^3}\left(1, \cos\frac{\pi}{5} + \sin\frac{\pi}{5} f\right) = \frac{\pi}{5}$$

<u>Cor</u> $PH = S^3/\phi(1\times I^*)$ は 正十二面体の向い合う面を

$\pi/5$ 回転ではり合わせて得られる.



(∵) $I^* \ni e^{\frac{\pi}{5}f} = \cos\frac{\pi}{5} + \sin\frac{\pi}{5}f$

に対して

$\phi(e^{\frac{\pi}{5}f}, 1)$ は

right screw motion of angle $\frac{\pi}{5}$

with axis $\langle 1, f\rangle$ and $\langle 1, g_0\rangle^{\perp}$

Observation

- 作用 $I^* \curvearrowright S^3$ による 1 の軌道 $= I^*$
- 軌道 I^* の内 1 に最も近い点

$$= \left\{ \exp\left(\frac{\pi}{5} f\right) \;\middle|\; f \text{ は face の中心} \right\}$$

($\because$)

$$d_{S^3}\left(1,\ \exp\frac{\pi}{5} f\right) = \frac{\pi}{5} \quad \leftarrow \text{最小値}$$

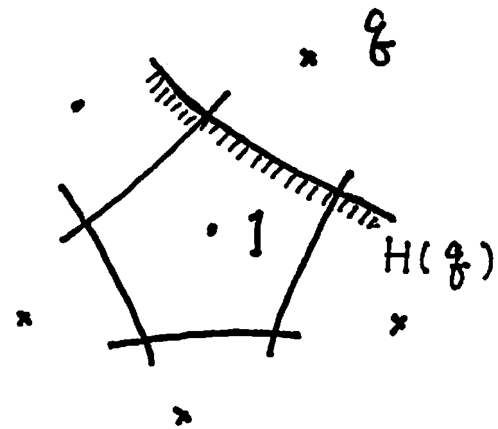
$$d_{S^3}\left(1,\ \exp\frac{\pi}{2} e\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$d_{S^3}\left(1,\ \exp\frac{\pi}{3} v\right) = \frac{\pi}{3}$$

$D :=$ 1を中心とする $I^* \curvearrowright S^3$ の
Dirichlet 基本領域

$:= \{ x \in S^3 \mid d_{S^3}(1, x) \leqq d(q, x) \quad {}^\forall q \in I^* \}$

$= \bigcap_{q \in I^*} H(q)$



但し $H(q)$: 測地線分 $[1, q]$ の
垂直二等分面が定める
半空間で 1を含むもの

Observation により、${}^\forall$face の中心 $f \in S^2$ に対して
$H(\exp(f \frac{\pi}{5}))$ は D の面をサポートする.

<u>Prop</u> $D = \bigcap \{ H(\exp f \frac{\pi}{5}) \mid f$ は dodecahedron の face の中心$\}$

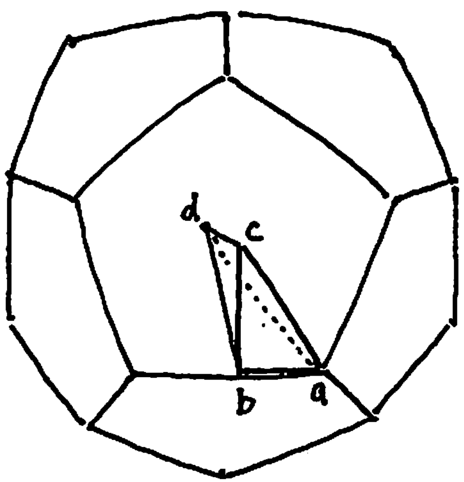
(120 cell の構成)

120 cell が存在したとすると、その自己同型群

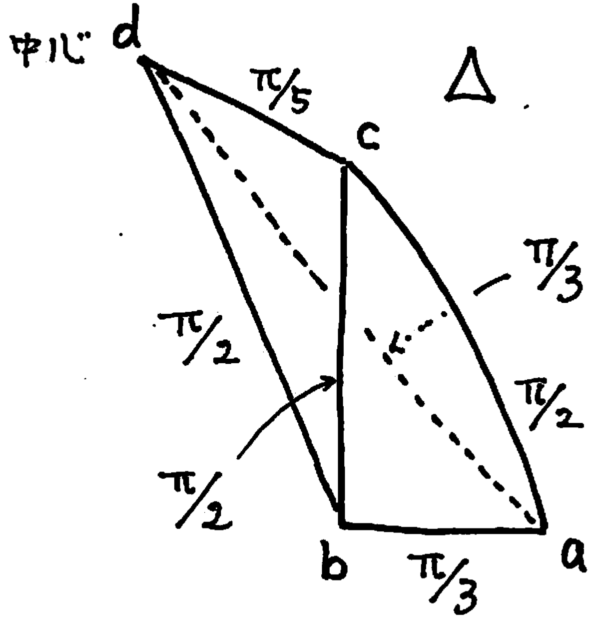
$\mathrm{Aut}(120\,\mathrm{cell}) \subset \mathrm{Isom}(S^3)$

の基本領域は正12面体上の (2.3.5) triangle の

(正12面体の) 中心からの cone になる.



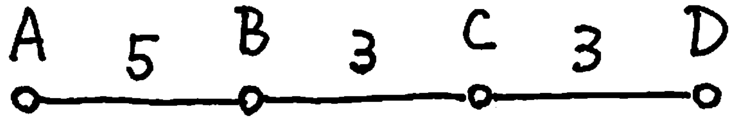
120 cell の 1つの cell



Cone Δ の頂点 a, b, c, d

その対面 A, B, C, D とすると

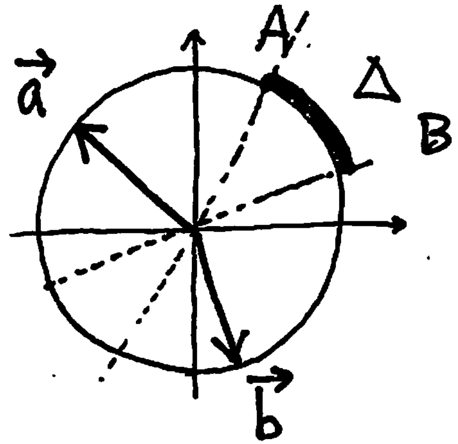
その間の二面角は次で与えられる。



ie $\angle AB = \pi/5$, $\angle BC = \pi/3$, $\angle CD = \pi/3$

残りは $\pi/2$

- $\vec{a} \in \mathbb{R}^4$: 面 $A \subset S^3$ が定める $\mathbb{R}^4$ 内の 3-dim subspace の単位法線ベクトル.
  但し Δ に対して外向きの方向をもつ
$\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ を同様に定める.



- その間の内積 :

$$\begin{pmatrix} 1 & -\cos\frac{\pi}{5} & 0 & 0 \\ -\cos\frac{\pi}{5} & 1 & -\cos\frac{\pi}{3} & 0 \\ 0 & -\cos\frac{\pi}{3} & 1 & -\cos\frac{\pi}{3} \\ 0 & 0 & -\cos\frac{\pi}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

: Positive definite !

(仮想の)内積行列が正定値であるので、

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ は標準内積空間 $\mathbb{R}^4$ のベクトルとして

実現できる。

これより指定された二面角を持つ $\triangle \subset S^3$ が

構成できる。

面 A, B, C, D に関する reflection を A, B, C, D とする

$\Gamma := \langle A, B, C, D \rangle < \mathrm{Isom}\, S^3$ とする

ポアンカレの基本多面体定理により

- Δ の Γ による像は S^3 のタイルばりを作る。
- $$\Gamma = \left\langle A, B, C, D \;\middle|\; \begin{array}{l} A^2 = B^2 = C^2 = D^2 = 1 \\ (AB)^5 = (BC)^3 = (CD)^3 = 1 \\ (AC)^2 = (AD)^2 = (BD)^2 = 1 \end{array} \right\rangle$$

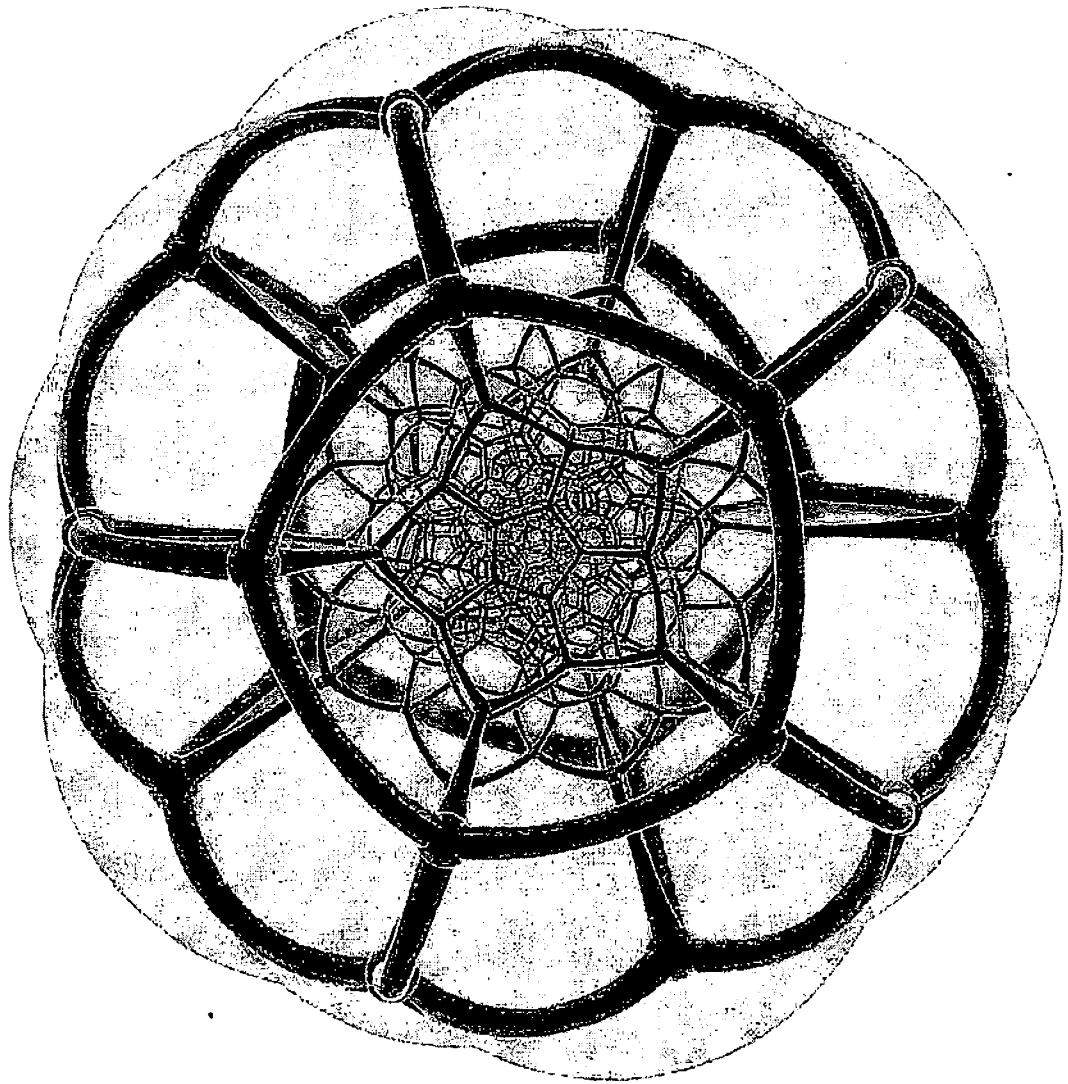
  $= \text{Coxeter group} \quad \circ \overset{5}{\text{———}} \circ \overset{3}{\text{———}} \circ \overset{3}{\text{———}} \circ$

$\Gamma_0 := \langle A, B, C \rangle = \mathrm{Aut}(\text{Dodecahedron})$

$\quad = \text{Stabilizer of a cell}$

$\Gamma_0 \Delta = I^* \curvearrowright S^3$ の基本領域

120 cell



Prop 作用 $I^* \curvearrowright S^3$ に関する 1 を中心とする Dirichlet 基本領域は S^3 内の正12面体で その I^* による 120個の像は S^3 の胞体分割を与える。

この正12面体の各辺における二面角は $\frac{2\pi}{3}$ である。