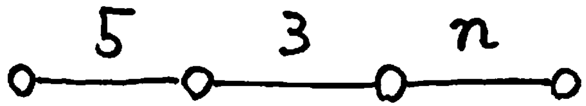
Prop 正12面体による3次元空間のタイルばり

$\Leftrightarrow$  二面角 $= 2\pi/n$

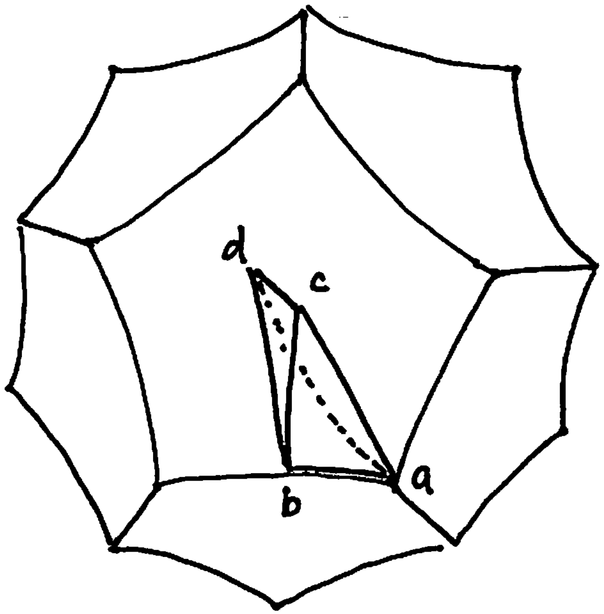
$n = (2)\ 3 \quad : \mathbb{S}^3$

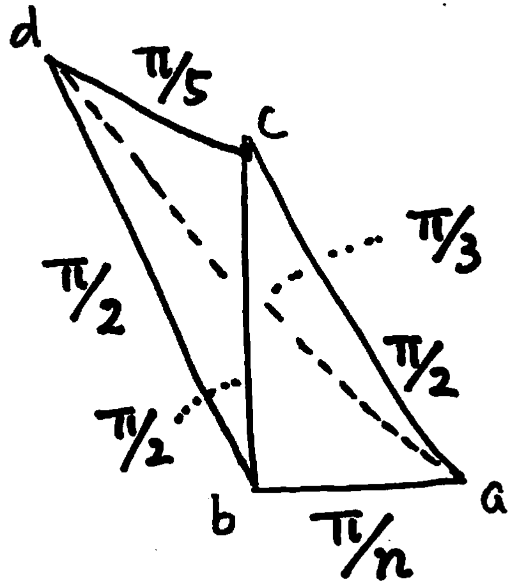
$n = 4, 5, 6 : \mathbb{H}^3$

但し $n = 6$ の時は 理想12面体によるタイルばり

(ie 頂点は $\partial \mathbb{H}^3$ 上にある)

(ii) タイル張りの自同型群の基本領域





二面角は次で与えられる

$$\overset{A}{\circ}\overset{5}{\text{———}}\overset{B}{\circ}\overset{3}{\text{———}}\overset{C}{\circ}\overset{n}{\text{———}}\overset{D}{\circ}$$

（正12面体の面同志の二面角 $= 2\pi/n$）

面 A, B, C, D の法線ベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ の間の内積

$$\begin{pmatrix} 1 & -\cos\frac{\pi}{5} & 0 & 0 \\ -\cos\frac{\pi}{5} & 1 & -\cos\frac{\pi}{3} & 0 \\ 0 & -\cos\frac{\pi}{3} & 1 & -\cos\frac{\pi}{n} \\ 0 & 0 & -\cos\frac{\pi}{n} & 1 \end{pmatrix}$$

符号数

$(4, 0)$ if $n = 2, 3$

$(3, 1)$ if $n \geqq 4$

$n = 2, 3 \Rightarrow \mathbb{R}^4$ 内のベクトルとして実現

$\Rightarrow \mathbb{S}^3$ のタイルばり

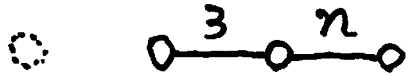
$n \geqq 4 \Rightarrow$ Minkowski space $\mathbb{E}^{3,1}$ 内のベクトルとして実現

$\Rightarrow \mathbb{H}^3$ のタイルばり

しかし各ピースが正12面体とは限らない。

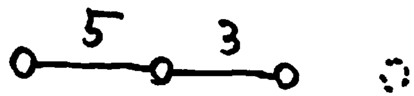
各ピースが真の正12面体

$\Leftrightarrow$ 各頂点のlinkがspherical triangle

a のlink $\Leftrightarrow$  $\Leftrightarrow (2,3,n)$ $n=2,3,4,5$

b のlink $\Leftrightarrow$  $\Leftrightarrow (2,2,n)$ spherical

c のlink $\Leftrightarrow$  $\Leftrightarrow (5,2,2)$ spherical

d のlink $\Leftrightarrow$  $\Leftrightarrow (5,3,2)$ spherical

よって $n=2,3,4,5$ の時 真の正12面体

$n=6 \Rightarrow$ a のlinkは $(2,3,6)$ Euclidean

よって a を理想頂点とする理想正12面体

$n \geqq 7 \Rightarrow$ a のlinkは hyperbolic

よってタイルばりの各ピースは無限体積

$\square$

(幾何的)プラトン多面体をはりあわせて得られる多様体

Seifert-Weber, Best, Mednykh,

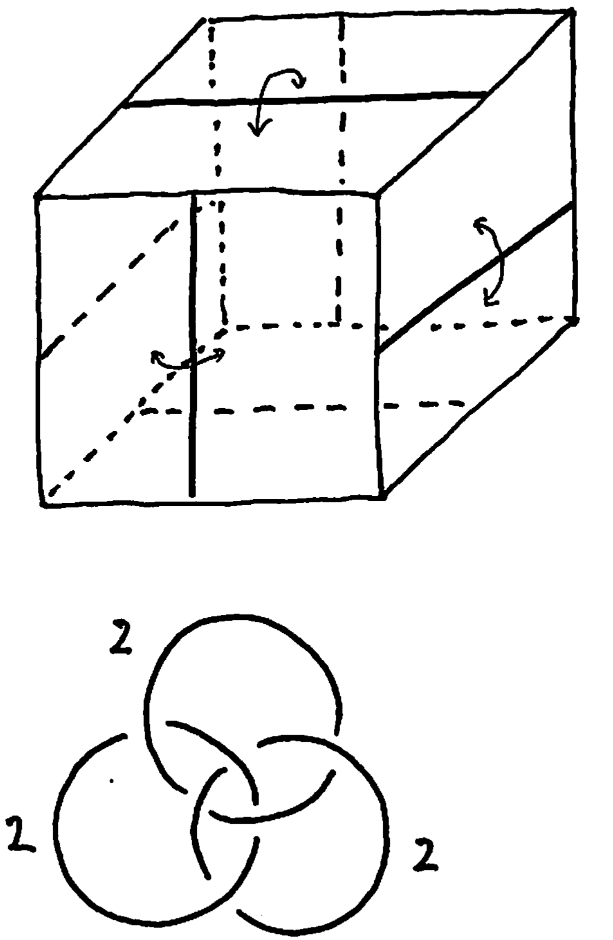
Helling-Kim-Mennicke, Mednykh-Vesnin,

Everitt, Aitchison-Rubinstein, Cavicchioli-Spaggiari-Telloni, …

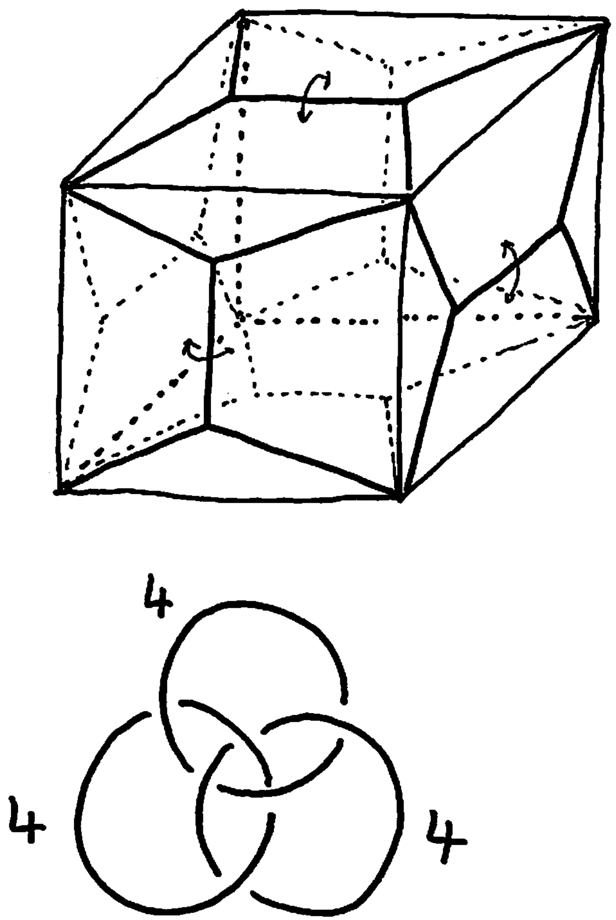
二面角 $2\pi/3$ の球的正12面体

$\rightsquigarrow$ · Poincare homology sphere

· 3-mfd with $H_1 \cong \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$



Euclidean orbifold

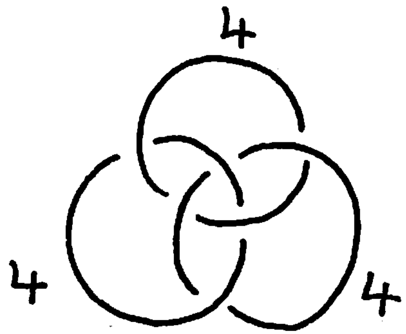


Hyperbolic orbifold

二面角 $\frac{2\pi}{4}$ の双曲的正12面体

$\rightsquigarrow$ Borromean orbifold

$B(4,4,4)$



[Hilden-Lozano-Montesinos]

Borromean orbifold is an **universal orbifold**.

i.e $\Gamma := \pi_1^{orb}(B) = \dfrac{\pi_1(S^3 - \text{Borromean})}{\langle\langle m_1^4, m_2^4, m_3^4 \rangle\rangle} \hookrightarrow \mathrm{Isom}^+ \mathbb{H}^3$

Then $\forall$ closed orientable 3-mfd M, $\exists\, \Gamma_M < \Gamma$ finite index

st $M \cong \mathbb{H}^3 / \Gamma_M$ (homeo)

ie $\forall M$ has a tessellation by regular dodecahedron

of dihedral angle $2\pi/4 = \pi/2$

• 二面角 $\frac{2\pi}{5}$ の双曲的正12面体

· Seifert-Weber manifold ：対面を $\frac{3\pi}{5}$ 回転ではり合わせる

[Mednykh] $\mathrm{Isom}(\text{Seifert-Weber}) \cong A_5$

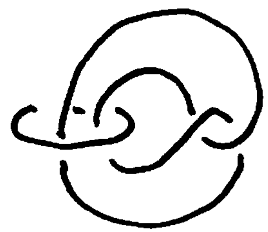
· 他に 6個，計 7個の hyperbolic manifold がある.

(訂正)

$$\mathrm{Isom}(\text{Seifert-Weber}) = \mathrm{Isom}^+(\text{Seifert-Weber}) \cong S_5$$

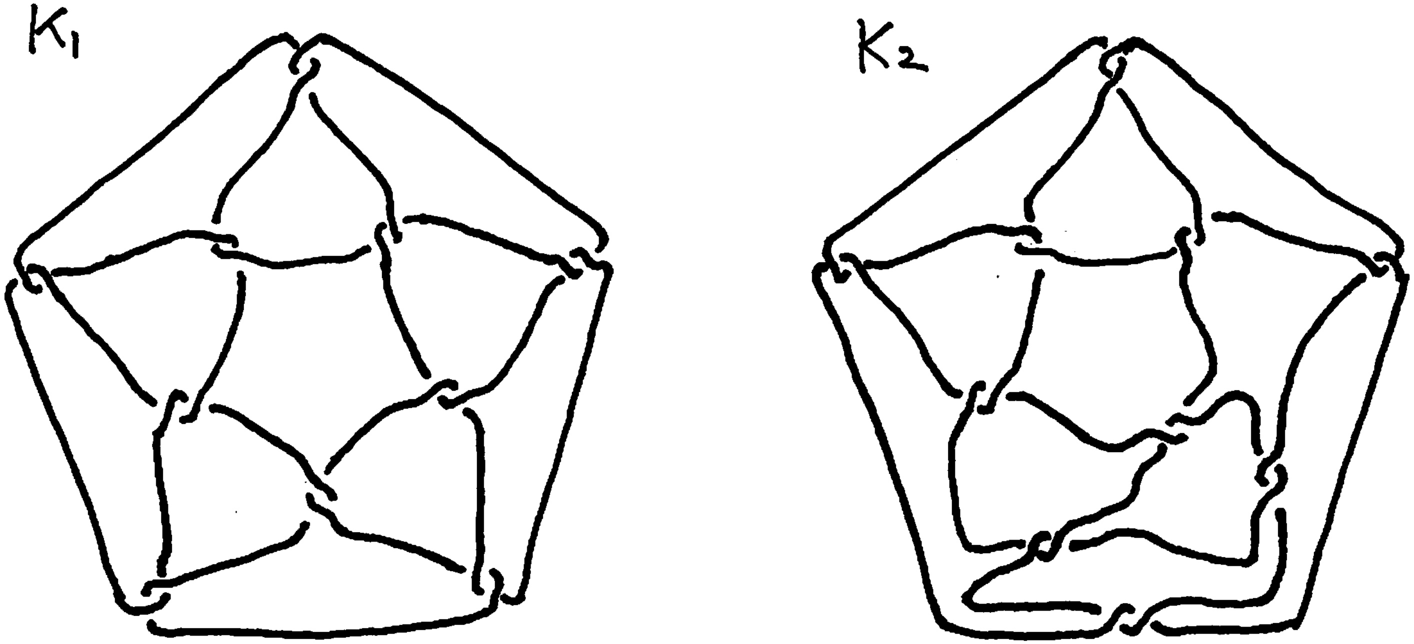
(Home Work)

· Describe $(\text{Seifert-Weber})/S_5$.

· Show that Seifert-Weber is 5-fold branched cyclic cover of 

• 二面角 $\frac{2\pi}{6}$ の双曲的理想正12面体

[Aitchison - Rubinstein] two dodecahedral knots



$S^3 - K_i$ = Union of two regular ideal dodecahedra