52th Encounter with Mathematics

大次元空間上での停留位相法の剰余項評価とその経路積分への応用

藤原大輔 (学習院大学)

2010 年 1 月 8 日[1]

1　初めに

Feynman 経路積分： 私は、場の理論ではなく、非相対論的量子力学の定式化の方法の一つである 経路積分を紹介する。 1948 年に Richard Feynman が考案。
Schrödinger 方程式による方法とは別の方法。

目標：

Schrödinger 方程式 $\longrightarrow$ $\boxed{\text{Von Neumann による量子力学の数学的理論}}$

Feynman 経路積分 $\longrightarrow$ $\boxed{\text{???}}$

$\boxed{\text{???}}$ 部分 を作りたい。

2　古典力学（Newton 力学) の復習と用語

Euclid 空間 $\mathbf{R}^d$ の中の質量 m の粒子の運動を記述する。 簡単化 常に $d = 1$ とする。
古典力学の同値な幾つかの記述法：

0) 粒子は時刻 t での位置 $q(t) \in \mathbf{R}^d$ をもつ。($d = 1$ と約束した。)
Potential $V(x)$ による力の場の中で粒子がする運動の決定：
<u>Newton の運動方程式</u>

$$m\frac{d^2}{dt^2}q(t) = -\nabla V(q)$$

である。

1） 相空間中の Hamilton flow としての記述：
粒子の状態は 位置 q と運動量 p との組 (q, p) で表す。

$$(q, p) \in T^*(\mathbf{R}) = \mathbf{R}^2$$

$T^*(\mathbf{R}) = \mathbf{R}^2$($\mathbf{R}$ の余接空間) は相空間と呼ぶ。

[1] 1 月 8 日の講演原稿に 1 月 11 日に少し加筆

粒子の運動は 時刻 t 毎に相空間中の点 $(q(t), p(t))$ が変化することである。

運動の決定: Hamilton の正準方程式(Hamilton flow)

$$\frac{d}{dt}q(t) = \frac{\partial}{\partial p}H(q,p), \quad \frac{d}{dt}p(t) = -\frac{\partial}{\partial q}H(q,p).$$

ここで Hamilton 関数 (Hamiltonian) $H(q,p) : T^*(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ は

$$H(q,p) = \frac{|p|^2}{2m} + V(q)。$$

なお、$s < t$ のとき、対応 $(q(s), p(s)) \to (q(t), p(t))$ は正準変換で、その母関数 $S(t,s,x)$ は Hamilton-Jacobi の微分方程式

$$\partial_t S(t,s,x) + H(t, x, \partial_x S(t,s,x)) = 0$$

の解。

2) 変分法による記述：

$\mathbf{R}^d$ の接空間 $T(\mathbf{R}) = \mathbf{R}^2$ の点を $(q, \dot{q})$ とする。Lagrange 関数 (Lagrangian) $L : T(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ を

$$L(q, \dot{q}) = m\frac{|\dot{q}|^2}{2} - V(q)$$

とする。時刻 $t \in [a,b]$ をパラメターとする $\mathbf{R}$ 内の曲線 (あるいは経路) $\gamma(t)$ とする。$\gamma(t)$ に沿っての Lagrangian を積分した

$$S(\gamma) = \int_a^b L(\gamma(\tau), \frac{d\gamma}{d\tau}(\tau))d\tau$$

を γ の 作用 (action) という。

$S(\gamma)$ は γ に依存する。path 全体のなす空間 (経路空間)Ω 上で定義された汎関数である。

運動の決定 ：Hamilton の変分原理. 時刻 a で空間の点 y を出て時刻 b に x に達する沢山の曲線のうち 古典力学で実際に実現される粒子の運動の曲線は 変分法:

$$\delta S(\gamma) = 0$$

の解に限る。これを 古典軌道 (classical path) と呼ぶ。γ_{cl} と書く。

経路 $q(t)$ の変分を $\delta q(t)$ とすると、Action の第一変分は

$$\delta S(\gamma) = \int_a^b \left(-m\frac{d^2}{dt^2}q(t) - \frac{\partial}{\partial q}V(q(t)) \right) \delta q(t)dt + m\left(\dot{q}(b)\delta q(b) - \dot{q}(a)\delta q(a)\right).$$

古典経路 γ_{cl} が満たす Euler の微分方程式 は、

$$m\frac{d^2}{dt^2}\gamma_{cl}(t) + \frac{\partial}{\partial q}V(\gamma_{cl}(t)) = 0$$

で、Newton の運動方程式そのもの。

3 量子力学のSchrödinger方程式による定式化

量子力学では、Potential が $V(x)$ である力の場での　質量 m の粒子の時刻　t における状態は　波動関数 $\phi(t,x) \in \mathbf{C}$ で表される。　t は時刻、x は euclid 空間の点の座標をあらわす変数 $x \in \mathbf{R}^d$。(以後 $d=1$ とする。)

粒子が時刻 t において空間の一部分 Q で観測される確率は

$$\int_Q |\phi(t,x)|^2 dx$$

に比例する。　比例乗数を調整し全空間で見出される確率が 1 に調整しておく。

$$\int_{\mathbf{R}} |\phi(t,x)|^2 dx = 1.$$

時刻 t で波動関数 $\phi(t,x)$ は Hilbert 空間 $L^2(\mathbf{R})$ の要素を定める。 これを $\phi(t) \in L^2(\mathbf{R})$ と書く。$\|\phi(t)\| = 1$ である。

量子力学の基本構造：
重ね合わせ構造が線形演算である。運動とは、時刻　t の変化に伴う関数 $\phi(t,x)$ の変化のことである。
変換

$$U(t,s) : \phi(s) \to \phi(t)$$

を時間発展の作用素という。この $U(t,x)$ は線形の作用素である。

Schrödinger による量子力学の運動の記述：
Schrödinger 方程式

$$\frac{-\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}\phi(t,x) = \left(\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\phi(t,x) + V(x)\right)\phi(t,x)$$

ここで、$i = \sqrt{-1}$、$\hbar = h/2\pi$, ただし h は プランク定数。時刻 s に対し初期条件 $\phi(s,x)$ を与えると解として時刻　t の変化に伴う関数 $\phi(t,x)$ を得る。 つまり、

ここで本質的な微分作用素

$$H = \frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$$

は Hamiltonian という $L^2(\mathbf{R})$ での自己共役作用素である (1-parameter の unitary group の生成作用素)。$U(t,s) = \exp -\frac{i(t-s)}{\hbar}H$。

Hamiltonian の作り方： 古典力学での Hamilton 関数

$$H(x,p) = \frac{p^2}{2m} + V(x)$$

から、置き換え：運動量 $p \to \frac{\hbar\partial}{i\partial x}$ をする。

古典力学の運動から、量子力学の運動を導く過程であることから 量子化 という。

積分変換で

$$U(t,s)\phi(s) = \phi(t,x) = \int k(t,x;s,y)\phi(s,y)dy$$

と書くとき、積分核　$k(t,x;s,y)$ をプロパゲーターと呼ぶ。

特に考えを簡単にするため、$s=0$ の場合を以下で取り上げる。

4 Feynmanによる記述法ー Feynmanの経路積分

Feynmanによる記述法：
経路 γ を $\gamma(0)=y, \gamma(t)=x$ とする。　プロパゲータは

$$k(t,x;0,y)=\frac{1}{N}\sum_{\gamma\in\Omega}\exp\frac{i}{\hbar}S(\gamma)$$

ここで $S(\gamma)$ は Newton 力学での経路 γ の作用。和 $\sum_{\gamma\in\Omega}$ は　経路 γ が全ての経路に渉るように γ に関して加えること。 $1/N$ は正規化因子。

Ω は連続体であるから、右辺は積分記号で表す。

$$k(t,x;0,y)=\int_\Omega \exp(\frac{i}{\hbar}S(\gamma))\mathcal{D}[\gamma]$$

経路空間での積分だから　Feynman 経路積分 という。

Hamiltonian でなく、Lagrangian を使っての量子力学の記述ができる。 経路積分による量子化である。

さらに、被積分関数として、γ の汎関数 $F(\gamma)$ にたいし

$$\int_\Omega F(\gamma)\exp(\frac{i}{\hbar}S(\gamma))\mathcal{D}[\gamma]$$

なども扱う（ $\rightarrow$ 熊ノ郷さんの話）。

5 Feynman 経路積分の困難

ここで はじめで述べた図式を思い出す。

Schrödinger 方程式$\longrightarrow$ $\boxed{\text{Von Neumann による量子力学の数学的理論}}$

Feynman 経路積分 $\longrightarrow$ $\boxed{\text{???}}$

の $\boxed{\text{???}}$ 部分 を作りたい。

Feynman 経路積分をきちんとした数学理論にするには、いくつか困難がある。

- 経路全体の集合は無限次元の空間。　無限次元空間での積分とは何か？
- 被積分関数 $\exp(\frac{i}{\hbar}S(\gamma))$ は　絶対値が 1 であるから、積分は絶対収束はしない。収束するのか？
- $\hbar$ は非常に小さいから、被積分関数は γ が変化すると値が急速に振動する。(振動の早さは、$|\delta S(\gamma)|/\hbar$ に比例すると考えられる。） 収束するならば、大規模な打ち消しあいの結果に違いない。それをどう表現するか？

6 準古典近似

Feynman 経路積分の長所の一つ。 準 (半) 古典近似が (厳密な数学的議論はさておいて、直感的には) 理解し易いこと。

Feynman 経路積分の被積分関数は γ が変化すると値が急速に振動する関数である。そのために大規模な打ち消しあいが起こっているだろう。　積分に大きく寄与するのは、$S(\gamma)$ が停留するところと考えられる。つまり

$$\delta S(\gamma_0) = 0$$

を満たす γ_0 がもっとも寄与が大きいと考えられる。 この γ_0 は　粒子の古典力学による運動の軌跡 (古典軌道という) と同じである (Hamilton の原理)。 特に $\hbar \to 0$ のときこの効果が表に出てくる。
" 量子力学において、プランク定数が 0 になる極限は　Newton 力学である"
という原理を直観的に簡明に表している。

7　無限次元空間での積分 (有限次元での積分の極限)

Feynman は 有限次元での積分を考え、次元数を無限に大きくする極限として　無限次元空間での積分を定義した。 彼の考え方を 時間分割による近似法 と呼ぶ。

簡単のため potential $V = 0$ とし、$m = 1$ とする。時間の区間 $[0, T]$ で考える。時刻 0 において空間の点 y から出発して、時刻 T に x に至る経路 γ は、折れ線で近似できる。

時間の区間 $[0, T]$ を細かく分割する。

$$\Delta : 0 = T_0 < T_1 < \cdots < T_{L+1} = T \tag{1}$$

この分割の細かさ $|\Delta| = \max_j \{T_j - T_{j-1}\}$ とする。　時刻の分点において γ が通過する空間の点を、

$$y = x_0 = \gamma(0), x_1 = \gamma(T_1), \ldots, x_{L+1} = x = \gamma(T_{L+1})$$

とする。時間-空間の 2 次元空間で (T_j, x_j) 達を直線分で結び 折れ線　γ_Δ を使って曲線 γ を近似する。 二つの曲線の Action $S(\gamma)$ と $S(\gamma_\Delta)$ は近い。$S(\gamma_\Delta) = S_\Delta(x_{L+1}, x_L, \ldots, x_1, x_0)$ とも書く。

$$S(\gamma_\Delta) = S_\Delta(x_{L+1}, x_L, \ldots, x_1, x_0) = \int_0^{T_{L+1}} L(\gamma_\Delta(t), \dot{\gamma_\Delta}(t))\, dt = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{L+1} \frac{(x_j - x_{j-1})^2}{(T_j - T_{j-1})}$$

である。

そこで、Feynman は

$$\int_\Omega \exp(\frac{i}{\hbar}S(\gamma))\mathcal{D}[\gamma] = \lim_{|\Delta|\to 0} \prod_{j=1}^{L+1} (\frac{1}{2\pi i\hbar(T_j - T_{j-1})})^{1/2} \int_{\mathbf{R}^L} exp(i\hbar^{-1}\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{L+1}\frac{(x_j - x_{j-1})^2}{(T_j - T_{j-1})}) \prod_{j=1}^{L} dx_j \tag{2}$$

と定義した。　ここで $\prod_{j=1}^{L+1} (\frac{1}{2\pi i\hbar(T_j - T_{j-1})})^{1/2}$ は正規化因子。被積分関数 $F(\gamma)$ がある場合は、

$$\int_\Omega F(\gamma) \exp(\frac{i}{\hbar}S(\gamma))\mathcal{D}[\gamma] = \lim_{|\Delta|\to 0} \prod_{j=1}^{L+1} (\frac{1}{2\pi i\hbar(T_j - T_{j-1})})^{1/2} \int_{\mathbf{R}^L} F(\gamma_\Delta) exp(i\hbar^{-1}\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{L+1}\frac{(x_j - x_{j-1})^2}{(T_j - T_{j-1})}) \prod_{j=1}^{L} dx_j \tag{3}$$

と定義した。

これが時間分割近似法。　時空間の隣り合う 2 点 (T_j, x_j) と (T_{j+1}, x_{j+1}) を直線では無く、古典軌道で結び、経路を近似する, つまり区分的古典軌道で任意の経路を近似する場合もある。 実は 1948 年の Feynman の経路積分の最初の論文は区分的古典軌道を使っている。

8　無限次元空間の積分–Wiener 積分

虚数 $\frac{i}{\hbar}$ のところを -1 で置き換えた

$$E(F) = \lim_{|\Delta|\to 0} \prod_{j=1}^{L+1} (\frac{1}{2\pi(T_J - T_{j-1})})^{1/2} \int_{\mathbf{R}^L} F(\gamma_\Delta) exp(-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{L+1} \frac{(x_j - x_{j-1})^2}{(T_j - T_{j-1})}) \prod_{j=1}^{L} dx_j \tag{4}$$

を考えると、有名な Wiener 測度 W による F の積分の導入になる。 つまり、

$$E(F) = \int_\Omega F(\gamma) dW(\gamma)$$

Wiener 測度 W は 経路空間 $\mathbf{R}^{[0,T]}$ のボレル集合族 上の可算加法的確率測度である。 また $[0,T]$ 上の連続関数の全体 $\mathcal{C}$ は $\mathbf{R}^{[0,T]}$ の可測な部分集合で、Wiener 測度 W は $\mathcal{C}$ の外では 0 である。

Wiener 測度 W は 1923 年ころ Wiener により導入された。Wiener は MIT の教授だったし、Feynman は 学部生時代は　MIT の学生であった。

9　Feynman "測度"　は測度では無い。

Feynman は彼の経路積分にあっても経路の空間上の測度が導入出来ると期待したようである。 1950-60 年代 確率論研究者を中心に多くの 数学者の注目を惹いた。ところが、不幸にも１９６０年代

Feynman 経路積分で導入される cylinder sets 上の集合関数は、可算加法性をもつ複素測度に拡張出来ない。

ことが分った。　数学としての困難さである。

別の方法で経路積分を扱わなければならない。

10　別の方法で積分を考える。

いくつかの方法が試みられている。例えば

1. ヒルベルト空間の作用素半群の摂動に関する Trotter Kato の公式が Feynman 経路積分の数学的正当化であるとして解釈する。　これが数理物理学者は好きであるように見える。　しかし経路が果たす役割が表に見えなくなってしまっていて個人的には私は不満である。

2. $\hbar$ の代りに複素数 $\zeta = \hbar - i\delta, \delta \geq 0$ を使う。$\zeta = -i\delta$　の時は Wiener 測度の積分で、これを $\zeta = \hbar$ まで解析接続する。　かの I.M.Gelfand 達　もこの方向で考え
   " $\delta > 0$ である限り実部が何であっても数学的な 測度であろう"
   と予想した。　しかし 流石の Gelfand でも 失敗した。　ζ の実部が 0 でないと数学的測度では無いことが証明されている。

3. $\zeta = \hbar - i\delta, \delta \geq 0$ を使うかあるいは質量または時間を複素数とし、Wiener 測度の積分から解析接続する。 測度であることは諦める。E. Nelson 等。物理学者が好むように見える。

4. Hilbert 空間の新しい広義積分とみなす方法。 これにも 流派があって、伊藤清の方法や Albeverio 一派など。今のところ適用範囲が狭いように思う。

5. 時間分割近似法。これは 余り数学者に人気が無い。

要するに現状は決定版に欠ける。 群雄割拠状態。

時間分割近似法以外は　経路の役割が表に出てこない。

どの方法でやっても $V(x)$ が有界測度のフーリエ変換である場合は旨くできる。しかしそれ以外となるとあまり成功しない。

ただ Nelson の仕事は potential にたいする 制限が大変緩い。しかし、結論が大変弱い。解析接続の方法は、数学的場の理論に使われるようである。

種々の方法について知りたい場合は、例えば

Albeverio, S.A. & Haegh-Krohn, R.J. & Mazzucchi, S.

"Mathematical Theory of Feynman Path Ingtegrals." Ed 2 enlarged edition. LNM springer (2009) を参照されたい。 文献が網羅的に集められていて、しかもかなり 多くの方法についての簡単な紹介がある。

11　わたしの立場

この様に 決定版に欠ける状態であるので、もっとも確実な Feynman のもともとの考えに従って時間分割法をやってみる。

何か知識 が不足 しているのであろうけれども、足りない知識はなにか？　見付かるかもしれない!

Feynman のもともとの考えをそのまま追求すると、式 (3) の極限値をとらねばならない。　この厄介さを Cecile Morette DeWitt は　" **収束の plague**　" だったか " **収束の curse**" だったか、忘れてしまったけれども、何かこの様な表現で表した。

Feynman 経路積分 (3) が収束すると考えられる根拠は、

$$\exp\left(i\hbar^{-1}\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{L+1}\frac{(x_j-x_{j-1})^2}{(T_j-T_{j-1})}\right)$$

が急速に振動し 大規模な打ち消し合いをするということのはずである。 しかし上に列挙した方法では、これが表に 現われていない。

ここから 手をつける。 $\to$ 大次元停留位相法。

12　停留位相法紹介

振動型の被積分関数を積分して、大規模な打ち消し合い を記述する方法の一つである停留位相法を紹介する。

Q を $d\times d$ 非退化実対称行列 で、$u(x)\in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$ とする。

$$I=(2\pi)^{-d/2}\int_{\mathbf{R}^d}e^{i\hbar^{-1}(\phi_0+\frac{1}{2}<Qx,x>)}u(x)\,dx$$

を考える。 ここで ϕ_0 は実定数で、 $<Qx,x>$ は Q を係数行列とする 2 次形式である。

停留位相法: 次の式が成り立つ。

$$I=\hbar^{d/2}|\det Q|^{-1/2}e^{i\frac{\pi}{4}sgnQ}e^{i\hbar^{-1}\phi_0}\,(u(0)+\hbar R(\hbar))$$

$sgnQ$ は Q の符号定数。剰余項 $R(\hbar)$ は

$$|R(\hbar)|\le C\sum_{|\alpha|\le d+1}\int_{\mathbf{R}^d}|\partial_x^\alpha<Q^{-1}\partial_x,\partial_x>u(x)|dx$$

を満たす。 ここで $< Q^{-1}\partial_x, \partial_x >$ は Q^{-1} を係数行列とする 2 階微分作用素。C は次元 d に依る定数。

特徴： 打ち消し合いの結果 主要項は 位相関数 $\phi_0+ < Qx, x >$ の停留点 $x = 0$ での寄与によること。

積分

$$I = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbf{R}^d} e^{i\hbar^{-1}\phi(x)} u(x)\, dx$$

で $\phi(x) \in C^\infty(\mathbf{R}^d)$ で、 変数変換で上の積分に変換出来る場合も 当然の修正すれば停留位相法は成り立つ。 $\phi(x)$ を積分の 位相関数、$u(x)$ を 振幅関数 と言う。

困ったこと: このままの形では、次元 $d \to \infty$ にするとどうなるか分からない。

13 大次元停留位相法

私が勝手に 大次元空間の停留位相法 と呼んでいる ものを紹介する。

ここから ポテンシャルが 0 と限らないと仮定する。$m = 1$ とする。 ラグランジュ関数は

$$L(x, \dot{x}) = \frac{|\dot{x}|^2}{2} - V(x)$$

である。

Potential についての仮定： $V(x)$ は C^∞ 級で、任意の 自然数 $k \geq 2$ に対して、

$$\sup_x |\frac{d^k}{dx^k} V(x)| = C_k < \infty$$

とする。

このとき $|x| \to \infty$ で

$$V(x) = 0(x^2).$$

である。

この仮定の下では、 正数 δ が存在し、$|T| \leq \delta$ ならば 第 2 変分 $\delta^2 S(\gamma)$ が、非退化正値作用素になるから、時空の任意の始点 $(0, y)$ 終点 (T, x) を固定するとこれらを結ぶ古典軌道 γ_{cl}（変分法の解）はただ一つ存在する。

$$S(T; x, y) = S(\gamma_{cl}) = \int_0^T L(\gamma_{cl}(t), \dot{\gamma_{cl}}(t))dt$$

と書く。

時間分割法を詳しく定式化しよう。このとき時間の区間 $[0, T]$ を分割し

$$\Delta : 0 = T_0 < T_1 < \cdots < T_{L+1} = T$$

とする。 空間の点の列 $x_1, x_2, \ldots, x_L$ をとる。 $x_0 = y, x_{L+1} = x$ とする。 時空の中の $L + 2$ 個の点列 $(0, y) = (T_0, x_0)$,(T_1, x_1), ..., $(T_{L+1}, x_{L+1}) = (T, x)$ が出来るが、これらをこの順に古典軌道で結んで区分的古典軌道 γ_Δ ができる。その Action

$$S(\gamma_\Delta) = S_\Delta(x_{L+1}, x_L, \ldots, x_1, x_0) = \sum_{j=1}^{L+1} S(T_j - T_{j-1}, x_j, x_{j-1})$$

また、次の記号を使う。

$$F_\Delta(x_{L+1}, x_L, \dots, x_1, x_0) = F(\gamma_\Delta).$$

すると 考えなければならないファインマン経路積分の時間分割による近似は下の式となる。

$$\begin{aligned} &I(F_\Delta)(\Delta; T, x, y) \qquad (5)\\ &= \prod_{j=1}^{L+1}\left(\frac{1}{2\pi i\hbar(T_j - T_{j-1})}\right)^{1/2}\int_{\mathbf{R}^L} F_\Delta(x_{L+1}, x_L, \dots, x_1, x_0)\exp\left(\frac{i}{\hbar}S_\Delta(x_{L+1}, x_L, \dots, x_1, x_0)\right)\prod_{j=1}^{L} dx_j \end{aligned}$$

$F(\gamma)$ についての仮定:
正数 m と二つの正数列 $\{A_n\}$, $\{X_n\}$ が存在して、$[0, T]$ の任意の分割

$$\Delta : 0 = T_0 < T_1 < \cdots < T_{L+1} = T$$

に対応する $F_\Delta(x_{L+1}, x_L, \dots, x_1, x_0)$ について、任意の 整数 $K \ge 0$ に対し、$|\alpha_j| \le K \quad (j = 0, 1, 2, \dots, L+1)$ であるならば、次の評価が成り立つ：

$$\begin{aligned} &|\partial_{x_0}^{\alpha_0}\partial_{x_1}^{\alpha_1}\dots\partial_{x_L}^{\alpha_L}\partial_{x_{L+1}}^{\alpha_{L+1}} F_\Delta(x_{L+1}, x_L, \dots, x_1, x_0)| \\ &\le A_K X_K^{L+2}(1 + |x_{L+1}| + |x_L| + \cdots + |x_1| + |x_0|)^m, \end{aligned}$$

ここで A_n,X_n は 分割 Δ や分点の数 L に依らない。

さて、 時空の任意の始点 $(0, y)$ 終点 (T, x) を固定するとこれらを結ぶ古典軌道 γ_{cl} はただ一つ存在することが分かる。$S_\Delta(x_{L+1}, x_L, \dots, x_1, x_0)$ は $(x_L, \dots, x_1)$ に関しての critical point は $(x_L^*, \dots, x_1^*)$, $\quad x_j^* = \gamma_{cl}(T_j) \quad$ ただ一組であり、 Hessian 行列

$$HessS_\Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} S_\Delta\right)$$

は 正値非退化である。 その行列式を $\det HessS_\Delta$ と表わし、

$$D(\Delta; T; x, y) = \frac{T}{(T_{L+1} - T_L)\dots(T_2 - T_1)T_1}\det \quad HessS_\Delta$$

とする。

定理 $\quad T \le \delta$ と仮定する。 $F(\gamma)$ は上の仮定を満たすとき、次の表現が出来る。

$$I(F_\Delta)(\Delta; T, x, y) = \left(\frac{\nu}{2\pi i T}\right)^{d/2} e^{i\hbar^{-1}S(\gamma_{cl})} D(\Delta; T; x, y)^{-1/2}\Big(F(\gamma_{cl}) + \hbar r(\Delta; \hbar, T, x, y)\Big)$$

さらに 剰余項 $r(\Delta, \hbar, T, x_{J+1}, x_0)$ は次の評価を満たす。
$K \ge 0$ に対し、Δ に依らない ある自然数 $M(K)$ と正定数 C_K が存在して、$|\alpha|, |\beta| \le K$ であれば

$$|\partial_x^\alpha \partial_y^\beta r(\Delta, \hbar, T, x, y)| \le C_K X_{M(K)} T(1 + |x| + |y|)^m$$

特に $F \equiv 1$ のときは 次の評価が成り立つ：

$$|\partial_x^\alpha \partial_y^\beta r(\Delta, \hbar, T, x, y)| \le C_K T^2$$

定理のポイント。

1. この主張の最大のポイント $M(K), C_K$ は Δ,$\hbar$ に依らない。
2. 剰余項評価の右辺に T,T^2 があること。
3. $V(x)$ や $F(x_{L+1}, x_L, \dots, x_1, x_0)$ は解析関数でなくてもよいし、遠方で減少していなくてもよい。

注意： 今は力は potential だけで 磁場の存在を仮定しなかったが、磁場が存在しても適当な仮定を満たせば、扱える。(土田哲生、Nagoya Math. J. vol.136 (1994))

14 Feynman 経路積分への応用

ここでは $F(\gamma) \equiv 1$ の場合を扱う。そうでない場合は熊ノ郷氏が扱う。$F(\gamma) \equiv 1$ は $F(\gamma)$ についての仮定を満たす。時間の分割 Δ の Feynman 経路積分の時間分割近似は $I(1)(\Delta; T, x, y)$ であった。$\lim_{|\Delta| \to 0} I(1)(\Delta; T, x, y)$ が存在することを示す。Riemann 積分の存在証明のアナロジーを追って 分割の細分を考える。

分割 Δ' を Δ の細分として、$I(1)(\Delta'; T, x, y)$ を $I(1)(\Delta; T, x, y)$ と比較する。分割

$$\Delta : 0 = T_0 < T_1 < \cdots < T_{L+1} = T$$

に対し、この 第 1 小区間 $[0, T_1]$ を分割し、他の部分はそのままとして、細分 Δ' を作る。 すなわち

$$\Delta' : 0 = T_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_p < T_1 < T_2 < T_3 < \cdots < T_L < T_{L+1} = T$$

とする。証明したいことは Δ によらぬ正定数 C が存在し,

$$|I(1)(\Delta'; T, x, y) - I(1)(\Delta; T, x, y)| \leq C\hbar T_1^2 \tag{6}$$

であること。

何故なら、これが出来れば、同じ理由で、$[T_1, T_2]$、$[T_2, T_3]$、$\ldots$, と次々に 小区間を分割して行けば、Δ の任意の細分 Δ_1 に対して、

$$|I(1)(\Delta_1; T, x, y) - I(1)(\Delta; T, x, y)| \leq \sum_{k=1}^{L+1} C\hbar (T_k - T_{k-1})^2 \leq C|\Delta|\hbar T$$

となって、$|\Delta| \to 0$ のとき、$\{I(1)(\Delta; T, x, y)\}$ が収束することが分かる。

目標 (6) の証明の粗筋を紹介する。

$t_0 = T_0$, $t_{p+1} = T_1$ として、Action $S(\gamma_{\Delta'})$ は

$$\begin{aligned} S(\gamma_{\Delta'}) &= S_{\Delta'}(x_{L+1}, x_L, \ldots, x_1, y_p, y_{p-1}, \ldots, y_1, x_0) \\ &= \sum_{j=2}^{L+1} S(T_j - T_{j-1}; x_j, x_{j-1}) + \sum_{k=1}^{p+1} S(t_k - t_{k-1}; y_k, y_{k-1}) \end{aligned}$$

後ろの項を

$$S_{\Delta' \setminus \Delta}(x_1, y_p, \ldots, y_1, x_0) = \sum_{k=1}^{p+1} S(t_k - t_{k-1}; y_k, y_{k-1}) \tag{7}$$

とする。関数 $S_{\Delta' \setminus \Delta}(x_1, y_p, \ldots, y_1, x_0)$ の変数 $(y_p, \ldots, y_1)$ に関する停留点は、$(0, x_0)$ から (T_1, x_1) に至る古典軌道上にある。 その停留値は、$S(T_1, x_1, x_0))$ に一致する。 これを以下に使う。

$$\begin{aligned} &I(1)(\Delta'; T, x, y) \\ &= \prod_{j=2}^{L+1} \left(\frac{1}{2\pi i\hbar (T_j - T_{j-1})}\right)^{1/2} \prod_{k=1}^{p+1} \left(\frac{1}{2\pi i\hbar (t_k - t_{k-1})}\right)^{1/2} \\ &\times \int_{\mathbf{R}^{L+p}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} S_{\Delta'}(x_{L+1}, x_L, \ldots, x_1, y_p, \ldots, y_1, x_0)\right) \prod_{j=1}^{L} dx_j \prod_{k=1}^{p} dy_k \end{aligned}$$

である。 y_k 達について先に積分する。その結果 $F_{\Delta/\Delta'}(x_{L+1}, x_L, \ldots, x_1, x_0)$ を次の式で表す。

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{2\pi i\hbar T_1}\right)^{1/2} e^{i\hbar^{-1}S(T_1;x_1,x_0)} F_{\Delta/\Delta'}(x_{J+1}, x_J, \ldots, x_1, x_0) \\ &= \prod_{k=1}^{p+1}\left(\frac{1}{2i\pi\hbar(t_k - t_{k-1})}\right)^{1/2} \int_{\mathbf{R}^p} \exp\left(i\hbar^{-1} S_{\Delta'\setminus\Delta}(x_1, y_p, \ldots, y_1, x_0)\right) \prod_{k=1}^{p} dy_k.\end{aligned} \tag{8}$$

これに 大次元停留位相法を使うと、

$$F_{\Delta/\Delta'}(x_{J+1}, x_J, \ldots, x_1, x_0) = 1 + \hbar r(\hbar, T_1, x_1, x_0) \tag{9}$$

を得る。 しかも、

$$|\partial_{x_0}^{\alpha}\partial_{x_1}^{\beta} r(\hbar, T_1, x_1, x_0)| \le C|T_1|^2 \tag{10}$$

となる。

そして、

$$\begin{aligned}&I(1)(\Delta'; T, x, y) \\ &= \prod_{j=1}^{L+1}\left(\frac{1}{2\pi i\hbar(T_j - T_{j-1})}\right)^{1/2} \int_{\mathbf{R}^L} \exp\left(\frac{i}{\hbar} S_\Delta(x_{L+1}, x_L, \ldots, x_1, x_0)\right) F_{\Delta/\Delta'}(x_{J+1}, x_J, \ldots, x_1, x_0) \prod_{j=1}^{L} dx_j\end{aligned} \tag{11}$$

だから、

$$|I(1)(\Delta'; T, x, y) - I(1)(\Delta; T, x, y)| \tag{12}$$

$$= \hbar \prod_{j=1}^{L+1}\left(\frac{1}{2\pi i\hbar(T_j - T_{j-1})}\right)^{1/2} \int_{\mathbf{R}^L} \exp\left(\frac{i}{\hbar} S_\Delta(x_{L+1}, x_L, \ldots, x_1, x_0)\right) r(\hbar, T_1, x_1, x_0) \prod_{j=1}^{L} dx_j \tag{13}$$

$$= \hbar I(r(\hbar, T_1, *, *))(\Delta; T, x, y)$$

これに大次元停留位相法を使うと、(10) によって、目標 (6) の

$$|I(1)(\Delta'; T, x, y) - I(1)(\Delta; T, x, y)| \le C\hbar T_1^2$$

がある $C > 0$ で成立することを証明できる。

定理： 時間 $T < \delta$ のとき、

$$\int_\Omega \exp\left(\frac{i}{\hbar} S(\gamma)\right) \mathcal{D}[\gamma]$$

が存在する。

$$\begin{aligned}&\int_\Omega e^{i\hbar^{-1}S(\gamma)} \mathcal{D}[\gamma] \\ &= \left(\frac{\nu}{2\pi i T}\right)^{1/2} D(T, x, y)^{-1/2} e^{i\hbar^{-1}S(\gamma_{cl})} \Big(1 + O(\hbar)\Big)\end{aligned}$$

の形である。ここで $D(T, x, y) = \lim_{|\Delta|\to 0} D(\Delta; T; x, y)$ である。

15 準古典近似の第2項.

次の漸近展開 (準古典近似) が期待されている。

$$\int_\Omega e^{i\hbar^{-1}S(\gamma)}F(\gamma)\mathcal{D}[\gamma] = \left(\frac{1}{2\pi i\hbar T}\right)^{d/2} D(T,x,y)^{-1/2}e^{i\hbar^{-1}S(\gamma_{cl})}\Big(A_0+\hbar A_1+O(\hbar^2)\Big).$$

A_0 は 主要項でもう前に紹介した。 A_1 を 第 2 項と言う。 これに関し我々は次の公式を得た。

補題：

$F(\gamma)$ は 仮定を満たすとする。 すると下記の極限値がある。

$$q(t) = \lim_{\epsilon\to+0}\Big[\Delta_z(D(t,z,y)^{-1/2}F(\gamma_{\{t,\epsilon\}}(*,z)))\Big|_{z=\gamma_{cl}(t)}\Big],$$

ここで Δ_z は z に関する Laplacian.

定理：$F(\gamma)$ が補題の仮定を満たす時、 準古典近似の第 2 項まで展開可能で、第 2 項は

$$A_1 = \frac{i}{2}\int_0^T D(t,\gamma_{cl}(t),y)^{1/2}q(t)dt. \tag{14}$$

16 Final remarks

1. $\lim_{|\Delta|\to 0} D(\Delta;T;x,y) = D(T,x,y)$ は存在して、いわゆる Van Bleck-Cecil de Morette 行列式という 無限次元行列式になる。 また、$D(T,x,y)^{-1/2}$ が transport equation の解であることも自然に分かる。
2. 得られたものが 本当に propagator である、つまり、時間発展作用素であることも証明できる。
3. 上に示した方法で、準古典近似主要項が同時に証明出来てしまっている。
4. 磁場があっても 適当な条件があると $F\equiv 1$ の場合は出来る。 様相が少し違ってくる。$F(\gamma)$ がある場合は、まだ出来ていない。 少し違って来るかも知れない。
5. $V(x)$ の条件を緩和すること、例えば、無限遠方で $O(x^4)$ になったりする場合、は今のところ出来ない。

文献：

D.Fujiwara, The stationary phase method with an estimate of the remainder term on a space of large dimension. Nagoya Mathematical Journal, vol.124, pp 61-97 (1991).

D.Fujiwara and T.Tsuchida, The time sclicing approximation of the fundamental solution for the Schrödinger equation with electromagnetic fields. Journal of the Mathematical Society of Japan vol.49,pp299-327 (1997).

N.Kumano-go, Feynman path integrals as analysis on path space by time slicing approximation,Bulletin Sciences Mathématiques tom 128, pp197–251 (2004).

D. Fujiwara and N.Kumano-go, Smooth functional derivatives in Feynman path integrals by time slicing approximation. Bulletin Sciences Mathématiques tom 129, pp57–79 (2005).

D. Fujiwara and N.Kumano-go, The second term of the semi-classical asymptotic expansion for Feyman path integrals with integrand of polynomial growth, Journal of the Mathematical Society of Japan vol.58, pp.837–867,(2006).

T. Tsuchida, Remarks on Fujiwara's stationary phase method on a space of large dimension with a phase funcion

involving electromagnetic fields, Nagoya Mtha. J. vol. 136 pp. 157–189(1994).
D.Fujiwara and T. Tsuchida, The time slicing approximation of the fundamental solution for the Schrödinger equation with electromagnetic fields. J.Math. Soc. of Japan, Vol.40, pp. 299–327 (1997)
. 藤原大輔　ファインマン経路積分の数学的方法–時間分割近似法–, シュプリンガー現代数学シリーズ、松本幸夫、谷島賢二　編集、シュプリンガーフェアラーク東京　(1999)
Albeverio, S.A. & Haegh-Krohn, R.J. & Mazzucchi, S.
"Mathematical Theory of Feynman Path Ingtegrals." Ed 2 enlarged edition. Lecture Notes in Mathematics 523, springer (2009).