
数え上げ母関数としての経路積分

2010年1月9日

Encounter with Mathematics @ 中央大学

加藤晃史

東京大学 数理科学研究科

1 Plan

経路積分は物理学でどのように使われてきたかを概観する
— 分配関数 = 数え上げの母関数として —

- 古典力学 : 量子力学 = 経路微分 : 経路積分
経路の空間で積分 \iff 量子化
経路積分 = 分配関数
- Feynman 図形入門
場の量子論における相互作用を表すグラフ
摂動展開 = Feynman 図形を重み付きで数え上げる
- 格子模型における経路の数え上げ問題
連続な時空を格子で近似
経路積分 = 分配関数の計算や性質 2次元の格子模型を例に

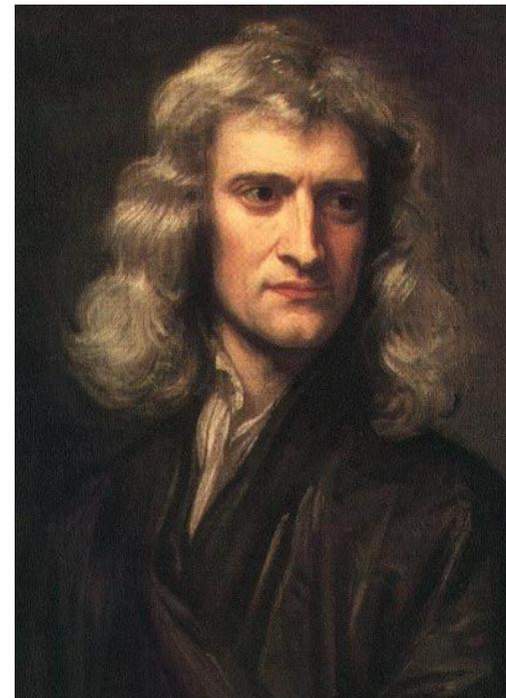
2 経路積分 as “advanced” calculus

対象	微分	積分
1 変数関数	微分 $\frac{df(x)}{dx}$	$\int_a^b f(x)dx$
多変数関数	方向微分 $\nabla_a f(\boldsymbol{x})$	$\int \cdots \int_{\Omega} f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$
汎関数	変分 (汎関数微分)	汎関数積分 (経路積分)
	古典論	量子論

3 Newton 力学

- 空間 : M 多様体
- 運動 = 曲線 : $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$
- 古典力学の課題 :
運動の決定 = 位置 $x(t)$ を時刻 t の関数として表す
- 力学法則を微分方程式 (運動方程式) として定式化

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = F$$



Sir Isaac Newton
1642–1727

4 Lagrangian と作用汎関数

- 接空間 = 位置と速度

$$\begin{array}{ccc} TM \ni (x, v) & & TM \ni \left(x(t), \frac{dx(t)}{dt}\right) \\ \pi \downarrow & \searrow \tilde{x} & \downarrow \pi \\ M \ni x & \circlearrowleft & M \ni x(t) \\ \mathbb{R} \xrightarrow{x} & & \end{array}$$

- Lagrangian $TM \rightarrow \mathbb{R}$

$$L(t, x, y) = \frac{m}{2}v^2 - U(x)$$

- 作用汎関数 (action functional)

$$\begin{aligned} S[x(\bullet)] &= \int_a^b L(\tilde{x}(t))dt = \int_a^b L\left(x(t), \frac{dx(t)}{dt}\right) dt \\ &= \int_a^b \left\{ \frac{m}{2} \left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2 - U(x) \right\} dt \end{aligned}$$

5 最小作用の原理

定理 次は同値

(1) $x(\bullet)$ は作用汎関数 S の停留曲線: $dS|_{x(\bullet)} = 0$

(2) $x(\bullet)$ は Newton の運動方程式の解:

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = - \frac{dU(x(t))}{dx}$$

∴ Euler-Lagrange 方程式

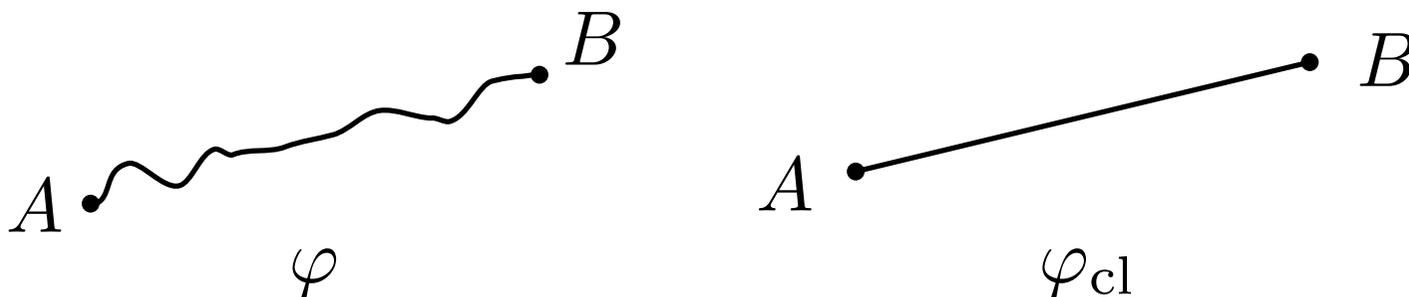
$$S[x(\bullet)] = \int_{t_0}^{t_1} L(\tilde{x}(t)) dt$$

$$dS = 0 \iff \left(\frac{\partial L(x, v)}{\partial x} \Big|_{\substack{x=x(t) \\ v=\dot{x}(t)}} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(x, v)}{\partial v} \Big|_{\substack{x=x(t) \\ v=\dot{x}(t)}} \right) = 0$$

6 例：自由粒子

(相対論的)自由粒子の作用汎関数 $S[\varphi] = mc \int_{t_0}^{t_1} \left\| \frac{d\varphi}{dt} \right\| dt$

停留曲線(古典解) = 線分(等速直線運動)



$dS = 0 \implies \varphi_{cl}(t) =$ 等速直線運動 (慣性の法則)

$$S[\varphi_{cl}] = mc \cdot \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\| = \mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) \implies \mathbf{p}^2 = m^2 c^2$$

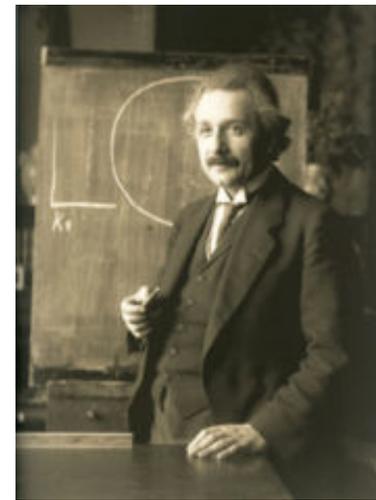
$$\frac{\partial S[\varphi_{cl}]}{\partial \mathbf{x}_1} = -\frac{\partial S[\varphi_{cl}]}{\partial \mathbf{x}_0} = \mathbf{p} \quad \text{4元運動量}$$

7 一般相対性理論

重力場 \iff Riemann 多様体 (M, g)

$$L[x(\bullet)] = \int_a^b \sqrt{\sum_{i,j=1}^n g_{ij}(x(t)) \frac{dx^i(t)}{dt} \frac{dx^j(t)}{dt}} dt$$

$$E[x(\bullet)] = \int_a^b \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{dx^i(t)}{dt} \frac{dx^j(t)}{dt} dt$$



測地線の方程式 = 自由落下の運動方程式

$$\frac{d^2}{dt^2} x^i(t) + \sum_{j,k=1}^n \Gamma_{jk}^i(x(t)) \frac{dx^j(t)}{dt} \frac{dx^k(t)}{dt} = 0$$

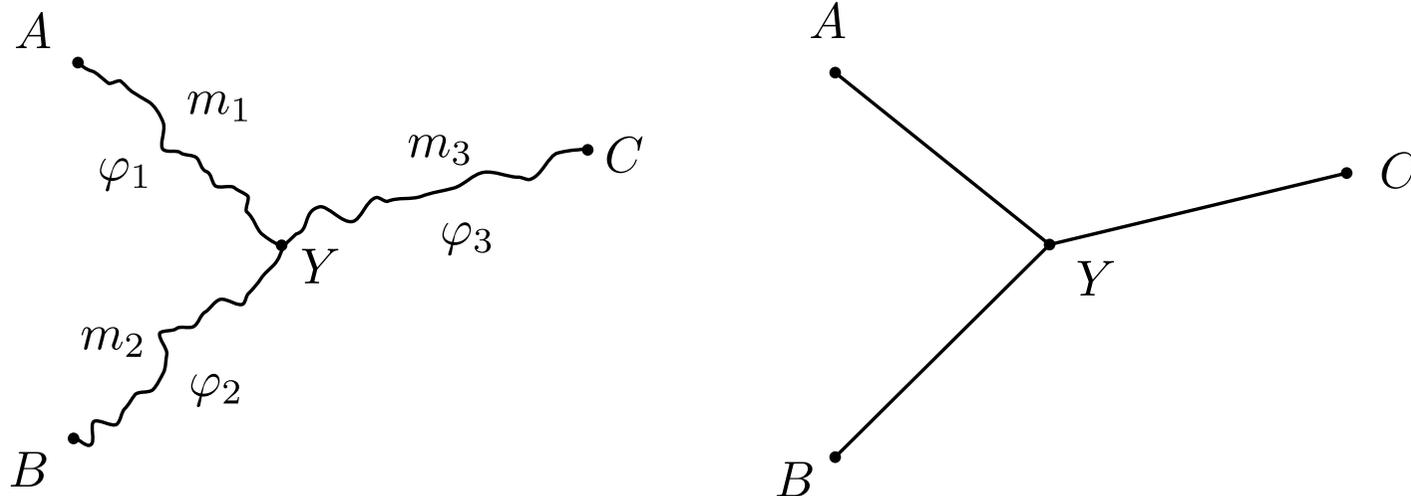
$$\Gamma_{jk}^i \equiv \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n g^{im}(x) \left(\frac{\partial g_{mk}(x)}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{mj}(x)}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}(x)}{\partial x^m} \right)$$



Christoffel's symbol, Levi-Civita connection

8 経路のトポロジー

衝突(相互作用) \rightsquigarrow 分岐を持つグラフ(世界線)



$$S[\varphi] = S_1[\varphi_1] + S_2[\varphi_2] + S_3[\varphi_3]$$

$$\min_{\varphi} S[\varphi] = \min_Y \left(\min_{\varphi_1} S_1[\varphi_1] + \min_{\varphi_2} S_2[\varphi_2] + \min_{\varphi_3} S_3[\varphi_3] \right)$$

$$=: S(Y)$$

$$= \min_Y \left(m_1 c \cdot \|AY\| + m_2 c \cdot \|BY\| + m_3 c \cdot \|CY\| \right)$$

9 4元運動量保存則

相互作用点の位置 Y に関する停留条件

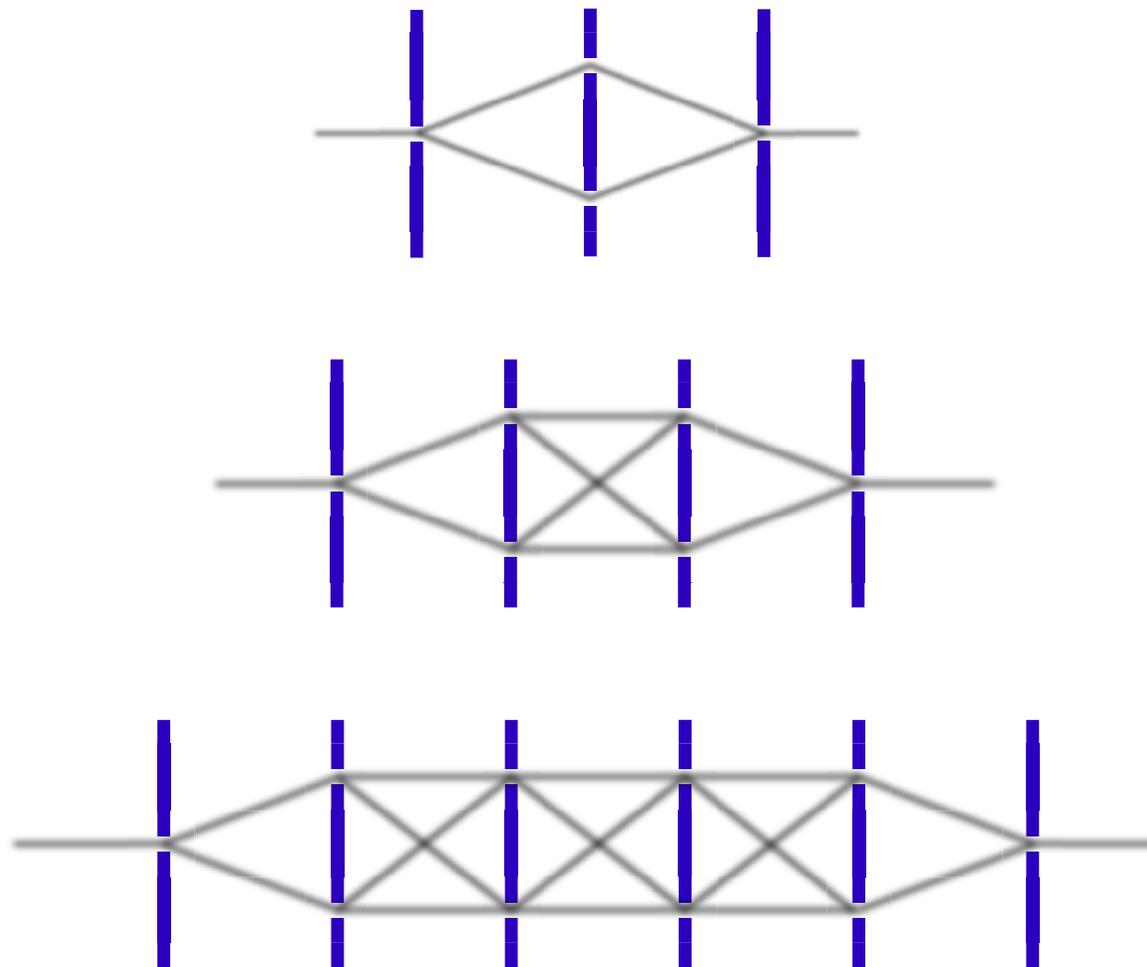
$$dS(Y) = 0 \quad \Longrightarrow \quad 0 = \frac{\partial S}{\partial Y} = p_1 + p_2 - p_3$$

注意

- 非相対論的な場合：完全非弾性衝突ではエネルギーが保存しない
 $m_1 + m_2 = m_3$ を仮定すると $dS(Y) = 0$ に解がない
- 相対論的な場合： $m_1 + m_2 < m_3$ のときに解がある
(質量の非保存、エネルギーと質量の相互転移)

10 量子化

スリットの実験：干渉効果



古典解だけに注目して他の可能性を無視すると正しい結果を与えない

11 重ね合わせの原理 = 線型性

物理法則は線形代数の言葉* で記述される

古典力学にない量子力学の最大の特徴

- 物理的状態の重ね合わせ (線形結合) もまた物理的状態を表す
- 物理的状態の全体はベクトル空間 (Hilbert space) をなす
- 時間変化は線型写像 (unitary operator) で表される

Schrödinger 方程式

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle$$

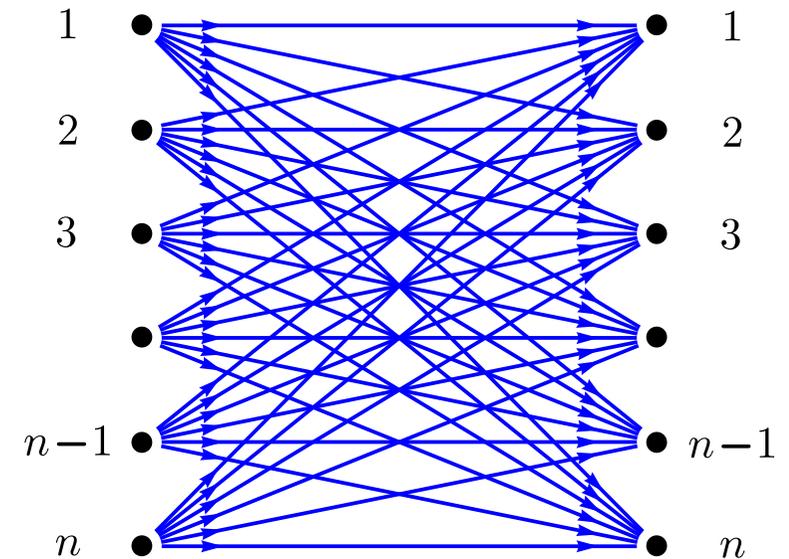
*) k -linear category . . .

12 量子力学系のおもちゃ

- 有限次元ベクトル空間 V
- 基底 e_1, \dots, e_n 量子力学的状態
- 線型変換 $T : V \rightarrow V$ が生成する離散的な時間発展
- T の表現行列 $A = (A_{ij})$

$$T e_j = \sum_{i=1}^n A_{ij} e_i$$

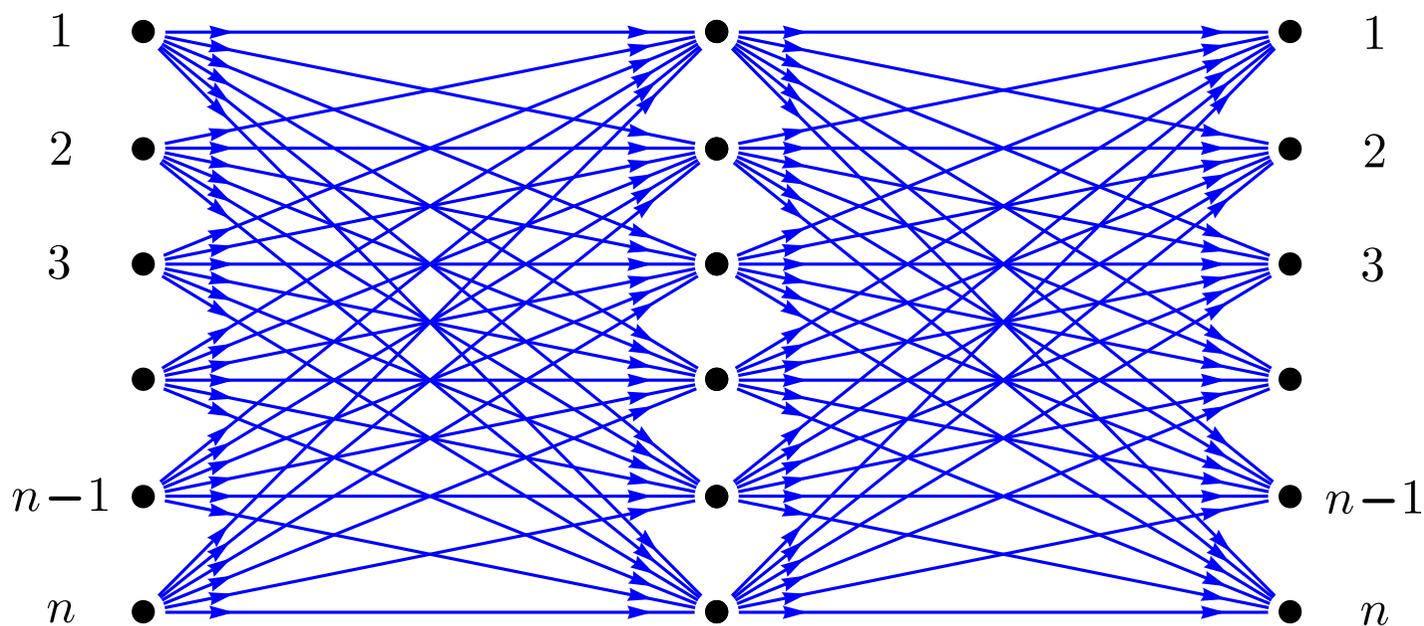
- $A_{ij} =$ 時刻 t に状態 j にあった系が、次の時刻 $t + 1$ で状態 i に移る遷移振幅
- $A = (A_{ij})$: 転送行列



13 転送行列

- e_i という初期状態から出発し, 時間が m だけ経過した後の状態は $T^m e_i$ で与えられる。
- e_i から e_j に遷移する振幅は、行列要素 $(A^m)_{ij}$ で与えられる。

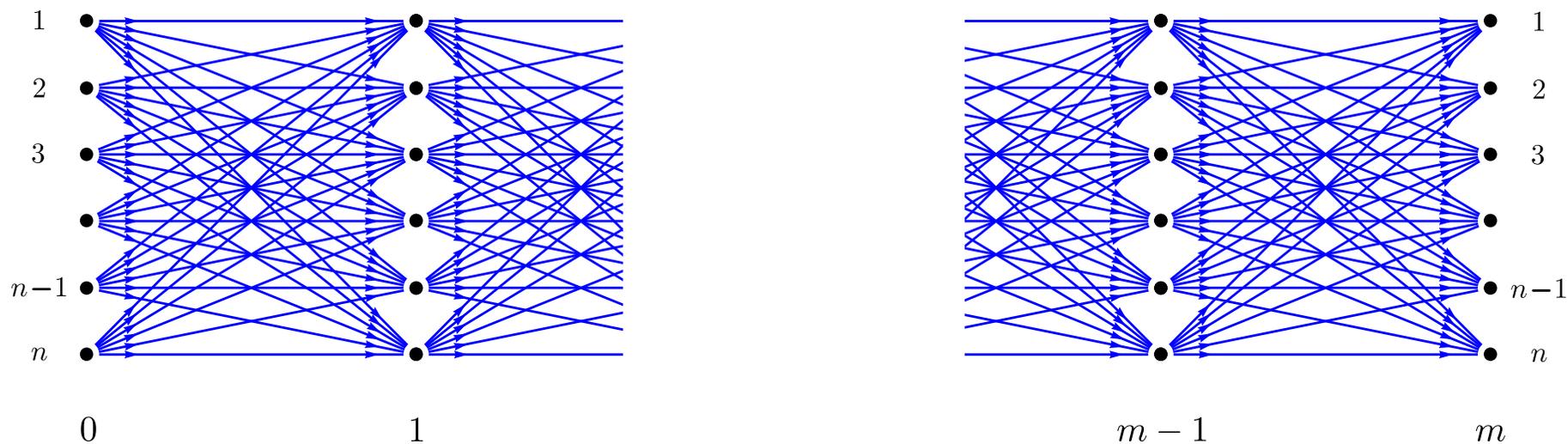
$$(A^2)_{ik} = \sum_j A_{ij} A_{jk}$$



14 転送行列

m step の時間発展

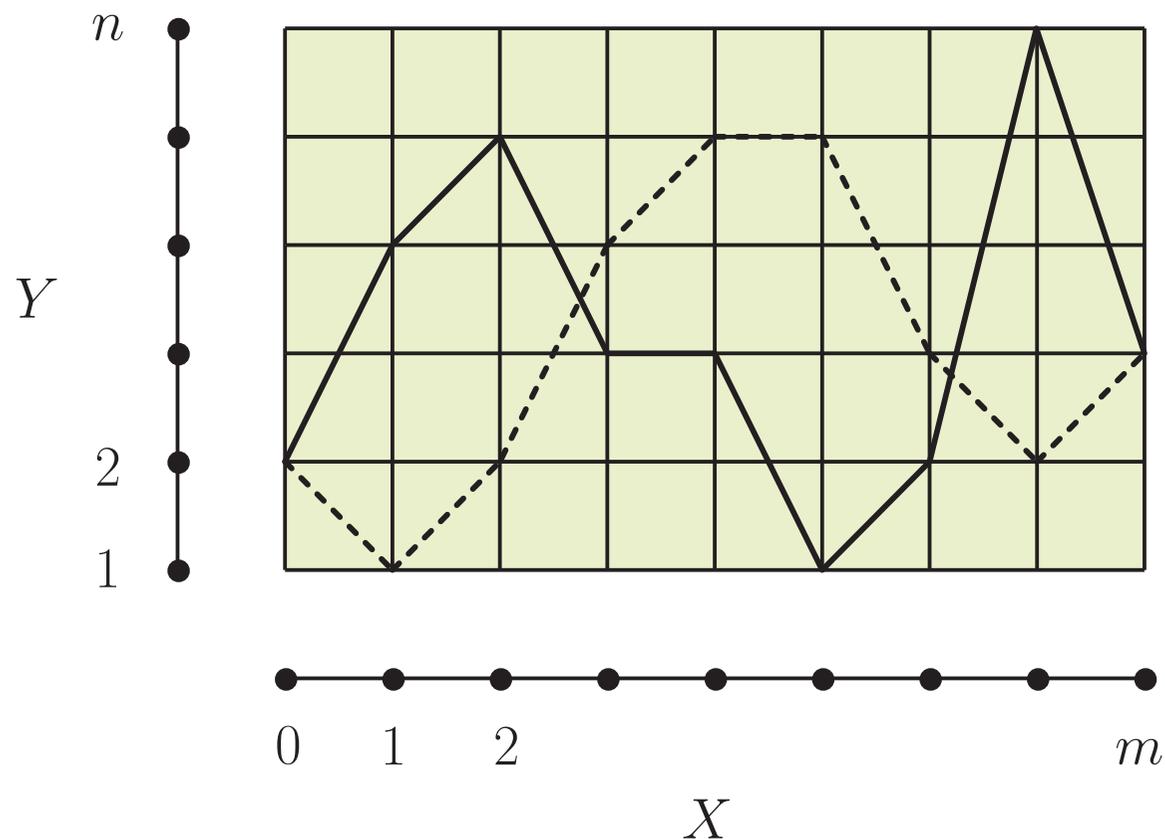
$$(A^m)_{i_0 i_m} = \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \cdots \sum_{i_{m-1}=1}^n A_{i_0 i_1} A_{i_1 i_2} \cdots A_{i_{m-1} i_m}$$



中間に現れる添字 $(i_1, i_2, \dots, i_{m-1})$ は、すべて
もれなく和をとらねばならない (democracy)

15 経路和

- 時刻 $X = \{0, 1, 2, \dots, m\}$
- 状態 $Y = \{1, 2, 3, \dots, n\}$
- 添字列 $(i_0, i_1, \dots, i_m) \iff$ 写像 $\phi : X \rightarrow Y \iff \phi$ の折れ線グラフ



「 Y 上をふらふらと動く m ステップの経路 (path)」

16 経路和としての見方

- 経路 $\phi \in \text{Map}(X, Y)$ の重み $W(\phi) \in \mathbb{C}$

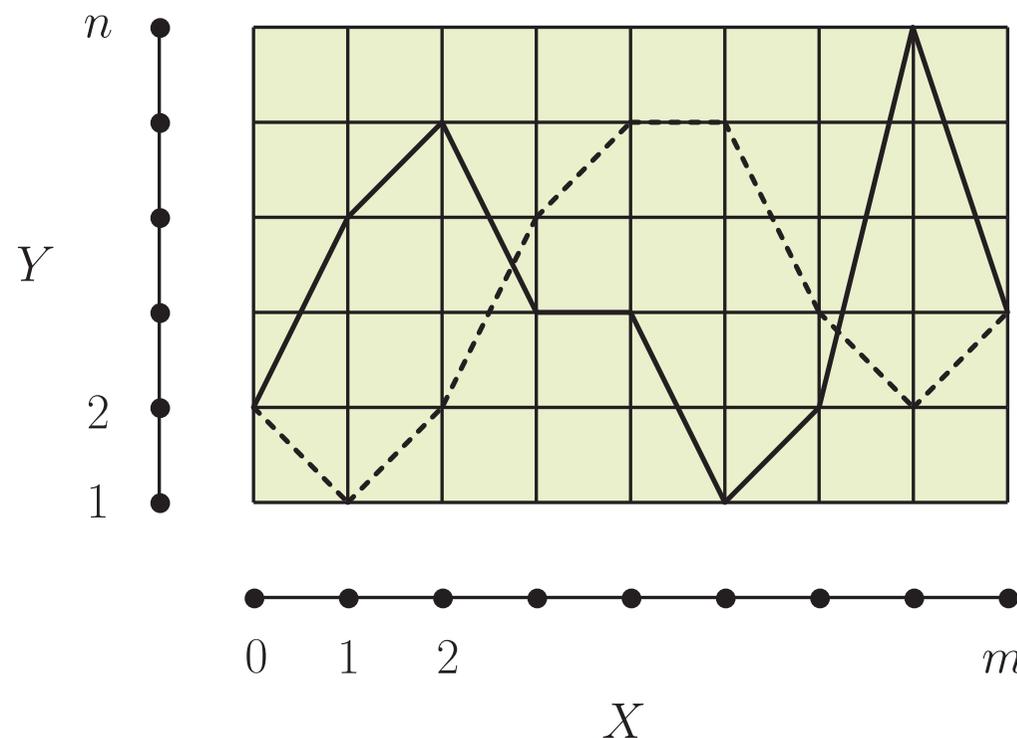
$$W(\phi) = \prod_{k=0}^{m-1} A_{\phi(k)\phi(k+1)}$$

- 経路の空間 $\text{Map}(X, Y)$ 上の関数 (汎関数)

$$W : \text{Map}(X, Y) \rightarrow \mathbb{C}$$

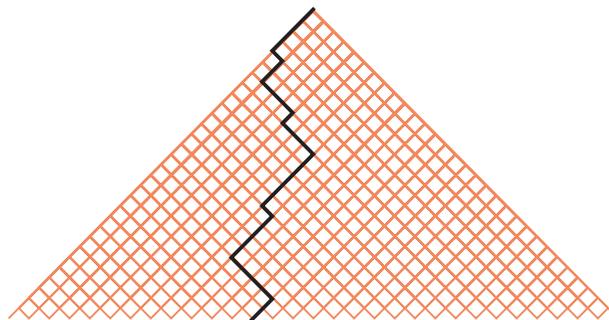
- 遷移振幅の経路和表示

$$(A^m)_{i_0 i_m} = \sum_{\substack{\phi \in \text{Map}(X, Y) \\ \phi(0) = i_0, \phi(m) = i_m}} W(\phi)$$

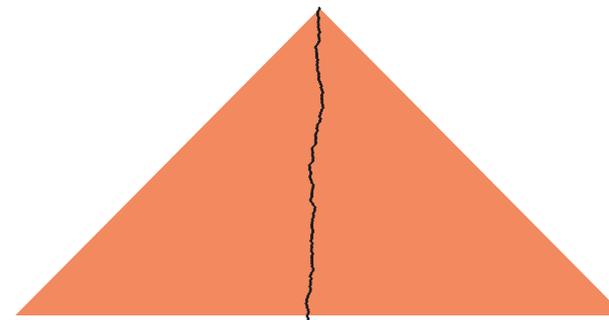


17 例：random walk

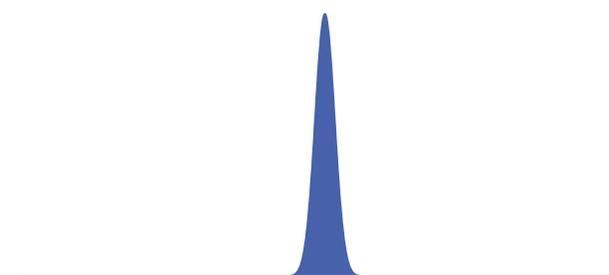
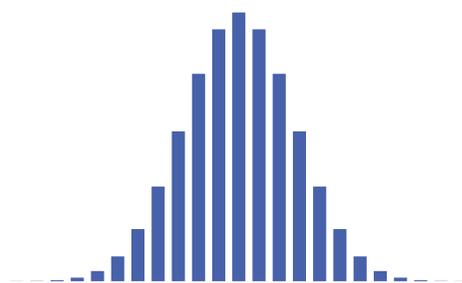
$N = 30$



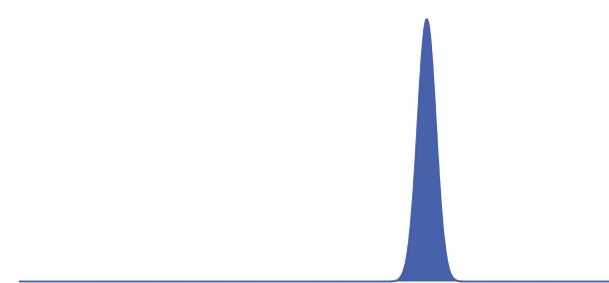
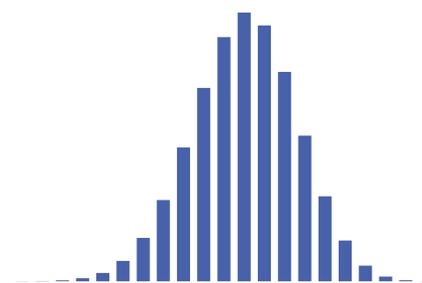
$N = 1000$



$$A_{i,j} = \begin{cases} 1 & i = j \pm 1 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$



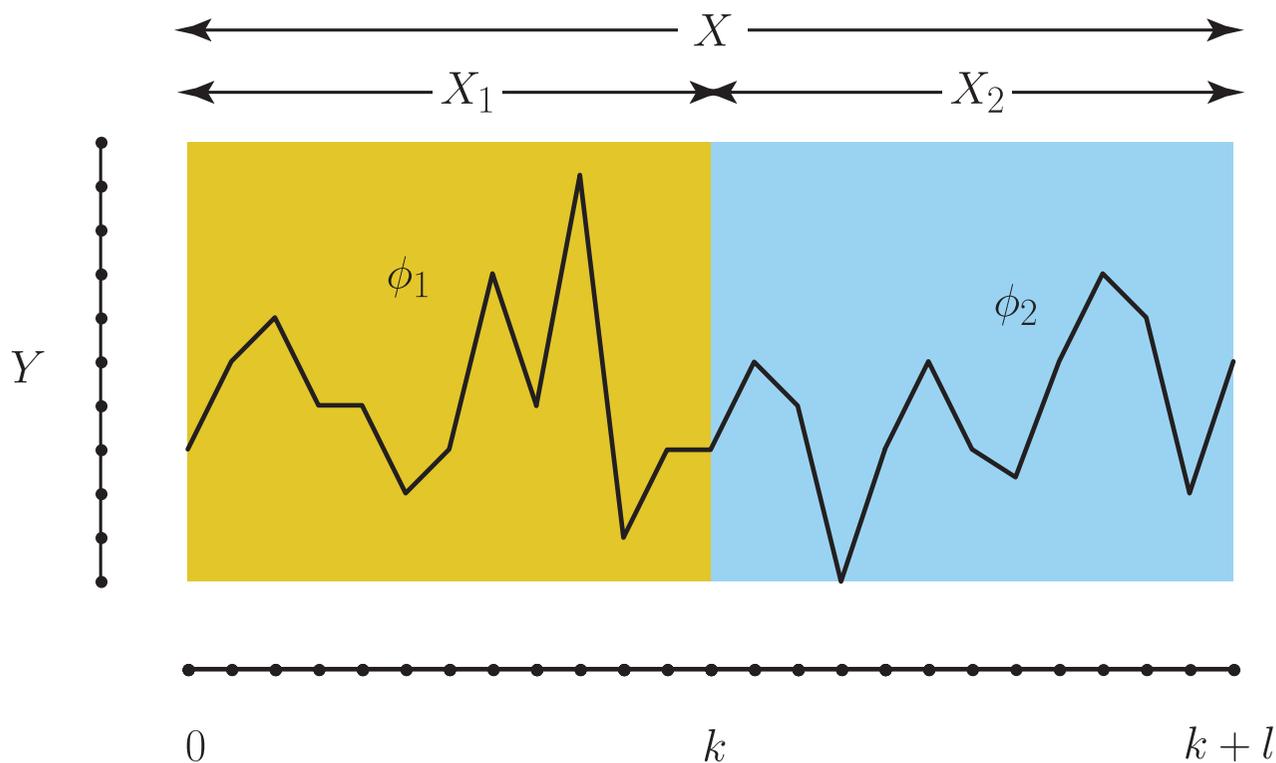
$$A_{i,j} = \begin{cases} 2 & i = j + 1 \\ 1 & i = j - 1 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$



中心極限定理 \implies 古典的軌道に収束

18 指数法則

$$A^{k+l} = A^k A^l \quad (A^{k+l})_{pr} = \sum_q (A^k)_{pq} (A^l)_{qr}$$



$$\sum_{\substack{\phi \in \text{Map}(X, Y) \\ \phi(0)=p, \phi(k+l)=r}} W(\phi) = \sum_{q \in Y} \left\{ \sum_{\substack{\phi_1 \in \text{Map}(X_1, Y) \\ \phi_1(0)=p, \phi_1(k)=q}} W(\phi_1) \right\} \left\{ \sum_{\substack{\phi_2 \in \text{Map}(X_2, Y) \\ \phi_2(k)=q, \phi_2(k+l)=r}} W(\phi_2) \right\}$$

19 指数法則

- グラフの定義域 X を X_1 と X_2 で覆う
- グラフの制限 $\phi_1 : X_1 \rightarrow Y$, $\phi_2 : X_2 \rightarrow Y$
- 重み $W(\phi)$ は局所的:

$$W(\phi) = W(\phi_1) \cdot W(\phi_2)$$

- 貼り合わせ: ϕ_1 の終点と ϕ_2 の始点が一致すれば, それらを繋いで $\phi : X \rightarrow Y$ が定まる .

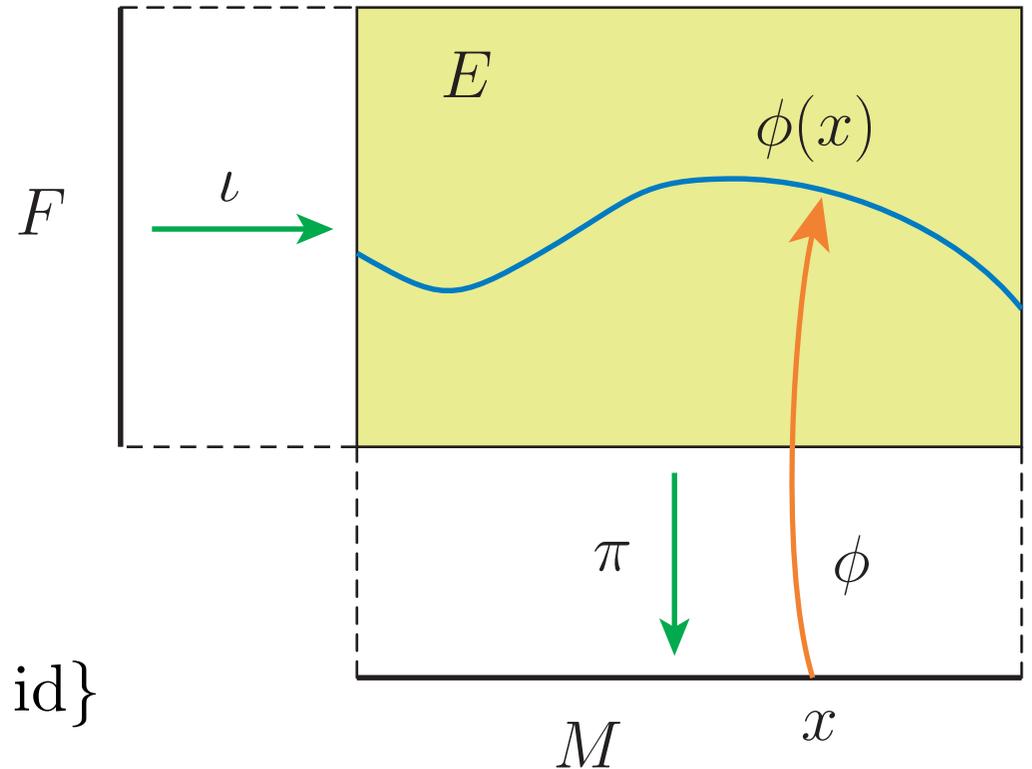
(cf. グラフ \rightsquigarrow 層の切断)

20 場の理論の枠組み

- $M =$ 「時空」 \equiv 場の定義域
- $F =$ 内部空間 \equiv 場の値域
- $E =$ fiber bundle
 $\iota : F \rightarrow E, \pi : E \rightarrow M$
- $\phi =$ 場 (E の切断)
- 場の空間 (一般に無限次元)

$$\Gamma(M, E) = \{\phi : M \rightarrow E \mid \pi \circ \phi = \text{id}\}$$

- 作用汎関数 $S : \Gamma(M, E) \rightarrow \mathbb{C}$
- e.g. 解析力学 = 1次元の場の理論:
 $M = \mathbb{R}$ (時間), $F = \mathbb{R}^3$ (空間), $E = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ (時空)



21 場の古典論

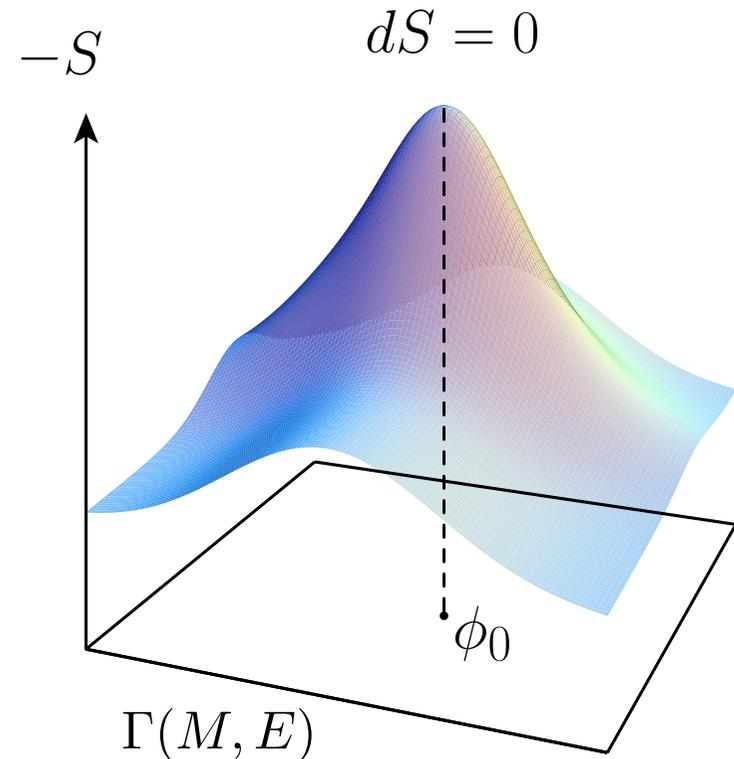
- 運動方程式 \iff 変分原理 $dS = 0$
Euler-Lagrange 方程式

- 興味の対象
運動方程式の解 = 古典解

- 古典解が離散 or 連続パラメータ付きで得られることがある
 \rightsquigarrow 解のモジュライ空間

$$\mathfrak{M}_0 = \{ \phi_0 \in \Gamma(M, E) : dS|_{\phi=\phi_0} = 0 \}$$

- \mathfrak{M}_0 以外の場には関心がない。



22 場の量子論

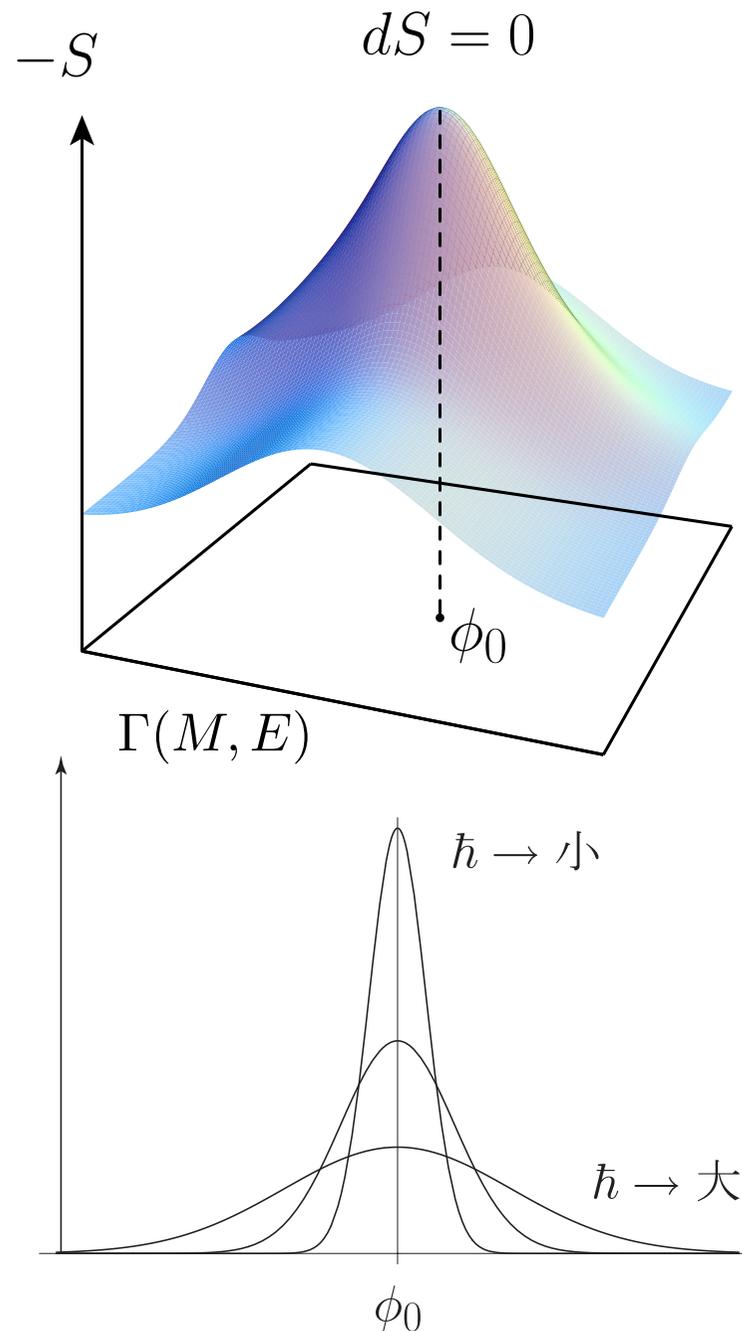
- 古典解だけでなく、すべての場の配位を重ね合わせて考える必要がある。
- 人為的な取捨選択は自然が許さない。
- 場 ϕ の寄与 : $\propto \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} S(\phi) \right\}$

- 分配関数

$$Z = \int_{\Gamma(M, E)} \exp \left(-\frac{i}{\hbar} S[\phi] \right) \mathcal{D}\phi$$

- \hbar Planck 定数

- 対応原理 : $\hbar \rightarrow 0$ で古典論を再現



23 期待値

- 場の空間 $\mathfrak{F} \equiv \Gamma(M, E)$ 上には $e^{-S(\phi)/\hbar}$ に比例する測度が定義される
- 知りたい量 = 汎関数 $f : \mathfrak{F} \rightarrow \mathbb{C}$ の期待値

$$\langle f(\phi) \rangle := \frac{\int_{\mathfrak{F}} d\phi f(\phi) e^{-\frac{1}{\hbar} S(\phi)}}{\int_{\mathfrak{F}} d\phi e^{-\frac{1}{\hbar} S(\phi)}}$$

- 分配関数

$$Z = \int_{\mathfrak{F}} e^{-\frac{1}{\hbar} S(\phi)} d\phi$$

- 自由度 = $\dim \mathfrak{F}$ (場の理論はふつう無限自由度の力学系)

24 場の理論のおもちゃ

- 自由度 $N < \infty$ の場の理論 (cf 格子ゲージ理論、構成的場の理論)
- $M = \{1, 2, \dots, N\}$: N 個の点からなる「時空」
 $F = \mathbb{R}, E = F \times M \rightarrow M$
- $\mathcal{F} = \Gamma(M, E) = \text{Map}(M, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^N$
場 ϕ : N 成分ベクトル
- 「経路積分」 = N 変数 $\phi = (\phi^1, \dots, \phi^N)$ の普通の積分
- 有限次元とはいえ、 $S(\phi)$ を具体的に与えても、分配関数や期待値を閉じた形で求積することは一般にはできない。

$$Z(t_3, t_4) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp \frac{1}{\hbar} \left[-\frac{1}{2} \phi^2 + \frac{t_3}{3!} \phi^3 + \frac{t_4}{4!} \phi^4 \right] d\phi$$

25 摂動展開

\hbar などのパラメータに関する形式的べき級数に展開し、展開の各次の係数を求める — 収束性は気にしない

以下、簡単のために以下を仮定：

- 自由度 $N = 1$
- $S(\phi)$ がただ一つの極値 (= 古典解) ϕ_0 を持つ。

S を $\phi = \phi_0$ のまわりで Taylor 展開

$$S(\phi) = S(\phi_0) + \frac{a}{2}(\phi - \phi_0)^2 - V(\phi)$$

$$V(\phi) = \sum_{k \geq 3} \frac{\lambda_k}{k!} (\phi - \phi_0)^k \quad a = S''(\phi_0) \quad \lambda_k = - \left. \frac{d^k S}{d\phi^k} \right|_{\phi=\phi_0}$$

古典解のまわりで展開しているため 1 次の項は無い

26 摂動展開の「気持ち」

- 展開の2次までの項を残し、3次以上の項 V を無視

$$\int e^{-\frac{1}{\hbar}S(\phi)} d\phi \approx e^{-\frac{1}{\hbar}S(\phi_0)} \int e^{-\frac{a}{2\hbar}(\phi-\phi_0)^2} d\phi$$

- 場 ϕ は平均 ϕ_0 , 標準偏差 $\sqrt{\hbar/a}$ の正規分布に従って揺らぐ
- 従って $(\phi - \phi_0)^k$ の大きさは大体 $\hbar^{k/2}$ と見積もれる
- $k \geq 3$ の項を無視するのは $\hbar \rightarrow 0$ の近似の最初のステップとしては悪くはないだろう .
- 3次以上の係数 : $\lambda_3, \lambda_4, \dots$ は正規分布を変形するパラメータ
「結合定数」 = 相互作用の強さを表す (後述)

27 自由場と Wick の定理

- 自由場 (free field) = 作用が場 ϕ の高々 2 次式で表される理論
(結合定数 $\lambda_3 = \lambda_4 = \dots = 0$)

- 自由度 N の場 $\boldsymbol{x} = (x^1, \dots, x^N) \in \mathbb{R}^N$

- 自由場の作用 = 二次形式
$$S(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N x^i A_{ij} x^j$$

$(,) : \mathbb{R}^n$ のユークリッド内積

$A = (A_{ij}) : N \times N$ 正定値対称行列

- 分配関数
$$Z_0 \equiv \int_{\mathbb{R}^N} dx \exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x})\right\}$$

- n 点相関関数 (期待値)

$$\langle x^{i_1} x^{i_2} \dots x^{i_n} \rangle \equiv \frac{1}{Z_0} \int_{\mathbb{R}^N} dx x^{i_1} \dots x^{i_n} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x})\right\}$$

28 自由場の分配関数 Z_0

- A を直交変換 $x = Uy$ で対角化
- $\mu_1, \dots, \mu_N > 0$ 固有値
-

$$\begin{aligned} Z_0 &= \int_{\mathbb{R}^N} dx e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}, A\mathbf{x})} = \int_{\mathbb{R}^N} dy e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \mu_i (y^i)^2} \\ &= \prod_{i=1}^N \sqrt{\frac{2\pi}{\mu_i}} = \frac{1}{\sqrt{\det \frac{1}{2\pi} A}} \end{aligned}$$

29 自由場の相関関数 — Wick の定理

定理

$$\langle x^{i_1} x^{i_2} \rangle = A^{i_1 i_2},$$

$$\langle x^{i_1} x^{i_2} \dots x^{i_{2n+1}} \rangle = 0,$$

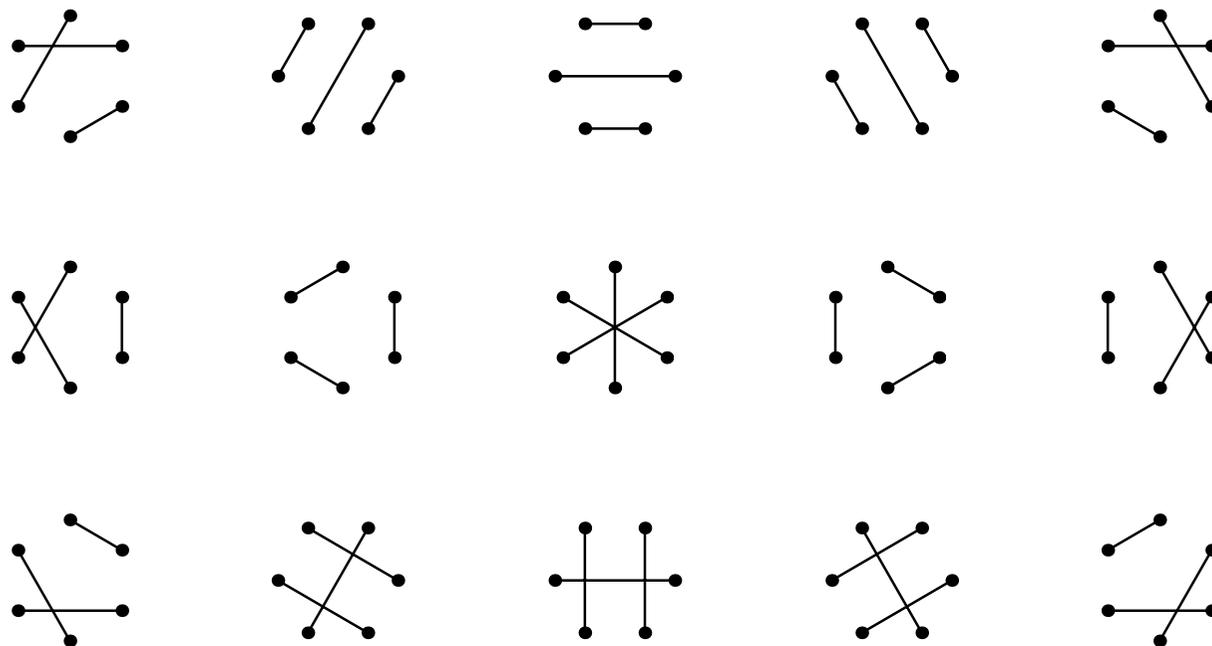
$$\langle x^{i_1} x^{i_2} \dots x^{i_{2n}} \rangle = \sum_P \langle x^{i_{p_1}} x^{i_{p_2}} \rangle \langle x^{i_{p_3}} x^{i_{p_4}} \rangle \dots \langle x^{i_{p_{2n-1}}} x^{i_{p_{2n}}} \rangle.$$

和は $2n$ 個の元 $\{1, 2, \dots, 2n\}$ を n 組に分ける分け方 (pairing) $P = \{\{p_1, p_2\}, \{p_3, p_4\}, \dots, \{p_{2n-1}, p_{2n}\}\}$ 全体にわたる .

$A^{i_1 i_2} = (A^{-1})_{i_1 i_2}$: 伝播関数 (propagator)

30 Wick 縮約

- pairing P は, $2n$ 個の点をペアを組む相手と線で結ぶこと (Wick 縮約) で図示できる.
- $n=3$ のときは, 下図に示すような $5 \cdot 3 \cdot 1 = 15$ 通りの Wick 縮約のとり方がある。

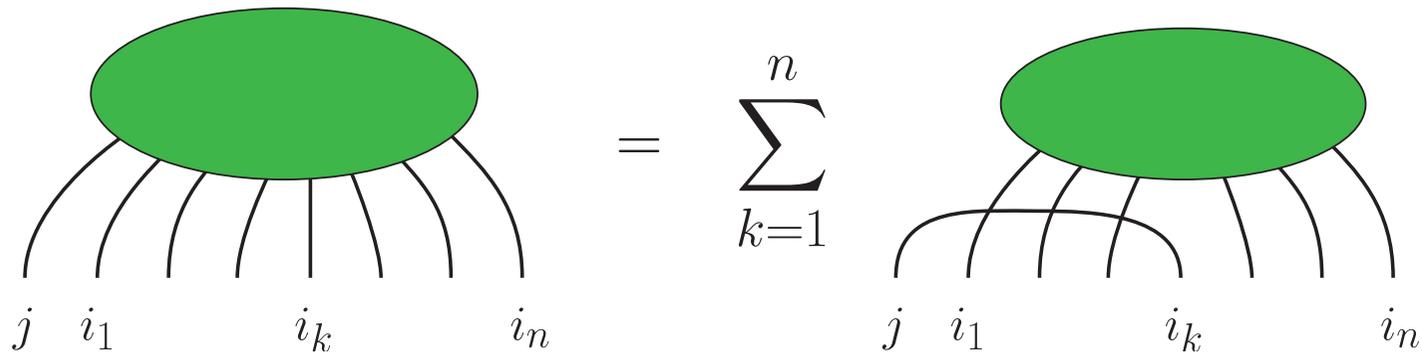


- 一般の n ではその総数は $(2n-1) \cdot (2n-3) \cdots 3 \cdot 1 = (2n-1)!! = \frac{(2n)!}{2^n n!}$ 通りである.

31 Wick の定理のいいかえ

- $n+1$ 点相関関数を $n-1$ 点相関関数に還元する公式

$$\langle x^j x^{i_1} \dots x^{i_n} \rangle = \sum_{k=1}^n \langle x^j x^{i_k} \rangle \langle x^{i_1} \dots \overbrace{x^{i_k}}^{\text{取り除く}} \dots x^{i_n} \rangle$$



- $\langle x^i x^j \rangle = A^{ij}$
- $\langle x^i \rangle = 0 \Leftarrow$ 積分の測度が $x^i \leftrightarrow -x^i$ で不変

32 相関関数の母関数

- $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N) \in \mathbb{R}^N$ 補助的な変数
- 相関関数の母関数 (確率分布の特性関数 characteristic function)

$$\begin{aligned} Z(\xi) &:= \langle \exp(\xi, \mathbf{x}) \rangle = \frac{1}{Z_0} \int_{\mathbb{R}^N} dx \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}, A\mathbf{x}) + (\xi, \mathbf{x})\right\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^N \langle x^{i_1} x^{i_2} \dots x^{i_k} \rangle \xi_{i_1} \xi_{i_2} \dots \xi_{i_k} \end{aligned}$$

相関関数 $\iff \xi = (\xi_1, \dots, \xi_N)$ に関する Taylor 展開係数

- 任意の相関関数は $Z(\xi)$ から

$$\langle x^{i_1} x^{i_2} \dots x^{i_n} \rangle = \partial_{\xi_{i_n}} \dots \partial_{\xi_{i_2}} \partial_{\xi_{i_1}} \Big|_{\xi=0} Z(\xi)$$

と求められる ($\partial_{\xi_{i_k}} := \partial / \partial \xi_{i_k}$).

33 相関関数の母関数

- ξ : 外力 $Z(\xi) := \langle \exp(\xi, \mathbf{x}) \rangle = \frac{1}{Z_0} \int_{\mathbb{R}^N} d\mathbf{x} \exp\left\{ - \underbrace{\frac{1}{2}(\mathbf{x}, A\mathbf{x})}_{\text{調和振動子}} + \underbrace{(\xi, \mathbf{x})}_{\text{外力}} \right\}$

- 新しい釣り合いの位置 (古典解) : Hook の法則、線形応答

$$d \left\{ \frac{1}{2}(\mathbf{x}, A\mathbf{x}) - (\xi, \mathbf{x}) \right\} = 0 \iff \xi = A\mathbf{x}_0 \iff \mathbf{x}_0 = A^{-1}\xi$$

- 古典解のまわりのゆらぎ y : 積分変数を $x = x_0 + y$ と変数変換

$$\begin{aligned} Z(\xi) &= \frac{1}{Z_0} \int_{\mathbb{R}^N} dy \exp\left\{ -\frac{1}{2}(\mathbf{y}, A\mathbf{y}) + \frac{1}{2}(\xi, A^{-1}\xi) \right\} \\ &= \exp\left\{ \frac{1}{2}(\xi, A^{-1}\xi) \right\} = 1 + \frac{1}{2} \sum_{i,j} A^{ij} \xi_i \xi_j + \dots \end{aligned}$$

- $\langle x^i x^j \rangle = A^{ij}$ propagator (Green 関数)

34 Wick の定理の導出

$$\begin{aligned}
 & \partial_{\xi_{i_n}} \cdots \partial_{\xi_{i_1}} \partial_{\xi_j} Z(\boldsymbol{\xi}) \\
 &= \partial_{\xi_{i_n}} \cdots \partial_{\xi_{i_1}} \boxed{\partial_{\xi_j}} \exp\left\{\frac{1}{2}(\boldsymbol{\xi}, A^{-1}\boldsymbol{\xi})\right\} \\
 &= \partial_{\xi_{i_n}} \cdots \partial_{\xi_{i_1}} \left\{ \sum_l A^{jl} \xi_l \exp\left(\frac{1}{2}(\boldsymbol{\xi}, A^{-1}\boldsymbol{\xi})\right) \right\} \\
 &= \sum_l \underbrace{A^{jl} \xi_l \left\{ \partial_{\xi_{i_n}} \cdots \partial_{\xi_{i_1}} Z(\boldsymbol{\xi}) \right\}}_{\rightarrow 0} + \sum_{k=1}^n A^{ji_k} \left\{ \partial_{\xi_{i_n}} \cdots \overbrace{\partial_{\xi_{i_k}}}^{\text{取り除く}} \cdots \partial_{\xi_{i_1}} Z(\boldsymbol{\xi}) \right\}
 \end{aligned}$$

$$(\xi_1 = \cdots = \xi_N = 0) \quad \begin{array}{c} \text{Green oval} \\ \text{lines to } j, i_1, i_k, i_n \end{array} = \sum_{k=1}^n \begin{array}{c} \text{Green oval} \\ \text{lines to } j, i_1, i_k, i_n \end{array}$$

$$\therefore \langle x^j x^{i_1} \cdots x^{i_n} \rangle = \sum_{k=1}^n \langle x^j x^{i_k} \rangle \langle x^{i_1} \cdots \underbrace{x^{i_k}}_{\text{取り除く}} \cdots x^{i_n} \rangle$$

35 摂動展開

- 相互作用の効果を生自由場の相関関数で表現する

- $S(\phi) = S(\phi_0) + \frac{a}{2}(\phi - \phi_0)^2 - V(\phi) \quad V(\phi) = \sum_{k \geq 3} \frac{\lambda_k}{k!} (\phi - \phi_0)^k$

- $\phi = \underbrace{\phi_0}_{\text{古典解}} + \sqrt{\hbar} \underbrace{\varphi}_{\text{ゆらぎ}}$ と分解し、 φ について積分

- 分配関数 Z_λ は (結合定数 λ に無関係な定数を除いて)

$$\begin{aligned} Z_\lambda &= e^{-\frac{1}{\hbar} S(\phi_0)} \int d\varphi \exp \left\{ -\frac{a}{2} \varphi^2 + \sum_{k \geq 3} \frac{\lambda_k}{k!} \hbar^{(k-2)/2} \varphi^k \right\} \\ &= Z_0 \left\langle \exp \left\{ \sum_{k \geq 3} \frac{\lambda_k}{k!} \hbar^{(k-2)/2} \varphi^k \right\} \right\rangle \end{aligned}$$

$Z_0 =$ 自由場の分配関数、 $\langle \dots \rangle =$ 自由場における相関関数

36 摂動展開

- \hbar や結合定数について展開

$$\begin{aligned} \frac{Z_\lambda}{Z_0} &= \left\langle \exp \left\{ \sum_{k \geq 3} \frac{\lambda_k}{k!} \hbar^{(k-2)/2} \varphi^k \right\} \right\rangle \\ &= \sum_{n_3, n_4, \dots = 0}^{\infty} \frac{1}{n_3!} \left(\frac{\lambda_3}{3!} \right)^{n_3} \frac{1}{n_4!} \left(\frac{\lambda_4}{4!} \right)^{n_4} \dots \quad (\quad) \\ &\quad \cdot \hbar^{\frac{1}{2} \sum_{k \geq 3} n_k (k-2)} \cdot \left\langle (\varphi^3)^{n_3} (\varphi^4)^{n_4} \dots \right\rangle \end{aligned}$$

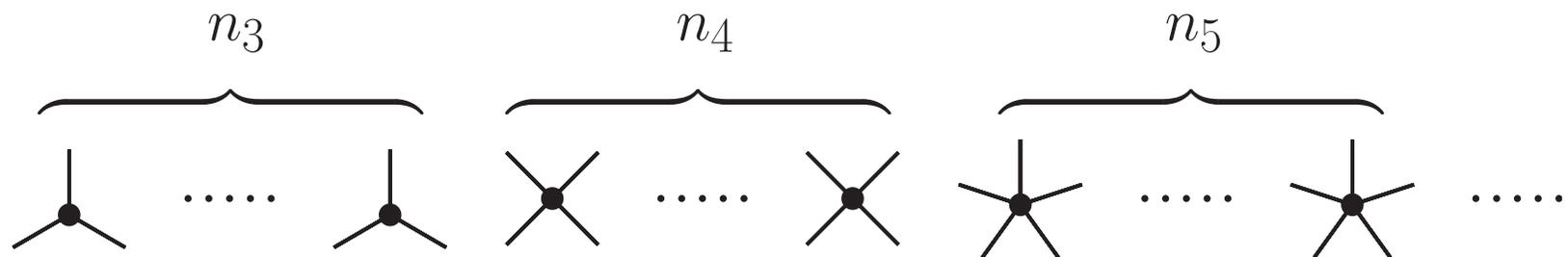
- 自由場の期待値 \Leftarrow Wick 定理で計算できる。

37 Feynman 図形

- Wick 縮約 (pairing) のとりかたに関する和
今の場合も縮約を図示すると便利である。

- $\langle \overbrace{\varphi^3 \dots \varphi^3}^{n_3} \overbrace{\varphi^4 \dots \varphi^4}^{n_4} \overbrace{\varphi^5 \dots \varphi^5}^{n_5} \dots \rangle$ を求めるには...

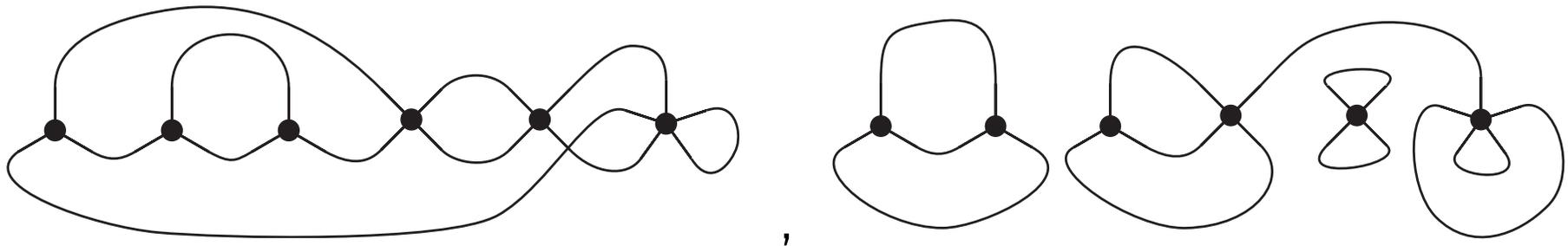
- 3次の頂点を n_3 個, 4次の頂点を n_4 個, ... 用意する:



- 各頂点から出ている線を結ぶ pairing の仕方の総和として期待値が計算できる (Wick の定理)
- Feynman 図形 (diagram) := 相互作用を表す頂点から出ている線 (half-edges) を次々に Wick 縮約して得られるグラフ

38 Feynman 図形

- 各 Feynman 図形 Γ の頂点や辺は、作用の古典解のまわりの Taylor 展開で決まる重み $W(\Gamma)$ を持つ。(Feynman rule)
- Z_λ/Z_0 は、これらのグラフの寄与の和として表される
- 例 $\langle (\varphi^3)^3 (\varphi^4)^2 (\varphi^5) \rangle$ の計算に現れる Feynman 図形の例：11本の propagator を使った Wick 縮約 ($3 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 5 = 22 = 11 \cdot 2$)



- 総数 $(2 \cdot 11 - 1)!!$ 個の pairing がそれぞれ

$$\hbar^5 \cdot \frac{\lambda_3^3}{3!(3!)^3} \cdot \frac{\lambda_4^2}{2!(4!)^2} \cdot \frac{\lambda_5}{5!} \cdot a^{-11}$$

という重みで Z_λ/Z_0 に寄与している。

39 Feynman 図形

- 一般に $\langle \prod_{k \geq 3} (\varphi^k)^{n_k} \rangle$ の計算に關与する Feynman 図形 Γ の性質：
- n_k 個の k 価頂点
- 頂点総数 $v = \sum_k n_k$ 個
- $p = \frac{1}{2} \sum_k k n_k$ 本の辺
- \hbar のベキ

$$\frac{1}{2} \sum_{k \geq 3} n_k (k - 2) = p - v = -\chi(\Gamma)$$

$\chi(\Gamma) = \Gamma$ を 1次元複体と見たときのオイラー数

40 グラフに関する和

- 縮約 (pairing) を指定すればグラフ Γ が決まるが, 同じグラフを与えるような縮約のしかたは沢山ある.
- $\langle \varphi^3 \varphi^3 \rangle$ の計算: $5!! = 15$ 通りの縮約 \implies Feynman 図形は次の2種



- 縮約のしかたの総数 $(2p - 1)!!$ は辺の数 p とともに急激に増えるが, Feynman 図形の種類はそれほどでもない.
- 分配関数も, 縮約のしかたでなく, Feynman 図形 Γ (の同型類) ごとの寄与 $W(\Gamma)$ の和

$$\frac{Z_\lambda}{Z_0} = \sum_{\Gamma} W(\Gamma)$$

として表現できないだろうか?

- Z_λ の摂動展開の値は確定している
- $W(\Gamma)$ をきちんと定めるには全射

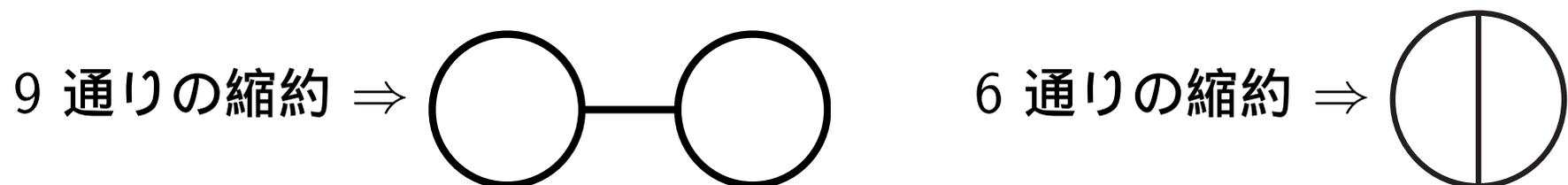
$$\pi : \{ \text{縮約の仕方} \} \rightarrow \{ \text{グラフの同型類} \}$$

が何対1であるか、すなわち

$$|\pi^{-1}(\Gamma)| = \text{グラフ } \Gamma \text{ を与えるような縮約の仕方の数}$$

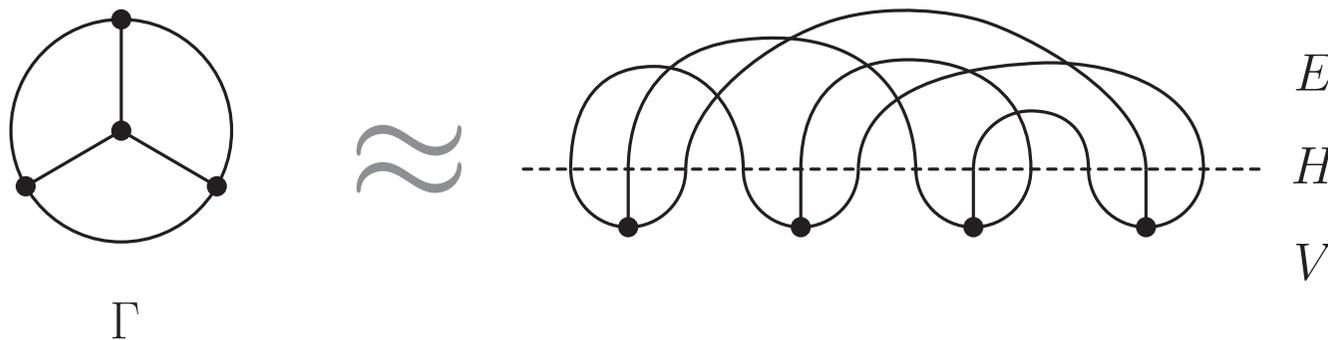
を知る必要がある。

- $\langle \varphi^3 \varphi^3 \rangle : 5!! = 15$ 通りの縮約



41 グラフの対称性

- グラフ Γ の持つ「対称性」の違いを反映
- グラフの構造を集合の言葉で表現
- Feynman 図形 $\Gamma = (H, E, V)$
- H half-edges の集合とその2種類の分割
 $E = \{e_1, \dots, e_p\}$, $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ の組 $\Gamma = (H, E, V)$ であって,
 - 各 e_i は H の元を2個ずつ含む。「辺」
 - 各 v_i は H の元を3個以上含む。「頂点」



42 グラフの自己同型

- $\text{Aut}(\Gamma)$ グラフ Γ の自己同型

$:=$ half-edges の置換 $\sigma_H \in G_H = \text{Aut}(H)$ であって, 分割 V が定める H 上の同値関係 \sim_V と分割 E が定める H 上の同値関係 \sim_E との双方を保存するもの

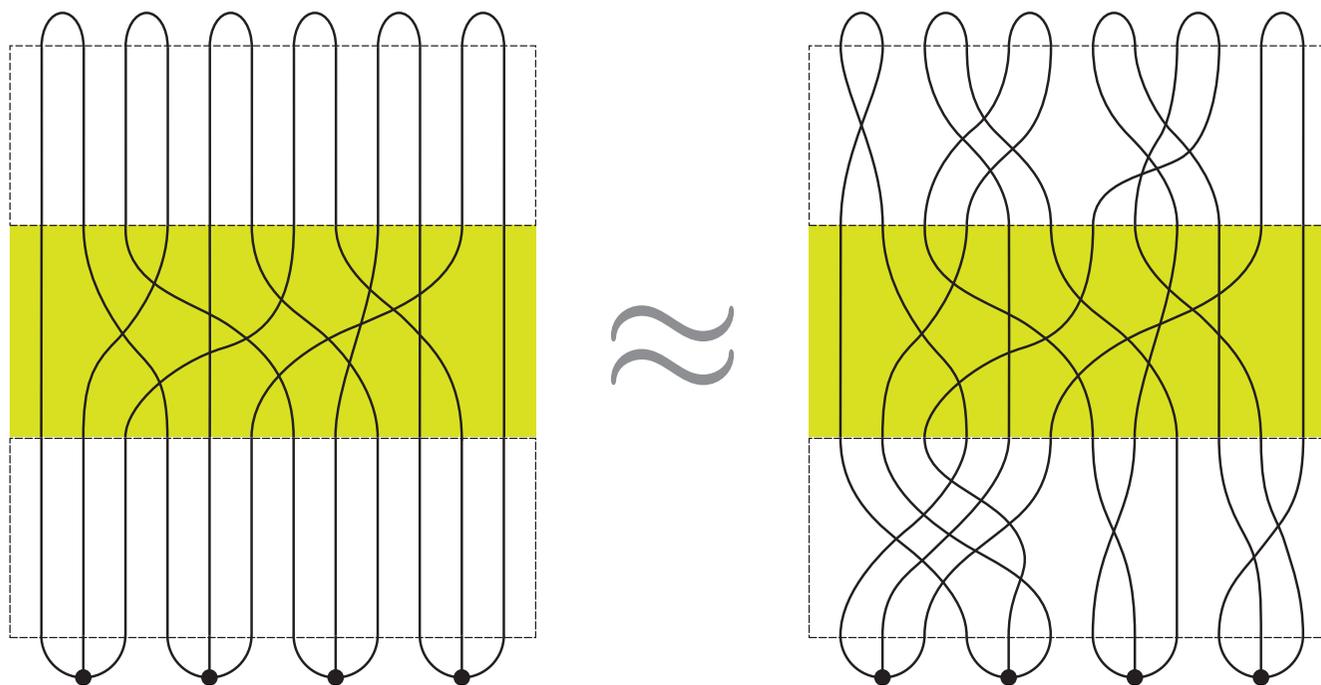
「辺や頂点の繋がり方を保存する half-edges の置換」

- 例

$$|\text{Aut}(\textcircled{\mid})| = 12, \quad |\text{Aut}(\textcircled{\text{---}}\textcircled{\text{---}})| = 8,$$

43 グラフの自己同型

- $G_V :=$ 同値関係 \sim_V を保存する置換全体のなす G_H の部分群
- $G_E := \sim_E$ を保存する G_H の部分群



- Feynman 図形 $\xleftrightarrow{1:1}$ 両側剰余類 $G_E \backslash G_H / G_V$
- $G_H \simeq S_{2p}$, $G_V \simeq \prod_{k \geq 3} \{ S_{n_k} \times (S_k)^{n_k} \}$, $G_E \simeq S_p \times (S_2)^p$

44 グラフの自己同型

- 剰余類 $G_E \setminus G_H \xleftrightarrow{1:1} \text{pairing}$ (Wick 縮約)
 $(2p)! / (p! \cdot 2^p) = (2p - 1)!!$ 個の元
- $G_E \setminus G_H$ には G_V が右から作用する
- 類 $G_E \cdot \Gamma$ の固定部分群 = Γ の自己同型全体のなす群 $\text{Aut}(\Gamma)$

$$\therefore |\pi^{-1}(\Gamma)| = \frac{|G_V|}{|\text{Aut}(\Gamma)|}$$

- $|G_V| = \prod_{k \geq 3} \{n_k! \cdot (k!)^{n_k}\}$ は, はちょうど () の右辺の分母に現れる因子を打ち消す

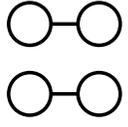
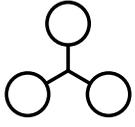
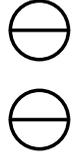
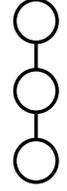
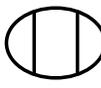
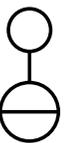
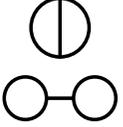
45 グラフの自己同型

グラフの同型類にわたる和としての分配関数の表示

$$\frac{Z_\lambda}{Z_0} = \sum_{\Gamma} W(\Gamma), \quad W(\Gamma) = \frac{\hbar^{-\chi(\Gamma)}}{|\text{Aut}(\Gamma)|} \cdot \prod_{k \geq 3} \lambda_k^{n_k} \cdot a^{-|E|}$$

⇒ グラフの数え上げの母関数

46 グラフの自己同型

Γ								
$ \text{Aut}(\Gamma) $	128	48	24	288	16	16	8	96
$ \pi^{-1}(\Gamma) $	243	648	1296	108	1944	1944	3888	324

総数に数え落としが無いことの check

$$\frac{11!!}{4!(3!)^4} = \frac{10395}{31104} = \frac{1}{128} + \frac{1}{48} + \frac{1}{24} + \frac{1}{288} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{96}$$

練習問題：摂動の次の次数の表を作れ

47 N 自由度系

- $S(\phi)$: N 変数関数

$$-\frac{1}{\hbar}S(\phi_0 + \sqrt{\hbar}\varphi) = -\frac{1}{\hbar}S(\phi_0) - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \varphi^i A_{ij} \varphi^j$$
$$+ \sum_{k \geq 3} \frac{\hbar^{(k-2)/2}}{k!} \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k=1}^N \lambda_{i_1 i_2 \dots i_k}^{(k)} \varphi^{i_1} \varphi^{i_2} \dots \varphi^{i_k}$$

- k 次の相互作用 — k 階の完全対称テンソル

$$\lambda_{i_1 i_2 \dots i_k}^{(k)} = \left. \frac{\partial^k}{\partial \phi^{i_1} \partial \phi^{i_2} \dots \partial \phi^{i_k}} S(\phi) \right|_{\phi=\phi_0}$$

48 N 自由度系

- 場 φ^i の添字 \Leftrightarrow 各 half-edge のラベル \Leftrightarrow 写像 $\ell : H \rightarrow \{1, \dots, N\}$

$$\frac{Z_\lambda}{Z_0} = \sum_{\Gamma} \frac{\hbar^{-\chi(\Gamma)}}{|\text{Aut}(\Gamma)|} \sum_{\ell: H \rightarrow \{1, \dots, N\}} \prod_{v \in V} \lambda_{\ell(v)} \prod_{e \in E} A^{\ell(e)}$$

k 次の頂点 $v = \{i_1, \dots, i_k\} \in V \iff \lambda_{\ell(v)} := \lambda_{\ell(i_1) \dots \ell(i_k)}^{(k)}$

辺 $e = \{i, j\} \in E \iff$ propagator $A^{\ell(e)} := A^{\ell(i)\ell(j)}$

49 摂動展開の収束性

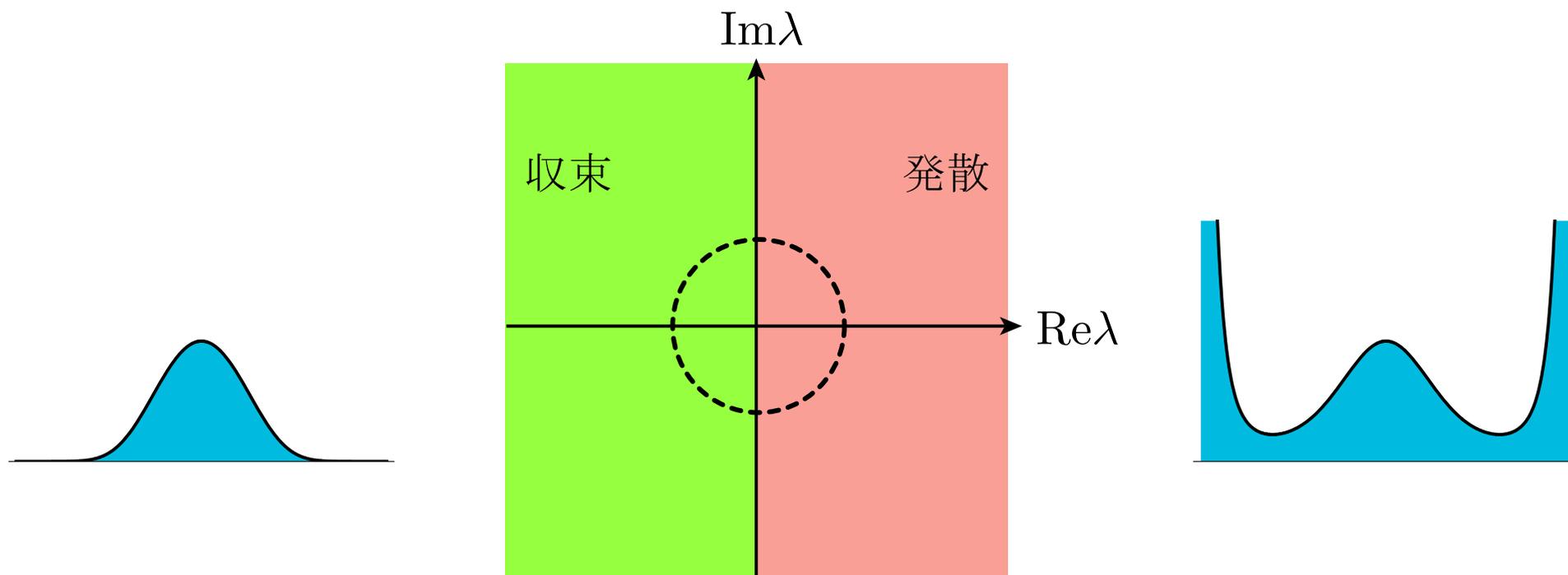
一般には収束半径が 0

ある角領域で漸近級数を定義する

例

$$Z(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{1}{2} \phi^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \right] d\phi$$

$\lambda < 0$ で収束、 $\lambda > 0$ で発散

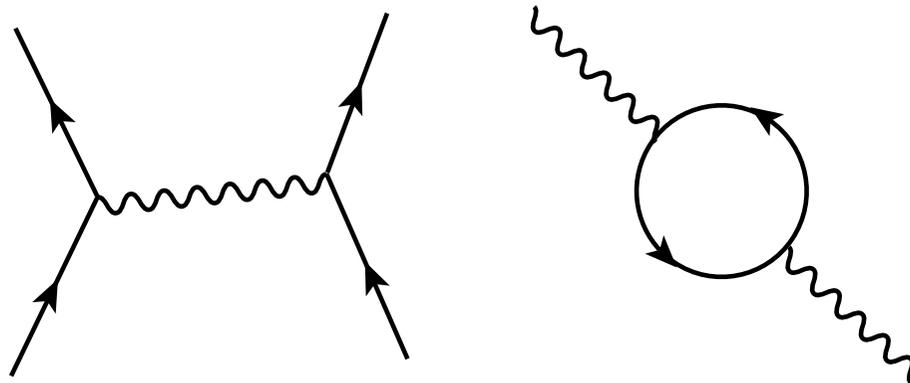


50 Feynman グラフの連結性

Feynman rule :

$$W : \{\text{Feynman グラフ}\} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \Gamma \mapsto W(\Gamma)$$

「非連結」なグラフ \iff 「独立」な量子論的プロセス



連結成分への分解

$$\Gamma = \Gamma_1 \sqcup \Gamma_2 \implies W(\Gamma) = W(\Gamma_1) \cdot W(\Gamma_2)$$

51 連結性と Logarithm

グラフ Γ の頂点の数

$$v(\Gamma) = \sum_j v_j(\Gamma)$$

グラフ Γ の辺の数

$$e(\Gamma) = \frac{1}{2} \sum_j j v_j(\Gamma)$$

$$\deg t_j = j$$

$$\prod_{j=3}^{2n} t_j^{v_j(\Gamma)} = 2e(\Gamma)$$

\mathcal{I}_k 次数 $\geq k$ の単項式が生成する $\mathbb{Q}[t_3, t_4, t_5, \dots]$ のイデアル

$$\mathbb{Q}[[t_3, t_4, t_5, \dots]] = \varprojlim_k \mathbb{Q}[t_3, t_4, t_5, \dots] / \mathcal{I}_k$$

52 連結性と Logarithm

定理

$$Z(t) = Z(t_3, t_4, t_5, \dots) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{\Gamma: \text{graph} \\ \text{with } e(\Gamma)=n}} \frac{1}{|\text{Aut}(\Gamma)|} \prod_{j=3}^{2n} t_j^{v_j(\Gamma)}$$

$$F(t) = F(t_3, t_4, t_5, \dots) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{\Gamma: \text{connected} \\ \text{graph} \\ \text{with } e(\Gamma)=n}} \frac{1}{|\text{Aut}(\Gamma)|} \prod_{j=3}^{2n} t_j^{v_j(\Gamma)}$$

$\mathbb{Q}[[t_3, t_4, t_5, \dots]]$ の元として well-defined であり、さらに

$$Z(t) = e^{F(t)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} F(t)^m, \quad F(t) = \log Z(t)$$

が成り立つ。 $Z(t)$ 分配関数, $F(t)$ 自由エネルギー

53 連結性と Logarithm

- 指定された辺の数 n を持つグラフは有限個。
- 任意のグラフは連結成分に分解できる

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \cdots \cup \Gamma_m$$

- 頂点数、辺数は加法的

$$v_j(\Gamma) = \sum_i v_j(\Gamma_i), \quad e(\Gamma) = \sum_i e(\Gamma_i)$$

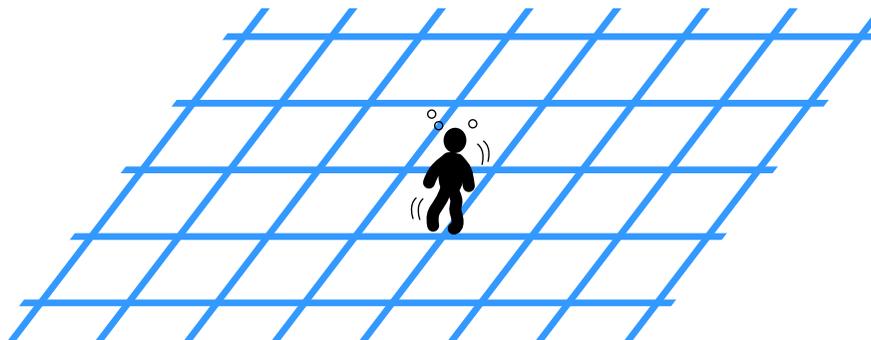
- グラフの自己同型

$$\text{Aut}(\Gamma) = \left(\prod_{i=1}^m \text{Aut}(\Gamma_i) \right) \rtimes S_m \quad \rightsquigarrow \quad \frac{1}{|\text{Aut}(\Gamma)|} = \frac{1}{m!} \prod_{i=1}^m \frac{1}{|\text{Aut}(\Gamma_i)|}$$

54 Random walk

点 x_0 を出発し、random に格子点 $\Lambda = \mathbb{Z}^d$ を渡り歩く酔歩

$B_{xy} :=$ (y に居た人が、次の step で x に移る条件付き確率)



n step 後に場所 x で見出す確率 $P_n(x|x_0)$ は？

$$P_n(x|x_0) = \frac{\#\{x_0 \text{ から } x \text{ に至る長さ } n \text{ の経路}\}}{\#\{x_0 \text{ から出発する長さ } n \text{ の経路}\}}$$

$$\text{漸化式 } P_0(x|x_0) = \delta_{x,x_0}, \quad P_{n+1}(x|x_0) = \frac{1}{2d} \sum_y B_{xy} P_n(y|x_0)$$

$$\text{母関数 } G_\lambda(x|y) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n P_n(x|y)$$

55 Gaussian Model

格子 Λ を「時空」とする自由場の理論

場 $\phi : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \phi_x$

作用汎関数 : $A = (A_{xy})$ で定まる 2 次形式

$$S(\phi) = \frac{1}{2} \sum_{x,y \in \Lambda} A_{x,y} \phi_x \phi_y$$

相関関数の母関数

$$\begin{aligned} Z(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^\Lambda} D\phi e^{-S(\phi) + \sum_{x \in \Lambda} \xi_x \phi_x} \quad \left(D\phi := \prod_{x \in \Lambda} d\phi_x \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\det \frac{1}{2\pi} \mathbf{A}}} \exp \left[\frac{1}{2} \sum_{x,y \in \Lambda} \xi_x (\mathbf{A}^{-1})_{xy} \xi_y \right] \end{aligned}$$

56 Random walk と Gaussian model の等価性

$$G_\lambda(x|y) = \langle \phi(x)\phi(y) \rangle$$

ただし、右辺は $A = 1 - \lambda B$ で定まる自由場の理論の相関関数.

$\because A = (A_{xy}), B = (B_{xy}) : |\Lambda| \times |\Lambda|$ 行列

$$\begin{aligned} G_\lambda(x|y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n P_n(x|y) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \langle x | \mathbf{B}^n | y \rangle \\ &= \langle x | \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \mathbf{B}^n | y \rangle = \langle x | \frac{1}{1 - \lambda \mathbf{B}} | y \rangle \\ &= \langle x | \mathbf{A}^{-1} | y \rangle = \langle \phi(x)\phi(y) \rangle \end{aligned}$$

57 例：最近接相互作用

$J = (J_{xy})$: Λ の隣接行列 (adjacency matrix)

$J_{xy} = 1 \Leftrightarrow x, y$ は隣接する格子点のとき、 $J_{xy} = 0 \Leftrightarrow$ その他

$$B_{x,y} = J_{x,y}, \quad A_{x,y} = \delta_{x,y} - \lambda J_{x,y}$$

$$P_{n+1}(x|x_0) = \frac{1}{2d} \sum_{\mu=1}^d \{P_n(x + e_\mu|x_0) + P_n(x - e_\mu|x_0)\}$$

\Leftrightarrow

$$G_\lambda(x|x_0) = \delta_{x,x_0} + \frac{\lambda}{2d} \sum_{\mu=1}^d \{G_\lambda(x + e_\mu|x_0) + G_\lambda(x - e_\mu|x_0)\}$$

Fourier 変換

$$G_\lambda(x|x_0) = \frac{1}{(2\pi)^d} \iint_{-\pi}^{\pi} d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \tilde{G}_\lambda(\mathbf{k})$$

漸化式 \Rightarrow

$$\left(1 - \frac{\lambda}{d} \sum_{\mu=1}^d \cos k_{\mu}\right) \tilde{G}_{\lambda}(k) = 1$$

$$\therefore G_{\lambda}(x|y) = \frac{1}{(2\pi)^d} \iint_{-\pi}^{\pi} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{d} \sum_{\mu=1}^d \cos k_{\mu}} d\mathbf{k}$$

$G_{\lambda=1}(x|x_0) = x_0$ を出発した random walk が x に居る回数 (step 数) の期待値

$$G_{\lambda=1}(0|0) = \frac{2}{\pi(d-2)} + \dots \quad (d \rightarrow 2)$$

$$G_{\lambda=1}(0|0) = 1 + \frac{1}{2d} + \frac{3}{4d^2} + \dots \quad (d \rightarrow \infty)$$

58 連続極限

$M = \mathbb{R}^d$ 時空

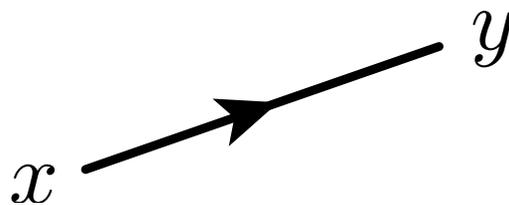
$\phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ 場

$$S(\phi) = \frac{1}{2} \int_M (\|(\nabla\phi)(x)\|^2 + m^2\phi^2) dx$$

$$Z(\xi) = \int_{\mathbb{R}^\Lambda} D\phi e^{-S(\phi) + \int_M \xi(x)\phi(x)dx}$$

$$G(x|y) = \frac{1}{(2\pi)^d} \iint_{-\infty}^{\infty} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \frac{1}{\mathbf{k}^2 + m^2} d\mathbf{k}$$

自由スカラー場の Feynman propagator (Green 関数)



x にいた素粒子が y に到達する確率振幅

59 連續極限

$$\begin{aligned} & P_{n+1}(x|x_0) - P_n(x|x_0) \\ &= \frac{1}{2d} \sum_{\mu=1}^d \{P_n(x + e_\mu|x_0) - 2P_n(x|x_0) + P_n(x - e_\mu|x_0)\} \end{aligned}$$

↪ 連續極限 $\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right) P = 0$ (熱方程式 or Schrödinger 方程式)

60 統計物理学 場の量子論

- 熱平衡状態 (thermal equilibrium)
- $\{\Psi_i\}_{i \in I}$ 系が取りうる状態
- Ψ_i エネルギー E_i
- 系が状態 Ψ_i にある確率 (Boltzmann 重率、正準分布)

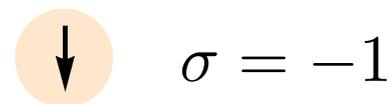
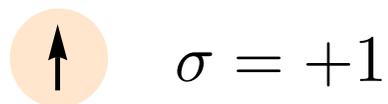
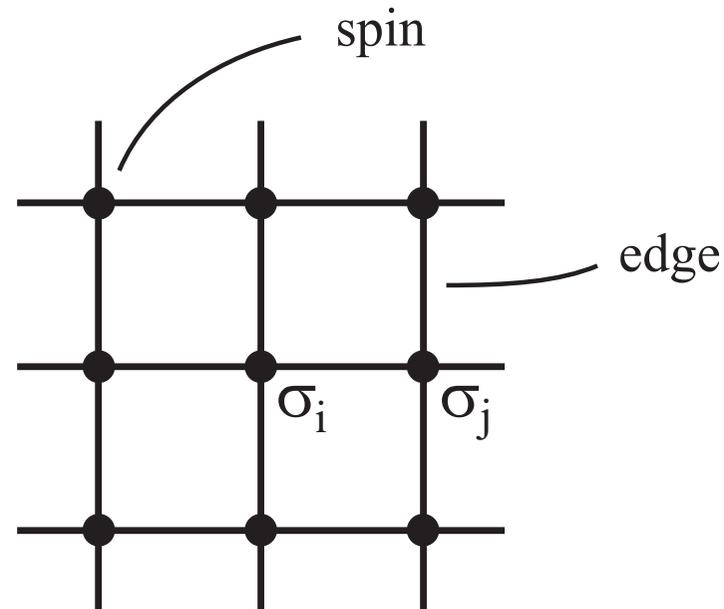
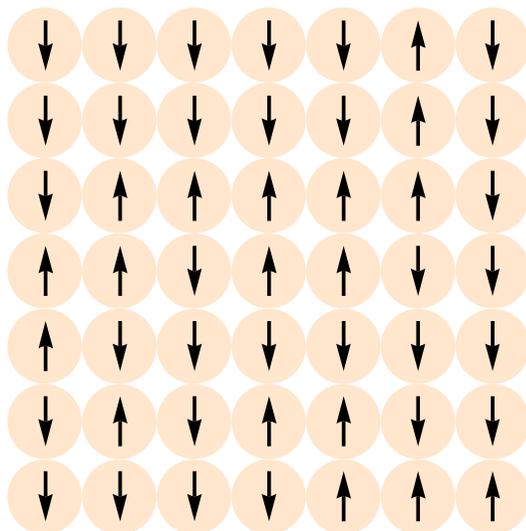
$$P_{\text{eq}}(\Psi_i) = \frac{e^{-\beta E_i}}{Z}$$

- 分配関数 (partition function)

$$Z = \sum_i e^{-\beta E_i}, \quad \beta = \frac{1}{kT}$$

- k Boltzmann 定数, T 絶対温度

61 Ising 模型



$\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ 有限集合 (磁性分子)

$M = \Lambda$ 、 $F = \{1, -1\}$ の場の理論 (自由場ではない)

62 Ising 模型

配位 (configuration)

$$\sigma = (\sigma_x)_{x \in \Lambda} \longleftrightarrow \sigma \in \text{Map}(\Lambda, \{\pm 1\})$$

$$H[\{\sigma\}] = - \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j - h \sum_{i \in \Lambda} \sigma_i,$$

h 外部磁場

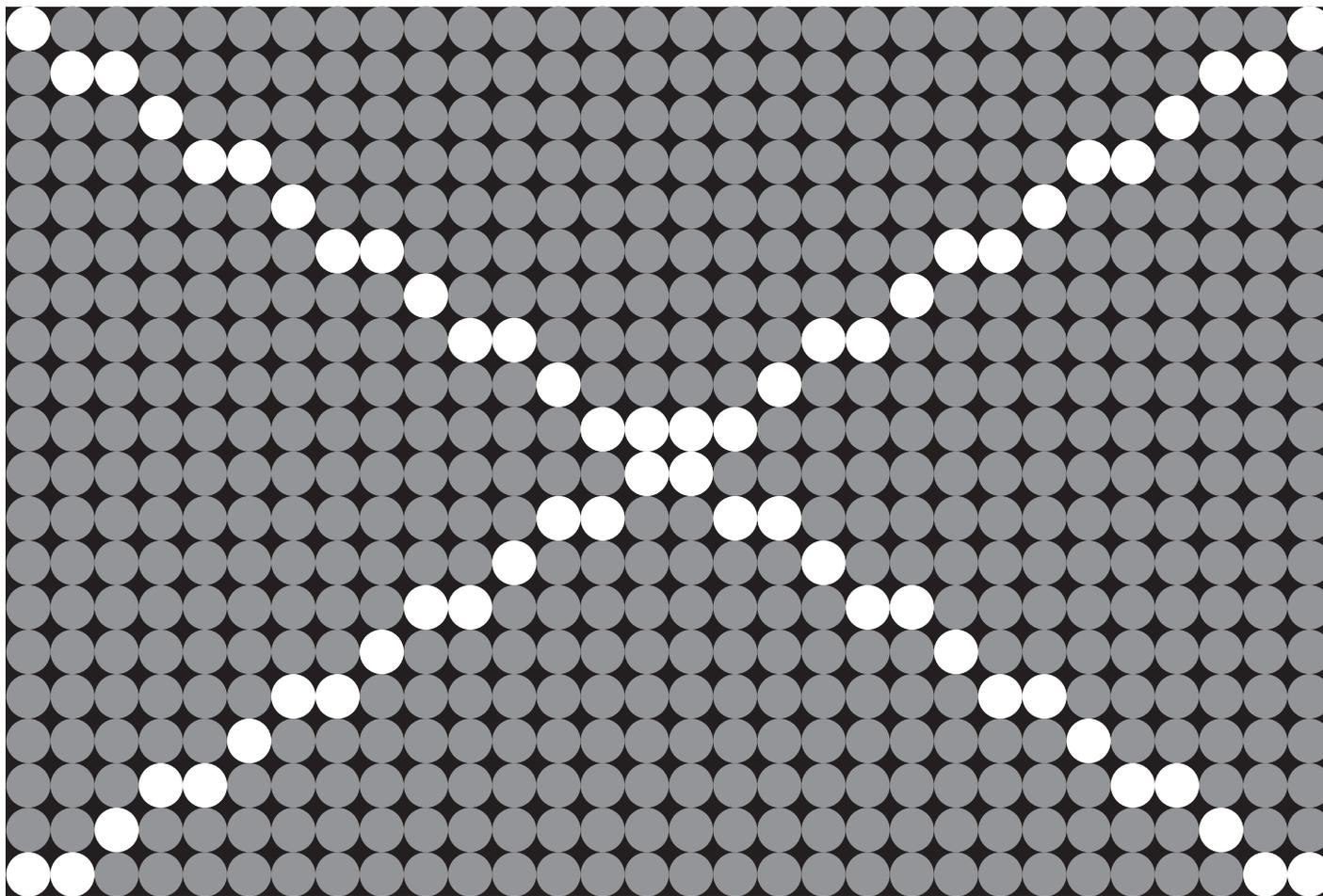
$$Z = \sum_{\{\sigma\}} \exp \left(\beta \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j + \beta h \sum_{i \in \Lambda} \sigma_i \right).$$

$$m(T) = \lim_{h \rightarrow +0} \lim_{|\Lambda| \rightarrow \infty} \langle \sigma_0 \rangle_{\Lambda, T, h}$$

$\langle \sigma_0 \rangle$: 確率変数 $\sigma_0 = \pm 1$ の期待値

$$\langle \sigma_i \rangle_{\Lambda, T, h} = \frac{\text{Tr } \sigma_i e^{-\beta H}}{\text{Tr } e^{-\beta H}}.$$

64 場の量子論



65 Ising 模型の高温展開

$$e^{\pm A} = \cosh A \pm \sinh A = \cosh A \cdot (1 \pm \tanh A)$$

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{\sigma} \prod_{\langle i,j \rangle: \text{edges}} e^{\beta \sigma_i \sigma_j} \\ &= \sum_{\sigma} \prod_{\langle i,j \rangle: \text{edges}} \cosh \beta \cdot (1 + \sigma_i \sigma_j \tanh \beta) \\ &= (\cosh \beta)^{Nd/2} \sum_{\sigma} \prod_{\langle i,j \rangle: \text{edges}} (1 + \sigma_i \sigma_j v) \end{aligned}$$

$$v \equiv \tanh \beta$$

高温 ($T \rightarrow \infty, \beta \rightarrow 0$) $\iff v \rightarrow 0$

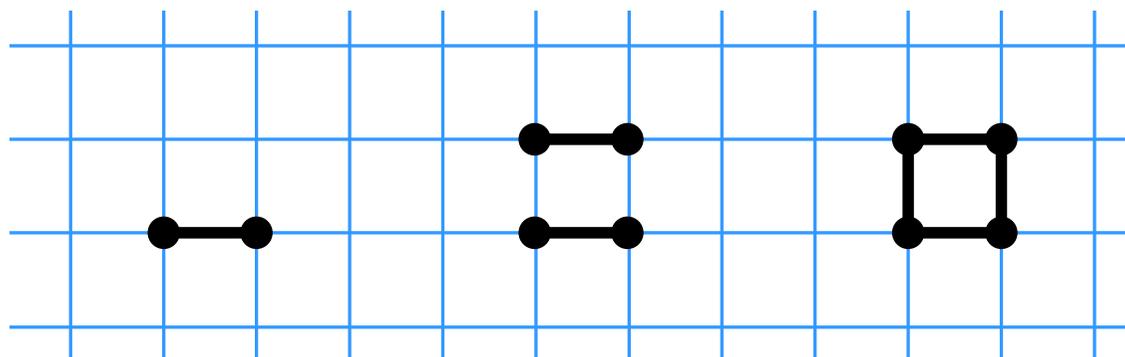
Z を $v = 0$ のまわりで Taylor 展開

66 Ising 模型の高温展開

$$\begin{aligned}
 \prod_{\langle i,j \rangle: \text{edges}} (1 + \sigma_i \sigma_j v) &= \cdots (1 + \sigma_i \sigma_j v) (1 + \sigma_i \sigma_{j'} v) \cdots \\
 &= 1 + v \sum_{\langle i,j \rangle: \text{edges}} \sigma_i \sigma_j + v^2 \sum_{\substack{\langle i,j \rangle: \text{edges} \\ \langle i,j \rangle \neq \langle k,l \rangle}} \sum_{\langle k,l \rangle: \text{edges}} \sigma_i \sigma_j \sigma_k \sigma_l + \cdots \\
 &= \sum_{\substack{\Gamma \\ \emptyset \subset \Gamma \subset \text{edges}}} v^{|\Gamma|} \prod_{\langle i,j \rangle \in \Gamma} \sigma_i \sigma_j
 \end{aligned}$$

ペア $\sigma_i \sigma_j \longleftrightarrow i$ と j を結ぶ bond

展開の各項 \longleftrightarrow 格子 \mathbb{Z}^d 上のグラフ Γ



67 admissible graphs

\mathbb{Z} へのグラフ Γ の寄与 ?

$$\sum_{\sigma} \prod_{\langle i,j \rangle \in \Gamma} \sigma_i \sigma_j = \sum_{\sigma} \prod_i \sigma_i^{m_i}$$

$m_i = \Gamma$ における頂点 i の辺の数 (valency)

$\sigma_i \in \{\pm 1\}$ に関する和

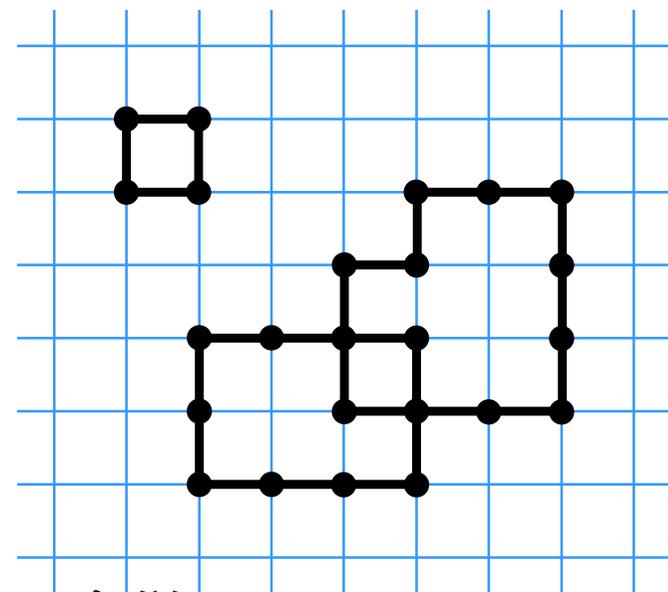
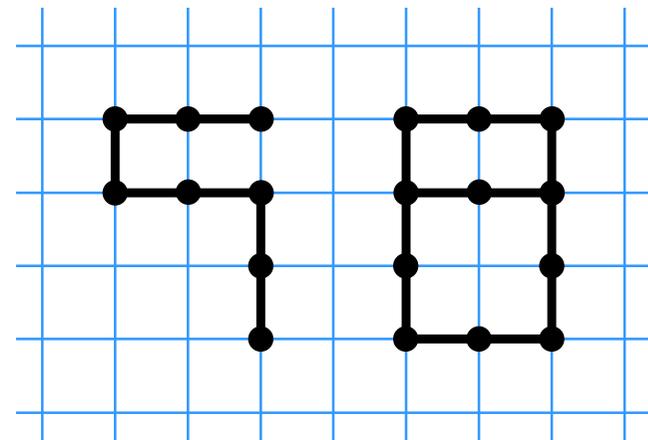
$$\sum_{\sigma_i = \pm 1} \sigma_i^{m_i} = \begin{cases} 2 & m_i \text{ が偶数} \\ 0 & m_i \text{ が奇数} \end{cases}$$

$\Rightarrow \sigma_i$ について奇関数の項の寄与は消える :

各頂点の valency

が偶数のグラフ Γ のみ考えればよい

“admissible graph” ($\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 係数 cycle)



いくつかの (辺を共有しない) 単純閉曲線 (loop) の合併

68 Ising 模型 = グラフの数え上げ母関数

d 次元正方格子、格子点の総数 N

$$Z = (2 \cosh \beta)^N Q(v)$$

$$v = \tanh \beta$$

$$Q(v) = \sum_{\Gamma: \text{admissible}} v^{|\Gamma|} = \sum_{l=0}^{\infty} g(l) v^l$$

$$g(l) = \#\{\text{admissible graph with } l \text{ links}\}$$

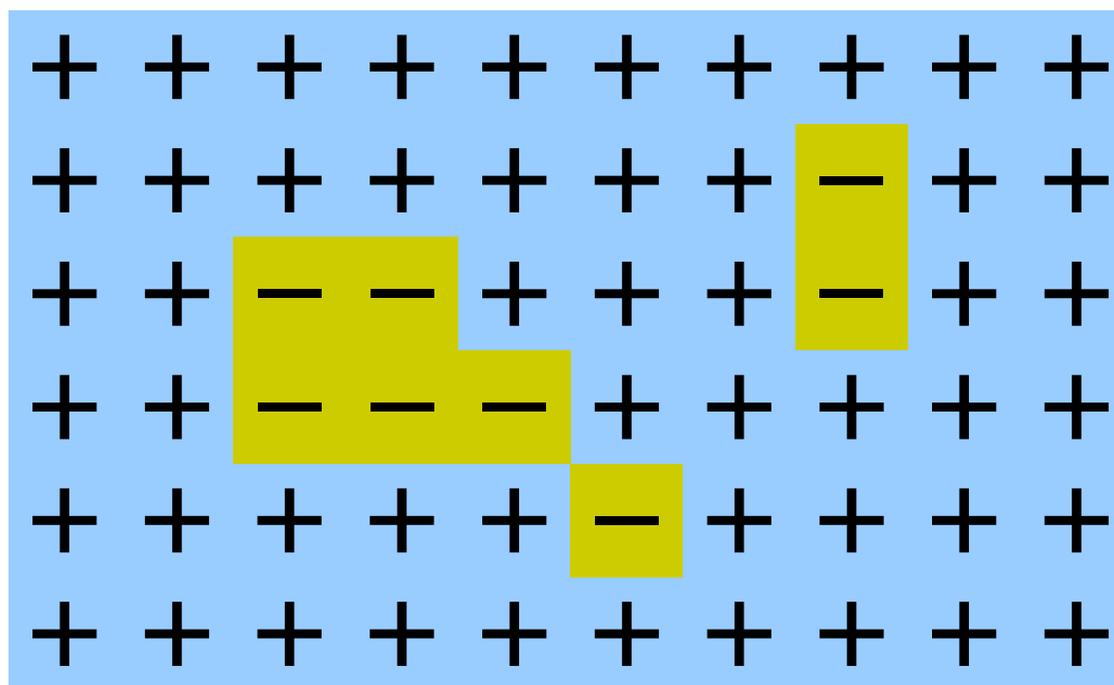
69 低温展開

$$T \rightarrow 0 \quad \beta \rightarrow +\infty$$

分配関数に主として寄与するのは、すべてのスピンの揃っている配位

$\sigma_i = +1$ ($\forall i$) を基準に考える

反転したスピン $\sigma = -1$ は、 $+1$ の海に浮かぶ島



境界 (domain-wall) \iff 双対格子 Λ^* 上の admissible graph Γ^*

70 低温展開

$$(++) , (--) \Rightarrow e^\beta, \quad (+-) \Rightarrow e^{-\beta}$$

配位のエネルギー $+-$ が隣り合う境界 (domain-wall) $\partial\Gamma^*$ の長さ

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{\Gamma^*} e^{2N\beta - 2\beta|\Gamma^*|} \\ &\quad \Gamma^* : \text{admissible} \\ &\quad \quad \text{graphs on } \Lambda^* \\ &= e^{2N\beta} Q(e^{-2\beta}) \end{aligned}$$

71 Kramers-Wannier 双対性

$Q(v)$: admissible graph の母関数

$$\text{高温展開} \quad Z(\beta) = 2^N (\cosh \beta)^{2N} Q(\tanh \beta)$$

$$\text{低温展開} \quad Z(\beta) = e^{2\beta N} Q(e^{-2\beta})$$

そこで involution $\beta \leftrightarrow \tilde{\beta}$ を

$$\tanh \beta = e^{-2\tilde{\beta}}$$

で定義すると

$$v \equiv \tanh \beta, \quad \tilde{v} \equiv \tanh \tilde{\beta}$$

$$v = \frac{1 - \tilde{v}}{1 + \tilde{v}} \quad \tilde{v} = \frac{1 - v}{1 + v}$$

72 Kramers-Wannier 双対性

$$Z(\beta) = (\sinh 2\beta)^N Z(\tilde{\beta})$$

スピン 1 個あたりの自由エネルギー $f(\beta) \equiv \frac{1}{N} F(\beta)$

$$f(\beta) = \log \sinh 2\beta + f(\tilde{\beta})$$

$\sinh 2\beta \cdot \sinh 2\tilde{\beta} = 1$ ゆえ

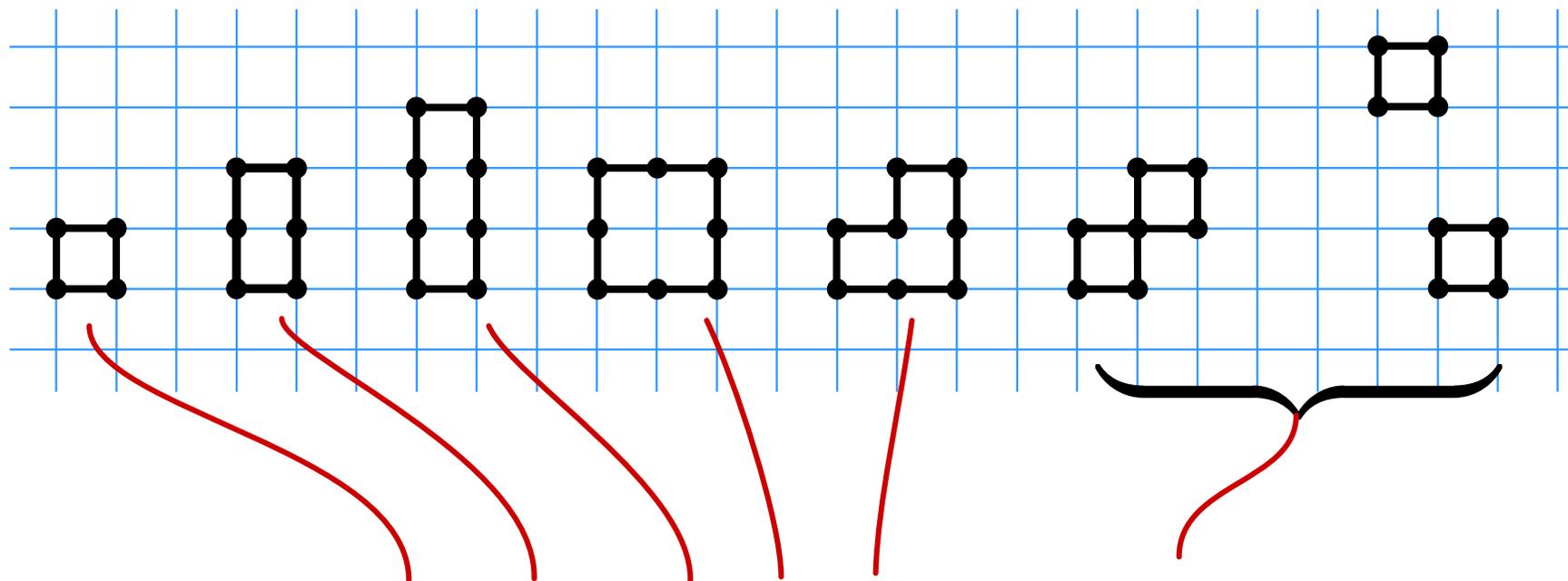
$$f(\beta) - \frac{1}{2} \log \sinh 2\beta = f(\tilde{\beta}) - \frac{1}{2} \log \sinh 2\tilde{\beta}$$

duality 変換での固定点

$$t = \tilde{t} = \frac{1-t}{1+t} \quad t_c = \sqrt{2}-1 \quad \beta_c = \frac{1}{2} \log(\sqrt{2}+1) = 0.4406867935 \dots$$

74 2次元 Ising 模型

2次元正方格子、格子点の総数 N



$$Q(v) = 1 + N [v^4 + 2v^6 + (2 + 1 + 4)v^8] + \frac{N(N-5)}{2}v^8 + O(v^{10})$$

$$\frac{1}{N} \log Q(v) = v^4 + 2v^6 + \frac{9}{2}v^8 + O(v^{10})$$

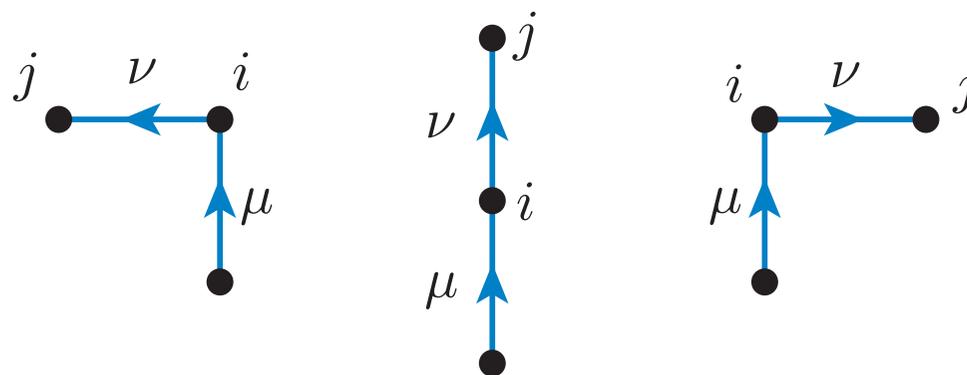
76 2次元 Ising 模型の厳密解

Onsager

$$Z = Z_0 \sqrt{\det(I - vM)}, \quad Z_0 = 2^N (\cosh \beta)^{2N}$$

$M : 4N \times 4N$ matrix := $\Lambda \times \{\rightarrow, \uparrow, \leftarrow, \downarrow\} \ni$ (格子点, 進入方向) を頂点とするグラフの(重み付き)隣接行列

$$\omega = e^{\pi\sqrt{-1}/4}$$



otherwise

$$M_{(i,\mu),(j,\nu)} = \begin{matrix} \omega^{-1} & 1 & \omega & 0 \end{matrix}$$

78 2次元 Ising 模型

$$Z = 2^N (\cosh \beta)^{2N} \times \prod_{q_1, q_2=1}^L \left[(1 + v^2)^2 - 2v(1 - v^2) \left\{ \cos \frac{2\pi q_1}{L} + \cos \frac{2\pi q_2}{L} \right\} \right]^{1/2}$$

格子点あたりの自由エネルギー

$$\beta f = -\log 2 - \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_0^{2\pi} d\omega_1 d\omega_2 \log \left[\cosh^2(2\beta) - \sinh(2\beta) (\cos \omega_1 + \cos \omega_2) \right]$$

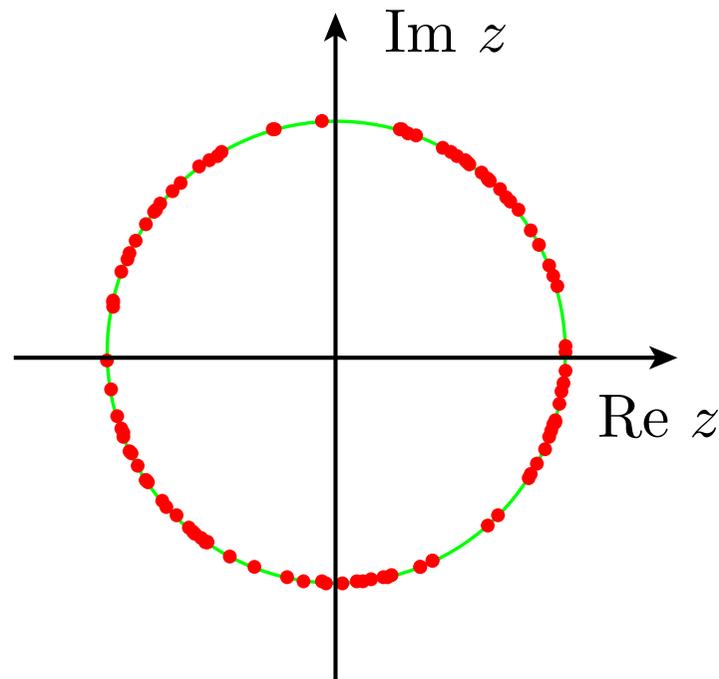
logarithmic Mahler measure

79 Lee-Yang の円定理

$-1 \leq a_{ij} = a_{ji} \leq 1$, $(i, j = 1, \dots, N)$ に対し、

$$P(z) \equiv \sum_{\substack{I \cup J = \{1, \dots, N\} \\ I \cap J = \emptyset}} z^{|I|} \prod_{\substack{i \in I \\ j \in J}} a_{ij} \in \mathbb{R}[z]$$

と定義する。このとき $z^N P(z^{-1}) = P(z)$ であり、 $P(z) = 0$ の根は絶対値が 1 の複素数である。



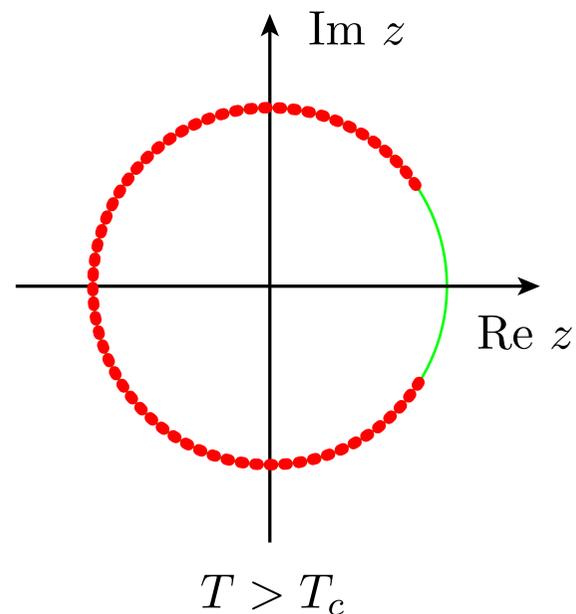
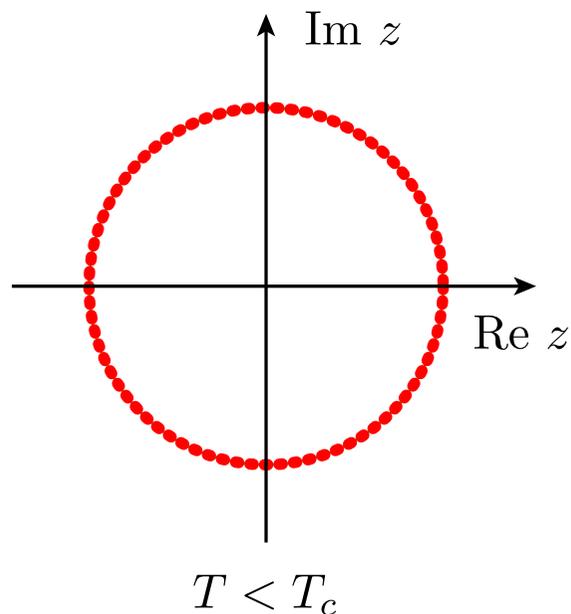
80 強磁性 Ising 模型への意味

$\{1, 2, \dots, N\} = \Lambda$ 格子点の集合

$$I = \{i | \sigma_i = +1\} \quad J = \{i | \sigma_i = -1\}$$

$$a_{ij} = \begin{cases} e^{-2\beta} & i, j \text{ が隣接する格子点のとき} \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

$P(z)$ は Ising 模型の低温展開 (任意次元)



81 経路積分 = 分配関数 = 物理学におけるゼータ

- 関数等式

$$f(\beta) - \frac{1}{2} \log \sinh 2\beta = f(\tilde{\beta}) - \frac{1}{2} \log \sinh 2\tilde{\beta}$$

- 行列式表示

$$Z = Z_0 \sqrt{\det(I - vM)}$$

- Riemann 予想の類似

$$P(z) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{Re}(\log z) = 0$$