

Feynman 経路積分—時間分割近似法による経路空間上の解析として

熊ノ郷 直人 (工学院大学)

Encounter with Mathematics 第 52 回, 2010 年 1 月 9 日

[1] N. Kumano-go, Feynman path integrals as analysis on path space by time slicing approximation.

Bull. Sci. Math. vol. 128 (2004) 197–251.

[2] D. Fujiwara and N. Kumano-go, Smooth functional derivatives in Feynman path integral by time slicing approximation.

Bull. Sci. Math. vol. 129 (2005) 57–79.

[3] N. Kumano-go and D. Fujiwara, Feynman path integrals and semiclassical approximation.

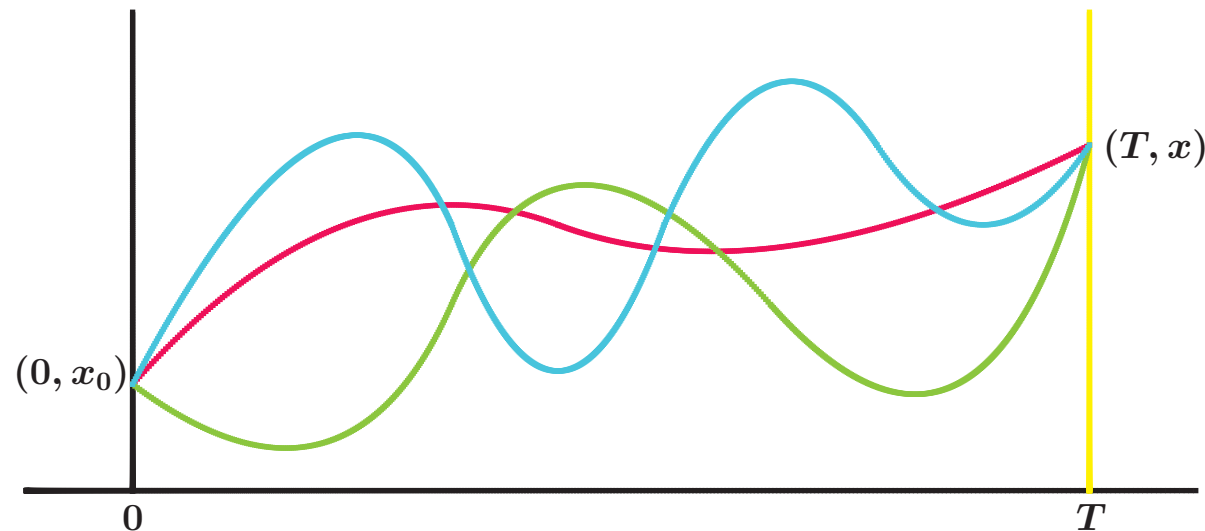
RIMS Kokyuroku Bessatsu B5 (2008) 241-263 (概説).

1. Introduction

1948 年、Feynman は Schrödinger 方程式 $\left(i\hbar\partial_T + \frac{\hbar^2}{2}\Delta - V(T, x) \right) u(T, x) = 0$ の基本解の積分核 $K(T, x, x_0)$ を

$$K(T, x, x_0) = \int e^{\frac{i}{\hbar}S[\gamma]} \mathcal{D}[\gamma]$$

と表現した。ここで、 $\gamma : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ は $\gamma(0) = x_0$, $\gamma(T) = x$ となる経路、 $S[\gamma] = \int_0^T \frac{1}{2} \left| \frac{d\gamma}{dt} \right|^2 - V(t, \gamma) dt$ は経路 γ の作用、 $\int \sim \mathcal{D}[\gamma]$ はすべての経路に関する新しい和（経路積分）である。R. P. Feynman, Rev. Mod. Phys. 20 (1948).



Feynman は経路積分を有限次元積分の極限として説明した。この方法は現在 **時間分割近似法** と呼ばれる。

さらに Feynman は一般の汎関数 $F[\gamma]$ を振幅とする経路積分を考え、汎関数積分

$$\int F[\gamma] e^{\frac{i}{\hbar} S[\gamma]} \mathcal{D}[\gamma]$$

と汎関数微分 $(DF)[\gamma][\eta]$ からなる経路空間上の新しい解析学を提案し、量子力学に別の定式化を与えた。

しかし 1960 年、Cameron は、経路積分の測度 $e^{\frac{i}{\hbar} S[\gamma]} \mathcal{D}[\gamma]$ が数学的に存在しないことを証明した。R. H. Cameron, J. of Math. and Phys. Sci. 39(1960).

Remark **測度** を用いて、我々は積分の多くの性質が証明できる。

- 2つの積分の順序交換
- 積分と limit の順序交換
- 積分の存在 など。

我々の結果

時間分割近似法 を用いて、なめらかな汎関数微分 $(DF)[\gamma][\eta]$ をもつ

Feynman 経路積分の存在

$$\int e^{\frac{i}{\hbar}S[\gamma]} F[\gamma] \mathcal{D}[\gamma]$$

を証明し、積分としての以下の性質を証明した。

- Riemann(-Stieltjes) 積分や解析的 limit との順序交換
- 微分積分学の基本定理
- 平行移動 $\gamma + \eta$ や直交変換 $Q\gamma$ のもとでの不変性
- 汎関数微分 $(DF)[\gamma][\eta]$ に関する部分積分やテイラー展開
- 準古典近似 $\hbar \rightarrow 0$
- 準古典近似 $\hbar \rightarrow 0$ の第 2 項 (D. Fujiwara)

正確に言えば、我々は、時間分割近似法が始点と終点 (x, x_0) の空間 $\mathbb{R}^{2d}$ 上で広義一様収束する汎関数 $F[\gamma]$ のかなり一般的なクラス $\mathcal{F}$ を与えた。

Remark Schrödinger 方程式の基本解の構成法として、 $\mathbb{R}^{2d}$ 上の（広義）一様収束を示した研究（我々はこれを $F[\gamma] \equiv 1$ とみなす）

- Fujiwara(1979,1991) ● Kitada-H. Kumano-go(1981) ● Yajima(1991)
- N. Kumano-go(1995) ● Fujiwara-Tsuchida(1997) ● W. Ichinose(1997)

経路積分の他の数学的な定式化として

- Nelson(1964) ● Cameron-Storvick(1983) Wiener 測度の解析接続
- Itô(1967) ● Albeverio-Hoegh Krohn(1976) ● Truman(1972) 無限次元振動積分
Albeverio, Hoegh-Krohn, Mazzucchi, Mathematical theory of Feynman path integrals, 2nd, Springer, 2008.
- Johnson-Lapidus ● Gill-Zachary(2002) Operational calculus
Johnson and Lapidus, The Feynman integral and Feynman's operational calculus, Oxford, 2000.
- T. Ichinose-Tamura(1987) 2次元 Dirac 方程式に対し **測度** を構成
一瀬孝『Path Integral 入門』「数理物理への誘い」(江沢洋編)遊星社, 1994.

2. Feynman 経路積分の存在

Assumption of $S[\gamma] = \int_0^T \frac{1}{2} \left| \frac{d\gamma}{dt} \right|^2 - V(t, \gamma) dt.$

$V(t, x) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ は $\partial_x^\alpha V(t, x)$ が連続で

$$|\partial_x^\alpha V(t, x)| \leq C_\alpha (1 + |x|)^{\max(2-|\alpha|, 0)}.$$

Example of $F[\gamma] \in \mathcal{F}$ (粗く言えば)

(1) $|\partial_x^\alpha B(t, x)| \leq C_\alpha (1 + |x|)^m$ のとき、

時刻 t での値 $F[\gamma] = B(t, \gamma(t)) \in \mathcal{F}$, $F[\gamma] \equiv \mathbf{1} \in \mathcal{F}$,

Riemann(-Stieltjes) 積分 $F[\gamma] = \int_{T'}^{T''} B(t, \gamma(t)) dt \in \mathcal{F}.$

(2) $|\partial_x^\alpha B(t, x)| \leq C_\alpha$ のとき、 $F[\gamma] = e^{\int_{T'}^{T''} B(t, \gamma(t)) dt} \in \mathcal{F}.$

(3) $Z : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}^d$ が $|\partial_x^\alpha Z(t, x)| + |\partial_x^\alpha \partial_t Z(t, x)| \leq C_\alpha (1 + |x|)^m$,

${}^t(\partial_x Z) = (\partial_x Z)$ をみたすとき、線積分 $F[\gamma] = \int_{T'}^{T''} Z(t, \gamma(t)) \cdot d\gamma(t) \in \mathcal{F}.$

多くの $F[\gamma] \in \mathcal{F}$ を創ることができる。

クラス $\mathcal{F}$ をどのように定義するかは後の節で述べる。たとえ $\mathcal{F}$ の定義を述べなくても、次の定理から、多くの汎関数 $F[\gamma] \in \mathcal{F}$ を創ることができるからである。

Theorem 1 (Smooth algebra) 任意の $F[\gamma], G[\gamma] \in \mathcal{F}$, 任意の折れ線経路

$\eta : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, 任意の $d \times d$ 型実行列 P に対し、

$$(1) \quad F[\gamma] + G[\gamma] \in \mathcal{F}, \quad F[\gamma]G[\gamma] \in \mathcal{F}.$$

$$(2) \quad F[\gamma + \eta] \in \mathcal{F}, \quad F[P\gamma] \in \mathcal{F}.$$

$$(3) \quad (DF)[\gamma][\eta] \in \mathcal{F}.$$

Remark (汎関数微分) 折れ線経路 $\gamma : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ と $\eta : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ に対し、

$$(DF)[\gamma][\eta] = \left. \frac{d}{d\theta} F[\gamma + \theta\eta] \right|_{\theta=0}.$$

時間分割近似法

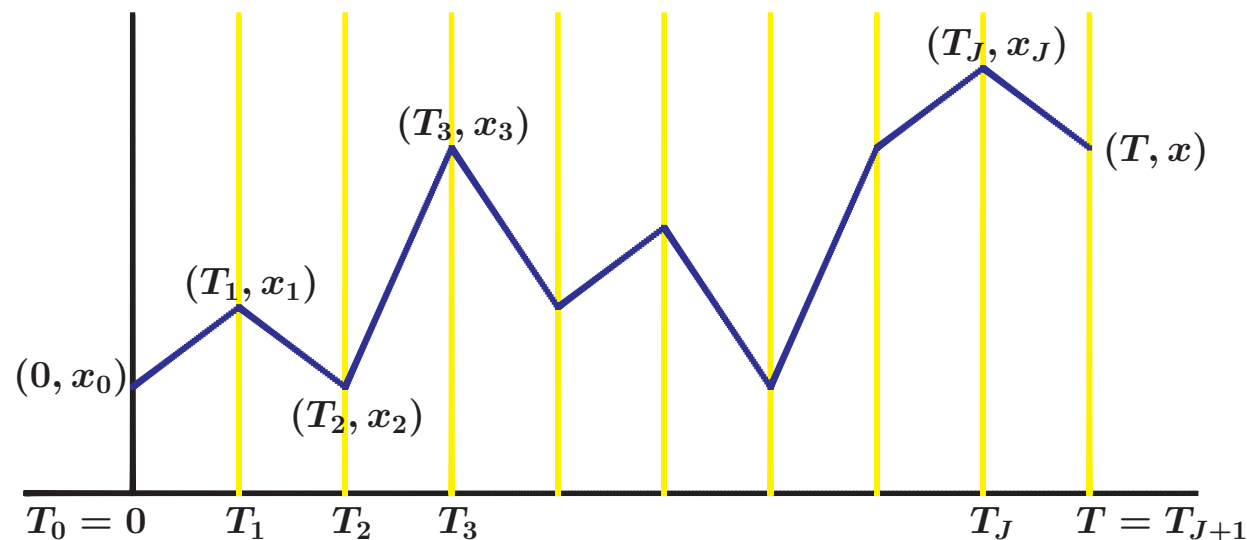
$\Delta_{T,0} : T = T_{J+1} > T_J > \cdots > T_1 > T_0 = 0$ を区間 $[0, T]$ の任意の分割とし、

$t_j = T_j - T_{j-1}$, $|\Delta_{T,0}| = \max_{1 \leq j \leq J+1} t_j$ とする。

$x = x_{J+1}$ とおき、 $x_J, x_{J-1}, \dots, x_1 \in \mathbb{R}^d$ とする。

$\gamma_{\Delta_{T,0}}$ を $j = 1, 2, \dots, J, J+1$ に対し、 (T_j, x_j) と (T_{j-1}, x_{j-1}) を線分で結ぶ任意の折れ線経路とする。汎関数 $S[\gamma_{\Delta_{T,0}}]$, $F[\gamma_{\Delta_{T,0}}]$ は $x_{J+1}, x_J, \dots, x_1, x_0$ の関数となる。

$$S[\gamma_{\Delta_{T,0}}] = S_{\Delta_{T,0}}(x_{J+1}, x_J, \dots, x_1, x_0), \quad F[\gamma_{\Delta_{T,0}}] = F_{\Delta_{T,0}}(x_{J+1}, x_J, \dots, x_1, x_0).$$



Feynman 経路積分は存在する

Theorem 2 (Feynman 経路積分の存在)

T は十分小さいとする。このとき、任意の $F[\gamma] \in \mathcal{F}$ に対し、

$$\int e^{\frac{i}{\hbar}S[\gamma]} \mathbf{F}[\gamma] \mathcal{D}[\gamma] \equiv \lim_{|\Delta_{T,0}| \rightarrow 0} \prod_{j=1}^{J+1} \left(\frac{1}{2\pi i \hbar t_j} \right)^{d/2} \int_{\mathbb{R}^{dJ}} e^{\frac{i}{\hbar}S[\gamma_{\Delta_{T,0}}]} \mathbf{F}[\gamma_{\Delta_{T,0}}] \prod_{j=1}^J dx_j \quad (\star)$$

は始点と終点 $(x, x_0) \in \mathbb{R}^{2d}$ に関して広義一様収束する。 i.e., well-defined.

Remark $F[\gamma] \equiv 1$ のときでさえ、右辺の各積分は絶対収束しない。(振動積分)

$$\int_{\mathbf{B}^d} \mathbf{1} dx_j = \infty.$$

さらに積分（分割）の個数 J は ∞ になる。

$$\infty \times \infty \times \infty \times \infty \times \dots, \quad J \rightarrow \infty.$$

Remark 汎関数 $S[\gamma_{\Delta_{T,0}}]$ は関数 $S_{\Delta_{T,0}}(x_{J+1}, x_J, \dots, x_1, x_0)$ となる。

Feynman は関数の形

$$\lim_{|\Delta_{T,0}| \rightarrow 0} \prod_{j=1}^{J+1} \left(\frac{1}{2\pi i \hbar t_j} \right)^{d/2} \int_{\mathbb{R}^{dJ}} e^{\frac{i}{\hbar} S_{\Delta_{T,0}}(x_{J+1}, x_J, \dots, x_1, x_0)} \prod_{j=1}^J dx_j$$

を用いて説明した。Nelson は $S_{\Delta_{T,0}}$ を 近似 し、Trotter 公式で絶対収束しない積分を一個づつ作用素として扱い、 $v \in L^2(\mathbb{R}^d)$ のとき以下の L^2 -収束を証明した。

$$\lim_{J \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^{J+1} \left(\frac{1}{2\pi i \hbar T/(J+1)} \right)^{d/2} \int_{\mathbb{R}^d} \cdots \int_{\mathbb{R}^d} e^{\frac{i}{\hbar} \sum_{j=1}^{J+1} \left(\frac{(x_j - x_{j-1})^2}{2T/(J+1)} - V(x_{j-1}) \frac{T}{J+1} \right)} v(x_0) \prod_{j=0}^J dx_j.$$

E. Nelson, J. Math. Phys. 5 (1964). しかし、近似 は、もとの汎関数

$$S[\gamma_{\Delta_{T,0}}] = \sum_{j=1}^{J+1} \left(\frac{(x_j - x_{j-1})^2}{2t_j} - \int_{T_{j-1}}^{T_j} V(t, \frac{t - T_{j-1}}{T_j - T_{j-1}} x_j + \frac{T_j - t}{T_j - T_{j-1}} x_{j-1}) dt \right)$$

とは異なる。

我々は (★) の多重 (振動) 積分を直接扱い、汎関数 $S[\gamma_{\Delta_{T,0}}]$, $F[\gamma_{\Delta_{T,0}}]$ を保持する。

3. 微分積分学の基本定理

Theorem 3 T は十分小さいとする。 $m \geq 0$, $0 \leq T' \leq T'' \leq T$,

$f(t, x) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ は $\partial_x^\alpha f(t, x)$, $\partial_x^\alpha \partial_t f(t, x)$ が連続で

$|\partial_x^\alpha f(t, x)| + |\partial_x^\alpha \partial_t f(t, x)| \leq C_\alpha(1 + |x|)^m$ とする。このとき

$$\begin{aligned} & \int e^{\frac{i}{\hbar} S[\gamma]} \left(f(T'', \gamma(T'')) - f(T', \gamma(T')) \right) \mathcal{D}[\gamma] \\ &= \int e^{\frac{i}{\hbar} S[\gamma]} \left(\int_{T'}^{T''} (\partial_x f)(t, \gamma(t)) \cdot d\gamma(t) + \int_{T'}^{T''} (\partial_t f)(t, \gamma(t)) dt \right) \mathcal{D}[\gamma]. \end{aligned}$$

Remark $\int_{T'}^{T''} (\partial_x f)(t, \gamma(t)) \cdot d\gamma(t)$ は経路空間上の経路に沿った **新しい** 線積分である。**普通の** 線積分はすべての連続経路 γ やブラウン運動 $B(t)$ に対して **定義できない** からである。(すべての経路とは何か?)

経路空間上の経路に沿った新しい線積分

粗く言えば、ブラウン運動 $B(t)$ と折れ線経路 $\gamma_{\Delta_{T,0}}$ が $B(T_j) = x_j$ で比較できたら

Itô 積分 は $\gamma_{\Delta_{T,0}}$ の各線分の 始点 で近似される。

$$\int_{T'}^{T''} Z(t, B(t)) \cdot dB(t) \approx \sum_j Z(T_{j-1}, x_{j-1}) \cdot (x_j - x_{j-1}).$$

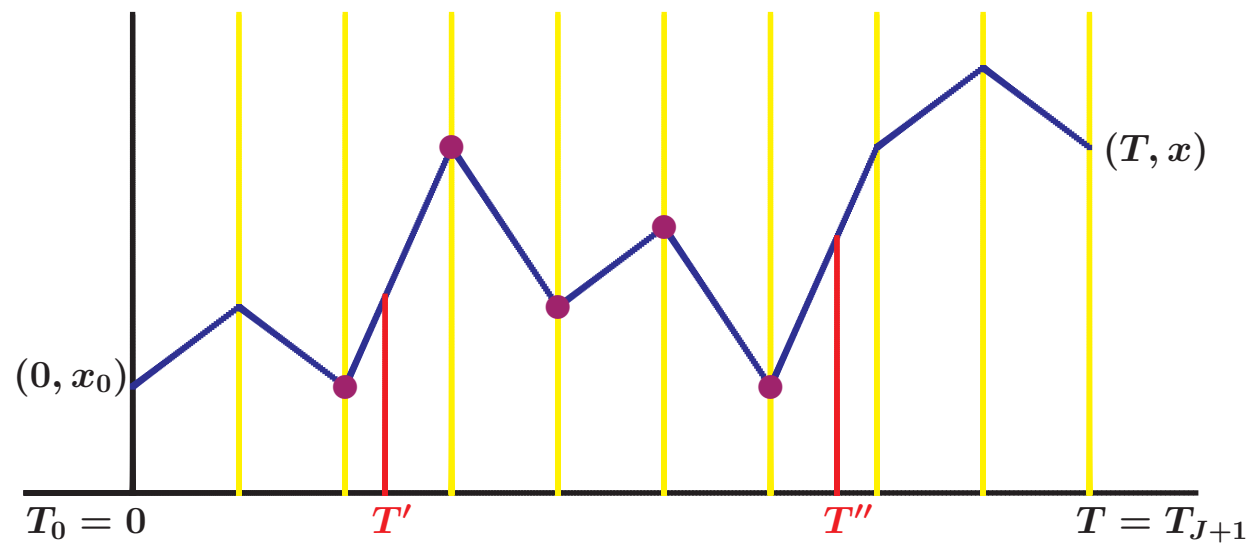
Stratonovich 積分 は $\gamma_{\Delta_{T,0}}$ の各線分の 中点 で近似される。

$$\int_{T'}^{T''} Z(t, B(t)) \circ dB(t) \approx \sum_j Z\left(\frac{T_j + T_{j-1}}{2}, \frac{x_j + x_{j-1}}{2}\right) \cdot (x_j - x_{j-1}).$$

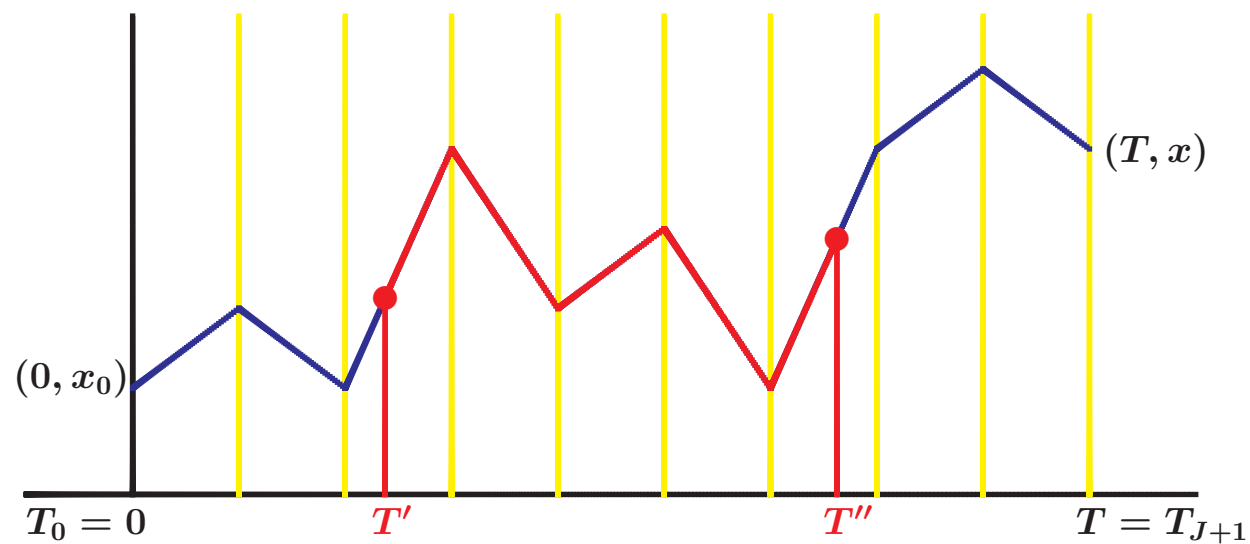
新しい線積分 は $\gamma_{\Delta_{T,0}}$ に沿った 古典的な線積分そのもの である。

$$\int_{T'}^{T''} Z(t, \gamma_{\Delta_{T,0}}(t)) \cdot d\gamma_{\Delta_{T,0}}(t).$$

Itô 積分は Riemann 和の極限。



新しい積分は線積分の極限。



Proof of Theorem 3 Example と Theorem 1(1) より

$$F_1[\gamma] = f(T'', \gamma(T'')) - f(T', \gamma(T')) \in \mathcal{F},$$

$$F_2[\gamma] = \int_{T'}^{T''} (\partial_x f)(t, \gamma(t)) \cdot d\gamma(t) + \int_{T'}^{T''} (\partial_t f)(t, \gamma(t)) dt \in \mathcal{F}.$$

微分積分学の基本定理より、**任意の折れ線経路** $\gamma_{\Delta_{T,0}}$ に対し

$$F_1[\gamma_{\Delta_{T,0}}] = F_2[\gamma_{\Delta_{T,0}}].$$

Theorem 2 より

$$\begin{aligned} \int e^{\frac{i}{\hbar} S[\gamma]} F_1[\gamma] \mathcal{D}[\gamma] &\equiv \lim_{|\Delta_{T,0}| \rightarrow 0} \prod_{j=1}^{J+1} \left(\frac{1}{2\pi i \hbar t_j} \right)^{d/2} \int_{\mathbb{R}^{dJ}} e^{\frac{i}{\hbar} S[\gamma_{\Delta_{T,0}}]} F_1[\gamma_{\Delta_{T,0}}] \prod_{j=1}^J dx_j \\ &= \lim_{|\Delta_{T,0}| \rightarrow 0} \prod_{j=1}^{J+1} \left(\frac{1}{2\pi i \hbar t_j} \right)^{d/2} \int_{\mathbb{R}^{dJ}} e^{\frac{i}{\hbar} S[\gamma_{\Delta_{T,0}}]} F_2[\gamma_{\Delta_{T,0}}] \prod_{j=1}^J dx_j \\ &\equiv \int e^{\frac{i}{\hbar} S[\gamma]} F_2[\gamma] \mathcal{D}[\gamma]. \quad \square \end{aligned}$$

4. Riemann(-Stieltjes) 積分や $\lim$ との順序交換

Theorem 4 T は十分小さいとする。 $m \geq 0, 0 \leq T' \leq T'' \leq T$,

$B(t, x) : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ は $\partial_x^\alpha B(t, x)$ が連続で

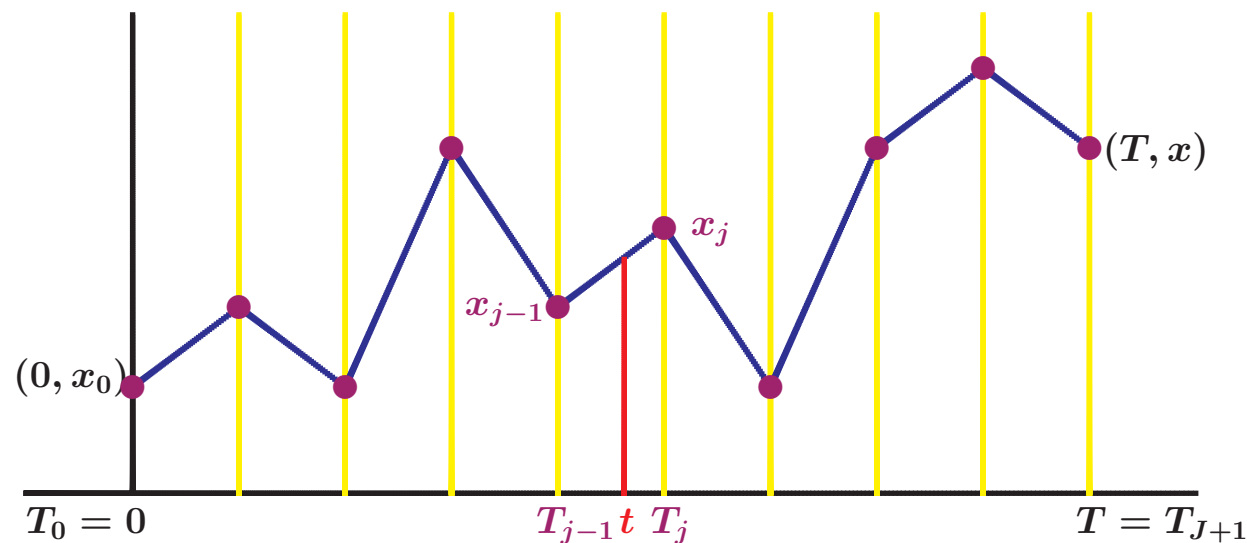
$|\partial_x^\alpha B(t, x)| \leq C_\alpha(1 + |x|)^m$ とする。このとき

$$\int_{T'}^{T''} \left(\int e^{\frac{i}{\hbar} S[\gamma]} B(t, \gamma(t)) \mathcal{D}[\gamma] \right) dt = \int e^{\frac{i}{\hbar} S[\gamma]} \left(\int_{T'}^{T''} B(t, \gamma(t)) dt \right) \mathcal{D}[\gamma].$$

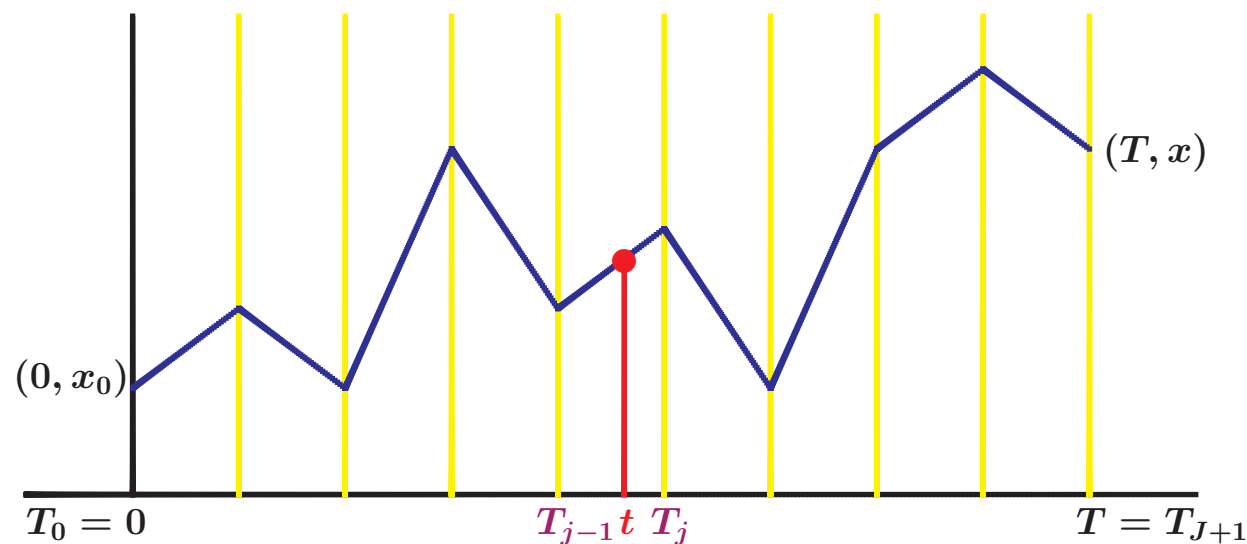
Remark 解析的 limit との順序交換も証明できる。ゆえに $|\partial_x^\alpha B(t, x)| \leq C_\alpha$ ならば

$$\begin{aligned} & \int e^{\frac{i}{\hbar} S[\gamma] + \frac{i}{\hbar} \int_0^T B(\tau, \gamma(\tau)) d\tau} \mathcal{D}[\gamma] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{i}{\hbar} \right)^n \int_0^T d\tau_n \int_0^{\tau_n} d\tau_{n-1} \cdots \int_0^{\tau_2} d\tau_1 \\ & \times \int e^{\frac{i}{\hbar} S[\gamma]} B(\tau_n, \gamma(\tau_n)) B(\tau_{n-1}, \gamma(\tau_{n-1})) \cdots B(\tau_1, \gamma(\tau_1)) \mathcal{D}[\gamma] \quad (\text{摂動展開}). \end{aligned}$$

Nelson は端点 x_j または x_{j-1} で近似した。



我々は粒子の位置 $\gamma_{\Delta_{T,0}}(t) = \frac{t - T_{j-1}}{T_j - T_{j-1}}x_j + \frac{T_j - t}{T_j - T_{j-1}}x_{j-1}$ を保持する。



Proof of Theorem 4 $\gamma_{\Delta_{T,0}}(t)$ を近似しないので、 $B(t, \gamma_{\Delta_{T,0}}(t))$ は $t \in [T', T'']$

に関して連続となる。(x_j の微分も)

部分積分のあと (振動積分) の Lebesgue の収束定理により、任意の分割 $\Delta_{T,0}$ に対し

$$\prod_{j=1}^{J+1} \left(\frac{1}{2\pi i \hbar t_j} \right)^{d/2} \int_{\mathbb{R}^{dJ}} e^{\frac{i}{\hbar} S[\gamma_{\Delta_{T,0}}]} B(t, \gamma_{\Delta_{T,0}}(t)) \prod_{j=1}^J dx_j$$

は $t \in [T', T'']$ に関して連続である。Theorem 2 より

$$\begin{aligned} & \int e^{\frac{i}{\hbar} S[\gamma]} B(t, \gamma(t)) \mathcal{D}[\gamma] \\ & \equiv \lim_{|\Delta_{T,0}| \rightarrow 0} \prod_{j=1}^{J+1} \left(\frac{1}{2\pi i \hbar t_j} \right)^{d/2} \int_{\mathbb{R}^{dJ}} e^{\frac{i}{\hbar} S[\gamma_{\Delta_{T,0}}]} B(t, \gamma_{\Delta_{T,0}}(t)) \prod_{j=1}^J dx_j \end{aligned}$$

は $t \in [T', T'']$ に関して一様収束する。ゆえに、極限関数

$$\int e^{\frac{i}{\hbar} S[\gamma]} B(t, \gamma(t)) \mathcal{D}[\gamma]$$

もまた $t \in [T', T'']$ に関して連続となる。つまり Riemann 可積分となる。

$$\begin{aligned}
& \int_{T'}^{T''} \left(\int e^{\frac{i}{\hbar} S[\gamma]} B(t, \gamma(t)) \mathcal{D}[\gamma] \right) dt \\
& \equiv \int_{T'}^{T''} \lim_{|\Delta_{T,0}| \rightarrow 0} \prod_{j=1}^{J+1} \left(\frac{1}{2\pi i \hbar t_j} \right)^{d/2} \int_{\mathbb{R}^{dJ}} e^{\frac{i}{\hbar} S[\gamma_{\Delta_{T,0}}]} B(t, \gamma_{\Delta_{T,0}}(t)) \prod_{j=1}^J dx_j dt.
\end{aligned}$$

さらに一様収束より $\int_{T'}^{T''} \dots dt$ と $\lim_{|\Delta_{T,0}| \rightarrow 0}$ の順序交換もできる。

$$= \lim_{|\Delta_{T,0}| \rightarrow 0} \int_{T'}^{T''} \prod_{j=1}^{J+1} \left(\frac{1}{2\pi i \hbar t_j} \right)^{d/2} \int_{\mathbb{R}^{dJ}} e^{\frac{i}{\hbar} S[\gamma_{\Delta_{T,0}}]} B(t, \gamma_{\Delta_{T,0}}(t)) \prod_{j=1}^J dx_j dt.$$

部分積分のあと（振動積分）の Fubini の定理より、

$$\begin{aligned}
& = \lim_{|\Delta_{T,0}| \rightarrow 0} \prod_{j=1}^{J+1} \left(\frac{1}{2\pi i \hbar t_j} \right)^{d/2} \int_{\mathbb{R}^{dJ}} e^{\frac{i}{\hbar} S[\gamma_{\Delta_{T,0}}]} \int_{T'}^{T''} B(t, \gamma_{\Delta_{T,0}}(t)) dt \prod_{j=1}^J dx_j \\
& \equiv \int e^{\frac{i}{\hbar} S[\gamma]} \left(\int_{T'}^{T''} B(t, \gamma(t)) dt \right) \mathcal{D}[\gamma]. \quad \square
\end{aligned}$$

5. 平行移動 $F[\gamma + \eta]$ や直交変換 $F[Q\gamma]$

Theorem 5 (平行移動) T は十分小さいとする。このとき、任意の $F[\gamma] \in \mathcal{F}$ と任意の折れ線経路 $\eta : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ に対し、

$$\int_{\gamma(0)=x_0, \gamma(T)=x} e^{\frac{i}{\hbar} S[\gamma+\eta]} F[\gamma + \eta] \mathcal{D}[\gamma] = \int_{\gamma(0)=x_0+\eta(0), \gamma(T)=x+\eta(T)} e^{\frac{i}{\hbar} S[\gamma]} F[\gamma] \mathcal{D}[\gamma] .$$

Remark (直交変換) T は十分小さいとする。このとき、任意の $F[\gamma] \in \mathcal{F}$ と任意の $d \times d$ 型直交行列 Q に対し、

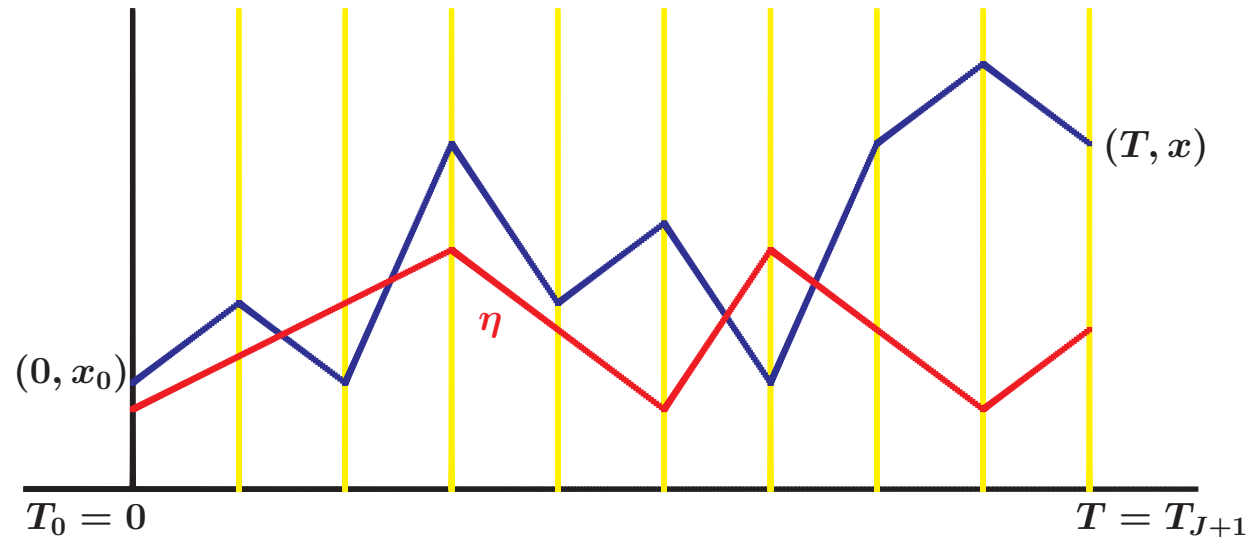
$$\int_{\gamma(0)=x_0, \gamma(T)=x} e^{\frac{i}{\hbar} S[Q\gamma]} F[Q\gamma] \mathcal{D}[\gamma] = \int_{\gamma(0)=Qx_0, \gamma(T)=Qx} e^{\frac{i}{\hbar} S[\gamma]} F[\gamma] \mathcal{D}[\gamma] .$$

Proof of Theorem 5 Theorem 2 より $\gamma_{\Delta_{T,0}}(T_j) = x_j$ とすれば

$$\begin{aligned} & \int_{\gamma(0)=x_0, \gamma(T)=x} e^{\frac{i}{\hbar} S[\gamma+\eta]} F[\gamma+\eta] \mathcal{D}[\gamma] \\ &= \lim_{|\Delta_{T,0}| \rightarrow 0} \prod_{j=1}^{J+1} \left(\frac{1}{2\pi i \hbar t_j} \right)^{d/2} \int_{\mathbb{R}^{dJ}} e^{\frac{i}{\hbar} S[\gamma_{\Delta_{T,0}}+\eta]} F[\gamma_{\Delta_{T,0}}+\eta] \prod_{j=1}^J dx_j. \end{aligned}$$

分割 $\Delta_{T,0}$ が折れ線経路 η が折れる時刻をすべて含むように選び、

$\eta(T_j) = y_j, j = 0, 1, \dots, J, J+1$ とおく。



$\gamma_{\Delta_{T,0}} + \eta$ は $j = 1, 2, \dots, J + 1$ に対し $(T_j, x_j + y_j)$ と $(T_{j-1}, x_{j-1} + y_{j-1})$ を
線分で結ぶ折れ線経路となるので

$$= \lim_{|\Delta_{T,0}| \rightarrow 0} \prod_{j=1}^{J+1} \left(\frac{1}{2\pi i \hbar t_j} \right)^{d/2} \int_{\mathbb{R}^{dJ}} e^{\frac{i}{\hbar} S_{\Delta_{T,0}}(x_{J+1} + y_{J+1}, x_J + y_J, \dots, x_1 + y_1, x_0 + y_0)} \\ \times F_{\Delta_{T,0}}(x_{J+1} + y_{J+1}, x_J + y_J, \dots, x_1 + y_1, x_0 + y_0) \prod_{j=1}^J dx_j .$$

変数変換 : $x_j + y_j \rightarrow x_j, j = 1, 2, \dots, J$ より

$$= \lim_{|\Delta_{T,0}| \rightarrow 0} \prod_{j=1}^{J+1} \left(\frac{1}{2\pi i \hbar t_j} \right)^{d/2} \int_{\mathbb{R}^{dJ}} e^{\frac{i}{\hbar} S_{\Delta_{T,0}}(x_{J+1} + y_{J+1}, x_J, \dots, x_1, x_0 + y_0)} \\ \times F_{\Delta_{T,0}}(x_{J+1} + y_{J+1}, x_J, \dots, x_1, x_0 + y_0) \prod_{j=1}^J dx_j .$$

$y_{J+1} = \eta(T)$ と $y_0 = \eta(0)$ に注意すれば

$$= \int_{\gamma(0)=x_0+\eta(0), \gamma(T)=x+\eta(T)} e^{\frac{i}{\hbar} S[\gamma]} F[\gamma] \mathcal{D}[\gamma] . \quad \square$$

6. 汎関数微分 $(DF)[\gamma][\eta]$

Theorem 6 (汎関数微分に関する部分積分)

T は十分小さいとする。このとき、任意の $F[\gamma] \in \mathcal{F}$ と $\eta(0) = \eta(T) = 0$ となる任意の折れ線経路 $\eta : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ に対し

$$\int e^{\frac{i}{\hbar} S[\gamma]} (DF)[\gamma][\eta] \mathcal{D}[\gamma] = -\frac{i}{\hbar} \int e^{\frac{i}{\hbar} S[\gamma]} (DS)[\gamma][\eta] F[\gamma] \mathcal{D}[\gamma].$$

Remark $F[\gamma] \equiv 1$ のとき

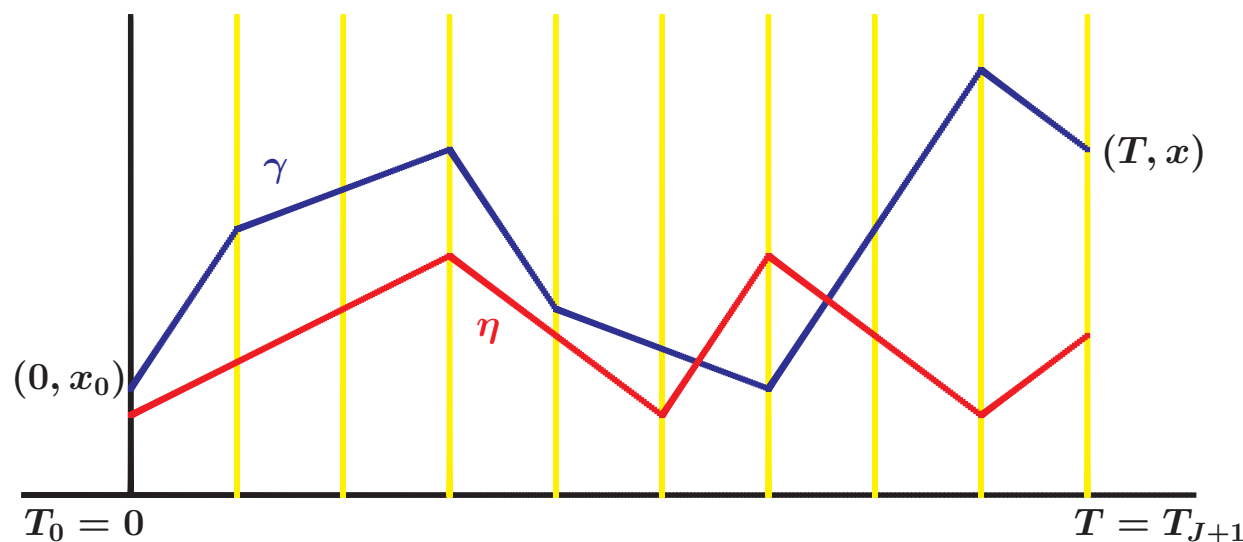
$$S[\gamma] = \int_0^T \frac{1}{2} \left| \frac{d\gamma}{dt} \right|^2 - V(t, \gamma) dt$$

に注意する。 $\eta(0) = \eta(T) = 0$ となる任意の折れ線経路 $\eta : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ に対し

$$0 = \int e^{\frac{i}{\hbar} S[\gamma]} \int_0^T \left(\frac{d\gamma}{dt} \frac{d\eta}{dt} - (\partial_x V)(t, \gamma(t)) \eta(t) \right) dt \mathcal{D}[\gamma].$$

Remark (汎関数微分) 分割 $\Delta_{T,0}$ が折れ線経路 γ や折れ線経路 η が折れる時刻をすべて含むように選び、 $\gamma(T_j) = x_j$, $\eta(T_j) = y_j$, $j = 0, 1, \dots, J, J+1$ とおく。このとき、任意の $\theta \in \mathbb{R}$ に対し、 $\gamma + \theta\eta$ は $j = 1, 2, \dots, J, J+1$ に対し $(T_j, x_j + \theta y_j)$ と $(T_{j-1}, x_{j-1} + \theta y_{j-1})$ を線分で結ぶ折れ線経路となるので、

$$F[\gamma + \theta\eta] = F_{\Delta_{T,0}}(x_{J+1} + \theta y_{J+1}, x_J + \theta y_J, \dots, x_1 + \theta y_1, x_0 + \theta y_0).$$



よって、汎関数微分 $(DF)[\gamma][\eta]$ は有限和で書ける。

$$(DF)[\gamma][\eta] = \left. \frac{d}{d\theta} F[\gamma + \theta\eta] \right|_{\theta=0} = \sum_{j=0}^{J+1} (\partial_{x_j} F_{\Delta_{T,0}})(x_{J+1}, x_J, \dots, x_1, x_0) \cdot y_j.$$

微分の方向を折れ線経路に **限定** しているので易しい。

Remark (汎関数微分に関するテイラー展開)

T は十分小さいとする。このとき、任意の $F[\gamma] \in \mathcal{F}$ と任意の折れ線経路

$\eta : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ に対し、

$$\begin{aligned} \int e^{\frac{i}{\hbar} S[\gamma]} F[\gamma + \eta] \mathcal{D}[\gamma] &= \sum_{l=0}^L \frac{1}{l!} \int e^{\frac{i}{\hbar} S[\gamma]} (D^l F)[\gamma][\eta] \cdots [\eta] \mathcal{D}[\gamma] \\ &+ \int_0^1 \frac{(1-\theta)^L}{L!} \int e^{\frac{i}{\hbar} S[\gamma]} (D^{L+1} F)[\gamma + \theta\eta][\eta] \cdots [\eta] \mathcal{D}[\gamma] d\theta. \end{aligned}$$

7. 準古典近似 $\hbar \rightarrow 0$

Theorem 7 (準古典近似 $\hbar \rightarrow 0$ の余りの評価)

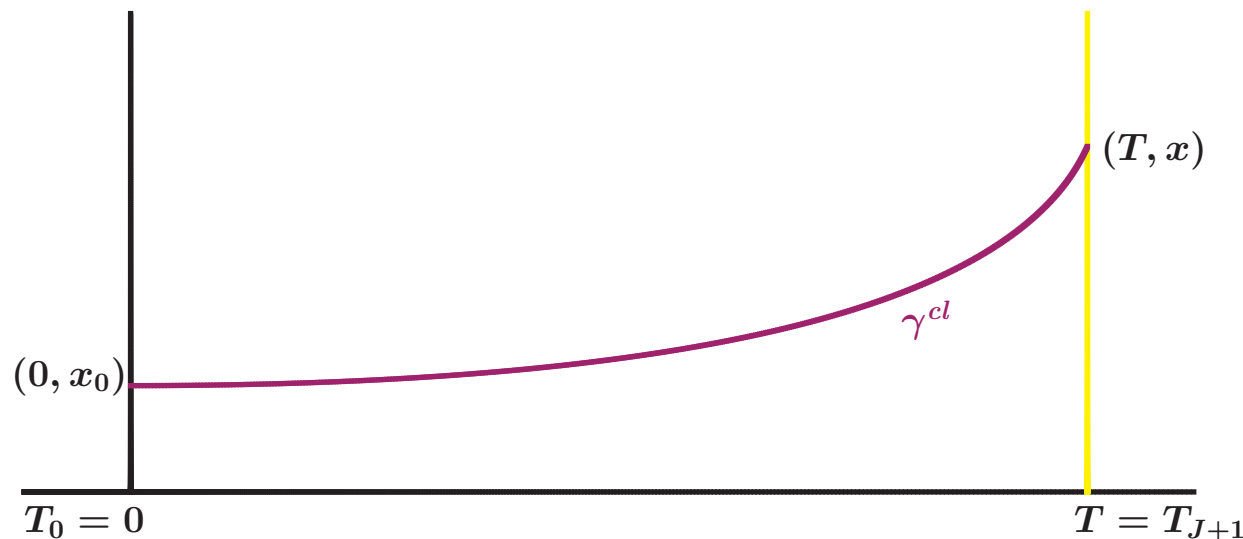
T は十分小さいとする。このとき、任意の $F[\gamma] \in \mathcal{F}$ に対し

$$\int e^{\frac{i}{\hbar}S[\gamma]} F[\gamma] \mathcal{D}[\gamma] = \left(\frac{1}{2\pi i \hbar T} \right)^{d/2} e^{\frac{i}{\hbar}S[\gamma^{cl}]} \left(D(T, x, x_0)^{-1/2} F[\gamma^{cl}] + \hbar \Upsilon(\hbar, x, x_0) \right)$$

と書ける。ここで γ^{cl} は $\gamma^{cl}(0) = x_0$, $\gamma^{cl}(T) = x$ となる一本の古典経路、

$D(T, x, x_0)$ は Morette-Van Vleck 行列式で、

$$|\Upsilon(\hbar, x, x_0)| \leq C(1 + |x| + |x_0|)^m.$$

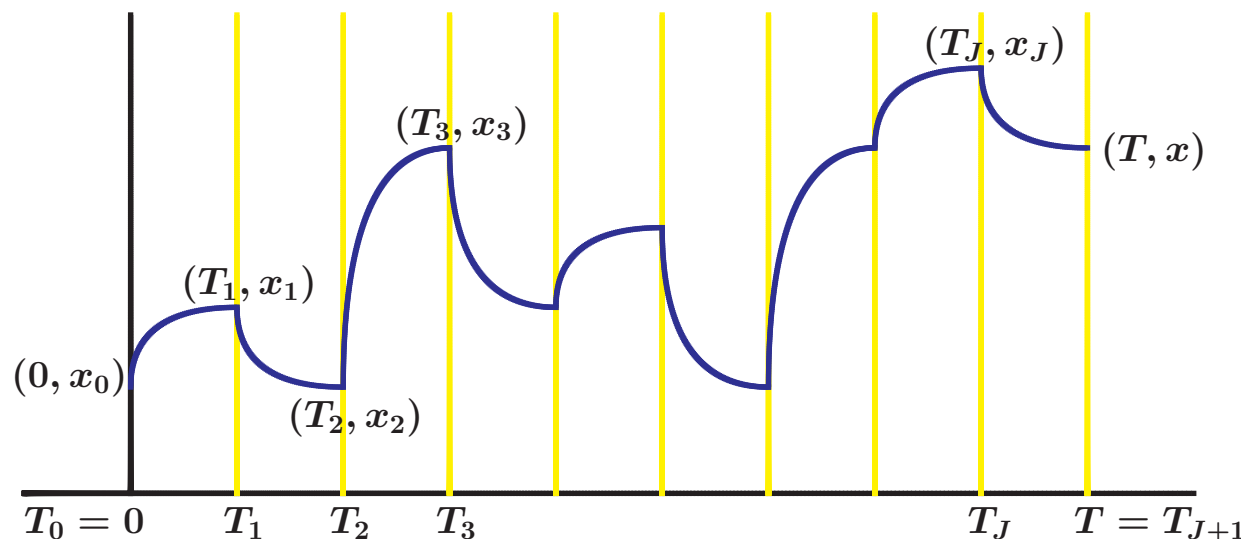


8. Theorems 1(1),2,7 の証明

1992 年、Fujiwara は Schrödinger 方程式の基本解 ($F[\gamma] \equiv 1$) の積分核の準古典近似を、近似としてシャープな **区分的古典経路** を用いて、以下のように証明した：

まず **区分的古典経路** による時間分割近似法を **相関数**, **主部**, **余り** に分ける。

$$\prod_{j=1}^{J+1} \left(\frac{1}{2\pi i \hbar t_j} \right)^{d/2} \int_{\mathbb{R}^{dJ}} e^{\frac{i}{\hbar} S_{\Delta_{T,0}}(x_{J+1}, x_J, \dots, x_1, x_0)} \prod_{j=1}^J dx_j \\ = \left(\frac{1}{2\pi i \hbar T} \right)^{d/2} e^{\frac{i}{\hbar} S_{\Delta_{T,0}}^{\dagger}(x, x_0)} \left(D_{\Delta_{T,0}}(x, x_0)^{-1/2} + \hbar \Upsilon_{\Delta_{T,0}}(\hbar, x, x_0) \right).$$



Remark **相関数** は 古典 **経路** γ^{cl} で定義される作用 $S[\gamma^{cl}]$ となる。

Remark **主部** は **相関数** の Hessian で定義される。

さらに、2つの分割

$$\Delta_{T,0} : T = T_{J+1} > T_J > \dots \dots \dots > T_1 > T_0 = 0,$$

$$(\Delta_{T,T_{N+1}}, \Delta_{T_{n-1},0}) : T = T_{J+1} > \dots > T_{N+1} > T_{n-1} > \dots > T_0 = 0$$

を比較すると、

$$\text{主部} \quad |D_{\Delta_{T,0}} - D_{(\Delta_{T,T_{N+1}}, \Delta_{T_{n-1},0})}| \leq C(T_{N+1} - T_{n-1})^2,$$

$$\text{余り} \quad |\Upsilon_{\Delta_{T,0}} - \Upsilon_{(\Delta_{T,T_{N+1}}, \Delta_{T_{n-1},0})}| \leq C \frac{1}{\hbar} (T_{N+1} - T_{n-1})^2, \quad |\Upsilon_{\Delta_{T,0}}| \leq C.$$

この評価を用いて、 $|\Delta_{T,0}| \rightarrow 0$ のときの収束

$$\text{主部} \quad |D_{\Delta_{T,0}} - D| \leq C|\Delta_{T,0}|T,$$

$$\text{余り} \quad |\Upsilon_{\Delta_{T,0}} - \Upsilon| \leq C \frac{1}{\hbar} |\Delta_{T,0}|T \quad (\clubsuit), \quad |\Upsilon| \leq C.$$

と準古典近似 $\hbar \rightarrow 0$ を証明した。藤原大輔「ファインマン経路積分の数学的方法」シュプリンガー, 1999.

私の疑問 $\hbar \rightarrow 0$ のとき、() の右辺 $\rightarrow \infty$ となる。なぜ、 $\frac{1}{\hbar}$ を削除して

$$\boxed{\text{余り}} \quad |\Upsilon_{\Delta_{T,0}} - \Upsilon| \leq C |\Delta_{T,0}| T \quad ?$$

と書けなかったのか？

理由 $\boxed{\text{余り}}$ を

$$\boxed{\text{余り}} = \frac{1}{\hbar} \left(\boxed{\text{全体}} - \boxed{\text{主部}} \right)$$

と定義したので、不可能である。

私の最初の問題 $\boxed{\text{区分的古典経路}}$ よりも近似として粗い $\boxed{\text{折れ線経路}}$ を用いて $\hbar$ 倍
シャープな評価を得ることができるか？ ($F[\gamma] \equiv 1$ のとき)

$$|\Upsilon_{\Delta_{T,0}} - \Upsilon| \leq C |\Delta_{T,0}| T (1 + |x| + |x_0|) \quad ?$$

Remark プランク定数 $\hbar = 1.054 \times 10^{-34}$ (J · s).

定義を変える ($\Upsilon_{\Delta_{T,0}}$ を Υ_{ϵ} , $0 \leq \epsilon \leq 1$ で定義する)

$(\Delta_{T,T_{N+1}}, \Delta_{T_{n-1},0})$ と $\Delta_{T,0}$ を $0 \leq \epsilon \leq 1$ で結ぶ。

$$\begin{array}{ccc}
 \epsilon = 1 & \left(\frac{1}{2\pi i \hbar T} \right)^{d/2} e^{\frac{i}{\hbar} S_{\Delta_{T,0}}^{\dagger}} \times \left(D_{\Delta_{T,0}}^{-1/2} + \hbar \Upsilon_{\Delta_{T,0}} \right) & \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 \epsilon & \left(\frac{1}{2\pi i \hbar T} \right)^{d/2} e^{\frac{i}{\hbar} S_{\epsilon}^*} \times \left(D_{\epsilon}^{-1/2} + \hbar \Upsilon_{\epsilon} \right) & \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \epsilon = 0 & \left(\frac{1}{2\pi i \hbar T} \right)^{d/2} e^{\frac{i}{\hbar} S_{(\Delta_{T,T_{N+1}}, \Delta_{T_{n-1},0})}^{\dagger}} \left(D_{(\Delta_{T,T_{N+1}}, \Delta_{T_{n-1},0})}^{-1/2} + \hbar \Upsilon_{(\Delta_{T,T_{N+1}}, \Delta_{T_{n-1},0})} \right) & .
 \end{array}$$

$\Upsilon_{\Delta_{T,0}} - \Upsilon_{(\Delta_{T,T_{N+1}}, \Delta_{T_{n-1},0})} = \Upsilon_1 - \Upsilon_0 = \int_0^1 (\partial_{\epsilon} \Upsilon_{\epsilon}) d\epsilon$ に注意する。

$$|\partial_{\epsilon} \Upsilon_{\epsilon}| \leq C(T_{N+1} - T_{n-1})^2 (1 + |x| + |x_0|)$$

をみたす 余り Υ_{ϵ} を定義できれば、 $\hbar$ に依存しない評価を得ることができる。

しかし、どうやって Υ_ϵ を定義するのか？

余り Υ_ϵ は **主部** $D_\epsilon^{-1/2}$ で定義される

主部 $D_\epsilon^{-1/2}$ は **相関数** S_ϵ で定義される

相関数 S_ϵ は **経路** で定義される

すべては経路で定義される

最初から順番に、すべての収束を証明すれば良い。

$$\boxed{\text{経路}} \implies \boxed{\text{相関数}} \implies \boxed{\text{主部}} \implies \boxed{\text{余り}}.$$

最初は 折れ線経路 $\gamma_{\Delta_{T,0}}$ だけを考えれば良いので、

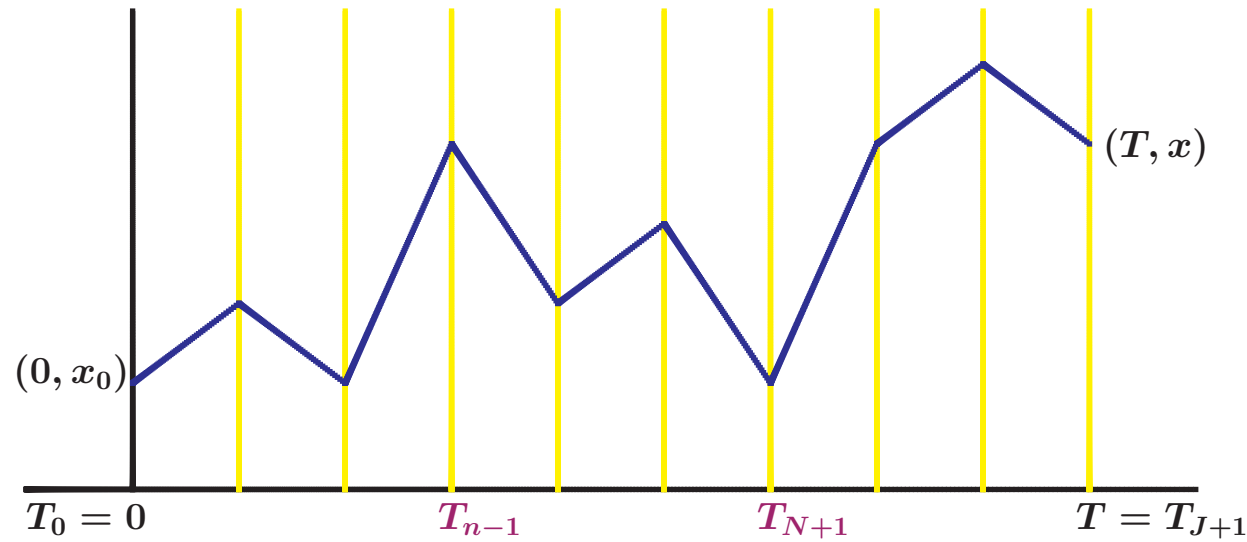
仮定 $F[\gamma] \equiv 1$ は必要ない ($F[\gamma]$ の仮定はない)

収束の証明なので Cauchy 列を作る。2つの分割

$$\Delta_{T,0} : T = T_{J+1} > T_J > \cdots \quad \cdots \quad \cdots > T_1 > T_0 = 0,$$

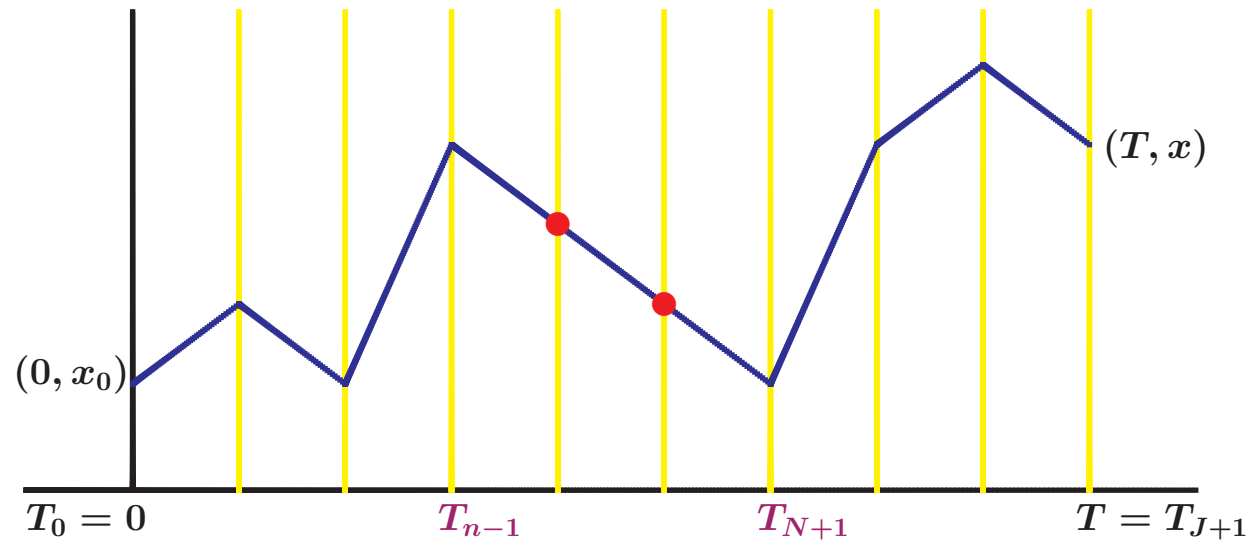
$$(\Delta_{T,T_{N+1}}, \Delta_{T_{n-1},0}) : T = T_{J+1} > \cdots > T_{N+1} > T_{n-1} > \cdots > T_0 = 0$$

を比較する。



Key Lemma $x_j^\circ = \frac{T_j - T_{n-1}}{T_{N+1} - T_{n-1}} x_{N+1} + \frac{T_{N+1} - T_j}{T_{N+1} - T_{n-1}} x_{n-1}$, $j = n, \dots, N$ とする。

$(x_N, \dots, x_n) = (x_N^\circ, \dots, x_n^\circ)$ のとき、**折れ線経路** $\gamma_{\Delta_{T,0}} = \gamma_{(\Delta_{T,T_{N+1}}, \Delta_{T_{n-1},0})}$.



2つの多重積分を2つの経路で比較する

$$\int \cdots \int \cdots \int \cdots \int \prod_{j=1}^J dx_j .$$

Key Lemma $(x_N, \dots, x_n) = (\mathring{x}_N, \dots, \mathring{x}_n)$ のとき

$$\begin{aligned} & F_{\Delta_{T,0}}(x_{J+1}, \dots, x_{N+1}, \mathring{x}_N, \dots, \mathring{x}_n, x_{n-1}, \dots, x_0) \\ &= F[\gamma_{\Delta_{T,0}}] = F[\gamma_{(\Delta_{T,T_{N+1}}, \Delta_{T_{n-1},0})}] \\ &= F_{(\Delta_{T,T_{N+1}}, \Delta_{T_{n-1},0})}(x_{J+1}, \dots, x_{N+1}, x_{n-1}, \dots, x_0) . \end{aligned}$$

$$\int \cdots \int \int \cdots \int \prod_{j=N+1}^{J+1} dx_j \prod_{j=1}^{n-1} dx_j .$$

Proof of Theorems 1(1),2,7 $\infty \times \infty \times \infty \times \infty \times \dots, J \rightarrow \infty$.

(1) $F[\gamma] \in \mathcal{F} \implies$ 時間分割近似法 (★) が収束する。

(★) が収束するように、**仮定** をどんどん加える。

(我々に $F[\gamma]$ の**仮定**はない。少なくとも $F[\gamma] \equiv 1$ の例は残るだろう。)

(2) $\int_{T'}^{T''} B(t, \gamma(t)) dt \in \mathcal{F}, B(t, \gamma(t)) \in \mathcal{F}.$

(★) の収束だけを考え、他のことは考えない。

(そうすれば $\mathcal{F}$ は集合として器が大きくなる。運が良ければ、他の例も含む。)

(3) $F[\gamma], G[\gamma] \in \mathcal{F} \implies F[\gamma] + G[\gamma], F[\gamma]G[\gamma] \in \mathcal{F}.$

加える **仮定** は $+$ と $\times$ で閉じたものにする。

(1)(3) をみたく **仮定** を発見した。(2) は偶然成立。(証明終了) □

9. 汎関数 $F[\gamma]$ のクラス $\mathcal{F}$ の仮定

折れ線経路 は **区分的古典経路** よりも近似として粗い。

さらに時間分割近似法が収束するように仮定をどんどん加えた。

このため、装飾なしの Assumption' は多くの **危点 (critical point)** をもつ。

簡単のため、 $1 \leq l \leq L \leq J + 1$ に対し、

$$x_{L,l} = (x_L, x_{L-1}, \dots, x_l)$$

と書く。**危点** $x_{L,l}^\dagger = x_{L,l}^\dagger(x_{L+1}, x_{l-1})$ を

$$(\partial_{x_{L,l}} S_{\Delta_{T,0}})(x_{J+1,L+1}, x_{L,l}^\dagger, x_{l-1,0}) = 0$$

で定義する。

Definition (汎関数のクラス $\mathcal{F}$) 汎関数 $F[\gamma]$ がすべての折れ線経路を定義域に含み、

後の Assumption をみたすとき、 $F[\gamma] \in \mathcal{F}$ とする。

Assumption' (装飾なしの仮定) $m \geq 0$ とする。任意の非負整数 M に対し、正の定数 A_M, X_M が存在し、任意の分割 $\Delta_{T,0}$, 任意の整数列

$$0 = j_0 < j_1 - 1 < j_1 < j_2 - 1 < j_2 < \cdots < j_K \leq J + 1,$$

$j_{K+1} - 1 = J + 1$ と任意の多重指数 $|\alpha_{j_{k+1}}|, |\alpha_{j_k}| \leq M$ に対し、以下が成立する。

$$(1) \quad \left| \left(\prod_{k=0}^K \partial_{x_{j_{k+1}-1}}^{\alpha_{j_{k+1}-1}} \partial_{x_{j_k}}^{\alpha_{j_k}} \right) F_{\Delta_{T,0}}(x_{J+1}, \mathbf{x}_{J,j_{K+1}}^\dagger, x_{j_K}, \cdots, x_{j_{s+1}-1}, \mathbf{x}_{j_{s+1}-2,j_{s+1}}^\dagger, x_{j_s}, \right. \\ \left. x_{j_{s-1}}, \mathbf{x}_{j_{s-2},j_{s-1}+1}^\dagger, x_{j_{s-1}}, x_{j_{s-1}-1}, \mathbf{x}_{j_{s-1}-2,j_{s-2}+1}^\dagger, x_{j_{s-2}}, \cdots, x_{j_1-1}, \mathbf{x}_{j_1-2,1}^\dagger, x_0 \right) \Big| \\ \leq A_M (X_M)^{K+1} (1 + |x_{J+1}| + |x_{j_K}| + \cdots + |x_{j_{s+1}-1}| + |x_{j_s}| \\ + |x_{j_{s-1}}| + |x_{j_{s-1}}| + |x_{j_{s-1}-1}| + |x_{j_{s-2}}| + \cdots + |x_{j_1-1}| + |x_0|)^m.$$

(2), (3), (4) は省略。(あと3ページ必要)

Remark この仮定で、Theorem 1(1),2,3,4,7 が成立。

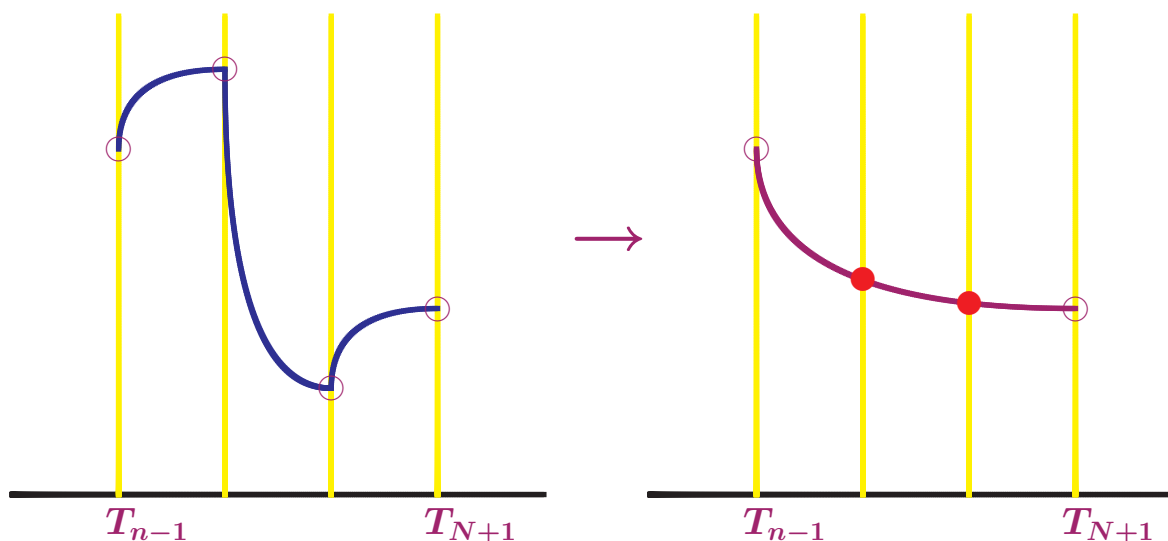
すべての危点 を古典経路の中に隠す

折れ線経路 の代わりに **区分的古典経路** を使えば、仮定は **危点** を必要としない。

Proof **区分的古典経路** に **危点** を代入すると、**区分的古典経路** は **一本の古典経路**

となる。ゆえに、**すべての危点** を**一本一本の古典経路** の中に隠すことができる。

$$F_{\Delta_{T,0}}(\cdots, x_{N+1}, x_{N,n}^\dagger, x_{n-1}, \cdots) = F_{(\Delta_{T,T_{N+1}}, \Delta_{T_{n-1},0})}(\cdots, x_{N+1}, x_{n-1}, \cdots).$$



Assumption” (区分的古典経路の場合の仮定) $m \geq 0, u_j \geq 0,$

$\sum_{j=1}^{J+1} u_j \leq U < \infty$ とする。任意の非負整数 M に対して、正の定数 A_M, X_M が存在して、任意の分割 $\Delta_{T,0}$, 任意の多重指数 $|\alpha_j| \leq M, j = 0, 1, \dots, J+1$ と任意の $1 \leq k \leq J$ に対して、

$$(1) \quad \left| \left(\prod_{j=0}^{J+1} \partial_{x_j}^{\alpha_j} \right) F_{\Delta_{T,0}}(x_{J+1}, x_J, \dots, x_1, x_0) \right| \leq A_M (X_M)^{J+1} \left(1 + \sum_{j=0}^{J+1} |x_j| \right)^m,$$

$$(2) \quad \left| \left(\prod_{j=0}^{J+1} \partial_{x_j}^{\alpha_j} \right) \partial_{x_k} F_{\Delta_{T,0}}(x_{J+1}, x_J, \dots, x_1, x_0) \right| \\ \leq A_M (X_M)^{J+1} (u_{k+1} + u_k) \left(1 + \sum_{j=0}^{J+1} |x_j| \right)^m.$$

Remark 言い換えなので、Theorem 1(1),2,3,4,7 は成立。

仮定も経路で定義する

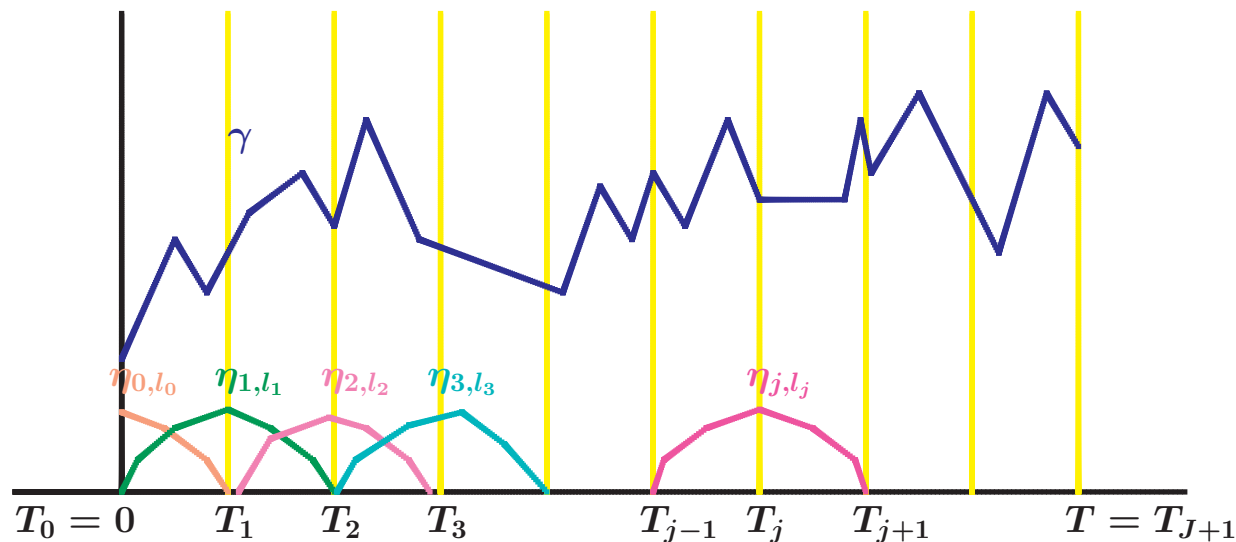
Definition (汎関数微分) 任意の分割 $\Delta_{T,0}$ に対し、

$F_{\Delta_{T,0}}(x_{J+1}, x_J, \dots, x_1, x_0) \in C^\infty(\mathbb{R}^{d(J+2)})$ を仮定する。任意の折れ線経路

$\gamma : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ と $\eta_l : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, $l = 1, 2, \dots, L$ に対し、高階の汎関数微分を

$$(D^L F)[\gamma] \prod_{l=1}^L [\eta_l] = \left(\prod_{l=1}^L \frac{\partial}{\partial \theta_l} \right) F[\gamma + \sum_{l=1}^L \theta_l \eta_l] \Big|_{\theta_1 = \dots = \theta_L = 0}$$

で定義する。以下は次の仮定における経路の図である。



Assumption of $F[\gamma] \in \mathcal{F}$ $m \geq 0$, $\rho(t)$ は有界変動関数, $|\rho|(t)$ は全変動とする。

任意の非負整数 M に対し、正の定数 A_M, X_M が存在し、

$$(1) \quad |(D^{\sum_{j=0}^{J+1} L_j} F)[\gamma] \prod_{j=0}^{J+1} \prod_{l_j=1}^{L_j} [\eta_{j,l_j}]| \leq A_M (X_M)^{J+1} (1 + \|\gamma\|)^m \prod_{j=0}^{J+1} \prod_{l_j=1}^{L_j} \|\eta_{j,l_j}\|,$$

$$(2) \quad |(D^{1+\sum_{j=0}^{J+1} L_j} F)[\gamma][\eta] \prod_{j=0}^{J+1} \prod_{l_j=1}^{L_j} [\eta_{j,l_j}]| \\ \leq A_M (X_M)^{J+1} (1 + \|\gamma\|)^m \int_0^T |\eta(t)| d|\rho|(t) \prod_{j=0}^{J+1} \prod_{l_j=1}^{L_j} \|\eta_{j,l_j}\|$$

が、任意の分割 $\Delta_{T,0}$, 任意の折れ線経路 $\gamma : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, $\eta : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ 、任意の

$L_j = 0, 1, \dots, M$, $[T_{j-1}, T_{j+1}]$ に台をもつ任意の折れ線経路 $\eta_{j,l_j} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$,

$l_j = 1, 2, \dots, L_j$ で成立する。 $\|\gamma\| = \max_{0 \leq t \leq T} |\gamma(t)|$ とする。

Remark Theorem 1,2,3,4,5,6,7 すべて成立する。

ここで一息（ 5 分？ ）

10. Theorem 1(1),2,7 の証明におけるテクニック

計算は複雑で設定により変わるので、文だけでも読んでいただくと嬉しいです。

$$(\star) \quad \lim_{|\Delta_{T,0}| \rightarrow 0} \prod_{j=1}^{J+1} \left(\frac{1}{2\pi i \hbar t_j} \right)^{d/2} \int_{\mathbb{R}^{dJ}} e^{\frac{i}{\hbar} S[\gamma_{\Delta_{T,0}}]} F[\gamma_{\Delta_{T,0}}] \prod_{j=1}^J dx_j, \\ \infty \times \infty \times \infty \times \infty \times \infty \times \infty \times \dots, \quad J \rightarrow \infty$$

の収束を証明するには、被積分関数 $F_{\Delta_{T,0}}(x_{J+1}, x_J, \dots, x_1, x_0) = F[\gamma_{\Delta_{T,0}}]$ に仮定を加えていけば良い。

Step 1. H. Kumano-go-Taniguchi の定理：

($\star$) を $J \rightarrow \infty$ のとき $C \times C \times C \times \dots$ でコントロール。

Step 2. Fujiwara の停留位相法：

($\star$) を $J \rightarrow \infty$ によらず C でコントロール。

Step 3. 私の方法：

($\star$) を $|\Delta_{T,0}| \rightarrow 0$ のとき収束させる。

11. H. Kumano-go-Taniguchi の定理

原型は H. Kumano-go, Pseudo differential operators, MIT Press, p.360 の Fourier 積分作用素の多重積の評価

$$\begin{aligned} & \prod_{j=1}^{J+1} \left(\frac{1}{2\pi i \hbar t_j} \right)^{d/2} \int_{\mathbb{R}^{dJ}} e^{\frac{i}{\hbar} S_{\Delta_{T,0}}(x_{J+1}, x_J, \dots, x_1, x_0)} F_{\Delta_{T,0}}(x_{J+1}, x_J, \dots, x_1, x_0) \prod_{j=1}^J dx_j \\ &= \left(\frac{1}{2\pi i \hbar T} \right)^{d/2} e^{\frac{i}{\hbar} S_{\Delta_{T,0}}^\dagger(x, x_0)} q_{\Delta_{T,0}}(\hbar, x, x_0). \end{aligned}$$

Lemma KT $m \geq 0$ とする。任意の非負整数 M に対し、正の定数 A_M, X_M が存在し、任意の多重指数 $|\alpha_j| \leq M, j = 1, 2, \dots, J, J+1$ に対して

$$\left| \left(\prod_{j=0}^{J+1} \partial_{x_j}^{\alpha_j} \right) F_{\Delta_{T,0}}(x_{J+1}, x_J, \dots, x_1, x_0) \right| \leq A_M (X_M)^{J+1} \left(1 + \sum_{j=0}^{J+1} |x_j| \right)^m.$$

を仮定する。 $J \rightarrow \infty$ のとき、多重振動積分は C^J でコントロールできる。

$$|q_{\Delta_{T,0}}(\hbar, x_{J+1}, x_0)| \leq C^J (1 + |x_{J+1}| + |x_0|)^m.$$

Remark $|\partial_x^\alpha B(t, x)| \leq C_\alpha$ のとき、 $F[\gamma] = e^{\int_0^T B(t, \gamma(t)) dt}$ は仮定をみたす。

$$F_{\Delta_{T,0}} = e^{\sum_{j=1}^{J+1} \int_{T_{j-1}}^{T_j} B(t, \gamma_{T_j, T_{j-1}}(t, x_j, x_{j-1})) dt} = \prod_{j=1}^{J+1} e^{\int_{T_{j-1}}^{T_j} B(t, \gamma_{T_j, T_{j-1}}(t, x_j, x_{j-1})) dt}.$$

簡単のため $m = 0$ で証明する。ある関数 $\omega_j(x_j, x_{j-1})$ を用いて

$$S_{\Delta_{T,0}}(x_{J+1}, x_J, \dots, x_1, x_0) = \sum_{j=1}^{J+1} \frac{(x_j - x_{j-1})^2}{2t_j} - \sum_{j=1}^{J+1} \omega_j(x_j, x_{j-1}).$$

と書ける。 $t_j \rightarrow 0$ なので $(1/t_j)$ を避けるため、

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2\pi i \hbar t_{j+1}} \right)^{d/2} e^{\frac{i}{\hbar} \frac{(x_{j+1} - x_j)^2}{2t_{j+1}}} \left(\frac{1}{2\pi i \hbar T_j} \right)^{d/2} e^{\frac{i}{\hbar} \frac{(x_j - x_0)^2}{2T_j}} \\ &= \left(\frac{1}{2\pi i \hbar T_{j+1}} \right)^{d/2} e^{\frac{i}{\hbar} \frac{(x_{j+1} - x_0)^2}{2T_{j+1}}} \times \left(\frac{1}{2\pi \hbar} \right)^d \int_{\mathbb{R}^d} e^{\frac{i}{\hbar} \left(-\frac{t_{j+1}T_j}{2T_{j+1}} \xi_j^2 + \left(x_j - \frac{T_j}{T_{j+1}} x_{j+1} - \frac{t_{j+1}}{T_{j+1}} x_0 \right) \xi_j \right)} d\xi_j \end{aligned}$$

を帰納的に用いて、

$$e^{\frac{i}{\hbar} S_{\Delta_{T,0}}^\dagger(x, x_0) - \frac{i}{\hbar} \frac{(x - x_0)^2}{2T}} q_{\Delta_{T,0}}(\hbar, x, x_0) = \left(\frac{1}{2\pi \hbar} \right)^{dJ} \int_{\mathbb{R}^{2dJ}} e^{\frac{i}{\hbar} \Phi} F_{\Delta_{T,0}} \prod_{j=1}^J dx_j d\xi_j,$$

と書き換える。ここで

$$\Phi = \sum_{j=1}^J \left(x_j - \frac{T_j}{T_{j+1}} x_{j+1} - \frac{t_{j+1}}{T_{j+1}} x_0 \right) \xi_j - \sum_{j=1}^J \frac{t_{j+1} T_j}{2T_{j+1}} \xi_j^2 - \sum_{j=1}^{J+1} \omega_j(x_j, x_{j-1}).$$

部分積分を何度も何度も繰り返して

一階微分作用素

$$M_j = \frac{1 - i(\partial_{\xi_j} \Phi) \partial_{\xi_j}}{1 + \hbar^{-1} |\partial_{\xi_j} \Phi|^2}, \quad N_j = \frac{1 - i(\partial_{x_j} \Phi) \partial_{x_j}}{1 + \hbar^{-1} |\partial_{x_j} \Phi|^2}, \quad j = 1, 2, \dots, J$$

を用いる。

$$M_j e^{\frac{i}{\hbar} \Phi} = e^{\frac{i}{\hbar} \Phi}, \quad N_j e^{\frac{i}{\hbar} \Phi} = e^{\frac{i}{\hbar} \Phi}.$$

に注意して、部分積分を何度も何度も繰り返して

$$\left(\frac{1}{2\pi\hbar} \right)^{dJ} \int_{\mathbb{R}^{2dJ}} e^{\frac{i}{\hbar} \Phi} F_{\Delta_{T,0}} \prod_{j=1}^J dx_j d\xi_j = \left(\frac{1}{2\pi\hbar} \right)^{dJ} \int_{\mathbb{R}^{2dJ}} e^{\frac{i}{\hbar} \Phi} F_{\Delta_{T,0}}^{\spadesuit} \prod_{j=1}^J dx_j d\xi_j,$$

と、微分作用素の多重積

$$F_{\Delta_{T,0}}^{\spadesuit} = (N_J^*)^{d+1} \cdots (N_2^*)^{d+1} (N_1^*)^{d+1} (M_J^*)^{d+1} \cdots (M_2^*)^{d+1} (M_1^*)^{d+1} F_{\Delta_{T,0}}$$

を用いて書き換える。ここで、 M_j^*, N_j^* は M_j, N_j の共役作用素である。

違う結果を期待する

一般には微分作用素の J 個の多重積は $J \rightarrow \infty$ のとき C^J でコントロールできない。

しかし、

$$\begin{aligned}\partial_{\xi_j} \Phi &= x_j - \frac{T_j}{T_{j+1}} x_{j+1} - \frac{t_{j+1}}{T_{j+1}} x_0 - \frac{t_{j+1} T_j}{T_{j+1}} \xi_j, \\ M_j^* &= a_j^1(x_{j+1}, \xi_j, x_j, x_0) \partial_{\xi_j} + a_j^0(x_{j+1}, \xi_j, x_j, x_0),\end{aligned}$$

は J によらず高々 $4d$ 個の変数の関数である。

ゆえに、 $\partial_{x_{j+1}}, \partial_{\xi_j}, \partial_{x_j}$ だけが M_j^* を微分する。

つまり、 N_{j+1}^*, M_j^*, N_j^* だけが M_j^* を微分する。

よって、 $F_{\Delta_{T,0}}^\spadesuit$ は $J \rightarrow \infty$ のとき C^J でコントロールできる。荒く言えば

$$\begin{aligned}M_j^* \circ &\implies \frac{C}{(1 + \hbar^{-1} |\partial_{\xi_j} \Phi|^2)^{1/2}} \times, \\ N_j^* \circ &\implies \frac{C}{(1 + \hbar^{-1} |\partial_{x_j} \Phi|^2)^{1/2}} \times.\end{aligned}$$

すべての変数を一度に変える

$z_j = \partial_{\xi_j} \Phi$, $\zeta_j = \partial_{x_j} \Phi$, $j = 1, 2, \dots, J$ とおくと、

$$|F_{\Delta_{T,0}}^\spadesuit| \leq (C')^J \prod_{j=1}^J \frac{1}{(1 + \hbar^{-1}|z_j|^2)^{(d+1)/2}} \frac{1}{(1 + \hbar^{-1}|\zeta_j|^2)^{(d+1)/2}},$$
$$\left| \det \frac{\partial(x_J, \dots, x_1, \xi_J, \dots, \xi_1)}{\partial(z_J, \dots, z_1, \zeta_J, \dots, \zeta_1)} \right| \leq (C'')^J.$$

すべての変数 $(x_J, \dots, x_1, \xi_J, \dots, \xi_1)$ を $(z_J, \dots, z_1, \zeta_J, \dots, \zeta_1)$ に一度に変えると

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2\pi\hbar} \right)^{dJ} \int_{\mathbb{R}^{2dJ}} e^{\frac{i}{\hbar}\Phi} F_{\Delta_{T,0}}^\spadesuit \prod_{j=1}^J dx_j d\xi_j \\ &= \left(\frac{1}{2\pi\hbar} \right)^{dJ} \int_{\mathbb{R}^{2dJ}} e^{\frac{i}{\hbar}\Phi} F_{\Delta_{T,0}}^\spadesuit \left| \det \frac{\partial(x_J, \dots, x_1, \xi_J, \dots, \xi_1)}{\partial(z_J, \dots, z_1, \zeta_J, \dots, \zeta_1)} \right| \prod_{j=1}^J dz_j d\zeta_j. \end{aligned}$$

$(z_J, \dots, z_1, \zeta_J, \dots, \zeta_1)$ に関して積分すると、多重振動積分が $J \rightarrow \infty$ のとき C^J でコントロールできることがわかる。□

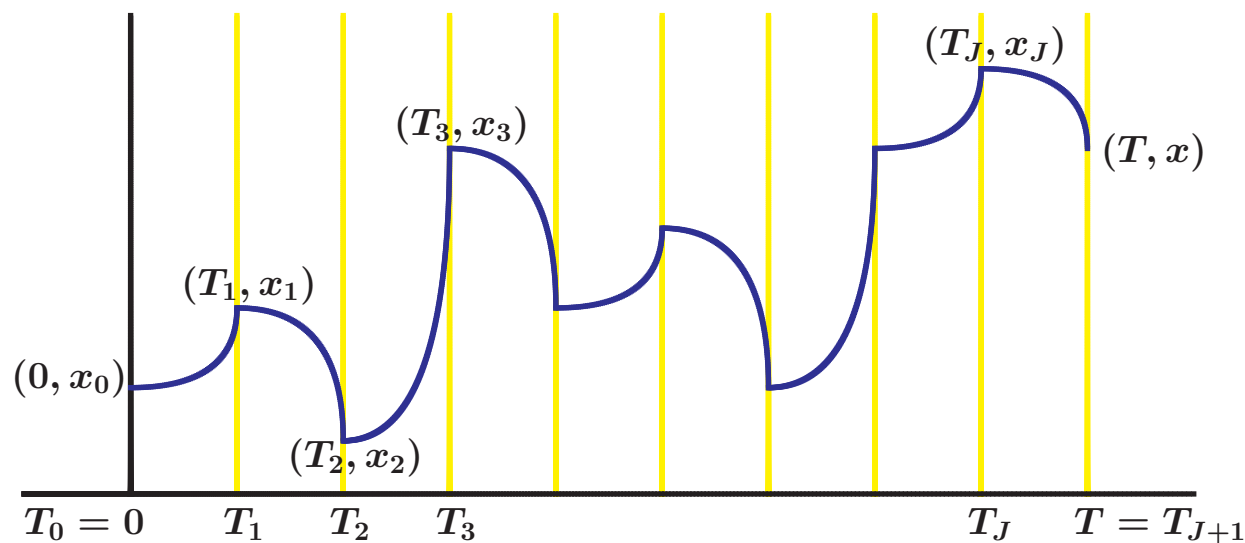
12. Fujiwara の停留位相法

D. Fujiwara, Nagoya Math. J. 124 (1991).

以後、簡単のため、区分的古典経路の場合を説明する：

$\gamma_{\Delta_{T,0}}$ を (T_j, x_j) と (T_{j-1}, x_{j-1}) を古典経路で結ぶ区分的古典経路とする。

$$S[\gamma_{\Delta_{T,0}}] = S_{\Delta_{T,0}}(x_{J+1}, x_J, \dots, x_1, x_0), \quad F[\gamma_{\Delta_{T,0}}] = F_{\Delta_{T,0}}(x_{J+1}, x_J, \dots, x_1, x_0).$$



Remark $\gamma_{T,0}$ は (T, x) と $(0, x_0)$ を結ぶ古典経路となり、

$$S[\gamma_{T,0}] = S_{T,0}(x, x_0), \quad F[\gamma_{T,0}] = F_{T,0}(x, x_0).$$

$(\partial_{(x_J, \dots, x_1)} S_{\Delta_{T,0}})(x_{J+1}, x_J^\dagger, \dots, x_1^\dagger, x_0) = 0$ となる危点 $(x_J^\dagger, \dots, x_1^\dagger)$ を用いて

$$D_{\Delta_{T,0}}(x_{J+1}, x_0) = \left(\frac{\prod_{j=1}^{J+1} t_j}{T_{J+1}} \right)^d \det(\partial_{(x_J, \dots, x_1)}^2 S_{\Delta_{T,0}})(x_{J+1}, x_J^\dagger, \dots, x_1^\dagger, x_0)$$

を定義し、多重振動積分の余りの項を考える。

$$\begin{aligned} & \prod_{j=1}^{J+1} \left(\frac{1}{2\pi i \hbar t_j} \right)^{d/2} \int_{\mathbb{R}^{dJ}} e^{\frac{i}{\hbar} S_{\Delta_{T,0}}(x_{J+1}, x_J, \dots, x_1, x_0)} F_{\Delta_{T,0}}(x_{J+1}, x_J, \dots, x_1, x_0) \prod_{j=1}^J dx_j \\ &= \left(\frac{1}{2\pi i \hbar T} \right)^{d/2} e^{\frac{i}{\hbar} S_{T,0}(x, x_0)} \left(D_{\Delta_{T,0}}(x, x_0)^{-1/2} F_{T,0}(x, x_0) + \hbar \Upsilon_{\Delta_{T,0}}(\hbar, x, x_0) \right). \end{aligned}$$

Lemma F $m \geq 0$ とする。任意の非負整数 M に対し、正の定数 A_M, X_M が存在し、**任意の分割 $\Delta_{T,0}$** と任意の多重指数 $|\alpha_j| \leq M, j = 0, 1, \dots, J, J+1$ に対し、

$$\left| \left(\prod_{j=0}^{J+1} \partial_{x_j}^{\alpha_j} \right) F_{\Delta_{T,0}}(x_{J+1}, x_J, \dots, x_1, x_0) \right| \leq A_M (\mathbf{X}_M)^{J+1} \left(1 + \sum_{j=0}^{J+1} |x_j| \right)^m.$$

を仮定する。このとき、多重振動積分は $J \rightarrow \infty$ によらず C でコントロールできる。

$$|\Upsilon_{\Delta_{T,0}}(\hbar, x, x_0)| \leq CT(1 + |x_{J+1}| + |x_0|)^m.$$

Remark $J = 0, 1, 2$ のとき、Lemma F の条件は以下ようになる。

最も単純な分割 $T = T_1 > T_0 = 0$ ($J = 0$) のとき

$$|\partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_0}^{\alpha_0} F_{T,0}(x_1, x_0)| \leq A_M(X_M)^1 (1 + |x_1| + |x_0|)^m.$$

分割 $T = T_2 > T_1 > T_0 = 0$ ($J = 1$) のとき

$$|\partial_{x_2}^{\alpha_2} \partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_0}^{\alpha_0} F_{T,T_1,0}(x_2, x_1, x_0)| \leq A_M(X_M)^2 (1 + |x_2| + |x_1| + |x_0|)^m.$$

分割 $T = T_3 > T_2 > T_1 > T_0 = 0$ ($J = 2$) のとき

$$\begin{aligned} & |\partial_{x_3}^{\alpha_3} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_0}^{\alpha_0} F_{T,T_2,T_1,0}(x_3, x_2, x_1, x_0)| \\ & \leq A_M(X_M)^3 (1 + |x_3| + |x_2| + |x_1| + |x_0|)^m. \end{aligned}$$

Remark $|\partial_x^\alpha B(t, x)| \leq C_\alpha$ のとき、 $F[\gamma] = e^{\int_0^T B(t, \gamma(t)) dt}$ は仮定を満たす。

$$F_{\Delta_{T,0}} = F[\gamma_{\Delta_{T,0}}] = \prod_{j=1}^{J+1} e^{\int_{T_{j-1}}^{T_j} B(t, \gamma_{T_j, T_{j-1}}(t, x_j, x_{j-1})) dt}.$$

主部と余りを区別する

Proof of Lemma F 簡単のため $m = 0$ とおく。

$x_1, x_2, \dots, x_J$ に関して積分しないといけない。まず x_1 に関して積分する。停留位相法により、主部 ($\mathcal{M}_1 F_{\Delta_{T,0}}$) と余り ($\mathcal{R}_1 F_{\Delta_{T,0}}$) を区別する。

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2\pi i \hbar t_2} \right)^{d/2} \left(\frac{1}{2\pi i \hbar t_1} \right)^{d/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{\frac{i}{\hbar} S_{\Delta_{T,0}}} F_{\Delta_{T,0}}(\dots, x_2, x_1, x_0) dx_1 \\ &= \left(\frac{1}{2\pi i \hbar T_2} \right)^{d/2} e^{\frac{i}{\hbar} S_{(\Delta_{T,T_2},0)}} (\mathcal{M}_1 F_{\Delta_{T,0}})(\dots, x_2, x_0) \\ &+ \left(\frac{1}{2\pi i \hbar T_2} \right)^{d/2} e^{\frac{i}{\hbar} S_{(\Delta_{T,T_2},0)}} (\mathcal{R}_1 F_{\Delta_{T,0}})(\dots, x_2, x_0). \end{aligned}$$

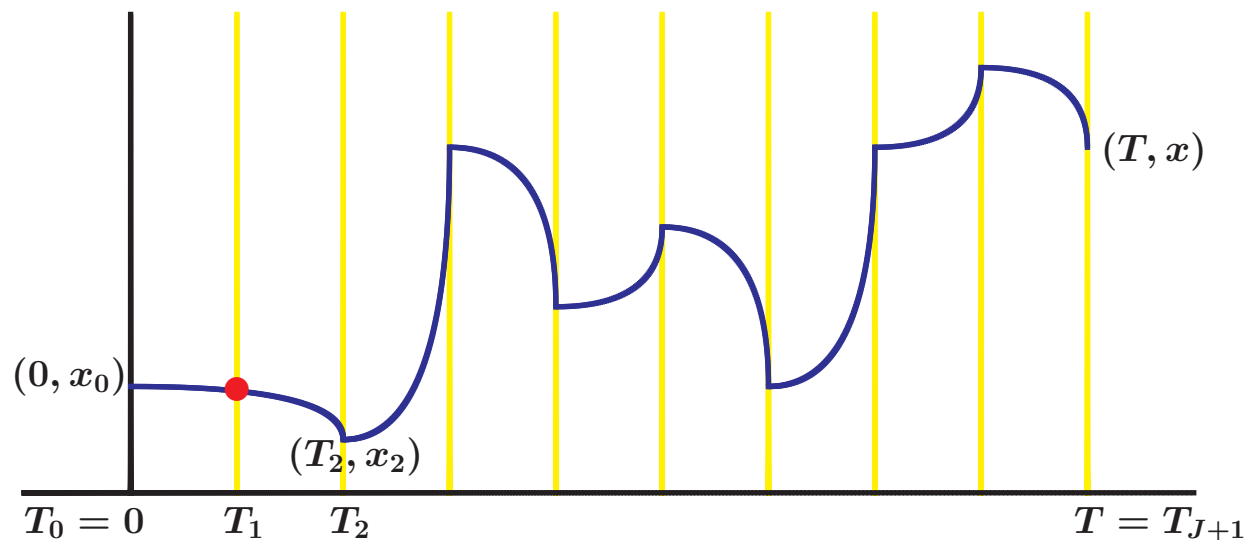
主部 $(\mathcal{M}_1 F_{\Delta_{T,0}})$ は x_2 に関して「単純」で

$$\begin{aligned} (\mathcal{M}_1 F_{\Delta_{T,0}})(\dots, x_2, x_0) &= D_{T_2, T_1, 0}(x_2, x_0)^{-1/2} F_{\Delta_{T,0}}(\dots, x_2, \textcolor{red}{x}_1^\dagger, x_0) \\ &= D_{\Delta_{T_2, 0}}(x_2, x_0)^{-1/2} F_{(\Delta_{T, T_2}, 0)}(\dots, x_2, x_0), \end{aligned}$$

となる。ここで、分割 $(\Delta_{T, T_2}, 0) : T = T_{J+1} > T_J > \dots > T_2 \textcolor{red}{>} T_0 = 0$ である。

余り $(\mathcal{R}_1 F_{\Delta_{T,0}})$ は x_2 に関して「複雑」であるが、小さい項 $(t_2 \hbar)$ で評価できる。

$$|(\mathcal{R}_1 F_{\Delta_{T,0}})| \leq C(t_2 \hbar).$$



単純な積分だけをする

主部 ($\mathcal{M}_1 F_{\Delta_{T,0}}$) は x_2 に関して「単純」なので、さらに x_2 に関して積分する。停留位相法により、主部と余りを区別する。

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2\pi i \hbar t_3} \right)^{d/2} \left(\frac{1}{2\pi i \hbar T_2} \right)^{d/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{\frac{i}{\hbar} S(\Delta_{T,T_2},0)} (\mathcal{M}_1 F_{\Delta_{T,0}})(\dots, x_3, x_2, x_0) dx_2 \\ &= \left(\frac{1}{2\pi i \hbar T_3} \right)^{d/2} e^{\frac{i}{\hbar} S(\Delta_{T,T_3},0)} (\mathcal{M}_2 \mathcal{M}_1 F_{\Delta_{T,0}})(\dots, x_3, x_0) \\ &+ \left(\frac{1}{2\pi i \hbar T_3} \right)^{d/2} e^{\frac{i}{\hbar} S(\Delta_{T,T_3},0)} (\mathcal{R}_2 \mathcal{M}_1 F_{\Delta_{T,0}})(\dots, x_3, x_0) . \end{aligned}$$

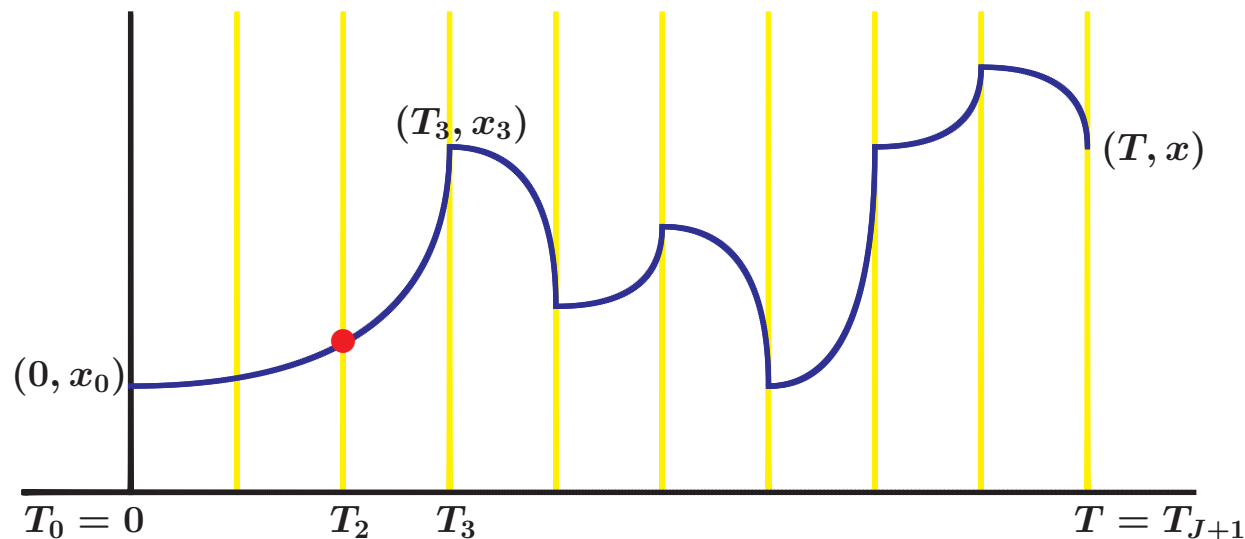
主部 $(\mathcal{M}_2\mathcal{M}_1F_{\Delta_{T,0}})$ は x_3 に関して「単純」で

$$\begin{aligned} & (\mathcal{M}_2\mathcal{M}_1F_{\Delta_{T,0}})(\dots, x_3, x_0) \\ &= D_{T_3, T_2, 0}(x_3, x_0)^{-1/2} D_{\Delta_{T_2, 0}}(\textcolor{red}{x}_2^\dagger, x_0)^{-1/2} F_{(\Delta_{T, T_2}, 0)}(\dots, x_3, \textcolor{red}{x}_2^\dagger, x_0) . \\ &= D_{\Delta_{T_3, 0}}(x_3, x_0)^{-1/2} F_{(\Delta_{T, T_3}, 0)}(\dots, x_3, x_0) , \end{aligned}$$

となる。ここで、分割 $(\Delta_{T, T_3}, 0) : T = T_{J+1} > T_J > \dots > T_3 \textcolor{red}{>} T_0 = 0$ である。

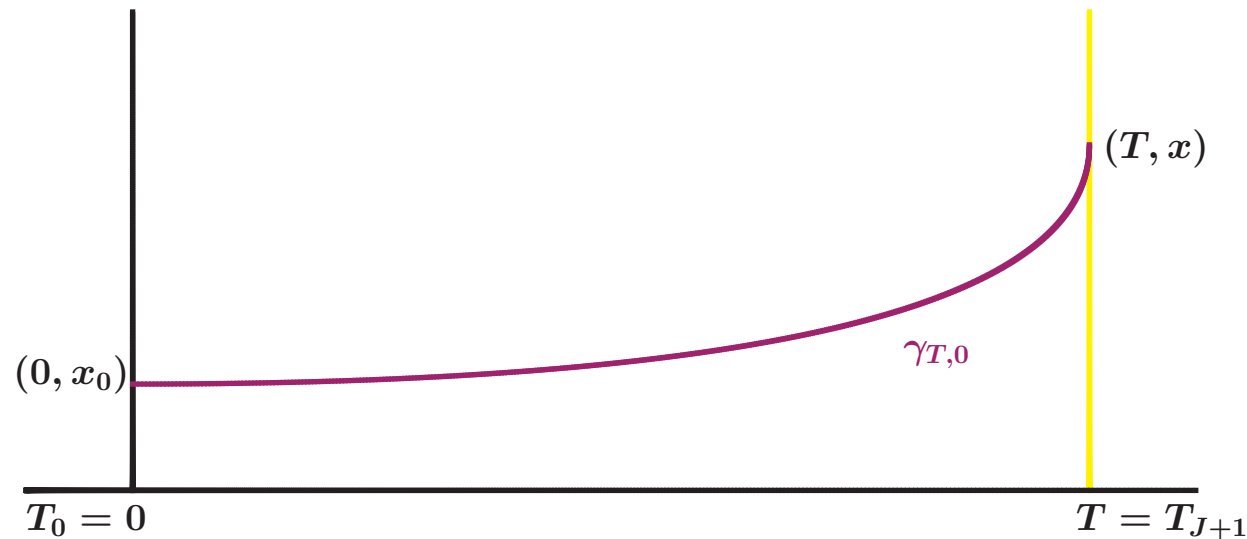
余り $(\mathcal{R}_2\mathcal{M}_1F_{\Delta_{T,0}})$ は x_3 に関して「複雑」であるが、小さな項 $(t_3\hbar)$ で評価できる。

$$|(\mathcal{R}_2\mathcal{M}_1F_{\Delta_{T,0}})| \leq C(t_3\hbar) .$$



主部 $(\mathcal{M}_2\mathcal{M}_1F_{\Delta_{T,0}})$ は x_3 に関して「単純」なので、さらに x_3 で積分する。この単純な積分を繰り返して、Theorem 7 の主部を得る。

$$\begin{aligned} (\mathcal{M}_J\mathcal{M}_{J-1}\dots\mathcal{M}_1F_{\Delta_{T,0}}) &= D_{\Delta_{T,0}}(x, x_0)^{-1/2}F_{T,0}(x, x_0) \\ &= D_{\Delta_{T,0}}(x, x_0)^{-1/2}F[\gamma_{T,0}]. \end{aligned}$$



複雑な積分をすべて後回しにする

さて、余り $(\mathcal{R}_1 F_{\Delta_{T,0}})$ は x_2 に関して「複雑」であるので、 x_2 に関する積分は後回しにして、先に x_3 に関して積分する。停留位相法により、主部と余りを区別する。

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2\pi i \hbar t_4} \right)^{d/2} \left(\frac{1}{2\pi i \hbar t_3} \right)^{d/2} \left(\frac{1}{2\pi i \hbar T_2} \right)^{d/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{\frac{i}{\hbar} S(\Delta_{T,T_2},0)} (\mathcal{R}_1 F_{\Delta_{T,0}})(\dots, x_4, x_3, x_2, x_0) dx_3 \\ &= \left(\frac{1}{2\pi i \hbar (t_4 + t_3)} \right)^{d/2} \left(\frac{1}{2\pi i \hbar T_2} \right)^{d/2} e^{\frac{i}{\hbar} S(\Delta_{T,T_4},T_2,0)} (\mathcal{M}_3 \mathcal{R}_1 F_{\Delta_{T,0}})(\dots, x_4, x_2, x_0) \\ &+ \left(\frac{1}{2\pi i \hbar (t_4 + t_3)} \right)^{d/2} \left(\frac{1}{2\pi i \hbar T_2} \right)^{d/2} e^{\frac{i}{\hbar} S(\Delta_{T,T_4},T_2,0)} (\mathcal{R}_3 \mathcal{R}_1 F_{\Delta_{T,0}})(\dots, x_4, x_2, x_0) . \\ & |(\mathcal{R}_3 \mathcal{R}_1 F_{\Delta_{T,0}})| \leq C(t_4 \hbar) C(t_2 \hbar) . \end{aligned}$$

主部 $(\mathcal{M}_3 \mathcal{R}_1 F_{\Delta_{T,0}})$ は x_4 に関して「単純」なので、さらに x_4 に関して積分する。

しかし、余り $(\mathcal{R}_3 \mathcal{R}_1 F_{\Delta_{T,0}})$ は x_4 に関して「複雑」なので、 x_4 に関する積分を後回しにして、先に x_5 で積分する。

Fujiwara のルールは以下の通り

x_j で積分する。停留位相法により、主部と余りを区別する。

主部は x_{j+1} に関して「単純」である。

ゆえに、さらに x_{j+1} に関して積分する。

しかしながら、余りは x_{j+1} に関して「複雑」である。

ゆえに、 x_{j+1} に関する積分を後回しにして、先に x_{j+2} で積分する。

ルールは最後まで貫く

ルールを最後まで貫くと、

$$q_{\Delta_{T,0}}(\hbar, x_{J+1}, x_0) = q_0(x_{J+1}, x_0) + \sum' q_{j_K, j_{K-1}, \dots, j_1}(x_{J+1}, x_0).$$

と書ける。ここで $q_0(x_{J+1}, x_0) = D_{\Delta_{T,0}}(x, x_0)^{-1/2} F_{T,0}(x, x_0)$ は Theorem 7 の主部であり、和 $\sum'$ は

$$0 = j_0 < j_1 - 1 < j_1 < j_2 - 1 < j_2 < \dots < j_K - 1 < j_K \leq J + 1,$$

となるすべての整数 $(j_K, j_{K-1}, \dots, j_1)$ に関する和を意味し、 $q_{j_K, j_{K-1}, \dots, j_1}(x_{J+1}, x_0)$ は後回しにした複雑な積分

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2\pi i \hbar T} \right)^{d/2} e^{\frac{i}{\hbar} S_{T,0}(x_{J+1}, x_0)} q_{j_K, j_{K-1}, \dots, j_1}(x_{J+1}, x_0) = \prod_{k=1}^{K+1} \left(\frac{1}{2\pi i \hbar (T_{j_k} - T_{j_{k-1}})} \right)^{d/2} \\ & \times \int_{\mathbf{R}^{dK}} e^{\frac{i}{\hbar} S(T, T_{j_K}, \dots, T_{j_1}, 0)} b_{j_K, j_{K-1}, \dots, j_1}(x_{J+1}, x_{j_K}, \dots, x_{j_1}, x_0) \prod_{k=1}^K dx_{j_k}, \end{aligned}$$

である。ここで、被積分関数

$$\begin{aligned} & b_{j_K, j_{K-1}, \dots, j_1}(x_{J+1}, x_{j_K}, \dots, x_{j_1}, x_0) \\ &= (\mathcal{Q}_J \cdots \mathcal{Q}_3 \mathcal{Q}_2 \mathcal{Q}_1 F_{\Delta_{T,0}})(x_{J+1}, x_{j_K}, \dots, x_{j_1}, x_0). \end{aligned}$$

であり

$$\mathcal{Q}_j = \begin{cases} \text{Identity} & \text{if } j = j_K, j_{K-1}, \dots, j_1 \\ \mathcal{R}_j & \text{if } j = j_K - 1, j_{K-1} - 1, \dots, j_1 - 1 \\ \mathcal{M}_j & \text{otherwise} \end{cases}$$

である。ゆえに、被積分関数は多くの小さな項 $(t_{j_k} \hbar)$ で評価できる。

$$|b_{j_K, j_{K-1}, \dots, j_1}(x_{J+1}, x_{j_K}, \dots, x_{j_1}, x_0)| \leq C^K \left(\prod_{k=1}^K (\hbar t_{j_k}) \right).$$

複雑な積分をすべて他人に押し付ける

後回しにした複雑な積分すべてを H. Kumano-go-Taniguchi の定理に押し付けると、

$$|q_{j_K, j_{K-1}, \dots, j_1}(x_{J+1}, x_0)| \leq (C')^K \left(\prod_{k=1}^K (\hbar t_{j_k}) \right).$$

を得る。余りの項は $q_{j_K, j_{K-1}, \dots, j_1}(x_{J+1}, x_0)$ の和

$$\Upsilon_{\Delta_{T,0}}(\hbar, x_{J+1}, x_0) = \frac{1}{\hbar} \sum' q_{j_K, j_{K-1}, \dots, j_1}(x_{J+1}, x_0)$$

である。 $\sum_{j=1}^{J+1} t_j = T$, $0 < \hbar < 1$ を用いて和を評価すると、余りの項は

$$\begin{aligned} |\Upsilon_{\Delta_{T,0}}(\hbar, x_{J+1}, x_0)| &\leq \frac{1}{\hbar} \sum' \left((C')^K \prod_{k=1}^K (\hbar t_{j_k}) \right) \\ &\leq \frac{1}{\hbar} \left(\prod_{j=1}^{J+1} (1 + C' \hbar t_j) - 1 \right) \\ &\leq (C'')T \end{aligned}$$

で評価できる。□

13. 私の方法

区分的古典経路の場合の仮定 $m \geq 0, u_j \geq 0, \sum_{j=1}^{J+1} u_j \leq U < \infty$ とする。任意の非負整数 M に対し、正の定数 A_M, X_M が存在し、任意の分割 $\Delta_{T,0}$, 任意の多重指数 $|\alpha_j| \leq M, j = 0, 1, \dots, J+1$ と任意の $1 \leq k \leq J$ に対し

$$(1) \quad \left| \left(\prod_{j=0}^{J+1} \partial_{x_j}^{\alpha_j} \right) F_{\Delta_{T,0}}(x_{J+1}, x_J, \dots, x_1, x_0) \right| \leq A_M (X_M)^{J+1} \left(1 + \sum_{j=0}^{J+1} |x_j| \right)^m,$$

$$(2) \quad \left| \left(\prod_{j=0}^{J+1} \partial_{x_j}^{\alpha_j} \right) \partial_{x_k} F_{\Delta_{T,0}}(x_{J+1}, x_J, \dots, x_1, x_0) \right| \\ \leq A_M (X_M)^{J+1} (u_{k+1} + u_k) \left(1 + \sum_{j=0}^{J+1} |x_j| \right)^m.$$

Remark $|\partial_x^\alpha B(t, x)| \leq C_\alpha$ のとき、 $F[\gamma] = e^{\int_0^T B(t, \gamma(t)) dt}$ は仮定を満たす。

$$\partial_{x_k} F_{\Delta_{T,0}} = \prod_{j=1}^{J+1} e^{\int_{T_{j-1}}^{T_j} B(t, \gamma_{T_j, T_{j-1}}(t, x_j, x_{j-1})) dt} \\ \times \left(\int_{T_k}^{T_{k+1}} \partial_{x_k} B(t, \gamma_{T_{k+1}, T_k}(x_{k+1}, x_k)) dt + \int_{T_{k-1}}^{T_k} \partial_{x_k} B(t, \gamma_{T_k, T_{k-1}}(x_k, x_{k-1})) dt \right).$$

多重積分を経路で考える

この仮定のもとで、多重積分の評価は以下のようになる。

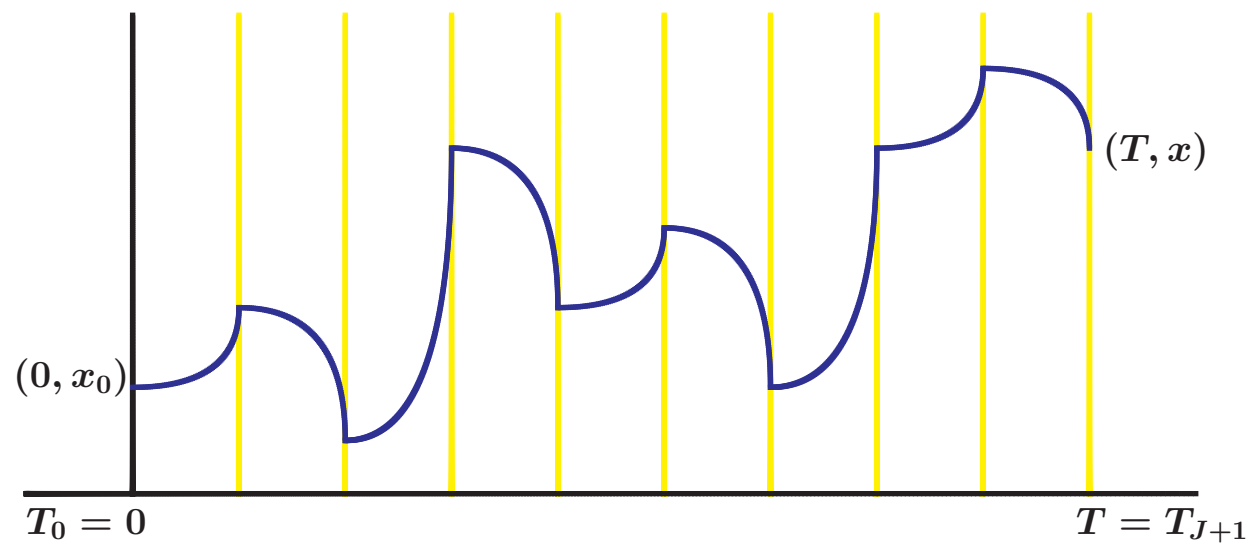
$$\begin{aligned} (\star) & \prod_{j=1}^{J+1} \left(\frac{1}{2\pi i \hbar t_j} \right)^{d/2} \int_{\mathbb{R}^{dJ}} e^{\frac{i}{\hbar} S[\gamma_{\Delta_{T,0}}]} F[\gamma_{\Delta_{T,0}}] \prod_{j=1}^J dx_j \\ &= \left(\frac{1}{2\pi i \hbar T} \right)^{d/2} e^{\frac{i}{\hbar} S_{T,0}(x, x_0)} q_{\Delta_{T,0}}(\hbar, x, x_0) \\ &= \left(\frac{1}{2\pi i \hbar T} \right)^{d/2} e^{\frac{i}{\hbar} S_{T,0}(x, x_0)} \left(D_{\Delta_{T,0}}(x, x_0)^{-1/2} F_{T,0}(x, x_0) + \hbar \Upsilon_{\Delta_{T,0}}(\hbar, x, x_0) \right). \end{aligned}$$

Lemma F'

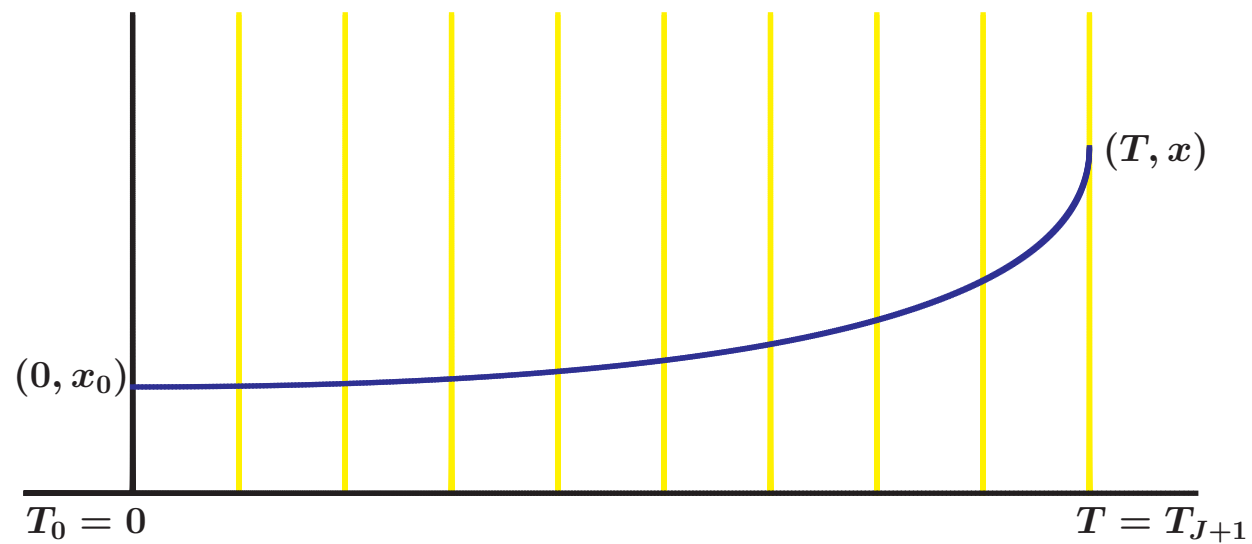
$$|\Upsilon_{\Delta_{T,0}}(\hbar, x, x_0)| \leq CT(T+U)(1+|x|+|x_0|)^m,$$

$$|q_{\Delta_{T,0}}(\hbar, x, x_0)| \leq C'(1+|x|+|x_0|)^m.$$

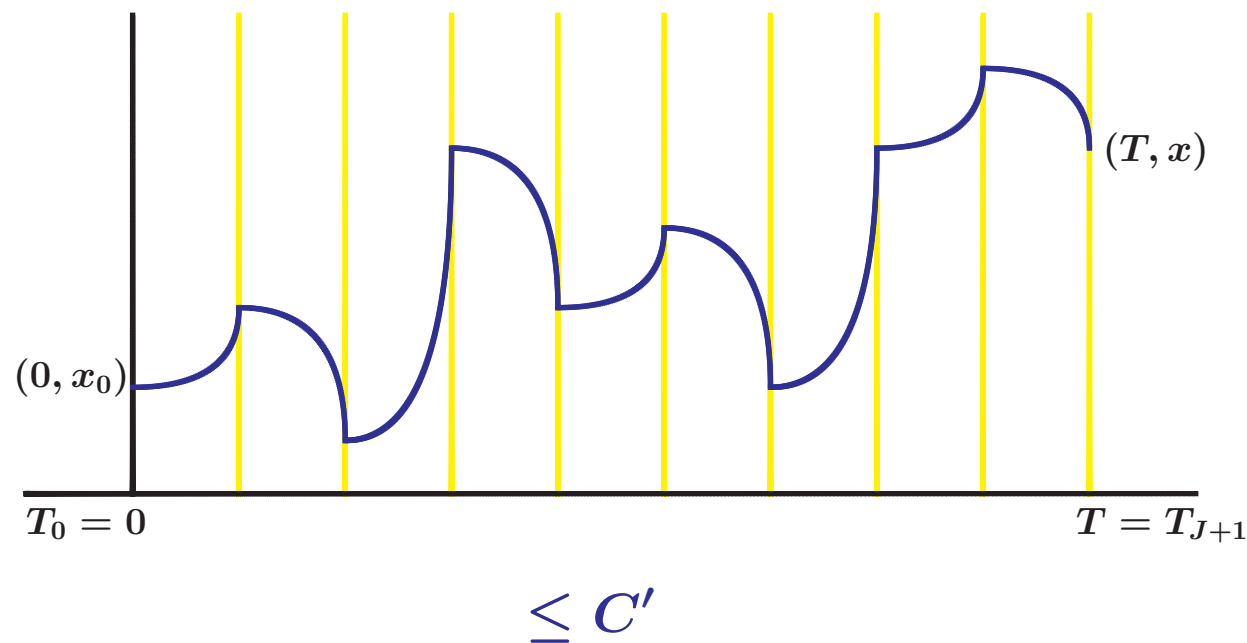
経路を用いて、Lemma F' を解釈する。簡単のため $m = 0$ とする。



|



$$\leq CT(T + U)$$



極限の存在を示すには、分割 $\Delta_{T,0}$ に関する多重積分 (★) の Cauchy 列を作れば良い。

2つの分割

$$\Delta_{T,0} : T = T_{J+1} > T_J > \cdots \quad \cdots \quad \cdots > T_1 > T_0 = 0,$$

$$(\Delta_{T,T_{N+1}}, \Delta_{T_{n-1},0}) : T = T_{J+1} > \cdots > T_{N+1} > T_{n-1} > \cdots > T_0 = 0,$$

に対する2つの多重積分を考える。

2つの多重積分を2つの経路で比較する

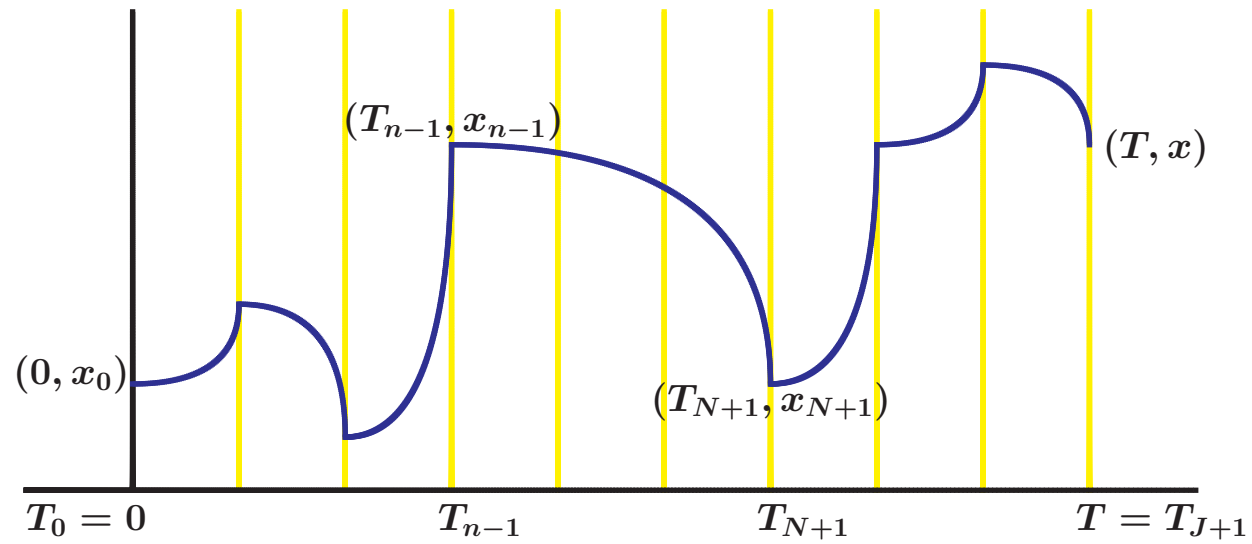
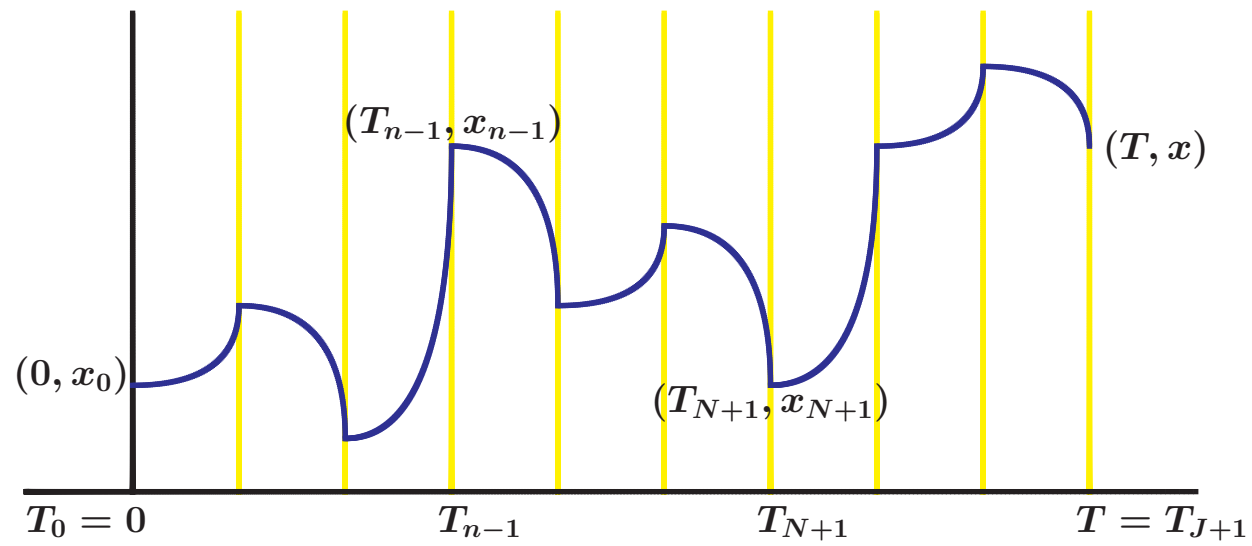
多重積分

$$\begin{aligned} & \prod_{j=1}^{J+1} \left(\frac{1}{2\pi i \hbar t_j} \right)^{d/2} \int \cdots \int \cdots \int \cdots \int e^{\frac{i}{\hbar} S[\gamma_{\Delta_{T,0}}]} F[\gamma_{\Delta_{T,0}}] \prod_{j=1}^J dx_j \\ &= \left(\frac{1}{2\pi i \hbar T} \right)^{d/2} e^{\frac{i}{\hbar} S_{T,0}(x, x_0)} q_{\Delta_{T,0}}(\hbar, x, x_0), \end{aligned}$$

と多重積分

$$\begin{aligned} & \prod_{j=N+2}^{J+1} \left(\frac{1}{2\pi i \hbar t_j} \right)^{d/2} \left(\frac{1}{2\pi i \hbar (T_{N+1} - T_{n-1})} \right)^{n-1} \prod_{j=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2\pi i \hbar t_j} \right)^{d/2} \\ & \int \cdots \int \int \cdots \int e^{\frac{i}{\hbar} S[\gamma(\Delta_{T, T_{N+1}}, \Delta_{T_{n-1}, 0})]} F[\gamma(\Delta_{T, T_{N+1}}, \Delta_{T_{n-1}, 0})] \prod_{j=N+1}^J dx_j \prod_{j=1}^{n-1} dx_j \\ &= \left(\frac{1}{2\pi i \hbar T} \right)^{d/2} e^{\frac{i}{\hbar} S_{T,0}(x, x_0)} q_{(\Delta_{T, T_{N+1}}, \Delta_{T_{n-1}, 0})}(\hbar, x, x_0). \end{aligned}$$

を2つの経路で比較する。



$$\leq C' \times C(T_{N+1} - T_{N-1})(T_{N+1} - T_{n-1} + U_{N+1} - U_{n-1}) \times C'$$

これは 2 つの多重積分の差を意味する。

$$\begin{aligned} & |q_{\Delta_{T,0}}(\hbar, x, x_0) - q_{(\Delta_{T,T_{N+1}}, \Delta_{T_{n-1},0})}(\hbar, x, x_0)| \\ & \leq C(T_{N+1} - T_{n-1})(T_{N+1} - T_{n-1} + U_{N+1} - U_{n-1})(1 + |x| + |x_0|)^m. \end{aligned}$$

Theorem 2' (Feynman 経路積分は存在する) ある関数 $q(T, \hbar, x, x_0)$ が存在し、

$$\begin{aligned} & |q_{\Delta_{T,0}}(\hbar, x, x_0) - q(T, \hbar, x, x_0)| \\ & \leq C|\Delta_{T,0}|(U + T)(1 + |x| + |x_0|)^m, \end{aligned}$$

となる。つまり、多重積分 (★) は $|\Delta_{T,0}| \rightarrow 0$ のとき、 $\mathbb{R}^{2d}$ 上の任意のコンパクト集合上で収束する。

準古典近似の第2項は何か？ (Fujiwara)

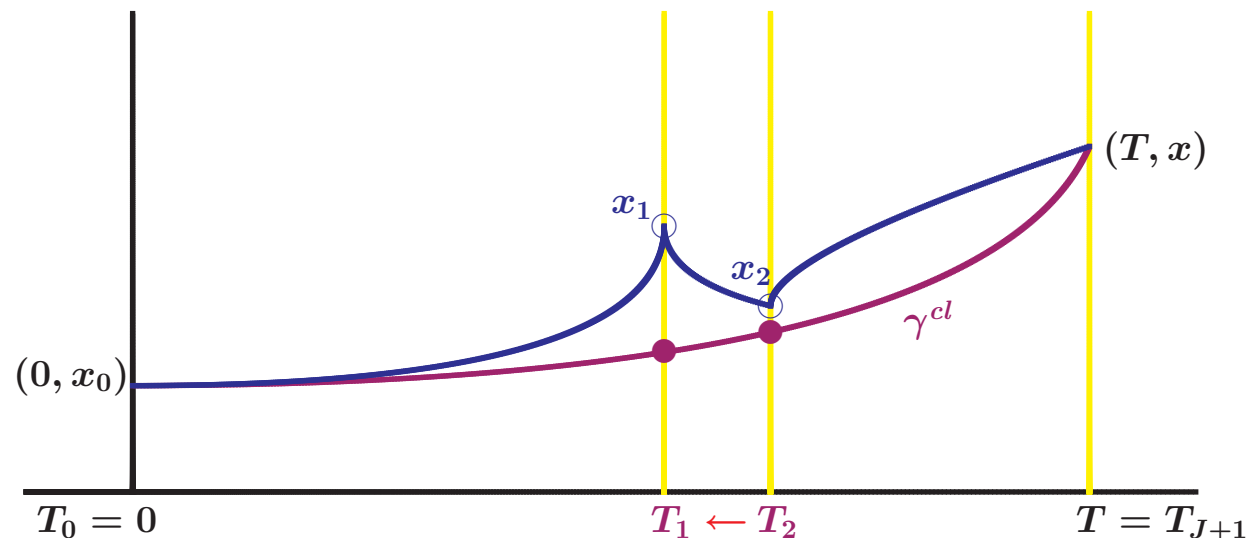
最近、Fujiwara は **区分的古典経路** を用いて、準古典近似の第2項を与えた。

D. Fujiwara and N. Kumano-go, J. Math. Soc. Japan Vol 58, No. 3 (2006).

Lemma $\gamma_{T,T_2,T_1,0}$ を $(0, x_0)$, (T_1, x_1) , (T_2, x_2) , (T, x) を古典経路で結ぶ区分的古典経路とする。

$$q(T_1) \equiv q(T_1, x, x_0) \equiv \lim_{T_2 \downarrow T_1} \Delta_{x_1} \left(D(T_1, x_1, x_0)^{-1/2} F[\gamma_{T,T_2,T_1,0}] \right) \Big|_{\substack{x_2 = \gamma^{cl}(T_2) \\ x_1 = \gamma^{cl}(T_1)}}.$$

が (x, x_0) に関して $\mathbb{R}^{2d}$ 上広義一様収束する。



Theorem 8 (準古典近似の第2項) Lemma の $q(t)$ が連続と仮定する。このとき、

$$\int e^{\frac{i}{\hbar}S[\gamma]} F[\gamma] \mathcal{D}[\gamma] = \left(\frac{1}{2\pi i \hbar T} \right)^{d/2} e^{\frac{i}{\hbar}S[\gamma^{cl}]} D(T, x, x_0)^{-1/2} \\ \times \left(F[\gamma^{cl}] + \hbar \frac{i}{2} \int_0^T D(t, \gamma^{cl}(t), x_0)^{1/2} q(t) dt + \hbar^2 \Upsilon'(\hbar, x, x_0) \right)$$

と書け、

$$|\Upsilon'(\hbar, x, x_0)| \leq C(1 + |x| + |x_0|)^m.$$

Remark $F[\gamma] \equiv 1$ のとき、この第2項は

$$\hbar \frac{i}{2} \int_0^T D(t, \gamma^{cl}(t), x_0)^{1/2} \left(\Delta_y D(t, y, x_0)^{-1/2} \right) \Big|_{y=\gamma^{cl}(t)} dt$$

となり、Schrödinger 方程式の基本解に対する Birkhoff の第2項の微分方程式を満たす。