Schubert 多項式とその仲間

前野 俊昭
京都大学大学院工学研究科

1 Schubert calculus の基本問題

G を連結かつ単連結な半単純複素 Lie 群とし，その Borel 部分群 $B \subset G$ を一つ固定する．これにより, ルート系 Δ は対応する正ルートの集合 Δ_+ と負ルートの集合 $\Delta_- = -\Delta_+$ の和集合として表されることになり，単純ルートの集合 Π が一つ選択されたことになる．大雑把に言えば, Schubert calculus とは旗多様体 G/B, あるいは，双曲部分群 $P \supset B$ から決まる等質空間 G/P の交叉理論を組合せ的に（即ち，ルートデータを用いて）研究することであると言えるだろう．

旗多様体 G/B のコホモロジー環 $H^*(G/B, \mathbb{Q})$ が Weyl 群の余不変式環 R_W として表されることは良く知られている．極大トーラス $T \subset B$ の Lie 環として得られる Cartan 部分代数を $\mathfrak{h}$ とし，ウェイト格子を $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{Z}}$ とする．G の Weyl 群 W は $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{Z}}$ に作用し，従って，多項式環 $\mathrm{Sym}\,\mathfrak{h}^*_{\mathbb{Q}}$, $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{Q}} := \mathfrak{h}^*_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{Q}$, に作用することになる．この Weyl 群作用による不変式部分環 $(\mathrm{Sym}\,\mathfrak{h}^*_{\mathbb{Q}})^W$ は再び多項式環で，$r = \dim \mathfrak{h}$ 個の同次多項式 $f_1, \ldots, f_r$（基本 W-不変式と呼ばれる）で生成されることが知られている．ウェイト $\lambda \in \mathfrak{h}^*_{\mathbb{Z}}$ により定まる G/B 上の直線束を $\mathcal{L}_\lambda$ とおくと，次のような環同型が得られる．

$$\begin{array}{rccc} \alpha: & R_W := \mathrm{Sym}\,\mathfrak{h}^*_{\mathbb{Q}}/(f_1, \ldots, f_r) & \xrightarrow{\sim} & H^*(G/B, \mathbb{Q}) \\ & \lambda & \mapsto & c_1(\mathcal{L}_\lambda) \end{array}$$

一方，G/B への自然な T 作用の固定点は，W の元を用いて wB/B, $w \in W$, と表される．これらの点の B-軌道は $\mathbb{C}^{l(w)}$ と同型になる．ここで

2010 年 3 月 8 日–9 日 中央大学 第 53 回 Encounter with Mathematics 予稿 Ver. 100310

$l(w)$ は w の長さを表す．以下，これらの B-軌道の Zariski 閉包を

$$\Omega_w := \overline{Bw_0wB/B} \subset G/B$$

と表すことにしよう．$w_0 \in W$ は長さ最大の元である．これらが Schubert 多様体と呼ばれるもので，Ω_w は G/B の中で余次元 $l(w)$ の部分代数多様体になっている．以下，Ω_w が定めるコホモロジー類を $[\Omega_w]$ で表すことにすると，$\{[\Omega_w] | w \in W\}$ は $H^*(G/B, \mathbb{Q})$ の線型基底をなす.

このような設定の下で，Schubert calculus の基本的な問題とは差し当たり次のような問題を念頭に置いているものと考えて良いだろう.

Problem 1.1. 余不変式環とコホモロジー環との同型 α の下で，Schubert 類 $[\Omega_w]$ を表すような多項式 $F_w \in \mathrm{Sym}\, \mathfrak{h}^*_{\mathbb{Q}}$ を見つけよ.

Problem 1.2. 線型基底 $\{[\Omega_w] | w \in W\}$ に関するコホモロジー環 $H^*(G/B, \mathbb{Q})$ の構造定数を記述せよ.

なお, 一般に等質空間 G/P のコホモロジー環 $H^*(G/P, \mathbb{Q})$ は $H^*(G/B, \mathbb{Q})$ の部分環であり，Ω_w たちの G/P への射影がやはり線型基底をなすことに注意しておく.

2 Schubert 多項式

ここでは Lascoux と Schützenberger によって導入された Schubert 多項式の定義とその基本性質についてまとめておく．Schubert 多項式について詳しく書かれたものとしては [11], [27], [29] がある．Schubert 多項式は A 型旗多様体の Schubert 類たちを表す多項式の族であり，従って Problem 1.1 に対する解答を与えている．それだけでなく，これから見るように Schubert 多項式たちは A 型旗多様体のコホモロジー環の情報を多項式レベルに「持ち上げ」ている．この事実こそが Schubert 多項式の理論の核心だと考えられる.

2.1 対称群の組合せデータ

まず，Schubert 多項式の基本性質を述べるために必要な，対称群に関する幾つかの言葉を準備しておく.

Definition 2.1. 以下，$w \in S_n$ とする．
(1) w の diagram $D(w)$ とは，集合

$$D(w) = \{(i,j) \mid 1 \leq i,j \leq n,\ j < w(i),\ i < w^{-1}(j)\}$$

のことである．$D(w)$ は通常,「第 4 象限」に置かれた箱の集合として図式的に表される．i は「南」方向の座標，j は「東」方向の座標である．
(2) 各 $i = 1, \ldots, n$ に対し，$D(w)$ の中の (i,j) という形の元の数（第 i 行の箱の数）を $c_i(w)$ とおく．これらを並べた数列 $c(w) = (c_1(w), c_2(w), \ldots, c_n(w))$ を w の code と言う．
(3) $l(w) = \#\{(i,j) \mid i < j,\ w(i) > w(j)\}$ を w の length と言う．また，cover relation

$$w \to w' \Leftrightarrow \exists i,j,\ w' = w \cdot (i\ j),\ l(w') = l(w) + 1$$

で定められる W 上の順序を Bruhat 順序と言う．
(4) w に対し，$w(r) > w(r+1)$ であるような $1 \leq r \leq n-1$ を w の descent という．
(5) w が唯一つの descent を持つとき，w は Grassmannian であると言う．形式的に，単位元は 0 を descent とする Grassmannian 置換であると決めておく．

Remark 2.1. 実は，$w \in S_n$ の code $c(w)$ から w を回復することが出来る．$c(w) = (c_1(w), c_2(w), \ldots, c_n(w))$ は $0 \leq c_i(w) \leq n - i$ を満たす数列だが，逆に 自然数列 $\underline{j} = (j_1, \ldots j_n)$ が $j_i \leq n - i$ を満たすとき，$\underline{j} = c(w)$ となるような $w \in S_n$ が唯一つ存在する．

2.2 差分商作用素

対称群 S_n は n 変数多項式環 $P_n = \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ に変数の添字の置換で作用している．S_n の単純互換 $s_i := (i\ i+1), i = 1, \ldots, n-1$ に対応して差分商作用素 $\partial_1, \ldots, \partial_{n-1}$ が次のように定められる．

$$\partial_i f := \frac{f - s_i f}{x_i - x_{i+1}}$$

この ∂_i は捩れ Leibniz 則

$$\partial_i(fg) = \partial_i(f)g + s_i(f)\partial_i(g)$$

を満たす．

Proposition 2.1. $\partial_1, \ldots, \partial_{n-1}$ は次の関係式を満たす.

$$\begin{aligned} \partial_i^2 &= 0, \\ \partial_i\partial_j &= \partial_j\partial_i, \quad |i-j| > 1, \\ \partial_i\partial_{i+1}\partial_i &= \partial_{i+1}\partial_i\partial_{i+1} \end{aligned}$$

この関係式から，$w \in S_n$ に対する ∂_w を次のように定めることができる.

Definition 2.2. $w \in S_n$ の最短表示 $w = s_{i_1}\cdots s_{i_l}$ をとり，ここで現れた $i_1, \ldots, i_l$ を用いて $\partial_w := \partial_{i_1}\cdots\partial_{i_l}$ と定める.

Proposition 2.1 より，上の定義は w の最短表示の取り方に依らない. また，$s_{i_1}\cdots s_{i_k}$ が最短でないときには $\partial_{i_1}\cdots\partial_{i_k} = 0$ となる. 従って $u, v \in S_n$ に対し，

$$\partial_u\partial_v = \begin{cases} \partial_{uv}, & \text{if } l(uv) = l(u) + l(v), \\ 0, & \text{otherwise}, \end{cases}$$

となることもすぐに分かる.

次の補題は簡単だが，しばしば有用である.

Lemma 2.1. 全ての $i = 1, \ldots, n-1$ に対し，$\partial_i f = 0 \Leftrightarrow f \in P_n^{S_n}$

捩れ Leibniz 則より，差分商作用素 ∂_i たちは基本対称式 $e_1, \ldots, e_n$ で生成されるイデアル I_n を保ち，従って余不変式環 $R_{S_n} = P_n/I_n$ への作用を誘導していることが分かる.

また，R_{S_n} は自然な次数付き環なので，環準同型

$$\begin{array}{cccc} \varepsilon: & P_n & \to & \mathbb{Z} \\ & f & \mapsto & f(0) \end{array}$$

は，環準同型 $\bar{\varepsilon}: R_{S_n} \to \mathbb{Z}$ に落ちていることにも注意しておこう. この $\bar{\varepsilon}$ を用いると次のような双線型形式が定義できる.

$$\begin{array}{cccc} \langle\ ,\ \rangle: & R_{S_n} \times R_{S_n} & \to & \mathbb{Z} \\ & (f, g) & \mapsto & \bar{\varepsilon}\partial_{w_0}(fg). \end{array}$$

実は，この双線型形式はコホモロジー環上の交叉形式に対応するものである.

2.3 Schubert 多項式の定義

対称群 S_n に対する Schubert 多項式とは，S_n の元で添字付けられた P_n の中の多項式の族で，次のように定義されるものである．

Definition 2.3. まず，長さ最大の元 $w_0 \in S_n$ に対しては

$$\mathfrak{S}_{w_0} := x_1^{n-1} x_2^{n-2} \cdots x_{n-1}$$

と定める．一般の $w \in S_n$ に対しては,

$$\mathfrak{S}_w := \partial_{w^{-1}w_0} \mathfrak{S}_{w_0}$$

と定義する．

Remark 2.2. アプリオリには上記の Schubert 多項式の定義は各 n に依存している．しかし，後で見るように実は n に依らずに定義されていることが分かる．

定義からすぐに

$$\partial_i \mathfrak{S}_w = \begin{cases} \mathfrak{S}_{ws_i}, & \text{if } ws_i \to w, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

が分かる．次の命題を確認しておこう．

Proposition 2.2. 多項式 $\mathfrak{S}_w$ は $H^*(Fl_n)$ において Schubert 類 $[\Omega_w]$ を表す．即ち $\alpha(\mathfrak{S}_w) = [\Omega_w]$.

(証明のアイデア)　旗多様体 Fl_n は，partial flag variety

$$Y_i := \{0 = E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_{i-1} \subset E_{i+1} \subset \cdots \subset E_n = \mathbb{C}^n \mid \dim E_j = j\}$$

上の $\mathbb{P}^1$-束の構造を持つ．ここで，ファイバー積 $Fl_n \times_{Y_i} Fl_n$ から第一成分，第二成分への射影を $\pi_1^{(i)}, \pi_2^{(i)}$ で表すことにする．主張は

$$(\pi_1^{(i)})_* (\pi_2^{(i)})^* ([\Omega_w]) = \begin{cases} [\Omega_{ws_i}], & \text{if } ws_i \to w, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

と，$\alpha \circ \partial_i = (\pi_1^{(i)})_* (\pi_2^{(i)})^* \circ \alpha$, そして後で見るように $\mathfrak{S}_{\mathrm{id}} = 1$ であることから従う．

2.4 Schubert 多項式の基本性質

Proposition 2.3. (1) $\mathfrak{S}_w$ は $\deg \mathfrak{S}_w = l(w)$ の同次式で，$\mathfrak{S}_w = x^{c(w)} + \cdots +$(辞書式順序に関して高次の項).
(2) $\mathfrak{S}_{\mathrm{id}} = 1$, $\mathfrak{S}_{s_k} = x_1 + \cdots + x_k$.
(3) $\{\mathfrak{S}_w\}_{w \in S_n}$ は余不変式環 R_{S_n} の線型基底をなす.
(4) S_n を n 個の文字 $1, \ldots, n$ の置換群と考えると埋め込み $\iota : S_n \to S_{n+1}$ が得られる．この埋め込みに関して Schubert 多項式は安定である．即ち，$w \in S_n$ に対して $\mathfrak{S}_{\iota(w)} = \mathfrak{S}_w$.

証明 (1) 前半の主張は明らか．後半は w の長さについての帰納法を使う．$w(k) < w(k+1)$ となるような最大の $1 \le k \le n-1$ をとり，$v = ws_k$ とおくと $\mathfrak{S}_w = \partial_k \mathfrak{S}_v$. 一方 $v(k) > v(k+1) > \cdots > v(n)$ となっているので，$i \ge k$ のとき $c_i(v) = n-i$. あとは帰納法の仮定から，$\mathfrak{S}_v = x^{c(v)} + \sum_{\underline{j}} a_{\underline{j}} x^{\underline{j}}$, $a_{\underline{j}} \ne 0$, と表したとき，$j_i > c_i(v)$ となるような最小の i は k より小さくなることに注意すると証明できる．
(2) $\mathfrak{S}_{\mathrm{id}} = 1$ は (1) から．$\mathfrak{S}_{s_k} = x_1 + \cdots + x_k$ は

$$\partial_i \mathfrak{S}_{s_k} = \begin{cases} 1, & \text{if } i = k, \\ 0, & \text{if } i \ne k, \end{cases}$$

から分かる．
(3) $\{x_1^{j_1} \cdots x_{n-1}^{j_{n-1}} | j_i \le n-i\}$ が R_{S_n} を生成することは n についての帰納法で分かる．(1) より，$\{\mathfrak{S}_w\}_{w \in S_n}$ も R_{S_n} を生成．R_{S_n} の中で，$\sum_{w \in S_n} a_w \mathfrak{S}_w = 0$, $a_w \in \mathbb{Z}$, という線型関係が成立しているとする．

$$\bar{\varepsilon} \partial_u \mathfrak{S}_v = \begin{cases} 1, & \text{if } u = v, \\ 0, & \text{if } u \ne v, \end{cases}$$

なので，上の線型関係の両辺に $\bar{\varepsilon}\partial_u$ を施してやれば $a_u = 0$ が出る．従って $\{\mathfrak{S}_w\}_{w \in S_n}$ は R_{S_n} の中で一次独立．
(4) 各 S_n に対して定義される Schubert 多項式を区別するために，ここでは S_n に対する Schubert 多項式を $\mathfrak{S}_w^{(n)}$ で表すことにする．また，S_n の長さ最大の元は $w_0^{(n)}$ と表し，S_n は S_{n+1} の部分群と見なすことにする．$\partial_{(w_0^{(n)})^{-1} w_0^{(n+1)}} \mathfrak{S}^{(n+1)}_{w_0^{(n+1)}} = \mathfrak{S}^{(n)}_{w_0^{(n)}}$ を言えばよい．

$$(w_0^{(n)})^{-1} w_0^{(n+1)} = (n+1, 1, 2, \ldots, n-1, n) = s_n s_{n-1} \cdots s_1$$

なので，$\partial_n\partial_{n-1}\cdots\partial_1(x_1^n x_2^{n-1}\cdots x_n)$ を計算すればよい．これが $x_1^{n-1}x_2^{n-2}\cdots x_{n-1}$ と一致することは容易に確かめられる．

上の命題から重要な結論が導かれる．埋め込み $P_n \to P_{n+1}$ に関して帰納的極限をとり，$P_\infty = \mathbb{Z}[x_1, x_2 \ldots]$ を考える．同様に $S_\infty = \bigcup_{n=1}^\infty S_n$ を考えると $\{\mathfrak{S}_w\}_{w\in S_\infty}$ は P_∞ の線型基底をなす．また，$\mathfrak{S}_w \in P_n$ かつ $w \notin S_n$ であるようなケースを考えると $\mathfrak{S}_w \in I_n$, 言い換えると，$\mathfrak{S}_w = 0$ in R_{S_n} となることが分かる．このことから，第 1 節の Problem 1.2 に関して次のようなアプローチが可能になることが分かる．まず， Schubert 多項式 $\mathfrak{S}_u, \mathfrak{S}_v$, $u, v \in S_\infty$, の積を P_∞ で考えると，再び $\{\mathfrak{S}_w\}_{w\in S_\infty}$ の一次結合として次のように一意的に表される．

$$\mathfrak{S}_u\mathfrak{S}_v = \sum_{w\in S_\infty} c_{uv}^w \mathfrak{S}_w, \quad c_{uv}^w \in \mathbb{Z}.$$

ここでの和は実質的有限和である．この等式を mod I_n で考えると $w \notin S_n$ であるような $\mathfrak{S}_w$ たちの項が落ちて

$$\mathfrak{S}_u\mathfrak{S}_v = \sum_{w\in S_n} c_{uv}^w \mathfrak{S}_w \mod I_n$$

が得られることになる．つまり，多項式環 P_∞ の $\{\mathfrak{S}_w\}_{w\in S_\infty}$ に関する構造定数がそのまま R_{S_n} の構造定数になっていることが分かる．このような意味で，Schubert 多項式は R_{S_n} の構造を P_∞ へ自然に持ち上げているものだと言うことができる．例えば，Schubert 多項式の理論の応用として Tamvakis [34] による旗多様体の数論的 Chow 環に関する研究があるが，そこでも P_∞ での理論が出来ているということが本質的な役割を果たす．

R_{S_n} の構造定数に関しては，Monk の公式と呼ばれる公式が有名である．これも Schubert 多項式を用いると P_∞ での公式として定式化できる．

Theorem 2.1. (Monk formula) P_∞ において，次の公式が成立．

$$x_k\mathfrak{S}_w = \sum_{i>k, l(w(ki))=l(w)+1} \mathfrak{S}_{w(ki)} - \sum_{i<k, l(w(ik))=l(w)+1} \mathfrak{S}_{w(ik)}$$

証明　次数に関する帰納法で示す．任意の $i = 1, 2, \ldots$ に対し，両辺に ∂_i を施したものが一致することを言えば良い．Lemma 2.1 で $n \to \infty$ とすると，$\partial_i f = 0$, $i = 1, 2, \ldots$ となるような $f \in P_\infty$ は定数しかないことに注意.

Monk の公式の特別な場合として，次の transition formula が得られる．

Corollary 2.1. (Transition formula) $w \in S_n$ に対し，w の最大の descent を r とする．また，$w(s) < w(r)$ であるような最大の s をとり，$v = w(rs)$ とおく．このとき，

$$\mathfrak{S}_w = x_r \mathfrak{S}_v + \sum_{i<r,\, l(v(ir))=l(w)} \mathfrak{S}_{v(ir)}.$$

Transition formula から，次の正値性が出る．これは，次数と r, s の位置に関する帰納法で示すことができる．

Corollary 2.2. 任意の $w \in S_n$ に対し，

$$\mathfrak{S}_w \in \mathbb{N}[x_1, \ldots, x_{n-1}].$$

ここで分かったように，Schubert 多項式が自然数を係数とする多項式であるとすれば，その係数は一体何をカウントしているのだろうか．これに答えるのが後で扱う Stanley 予想である．

ここまでの議論から，pairing $\langle\ ,\ \rangle$ に関する直交性も分かる．

Proposition 2.4. $\{\mathfrak{S}_w\}_{w \in S_n}$ は，$\langle\ ,\ \rangle$ に関して次の直交性を満たす．

$$\langle \mathfrak{S}_u, \mathfrak{S}_v \rangle = \begin{cases} 1, & \text{if } u = w_0 v, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

2.5 Schur 多項式

$w \in S_n$ が唯一つの descent r を持つ Grassmannian 置換であるとき，$\lambda_i(w) = w(r-i+1) - (r-i+1)$, $1 \le i \le r$, と置くと

$$\lambda_1(w) \ge \lambda_2(w) \ge \cdots \ge \lambda_r(w) \ge 0$$

となり，分割 $\lambda(w) := (\lambda_1(w), \lambda_2(w), \ldots, \lambda_r(w))$ ができる．

Theorem 2.2. $w \in S_n$ が唯一つの descent r を持つ Grassmannian 置換であるとき，

$$\mathfrak{S}_w(x) = s_{\lambda(w)}(x_1, \ldots, x_r).$$

証明　$v = ww_0^{(r)}$ とすると $l(v) = l(w) + l(w_0^{(r)})$. 従って，$\partial_{w_0^{(r)}} \mathfrak{S}_v = \mathfrak{S}_w$. また，

$$\partial_{w_0^{(r)}} = \frac{\sum_{w \in S_r} (-1)^{l(w)} w}{\prod_{1 \le i < j \le r} (x_i - x_j)}$$

なので，

$$\mathfrak{S}_v = x_1^{\lambda_1(w)+r-1} x_2^{\lambda_2(w)+r-2} \cdots x_r^{\lambda_r(w)}$$

が分かれば Jacobi-Trudi formula から $\mathfrak{S}_w = s_{\lambda(w)}$ が従う．これは，$|\lambda(w)|$ に関する帰納法で次のように証明できる．$\lambda(w)$ を Young 図形と思い，$\lambda(w)$ から k 行目右端の箱を一つ取り除いてもやはり Young 図形 λ_- が得られているとする．ここで $w(l) = w(r-k+1) - 1$ となるような l をとると $l > r$ となっており，

$$w_-(i) := \begin{cases} w(i), & \text{if } i \neq r-k+1, l, \\ w(l) = w(r-k+1) - 1, & \text{if } i = r-k+1, \\ w(r-k+1), & \text{if } i = l, \end{cases}$$

と定めた w_- は再び Grassmannian で，$\lambda(w_-) = \lambda_-$. ここで Monk 公式を使うと $x_k \mathfrak{S}_{w_- w_0^{(r)}} = \mathfrak{S}_v$ が分かる．

Schur 多項式の principal specialization $s_\lambda(1, q, q^2, \ldots, q^{r-1})$ に関しては次の公式が知られている．

Theorem 2.3. (Hook-content formula, [33])

$$s_\lambda(1, q, q^2, \ldots, q^{r-1}) = q^{\sum_{i=1}^r (i-1)\lambda_i} \prod_{(i,j) \in \lambda} \frac{1 - q^{r+j-i}}{1 - q^{h_\lambda(i,j)}}$$

ここで，$h_\lambda(i,j)$ は Young diagram λ の box (i,j) の hook length.

Schur 多項式が Schubert 多項式の特別なケースとして現れるのは既に見た通りである．それでは Schubert 多項式に対しても その principal specialization $\mathfrak{S}_w(1, q, q^2, \ldots, q^{n-1})$ に関して何か言えないだろうか？実はこれに関しても組み合わせ的な公式が Macdonald 予想として知られている．これについては後で触れる．

3 Schubert 多項式の仲間たち

ここでは，Schubert 多項式の仲間として知られている多項式を簡単に紹介する．詳しくは引用文献を参照されたい．

3.1 二重 Schubert 多項式

Definition 3.1. 二重 Schubert 多項式とは，対称群 S_n の元で添字付けられた
$\mathbf{Z}[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n]$ の多項式 $\{\mathfrak{S}_w(x, y)\}_{w \in S_n}$ であって，長さ最大の元 $w_0 \in S_n$ に対しては

$$\mathfrak{S}_{w_0}(x, y) := \prod_{i+j<n+1} (x_i - y_j)$$

と定め，一般の $w \in S_n$ に対しては

$$\mathfrak{S}_w(x, y) := \partial^{(x)}_{w^{-1}w_0} \mathfrak{S}_{w_0}(x, y)$$

と定義する．

(二重でない)Schubert 多項式 $\mathfrak{S}_w(x)$ は二重 Schubert 多項式において y 変数を 0 と置いたもの，$\mathfrak{S}_w(x) = \mathfrak{S}_w(x, y)|_{y=0}$ と一致する．

二重 Schubert 多項式は flag bundle のコホモロジーにおける degeneracy locus に対応している．X を多様体とし，X 上の階数 r の複素ベクトル束 $\mathcal{E} \to X$ と部分ベクトル束のなす flag $\mathcal{F}_\bullet : 0 = \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_n = \mathcal{E}$ から決まっている flag bundle $\pi : Fl(\mathcal{E}) \to X$ が与えられているとする．$Fl(\mathcal{E})$ 上の degeneracy locus $\tilde{\Omega}_w$ を定義するために，部分ベクトル束の flag $\mathcal{E}_\bullet : 0 = \mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{E}_n = \mathcal{E}$ を一つ固定し，$\mathcal{E}'_i := \pi^*\mathcal{E}_i$ とする．また，$Fl(\mathcal{E})$ 上の universal flag を $\mathcal{U}_\bullet : 0 \subset \mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{U}_n = \pi^*(\mathcal{E})$ とする．各点 $x \in Fl(\mathcal{E})$ において自然な写像 $\mathcal{E}'_q(x) \to \mathcal{U}_n/\mathcal{U}_{n-p}(x)$ があることに注意する．Degeneracy locus $\tilde{\Omega}_w$ は Schubert 多様体と同様に，

$$\tilde{\Omega}_w = \{x \in Fl(\mathcal{E}) \mid \mathrm{rk}(\mathcal{E}'_q(x) \to \mathcal{U}_n/\mathcal{U}_{n-p}(x)) \leq r_w(p, q), \forall p, q\}$$

と定義される．Flag bundle $Fl(\mathcal{E})$ のコホモロジー環は

$$H^*(Fl(\mathcal{E})) \cong H^*(X)[x_1, \ldots, x_n]/(e_1(x) - c_1(\mathcal{E}), \ldots, e_n(x) - c_n(\mathcal{E}))$$

という構造を持つ．ここで，$x_i = c_1(\mathcal{U}_{n-i+1}/\mathcal{U}_{n-i})$, $y_i = c_1(\mathcal{E}_i/\mathcal{E}_{i-1})$ とすると，

$$[\tilde{\Omega}_w] = \mathfrak{S}_w(x, y) \in H^*(Fl(\mathcal{E})).$$

Remark 3.1. (1) ここで紹介した Schubert 多様体 (又は degeneracy locus) と (二重)Schubert 多項式との関係は Chow 環のレベルで成立している [10].
(2) $SL(n, \mathbf{C})$ の極大トーラス T の旗多様体への作用を考えたとき，旗多様体の T-同変コホモロジーは T-分類空間上の flag bundle のコホモロジーなので二重 Schubert 多項式は T-同変コホモロジーで Schubert 多様体を表す多項式と考えることもできる．

二重 Schubert 多項式に関しては次の Cauchy 公式と呼ばれる公式も知られている．

Cauchy 公式

$$\mathfrak{S}_{w_0}(x, y) = \sum_{v \in S_n} \mathfrak{S}_v(x)\mathfrak{S}_{vw_0}(-y).$$

ここで左辺は，$\prod_{i+j<n+1}(x_i - y_j)$ の形に分解しているため，積和公式の一種と見ることができる．

3.2 Grothendieck 多項式

Grothendieck 多項式 [24] は Schubert 多項式の K 理論版と言うべきものであるが，(二重)Schubert 多項式の定義で差分商作用素 ∂_i を等圧 (isobaric) 差分商作用素 $\pi_i = \partial_i \circ (1 - x_{i+1})$ (ここで $(1 - x_{i+1})$ は掛け算作用素) に置き換えることで得られる．π_i たちも組み紐関係式を満たしていることから，$w \in S_n$ の最短表示 $w = s_{i_1} \cdots s_{i_l}$ に対し $\pi_w = \pi_{i_1} \cdots \pi_{i_l}$ とすれば，やはり最短表示の取り方によらない．

Definition 3.2. 二重 Grothendieck 多項式 $G_w(x, y) \in \mathbf{Z}[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n]$ は次のように定義される．まず $w_0 \in S_n$ に対しては

$$G_{w_0}(x, y) := \prod_{i+j<n+1} (x_i - y_j)$$

と定める．一般の $w \in S_n$ に対しては

$$G_w(x,y) := \pi^{(x)}_{w^{-1}w_0} G_{w_0}(x,y)$$

と定める．Grothendieck 多項式 $G_w(x)$ は，$G_w(x) := G_w(x,y)|_{y=0}$ と定義する．

Remark 3.2. Schubert 多項式は斉次多項式であったが，Grothendieck 多項式は斉次ではない．Grothendieck 多項式の最低次部分が Schubert 多項式に一致している．Grothendieck 多項式に関しては，そのままでは係数の正値性も成り立たなくなっていることに注意．また，Schubert 多項式は Proposition 2.4 の意味で self-dual であるが，Grothendieck 多項式は Euler characteristic から来る K 理論的 pairing に関して self-dual ではない．双対 Grothendieck 多項式というものが別にある．

多様体 X 上の flag bundle $Fl(\mathcal{E})$ の K 環は

$$K(Fl(\mathcal{E})) = K(X)[\xi_1, \dots, \xi_n]/(e_1(\xi) - e_1(\eta), \dots, e_n(\xi) - e_n(\eta))$$

という構造をもつ．ここで，$\xi_i = [\mathcal{U}_{n+1-i}/\mathcal{U}_{n-i}]$, $\eta_i = [\mathcal{E}_i/\mathcal{E}_{i-1}]$ である．

Theorem 3.1. ([24], [12]) $K(Fl(\mathcal{E}))$ において，

$$[\mathcal{O}_{\tilde{\Omega}_w}] = G_w(\xi, \eta)$$

が成り立つ．

3.3 A 型以外のケース

Schubert 多項式の構成は対応するルート系が A 型であるということに非常に強く依存しており，他のタイプのルート系で類似の構成をしようとすると，A 型の時に成り立った性質を何か諦めなくてはならなくなる．例えば係数の整数性・正値性と旗多様体の Schubert 多様体との対応とを同時に満たせなくなるようなことが起こり得る．従ってどの性質を重視するかでいくつか異なった種類の Schubert 多項式の類似が古典型ルート系に対して提案されている．例えば [2], [8] 参照．さらに，古典型の二重 Schubert 多項式が Kresch-Tamvakis [20], Ikeda-Mihalcea-Naruse [16], [17] により構成されている．

一般の旗多様体 G/B のコホモロジー環の中で Schubert 多様体 Ω_w を表す多項式については，Bernstein-Gelfand-Gelfand による多項式が知られている [1]．これはまず Weyl 群 W の長さ最大の元 w_0 に対して，全ての正ルートの積を $\#W$ で割ったものを P_{w_0} と定め，あとは Schubert 多項式と同様に差分商作用素を施して得られるものである．これもある意味 Schubert 多項式の仲間といえるだろう．BGG 多項式の利点はルート系に依らない一様な定義が与えられていることであり，より広く有限 Coxeter 群の余不変式環に対しても自然な基底を与える多項式として構成できる [15]．例えば，A_{n-1} 型の場合をみると

$$P_{w_0}(x) = \frac{1}{n!} \prod_{1 \le i < j \le n} (x_i - x_j).$$

これを見て分かるように BGG 多項式は整数性・正値性をみたしていない他，独立でない変数 x_n を含む等，余不変式環の中でしか良い振る舞いを示さない．従って，組み合わせ的にはあまり良い性質を持っていない．

一般の G/B の K 環で Schubert 多様体の構造層を表す多項式については Kostant-Kumar [19], Ram-Pittie [32] を参照されたい．

3.4 量子化

Schubert 多項式の量子化は，幾何学的には旗多様体の量子コホモロジー環を考えることに対応している．ここでは Fomin, Gelfand と Postnikov [6] による量子化の手法について紹介する．量子変形のためのパラメータ $q_1, q_2, \ldots$ を用意する．$\tilde{P}_\infty = \mathbf{Z}[q_1, q_2, \ldots][x_1, x_2, \ldots]$ に作用する作用素 $\tilde{X}_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ を次のように定める．(FGP 作用素)

$$\tilde{X}_k = x_k - \sum_{i<k} q_i q_{i+1} \cdots q_{k-1} \partial_{(ik)} + \sum_{j>k} q_k q_{k+1} \cdots q_{j-1} \partial_{(kj)}.$$

ここで，x_k は掛け算作用素であり，$\partial_{(ik)}$ は既に定義した差分商作用素 ∂_w において w が互換 (ik) の場合のものである．

Proposition 3.1. (1) $\tilde{X}_i$ たちは互いに可換である．$[\tilde{X}_i, \tilde{X}_j] = 0$.
(2) $\tilde{X}_i$ たちは代数的に独立である．

[6] では上の命題を示すことにより，次のように多項式の量子化写像を定義している．

Definition 3.3. 多項式の量子化とは，写像

$$\begin{array}{ccc} \tilde{P}_\infty & \to & \tilde{P}_\infty \\ f(x_1, x_2, \dots) & \mapsto & F(x) := f(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \dots)(1) \end{array}$$

の逆写像 $(F \mapsto f)$ として得られる $\mathbf{Z}[q_1, q_2, \dots]$-線型写像である．量子 Schubert 多項式 $\mathfrak{S}_w^q(x)$ はこの意味での Schubert 多項式 $\mathfrak{S}_w(x)$ の量子化として定義される．また 量子二重 Schubert 多項式 $\mathfrak{S}_w^q(x, y)$ は二重 Schubert 多項式 $\mathfrak{S}_w(x, y)$ の x 変数に関してのみ量子化したものとする．

Remark 3.3. 量子化写像は環準同型ではなく，単に $\mathbf{Z}[q_1, q_2, \dots]$-線型写像である．

Schubert 多項式たちが P_∞ の $\mathbf{Z}$-基底をなしていたように，量子 Schubert 多項式たちは $\tilde{P}_\infty$ の $\mathbf{Z}[q_1, q_2, \dots]$-基底となっている．そこで再び二つの量子 Schubert 多項式の積が量子 Schubert 多項式の一次結合としてどのように表されるかが問題となる．量子化の定義の直接の帰結として次の公式が示される．

量子 Pieri 公式 $\tilde{P}_\infty$ において，

$$(x_1 + \cdots + x_i)\mathfrak{S}_v^q(x) = \sum_{(j,k)} \mathfrak{S}_{v(jk)}^q(x) + \sum_{(j,k)} q_j q_{j+1} \cdots q_{k-1} \mathfrak{S}_{v(jk)}^q(x)$$

右辺第一項で (j, k) の動く範囲は通常の Pieri 公式と同じ．第二項は $j \le i < k$ かつ $l(v(jk)) = l(v) - 2(k - j) + 1$ を満たすような組 (j, k) について和を取っている．

旗多様体の (small) 量子コホモロジー環の構造について簡単に見ておく．行列

$$M_n := \begin{pmatrix} x_1 & q_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & x_2 & q_2 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & x_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$$

の特性多項式 $\Delta_n(t|x_1, \dots, x_n) := \det(tI + M_n)$ を t について

$$\Delta_n(t|x_1, \dots, x_n) = t^n + \sum_{i=1}^{n} e_i^q(x) t^{n-i}$$

と展開し，現れた係数 $e_i^q(x)$ たちを量子基本対称式という．量子基本対称式は対称式ではないことに注意する．旗多様体 Fl_n の量子 cohomology 環 $QH^*(Fl_n)$ は

$$QH^*(Fl_n) \cong \mathbf{Z}[q_1, \ldots, q_{n-1}][x_1, \ldots, x_n]/(e_1^q(x), \ldots, e_n^q(x))$$

という構造を持つ [13]．また，量子コホモロジー環はコホモロジー群の上の環構造だけを変形したもので，土台のコホモロジー群自体は取り替えていない．従って Schubert 類 $[\Omega_w]$ は自然に $QH^*(Fl_n)$ の元として入っている．

Theorem 3.2. $w \in S_n$ のとき，上の同型の下で

$$[\Omega_w] = \mathfrak{S}_w^q(x) \in QH^*(Fl_n).$$

これにより量子 Schubert 多項式の幾何学的な意味は明らかになったわけだが，先に紹介した量子 Pieri 公式により，量子コホモロジー環の構造定数についての情報も古典的な場合と同様の手続きで得られる．つまり量子 Schubert 多項式は $\tilde{P}_\infty$ の中でも量子コホモロジー環の積構造の情報を覚えているということになる．これは量子 Schubert 多項式を用いることで多項式環の中から旗多様体の Gromov-Witten 不変量の情報も取り出せることを意味しており，驚くべき結果であると思われる．

最後に Cauchy 公式の量子化版を紹介する．

量子 Cauchy 公式 ([5], [18]) S_n の量子二重 Schubert 多項式 $\mathfrak{S}_{w_0}^q(x,y)$ について

$$\mathfrak{S}_{w_0}^q(x,y) = \prod_{i=1}^{n-1} \Delta_i(-y_{n-i}|x_1, \ldots, x_i)$$

が成り立つ．

Remark 3.4. (1) A 型以外のルート系に対しても，BGG 多項式の量子化が Maré [30] により定義されている．
(2) 量子コホモロジー環の K 理論版である量子 K 理論というものもあり，旗多様体の場合には Givental と Lee [14] により差分戸田系との関係などが詳しく調べられている．これに対応する Grothendieck 多項式の量子化もある [26].

3.5 Affine のケース

量子化にも関係した話題として，affine Grassmannian の Pontryagin 環やそこで Schubert 類を表す多項式の話題がある．ここでは概略のみに留めるので，詳しくは以下に挙げる文献を参照されたい．$F=\mathbb{C}((z))$ を 1 変数 Laurent 級数環とし，その部分環として冪級数環 $O=\mathbb{C}[[z]]$ を考える．連結かつ単連結な半単純複素 Lie 群 G に対して定まる affine Grassmannian $\widehat{\mathrm{Gr}}$ とは，G の F-値点のなす群 $G(F)$ を O-値点のなす部分群 $G(O)$ で割って得られる等質空間 (ind-scheme の構造を持つ)，即ち，$\widehat{\mathrm{Gr}}:=G(F)/G(O)$ として定められるものである．この $\widehat{\mathrm{Gr}}$ も，通常の Grassmannian と同様に Schubert cell による stratification を持ち，各 Schubert cell Ω_λ° は coroot 格子の元 $\lambda\in\mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}^\vee$ で添字付けられている．Schubert 多様体 Ω_λ は やはり Ω_λ° の閉包として定義される．

$\widehat{\mathrm{Gr}}$ は G の極大コンパクト部分群 K の base-point を保つループ群 ΩK とホモトピー同値になっており，ΩK の群演算からホモロジー群 $H_*(\widehat{\mathrm{Gr}})$ に環構造が誘導される．これが Pontryagin 環と呼ばれるもので，可換環になっている．この構造は Bott [4] により調べられており，例えば A_n 型の場合は多項式環 $\mathbb{Z}[h_1,\dots,h_n]$ $(\deg h_i=i)$ と同型である．すると，この環の中で Schubert 類を表す多項式が何かと言うことが問題になるが，そのような多項式は 実質的に Lapointe-Lascoux-Morse [23] の k-Schur 多項式と一致することが Shimozono によって予想され，Lam [21] によって証明されている．実際の多項式の計算は，実は二重 Schubert 多項式を用いて実行することが可能である．この手順については Magyar [28] に詳しく書いてある．

Pontryagin 環 $H_*(\widehat{\mathrm{Gr}})$ は，対応する旗多様体 G/B の量子コホモロジー環（を適当に局所化したもの）と環同型になることが Peterson [31] により指摘された．この事実は Lam-Shimozono [25] により証明されている．具体的な同型写像は

$$\begin{array}{ccc} H_*(\widehat{\mathrm{Gr}}) & \to & QH^*(G/B)_{loc} \\ \Omega_{w\lambda}\Omega_\mu^{-1} & \mapsto & q^{\lambda-\mu}\Omega_w \end{array}$$

という形で与えられる．ここで，$w\in W$ で，$\lambda,\mu\in\mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}^\vee$ は coroot 格子の anti-dominant な元．$QH^*(G/B)_{loc}$ は大雑把に言うと 量子変形のパラメータ $q_1,q_2,\dots$ の逆元を付け加えた局所化である．

その他に，$H_*(\widehat{\mathrm{Gr}})$ はこの次の節で扱う nilCoxeter 代数や，それを拡大した affine nilHecke 代数というものと密接な関係があり，これらの代数

の部分代数として自然に実現できることが知られている ([31]) が，詳しくは [21] を参照されたい．

4 NilCoxeter 代数

Definition 4.1. a, b は適当な値をとるパラメータとする．(A 型の)Hecke 代数 $\mathcal{H}^n_{a,b}$ とは，$\mathbf{Z}$ 上の単位元 1 を持つ結合的代数であって，記号 $u_1, \ldots, u_n$ で生成され，関係式 $u_i^2 = au_i + b$, $u_iu_j = u_ju_i$ $(|i-j| > 1)$, $u_iu_{i+1}u_i = u_{i+1}u_iu_{i+1}$ を持つものである．$\mathcal{H}^n_{0,0}$ を nilCoxeter 代数という．

Hecke 代数の生成元 u_i たちが組み紐関係式を満たしていることから，$w \in S_n$ の最短表示 $w = s_{i_1} \cdots s_{i_l}$ に対して $u_w := u_{i_1} \cdots u_{i_l} \in \mathcal{H}^n_{0,0}$ が最短表示の取り方に依らず定義できる．

例えば，$\mathcal{H}^n_{0,1}$ は群環 $\mathbf{Z}\langle S_n \rangle$ である．次に見るように，nilCoxeter 代数 $\mathcal{H}^n_{0,0}$ は差分商作用素 ∂_w たちのなす代数とも見なせる．

Proposition 4.1. $\mathcal{H}^n_{0,0}$ の P_n (あるいは R_{S_n}) への作用を $u_i.f := \partial_i f$, $i = 1, \ldots, n-1$ と定めると，これは well-defined で $\mathcal{H}^n_{0,0}$ の忠実な表現を定めている．

証明 Well-definedness は Proposition 2.1 からわかる．Schubert 多項式の構成から $\{u_w\}_{w \in S_n}$ が $\mathcal{H}^n_{0,0}$ の基底を成していることも分かるので，この表現は忠実．

Proposition 4.2. $\mathcal{H}^n_{0,0}$ と R_{S_n} は互いに双対である．つまり，双線型形式

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}^n_{0,0} \times R_{S_n} & \to & \mathbb{Z} \\ (u_w, f) & \mapsto & \bar{\varepsilon}\partial_w f \end{array}$$

は perfect pairing.

証明 Proposition 2.3 (3) の証明からわかる．

Remark 4.1. NilCoxeter 代数は一般に Coxeter 群に対して定義できる．従って affine Weyl 群に対しても定義できる．前節で出てきた affine nil-Hecke 代数は，affine Weyl 群に対して定まる nilCoxeter 代数と Sym $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{Q}}$ との cross 積である．

5 Fomin-Kirillov による構成法

NilCoxeter 代数を用いて Schubert 多項式を構成するため，[7] に従い nilCoxeter 代数の元 $h_i(\alpha) := 1+\alpha u_i$ $(i=1,\dots,n)$ を導入する．ここで α は他の元と可換な変数である．$h_i(\alpha)$ たちは可逆な元で $h_i(\alpha)^{-1} = h_i(-\alpha)$, さらに Yang-Baxter 関係式

$$h_i(\alpha)h_{i+1}(\alpha+\beta)h_i(\beta) = h_{i+1}(\beta)h_i(\alpha+\beta)h_{i+1}(\alpha)$$

を満たしていることに注意する．この $h_i(\alpha)$ たちを用いて

$$A_i(\alpha|y_1,\dots,y_{n-i}) := h_{n-1}(\alpha-y_{n-i})h_{n-2}(\alpha-y_{n-i-1})\cdots h_i(\alpha-y_1)$$

と定める．簡単のため，$A_i(\alpha) = A_i(\alpha|y_1,\dots,y_{n-i})$ と略記する．

Definition 5.1. まず，$\mathfrak{S}(x,y) := A_1(x_1)A_2(x_2)\cdots A_{n-1}(x_{n-1})$ とし，これを基底 $\{u_w\}_{w\in S_n}$ の一次結合として次のように分解する．

$$\mathfrak{S}(x,y) = \sum_{w\in S_n} \mathfrak{S}'_w(x,y)u_w.$$

ここで係数として現れた多項式たち $\{\mathfrak{S}'_w(x,y)\}_w$ が二重 Schubert 多項式の第二の定義である．

Theorem 5.1. 二通りの方法で定義した二重 Schubert 多項式たちは一致する．即ち，$\mathfrak{S}_w(x,y) = \mathfrak{S}'_w(x,y)$ が成り立つ．

この定理の証明は与えないが，$\mathfrak{S}(x) := \mathfrak{S}(x,y)|_{y=0}$ と定めたとき $\mathfrak{S}(x,y) = \mathfrak{S}(y)^{-1}\mathfrak{S}(x)$ と分解することと，差分商作用素が $\partial_i^{(x)}\mathfrak{S}(x,y) = \mathfrak{S}(x,y)u_i$ と作用することがキーとなる事実である．

ここで，y 変数を全て 0 とおけば Schubert 多項式 $\mathfrak{S}_w(x)$ の表示が得られる．即ち，

$$(*) \qquad \prod_{i=1}^{n-1}(h_{n-1}(x_i)h_{n-2}(x_i)\cdots h_i(x_i)) = \sum_{w\in S_n}\mathfrak{S}_w(x)u_w$$

である．ここで $\prod_{i=1}^{n-1}$ は左から右への積を表している．この表示は Schubert 多項式の基本性質を示すのに非常に有用である．例えば，安定性や正値性などはほとんど明らかとなる．

Remark 5.1. Hecke環 $\mathcal{H}^n_{1,0}$ を用いて同様の構成をすると二重Grothendieck多項式 $G_w(x,y)$ が得られる．

Theorem 5.2. (Stanley 予想，[3] と [9] で証明されている．)

$$\mathfrak{S}_w(x) = \sum_{(a,b)} x_{b_1}x_{b_2}\cdots x_{b_l}$$

ここでの和は次のような組 (a,b) にわたって取っている．対称群の元 $w \in S_n$ の最短表示の集合を $R(w)$ と表す．即ち，$R(w) = \{(i_1,\dots,i_l) \mid w = s_{i_1}\cdots s_{i_l},\ l = l(w)\}$. 上式で $a = (a_1,\dots,a_l)$ は $R(w)$ の元を動く．また，$a \in R(w)$ に対し $b = (b_1,\dots,b_l)$ が a-compatible であるとは，$b_i \le b_{i+1}$, $b_i \le a_i$ $(i = 1,\dots,l)$ かつ，$a_i < a_{i+1} \Rightarrow b_i < b_{i+1}$ を満たしていることを言う．上式で b は a-compatible sequence 全体を動いている．

[3] での証明は nilCoxeter 代数を用いないもので かなり難しいが，[9] に従い 公式 $(*)$ を用いると容易に示せる．

Theorem 5.3. (Macdonald 予想 [27]，これも [9] で証明されている．)

$$\mathfrak{S}_w(1,q,\dots,q^{n-1}) = \frac{1}{[l(w)]!}\sum_{a\in R(w)} [a_1]\cdots[a_{l(w)}]q^{\sum_i i\chi(a_i<a_{i+1})}$$

ここで $[n]$ は q-integer $[n] = (1-q^n)/(1-q)$ で，$[n]! = [1][2]\cdots[n]$ である．$\chi(P)$ は命題 P が真のとき値 1, 偽のとき値 0 をとる．

これは，nilCoxeter 代数 $\mathcal{H}^n_{0,0}$ の中で

$$\mathfrak{S}(1,q,\dots,q^{n-1}) = \prod_{k\ge 0}\prod_{j=1}^{n-1} h_j(q^k(1-q^j))$$

という等式を示すことで得られる．

参考文献

[1] I. N. Bernstein, I. M. Gelfand and S. I. Gelfand, *Schubert cells and cohomology of the spaces G/P*, Russian Math. Surveys **28** (1973), 1-26.

[2] S. Billey and M. Haiman, *Schubert polynomials for the classical groups,* J. Amer. Math. Soc. **8** (1995), 443-482.

[3] S. C. Billey, W. Jockusch and R. P. Stanley, *Some combinatorial properties of Schubert polynomials,* J. Algebraic Combin. **2** (1993), 345-374.

[4] R. Bott, *The space of loops on a Lie group,* Michigan Math. J. **5** (1958), 35-61.

[5] I. Ciocan-Fontanine and W. Fulton, *Quantum double Schubert polynomials,* Institut Mittag-Leffler Report No. 6, 1996-97.

[6] S. Fomin, S. Gelfand and A. Postnikov, *Quantum Schubert polynomials,* J. Amer. Math. Soc. **10** (1997), 565-596.

[7] S. Fomin and A. N. Kirillov, *The Yang-Baxter equation, symmetric functions, and Schubert polynomials,* Discrete Math. **153** (1996), 123-143.

[8] S. Fomin and A. N. Kirillov, *Combinatorial B_n-analogues of Schubert polynomials,* Trans. Amer. Math. Soc. **348** (1996), 3591-3620.

[9] S. Fomin and R. P. Stanley, *Schubert polynomials and the nil-Coxeter algebra,* Adv. Math. **103** (1994), 196-207.

[10] W. Fulton, *Flags, Schubert polynomials, degeneracy loci, and determinantal formulas,* Duke Math. J. **65** (1992), 381-420.

[11] W. Fulton, *Young Tableaux,* Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[12] W. Fulton and A. Lascoux, *A Pieri formula in the Grothendieck ring of a flag bundle,* Duke Math. J. **76** (1994), 711-729.

[13] A. Givental and B. Kim, *Quantum cohomology of flag manifolds and Toda lattices,* Commun. Math. Phys. **168** (1995), 609-641.

[14] A. Givental and Y.-P. Lee, *Quantum K-theory on flag manifolds, finite-difference Toda lattices and quantum groups,* Invent. Math., **151** (2003), 193-219.

[15] H. L. Hiller, *Schubert calculus of a Coxeter group,* Enseign. Math. **27** (1981), 57-84.

[16] T. Ikeda, L. Mihalcea and H. Naruse, *Double Schubert polynomials for the classical groups,* math.CO/0810.1348.

[17] T. Ikeda and H. Naruse, *Double Schubert polynomials of classical type and excited Young diagrams,* RIMS Kokyuroku Bessatsu **B11** (2009), 87-100.

[18] A. N. Kirillov and T. Maeno *Quantum double Schubert polynomials, quantum Schubert polynomials and Vafa-Intriligator formula,* Discrete Math. **217** (2000), 191-223.

[19] B. Kostant and S. Kumar, *T-equivariant K-theory of generalized flag varieties,* J. Differential Geom. **32** (1990), 549-603.

[20] A. Kresch and H. Tamvakis, *Double Schubert polynomials and degeneracy loci for the classical groups,* Ann. Inst. Fourier, **52** (2002), 1681-1727.

[21] T. Lam, *Schubert polynomials for the affine Grassmannian,* J. Amer. Math. Soc. **21** (2008), 259-281.

[22] T. Lam and M. Shimozono, *Quantum cohomology of G/P and homology of affine Grassmannian,* math.AG/0705.1386.

[23] L. Lapointe, A. Lascoux and J. Morse, *Tableau atoms and a new Macdonald positivity conjecture,* Duke Math. J. **116**(1) (2003), 103-146.

[24] A. Lascoux, *Anneau de Grothendieck de la variété de drapeaux,* The Grothendieck Festschrift, vol. III, Progress in Math., Birkhäuser, 1990, 1-34.

[25] A. Lascoux and M.-P. Schützenberger, *Polynômes de Schubert,* C. R. Acad. Sci. Paris **294** (1982), 447-450.

[26] C. Lenart and T. Maeno, *Quantum Grothendieck polynomials,* math.CO/0608232.

[27] I. G. Macdonald, *Notes on Schubert Polynomials,* Publications du centre de mathématiques et d'informatique, Université du Québec, Montréal, 1991.

[28] P. Magyar, *Notes on Schubert classes of a loop group,* math.RT/0705.3826.

[29] L. Manivel, *Symmetric Functions, Schubert Polynomials and Degeneracy Loci,* SMF/AMS texts and monographs, vol. 6, SMF/AMS, 2001.

[30] A.-L. Maré, *The combinatorial quantum cohomology ring of G/B,* J. Algebraic Combin. **21** (2005), no. 3, 331–349.

[31] D. Peterson, MIT Lecture, 1997.

[32] A. Ram and H. Pittie, *A Pieri-Chevalley formula in the K-theory of a G/B-bundle,* Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc. **5** (1999), 102–107.

[33] R. Stanley, *Theory and application of plane partitions, Part 2,* Studies in Applied Math. **50** (1971), 259-279.

[34] H. Tamvakis, *Arithmetic intersection theory on flag varieties,* Math. Ann. **314** (1999), 641-665.