

正質量定理と宇宙

白水徹也

名古屋大学大学院多元数理科学研究科/
素粒子宇宙起源研究所

[目次]

1. 一般相対論
2. 正質量定理とブラックホール
3. 時空の分解
4. Schoen-Yau1981と高次元宇宙

一般相対論と幾何

小研究会「一般相対論と幾何」(GRGeo)

2024年2月8日-9日

場所

名古屋大学ES総合館6階ES635号室 (アクセス情報: [名古屋大学東山キャンパス](#))

目的

一般相対論周辺の数学的发展について情報共有し、今後の展開について議論します。

参加登録

対面形式で行います。参加登録は締め切りました。

([参加登録者リスト](#))

招待講演

泉圭介 (名大KMI/多元数理) 「リーマン-ペンローズ不等式の一般化」

椎野克 (東工大理学院) 「ブラックホールの影に関して因果構造と共役点の問題」

本多正平 (東北大理) 「ユークリッド空間および錐への近さをグリーン関数で特徴付ける」 & 「平坦トーラスへの近さを調和写像で特徴付ける」

山田澄生 (学習院大学) 「調和写像としてのアインシュタイン方程式」

プログラム

2月8日		
10:00-11:30 座長:松尾	泉圭介(名古屋大学)	リーマン-ペンローズ不等式の一般化
11:30-12:00	吉田大介(名古屋大学)	特異点の無い宇宙の大きさについて
12:00-13:30 お昼休み		
13:30-15:00 座長:納谷	本多正平(東北大学)	ユークリッド空間および錐への近さをグリーン関数で特徴付ける
15:00-15:30	濱中翔太(三菱電機)	全スカラー曲率の極限定理
15:30-16:00 休憩		



1. 一般相對論

[一般相対論 Einstein 1915~1916]

Riemann幾何学(ローレンツ計量) (M, g)

$$g = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

$$\text{sign}(g_{\mu\nu}) = (-, +, +, \dots)$$

Einstein方程式 Einstein, Hilbert

時間 空間

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu}$$

宇宙項

$R_{\mu\nu}$: Ricci曲率(の成分), R : スカラー曲率

$T_{\mu\nu}$: エネルギー・運動量テンソル(エネルギー密度、圧力など)

G : Newtonの重力定数

真空解

Einstein方程式

$$\begin{array}{c} T_{\mu\nu} = 0 \\ \xrightarrow{\Lambda = 0} \end{array}$$

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (\text{Ricci平坦})$$

簡単な解の具体例

-平坦時空(Minkowski時空)

$$\eta = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = -dt^2 + \delta$$

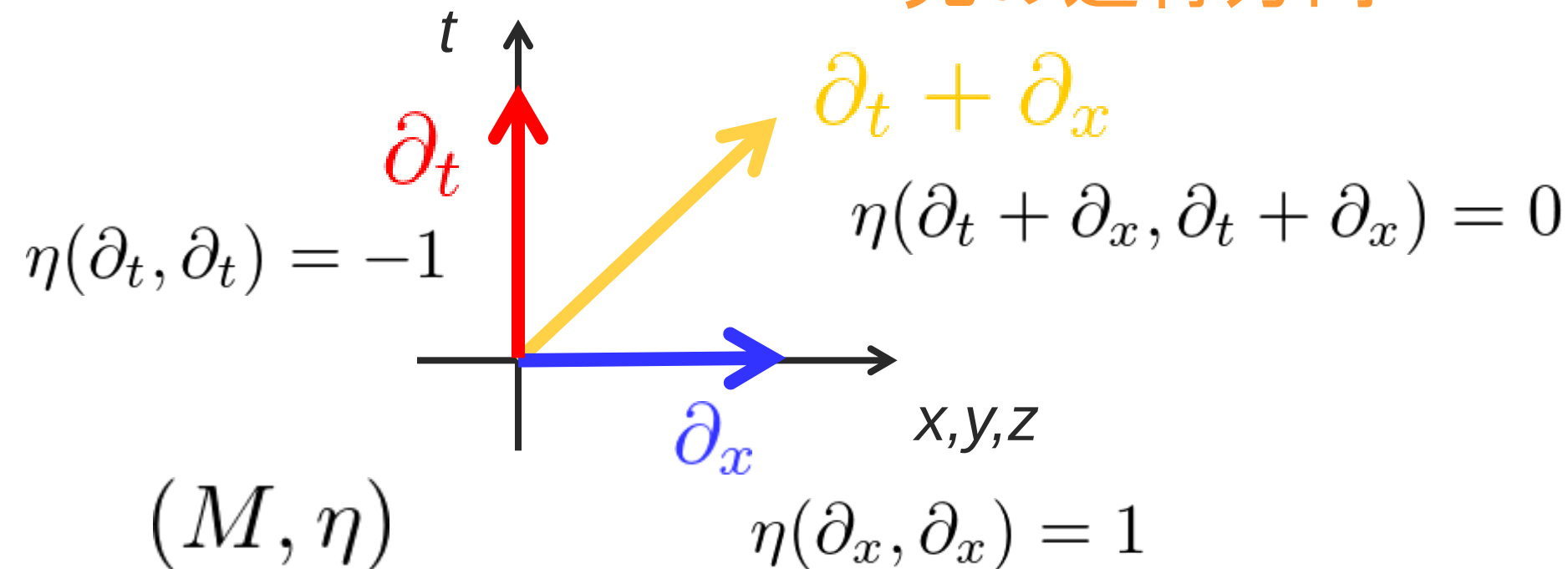
-Schwarzschild解 1916

$$g_{\text{Sch}} = -(1 - 2Gm/r)dt^2 + (1 - 2Gm/r)^{-1}dr^2 + r^2\sigma_{S^2}$$

m :積分定数(天体の質量パラメータに相当)

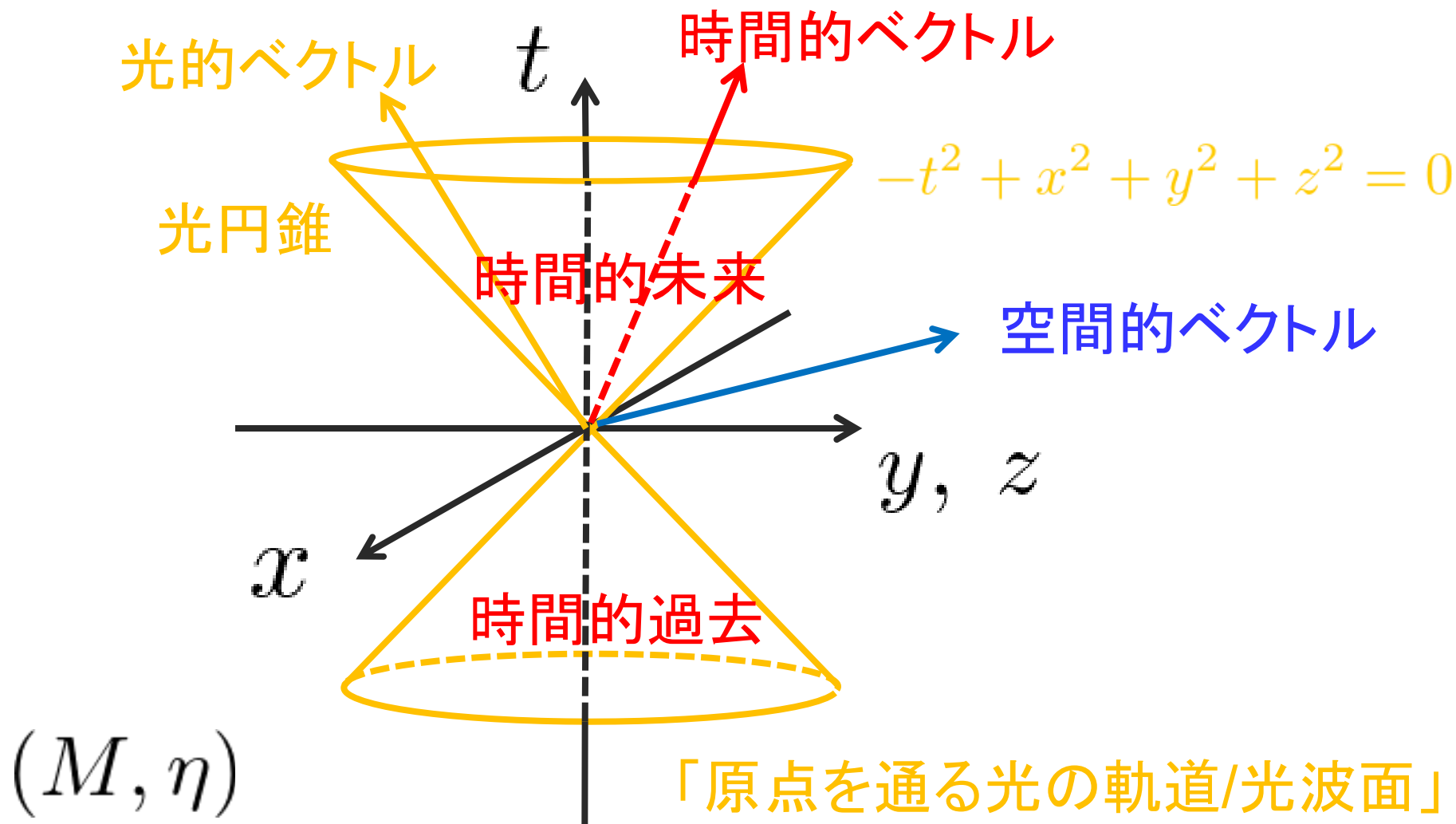
ベクトル

光の進行方向



$$\eta = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = -dt^2 + \delta$$

光円錐



[ADM(Arnold-Deser-Misner) mass]

漸近的に平坦な時間一定面 (Σ, q)

$$q = (\delta_{ij} + h_{ij})dx^i dx^j, \quad h_{ij} = O(1/r)$$

$$G m_{\text{ADM}} = \frac{1}{16\pi} \int_{S_\infty} (\partial^i h_{ij} - \partial_j h_i^i) dS^j$$

正質量定理 Schoen&Yau1981, Witten1981

➡ 「時空が突然なくなることはない。」

[正質量定理 I]

Schoen & Yau(1979)

漸近的に平坦な非負スカラー曲率の空間



(i) ADM質量は非負

(ii) ADM質量ゼロ $\Leftrightarrow$ 平坦空間



[正質量定理 II]

Schoen & Yau(1981), Witten(1981)

- 漸近的に平坦な時空
- Einstein方程式, 優エネルギー条件



- (i) ADM質量は非負(ADM運動量は因果的)
- (ii) ADM質量ゼロ(等式成立) $\Leftrightarrow$ 平坦時空



2. 正質量定理とブラックホール

[Penrose不等式]

Jang & Wald 1977, Huisken & Ilmanen 2001, Bray 2001
～ブラックホール時空が存在する場合の正質量定理～

漸近的に平坦でスカラー曲率が非負の時間一定面上の極小曲面の面積 A に対して、

(エネルギー密度が非負で、漸近的に平坦な全測地的な時間一定面上の最外捕捉面の面積に対して、)

$$A \leq 4\pi(2Gm)^2 \quad m: \text{ADM質量}$$
$$m \geq \frac{1}{G} \sqrt{\frac{A}{16\pi}}$$

等号成立はSchwarzschild時空に限る

帯電black holeの場合 ～

Khuri, Weinstein, Yamada 2017

[静的ブラックホールの唯一性定理]

4次元、静的、真空、漸近的に平坦なブラックホール時空は
Schwarzschild時空に限る

Israel 1967

$$g_{\text{Sch}} = -(1 - 2Gm/r)dt^2 + (1 - 2Gm/r)^{-1}dr^2 + r^2\sigma_{S^2}$$

【唯一性定理の証明とPenrose不等式】

Israel 1967

真空のEinstein方程式

→ $A \leq 4\pi(2Gm)^2$ $A \geq 4\pi(2Gm)^2$

→ $A = 4\pi(2Gm)^2$

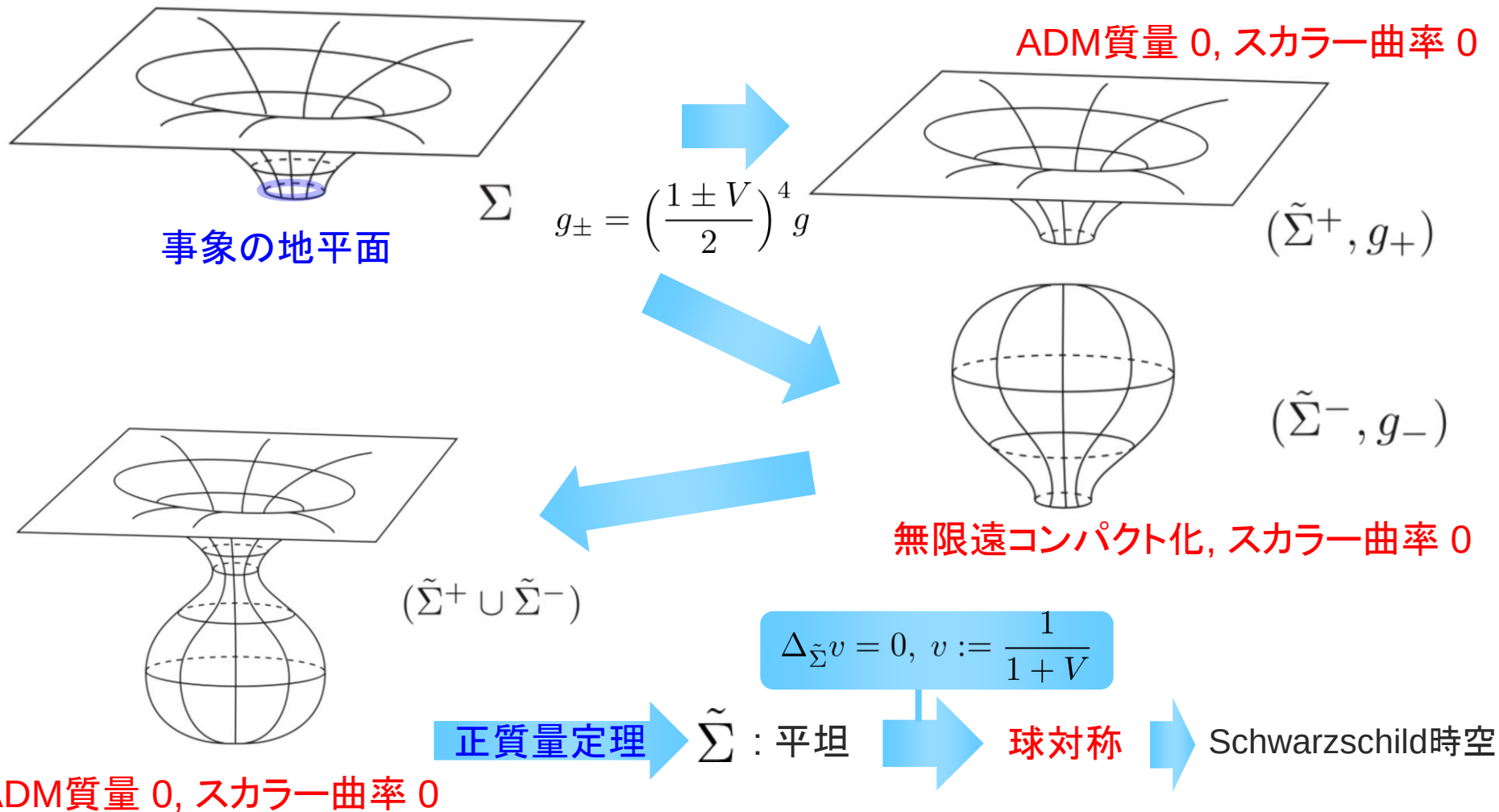
→ 球対称

→ Schwarzschild解

$$g_{\text{static}} = -V^2(x^i)dt^2 + g_{ij}(x^k)dx^i dx^j$$

唯一性定理と正質量定理

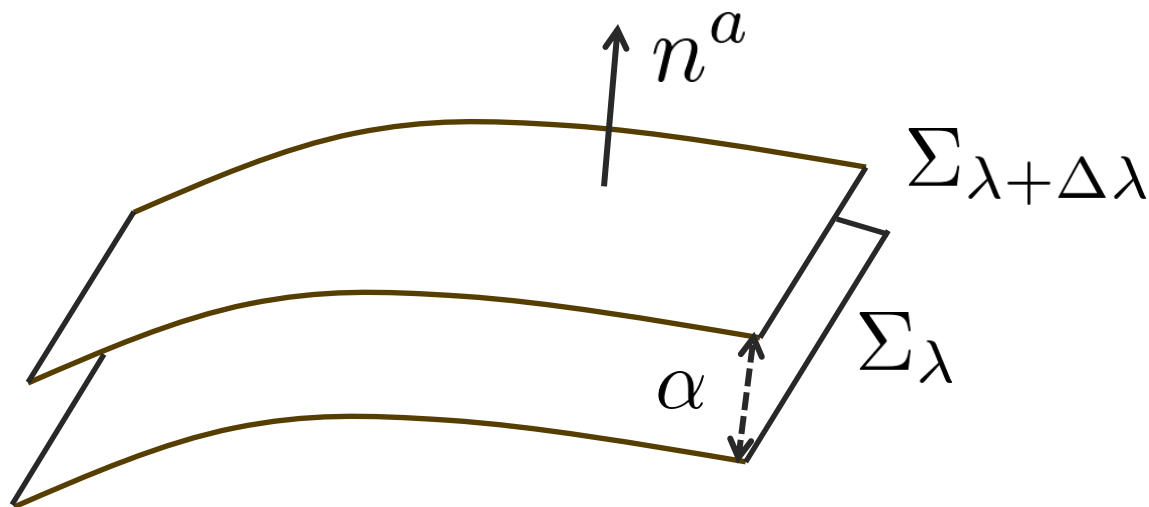
Bunting & Masood-ul-Alam 1987, Gibbons, Ida & Shiromizu 2002





3. 時空/空間の分解

[葉層化]



$$\epsilon = g_{ab}n^an^b = -1(\text{timelike}) \text{ or } 1(\text{spacelike})$$

誘導計量 $q_{ab} = g_{ab} - \epsilon n_a n_b$

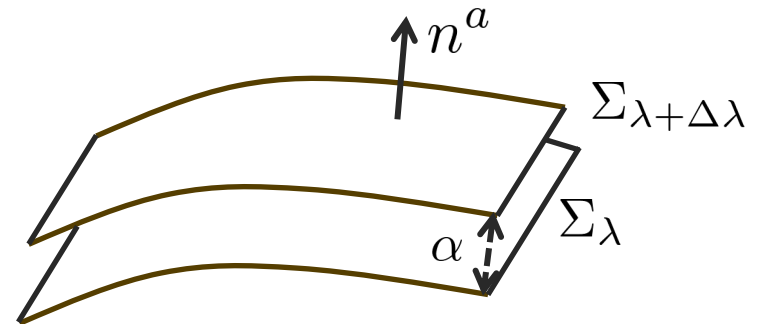
第二基本形式 $K_{ab} = q_a^c q_b^d \nabla_c n_d$

[Riemannテンソルの分解

$$\left\{ \begin{aligned} q_a^e q_b^f q_c^g q_d^h R_{efgh} &= {}^{(n-1)}R_{abcd} - \epsilon(K_{ac}K_{bd} - K_{ad}K_{bc}) \\ q_a^e q_b^f q_c^g n^h R_{efgh} &= D_a K_{bc} - D_b K_{ac} \\ q_a^e q_b^g n^f n^h R_{efgh} &= K_a^c K_{bc} - \epsilon \alpha^{-1} D_a D_b \alpha - \mathcal{L}_n K_{ab} \end{aligned} \right. \quad \text{[ガウス方程式]}$$

$V^a \dots \Sigma_\lambda$ 上のベクトル

$$D_a V^b := q_a^c q_d^b \nabla_c V^d$$





[Ricci/Einsteinテンソルの分解]

$$\left\{ \begin{aligned} -2\epsilon G_{ab}n^a n^b &= {}^{(n-1)}R - \epsilon(K^2 - K_{ab}K^{ab}) \end{aligned} \right.$$

$$q_b^a n^c G_{ac} = D_a K_b^a - D_b K$$

$$q_a^c q_b^d R_{cd} = {}^{(n-1)}R_{ab} + \epsilon(-K_{ab}K + 2K_a^c K_{cb} - \mathcal{L}_n K_{ab}) - \alpha^{-1} D_a D_b \alpha$$

$$G_{ab} := R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R$$


$$\mathcal{L}_n K = -\frac{1}{2}K^2 - \frac{1}{2}K_{ab}K^{ab} + \frac{\epsilon}{2}{}^{(n-1)}R - \frac{\epsilon}{2}R - \epsilon\alpha^{-1}D^2\alpha$$



[Einstein方程式の分解]

$$G_{ab} = 8\pi GT_{ab}$$

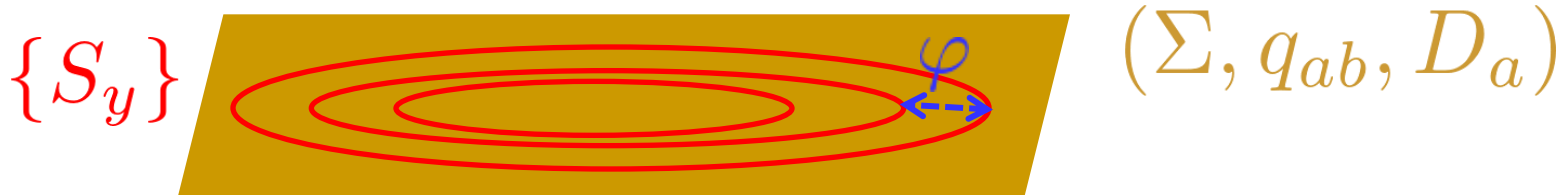
$$-\epsilon^{(n-1)}R + K^2 - K_{ab}K^{ab} = 16\pi GT_{ab}n^a n^b$$

$$D_a K_b^a - D_b K = 8\pi GT_{ac}q_b^a n^c$$

$$\mathcal{L}_n K_{ab} = 2K_{ac}K_b^c - K K_{ab} + \epsilon^{(n-1)}R_{ab} - \epsilon\alpha^{-1}D_a D_b \alpha - 8\epsilon\pi G q_a^c q_b^d \left(T_{cd} - \frac{1}{n-2}g_{cd}T \right)$$

[Geroch版正質量定理の証明]

Geroch 1973



$$GE_G(y) = \frac{A^{1/2}(y)}{64\pi^{3/2}} \int_{S_y} \left(2^{(2)}R - k^2 \right) dA$$

逆平均曲率流(inverse mean curvature flow, IMCF)

$$k\varphi = 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{dA(y)}{dy} = A(y) \\ G \frac{dE_G(y)}{dy} = \frac{A^{1/2}}{64\pi^{3/2}} \int_{S_y} \left[\varphi^{-2} (\mathcal{D}\varphi)^2 + {}^{(3)}R + \tilde{k}_{ab}\tilde{k}^{ab} \right] \geq 0 \end{cases}$$

Σ_λ 上の微分 $\tilde{k}_{ab} = k_{ab} - \frac{1}{2}h_{ab}k$

≥ 0

[正質量定理とPenrose不等式]

$$GE_G(y) = \frac{A^{1/2}(y)}{64\pi^{3/2}} \int_{S_y} \left(2^{(2)}R - k^2 \right) dA$$

$$dE_G/dy \geq 0 \quad \Rightarrow \quad m_{\text{ADM}} = E_G(\infty) \geq E_G(0) = 0$$

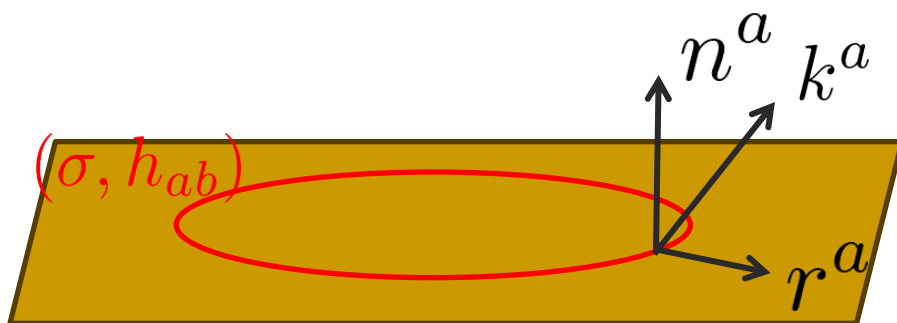
極小曲面($k=0$)が存在する場合、

$$m_{\text{ADM}} = E_G(\infty) \geq E_G|_{k=0} = \frac{1}{2G} \sqrt{\frac{A}{4\pi}}$$

Jang and Wald 1977

[Null平均曲率]

光波の面積変化は強重力場を特徴付けるのに有益



$$k^a := n^a + r^a$$

$$k_a k^a = 0$$

$$\theta_+ = h^{ab} \nabla_a k_b = h^{ab} \nabla_a (n_b + r_b) = k + h^{ab} K_{ab} = k + \kappa$$

$$\kappa := h^{ab} K_{ab} = h^{ab} \kappa_{ab}$$

$$K_{ab} = K_{(r)} r_a r_b + \kappa_{ab} + v_a r_b + v_b r_a$$

$$K_{(r)} := K_{ab} r^a r^b, \quad \kappa_{ab} := h_a^c h_b^d K_{cd}, \quad v_a := h_a^b r^c K_{bc}$$

捕獲面: 重力の強さの指標

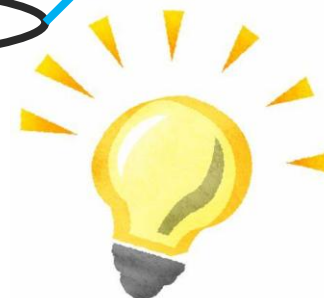
Penrose 1965

外向きの光

重力が弱ければ

光波面の面積は増大

$$\theta_+ > 0$$

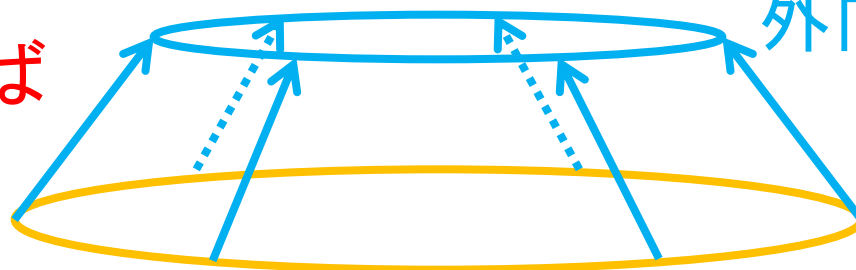


重力が強ければ

外向きの光

光波面の面積が減少!

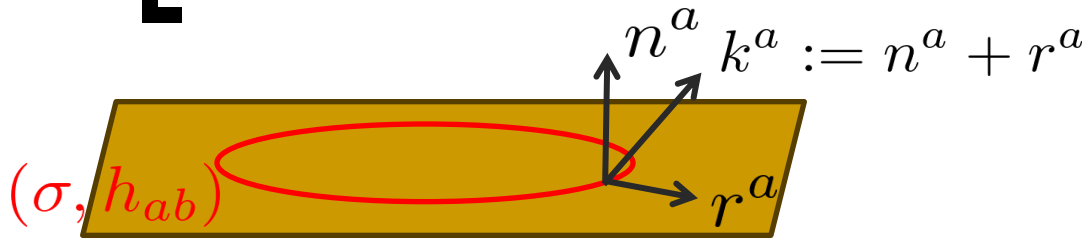
捕獲面 $\theta_+ < 0$



Shiromizu, Nakao, Maeda and Kodama 1993
 Hayward, Shiromizu and Nakao 1994
 Maeda, Ishibashi, Narita and Koike 1998
 Shiromizu, Izumi, Lee and Soligon 2022

安定最外捕獲面

(stable most outer trapped surface, **SMOTS**)



$$\theta_+ := h^{ab} \nabla_a k_b = \kappa + k$$

$$\theta_{+ab} := k_{ab} + \kappa_{ab}$$

$$V_a := v_a - \mathcal{D}_a \ln \varphi$$

$$r^a D_a \theta_+ = -\frac{1}{2} \theta_{+ab} \theta_+^{ab} - \frac{1}{2} \theta_+^2 + \theta_+ (K_{(r)} + \kappa) + \frac{1}{2} {}^{(n-2)}R + \mathcal{D}_a V^a - V_a V^a - G_{ab} k^a n^b$$

SMOTS $\theta_+|_\sigma = 0, r^a D_a \theta_+|_\sigma > 0$

$$n = 4, G_{ab} k^a n^b \geq 0 \Rightarrow \int_\sigma {}^{(2)}R dA > 0 \xrightarrow{\text{Gauss-Bonnet定理}} \int_\sigma {}^{(2)}R dA = 8\pi(1 - g) \Rightarrow g = 0 \ (S^2)$$

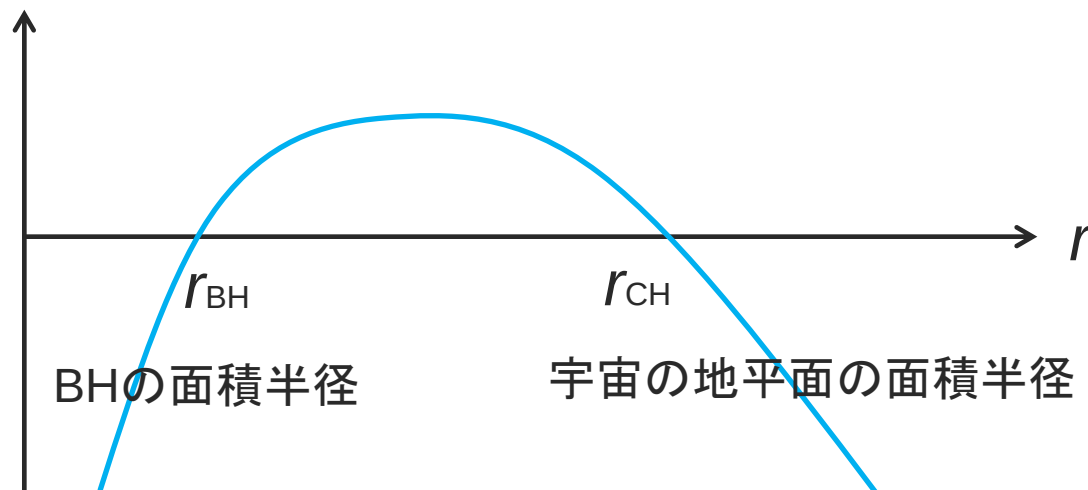
$$\left. \begin{array}{l} G_{ab} = -\Lambda g_{ab} + 8\pi G T_{ab} \ (\Lambda > 0) \\ \text{優エネルギー条件} \ T_{ab} k^a n^b \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow A_\sigma \leq \frac{4\pi}{\Lambda} = \frac{1}{3} (\text{area of deSitter})$$

[例 : Schwarzschild-deSitter時空]

$$R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}$$

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

$$f(r) = 1 - \frac{2GM}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2$$



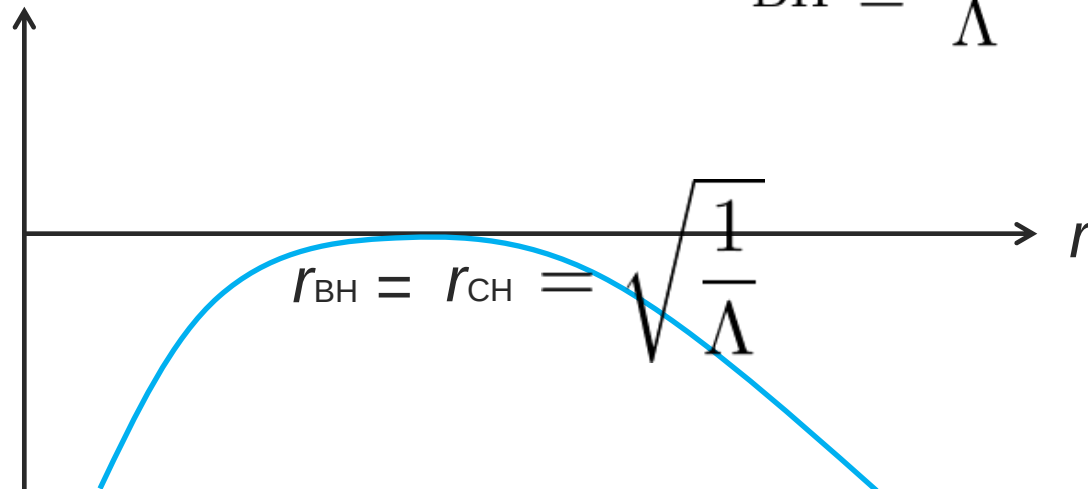
[例 : Sch-dS時空 - critical case -]

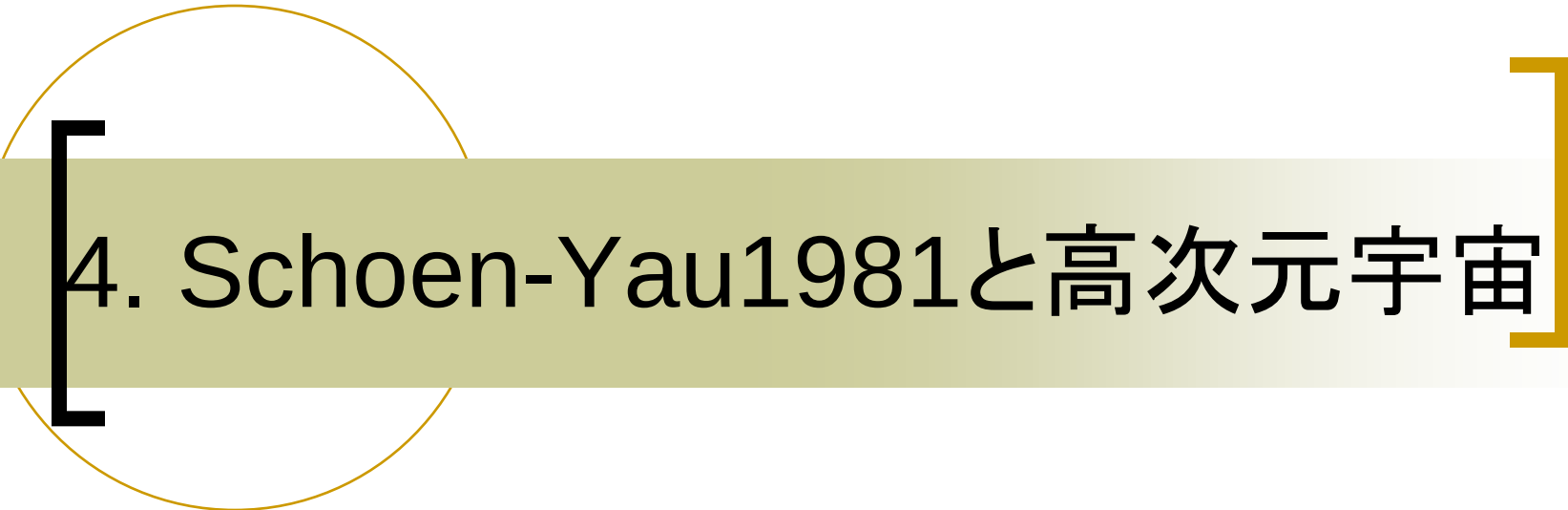
$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

$$f(r) = 1 - \frac{2GM}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2$$

$$A_{\text{BH}} \leq \frac{4\pi}{\Lambda} = \frac{1}{3} \frac{4\pi}{H_\Lambda^2}$$

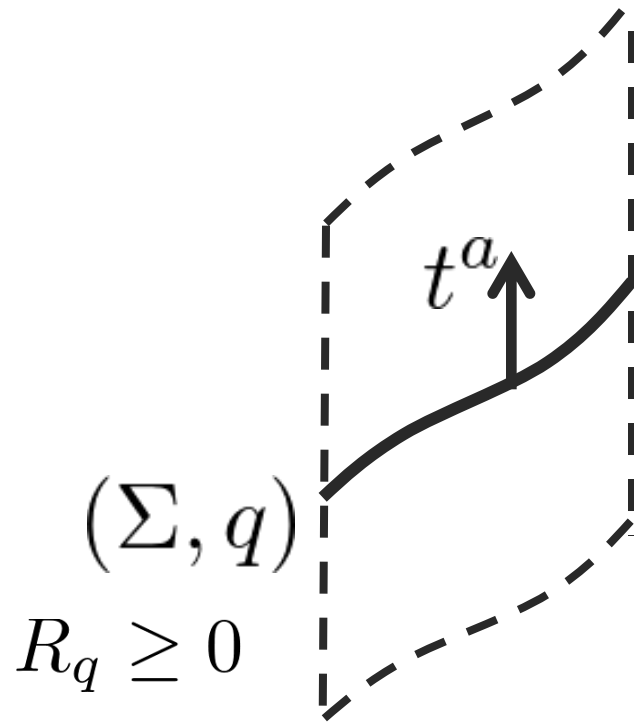
$$H_\Lambda := \sqrt{\frac{\Lambda}{3}}$$





4. Schoen-Yau1981と高次元宇宙

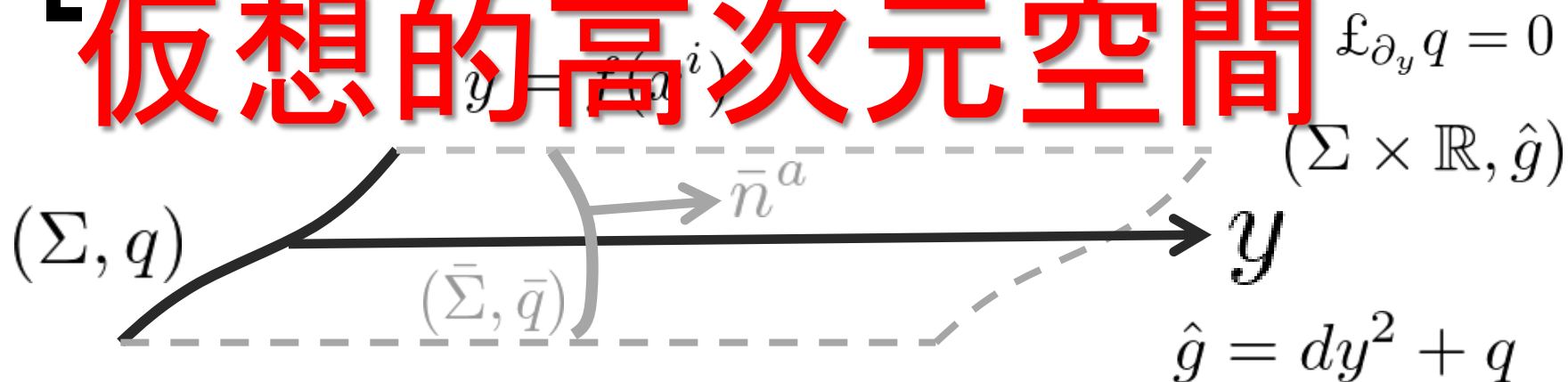
[Schoen & Yau 1979



$$m_{\text{ADM}} \geq 0$$

Schoen & Yau 1981

假想的高次元空間



$$\tilde{q} = \varphi^4 \bar{q} \quad \xrightarrow{\quad} \quad R_{\tilde{q}} = 0 \quad \xrightarrow{\text{SY 1979}} \quad \tilde{m}_{\text{ADM}} \geq 0$$

$(\bar{D}^2 - \frac{1}{8} R_{\bar{q}}) \varphi = 0$

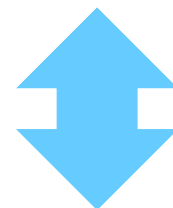
Einstein方程式
+ Jang方程式
 $K_{\bar{q}} = K$

$$m_{\text{ADM}} \geq \tilde{m}_{\text{ADM}}$$

~ Black Brane

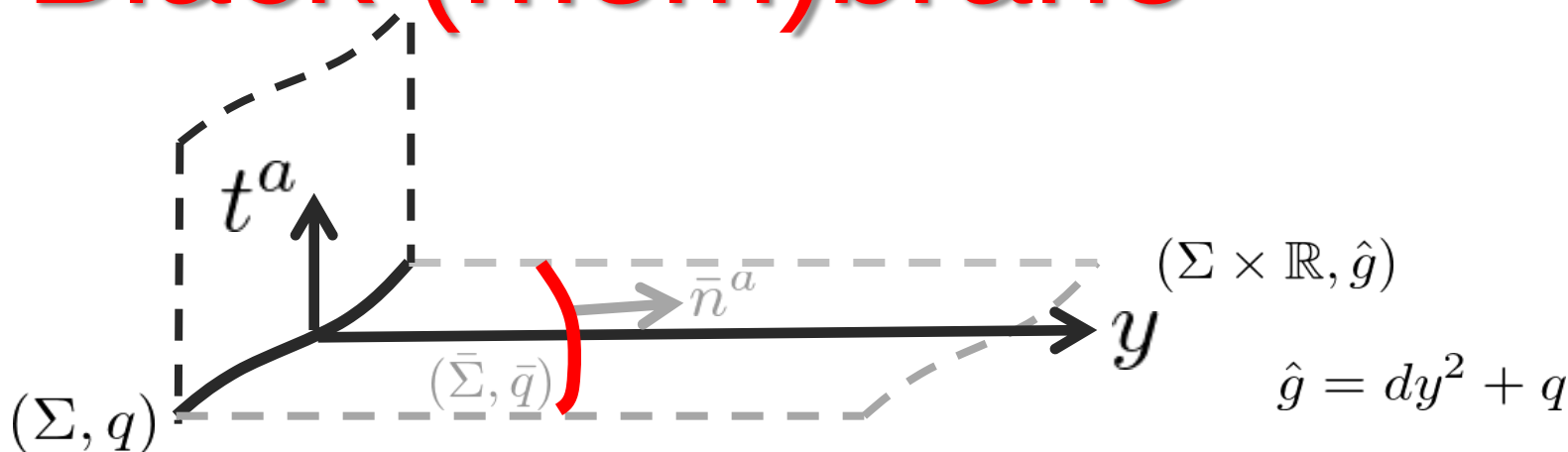
[Jang方程式]

$$K_{\bar{q}} = \bar{K} \quad \longleftrightarrow \quad \bar{q}^{ab} K_{ab}|_{\bar{\Sigma}} = \bar{q}^{ab} \hat{D}_a \bar{n}_b$$



$$\theta_+|_{\bar{\Sigma}} = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \bar{q}^{ab} \nabla_a (t_b - \bar{n}_b) = 0$$

Black (mem)brane



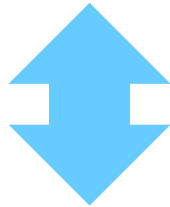


[Black hole/brane との関係]

$$2(\rho - J_a \bar{n}^a) = -2\bar{D}^a X_a - 2|X_a|_{\bar{q}}^2 + \bar{R} + 2\mathcal{L}_{\bar{n}}(K_{\bar{q}} - \bar{K}) \\ - |K_{ab} - \bar{K}_{ab}|_{\bar{q}}^2 + K_{\bar{q}}^2 - \bar{K}^2 + 2K_{ab}\bar{n}^a\bar{n}^b(K_{\bar{q}} - \bar{K})$$

$$X_a := \bar{D}_a \ln \alpha + \bar{q}_a^c K_{cb} \bar{n}^b$$

$$\alpha = (1 + (Df)^2)^{-1/2}$$



$$r^a D_a \theta_+ = -\frac{1}{2} \theta_{+ab} \theta_+^{ab} - \frac{1}{2} \theta_+^2 + \theta_+ (K_{(r)} + \kappa) + \frac{1}{2} {}^{(n-2)}R + \mathcal{D}_a V^a - V_a V^a - G_{ab} k^a n^b$$

[Randall-Sundrum model 1999]

$$G_{ab} = -\Lambda g_{ab} < 0$$

(mem)brane (4次元平坦時空)

$$g = dy^2 + e^{-2|y|/\ell_5} \eta_4$$

$$\ell_5 := \sqrt{-6/\Lambda}$$

adS₅

adS₅

(5次元反deSitter時空)

高次元時空：最新版

超関数曲率

接続条件

Israel 1966

$$q_a^c q_b^d R_{cd} = {}^{(n-1)}R_{ab} + \epsilon(-K_{ab}K + 2K_a^c K_{cb} - \mathcal{L}_n K_{ab}) - \alpha^{-1} D_a D_b \alpha$$

$$R_{ab} \rightarrow {}^{(5)}R_{ab} \quad \epsilon = 1$$

$$q_a^e q_c^g {}^{(5)}R_{eg} = {}^{(4)}R_{ac} - K K_{ac} + 2K_a^b K_{bc} - \alpha^{-1} D_a D_c \alpha - \mathcal{L}_n K_{ac}$$

(mem)brane近傍($y \sim 0$)で

$$ds^2 = dy^2 + q_{\mu\nu}(y, x^\alpha) dx^\mu dx^\nu \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3$$

$${}^{(5)}R_{\mu\nu} = {}^{(4)}R_{\mu\nu} - K K_{\mu\nu} + 2K_\mu^\alpha K_{\alpha\nu} - \partial_y K_{\mu\nu}$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{-\delta}^{\delta} dy {}^{(5)}R_{\mu\nu} = - \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{-\delta}^{\delta} dy \partial_y K_{\mu\nu} = - \left(K_{\mu\nu}(+0, x^\mu) - K_{\mu\nu}(-0, x^\mu) \right) = -(K_{\mu\nu}^+ - K_{\mu\nu}^-)$$

[Randall-Sundrum modelの場合]

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{-\delta}^{\delta} dy^{(5)} R_{\mu\nu} = - \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{-\delta}^{\delta} dy \partial_y K_{\mu\nu} = - \left(K_{\mu\nu}(+0, x^\mu) - K_{\mu\nu}(-0, x^\mu) \right) = -(K_{\mu\nu}^+ - K_{\mu\nu}^-)$$

$$q_{\mu\nu}^+ = q_{\mu\nu}^- = q_{\mu\nu}$$

$$Z_2 \text{ 対称性} \quad K_{\mu\nu}^+ = -K_{\mu\nu}^-$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{-\delta}^{\delta} dy^{(5)} R_{\mu\nu} = -8\pi G_5 \left(S_{\mu\nu} - \frac{1}{3} q_{\mu\nu} S \right)$$

$$S_{\mu\nu} = -\sigma q_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}$$

braneの張力とその上に局在した物質



$$K_{\mu\nu}^+ = -\frac{4\pi G_5 \sigma}{3} - 4\pi G_5 \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{3} q_{\mu\nu} T \right)$$

[Gauss方程式から Einstein方程式]

Shiromizu, Maeda and Sasaki 2000

$$^{(4)}G_{ab} = F_{ab} + H_{ab} - E_{ab}$$

$$\begin{cases} H_{ab} := K K_{ab} - K_a^c K_{cb} - \frac{1}{2} q_{ab} (K^2 - K_{cd} K^{cd}) \\ F_{ab} := \frac{2}{3} \left(q_a^c q_b^d {}^{(5)}G_{cd} + q_{ab} {}^{(5)}R_{cd} n^c n^d - \frac{1}{8} q_{ab} {}^{(5)}R \right) \\ E_{ab} := {}^{(5)}C_{acbd} n^c n^d \end{cases}$$

5次元Weylテンソル

$$K_{\mu\nu}^+ = -\frac{4\pi G_5 \sigma}{3} q_{\mu\nu} - 4\pi G_5 \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{3} q_{\mu\nu} T \right)$$

$$^{(5)}G_{ab} = -\Lambda g_{ab}$$

brane上

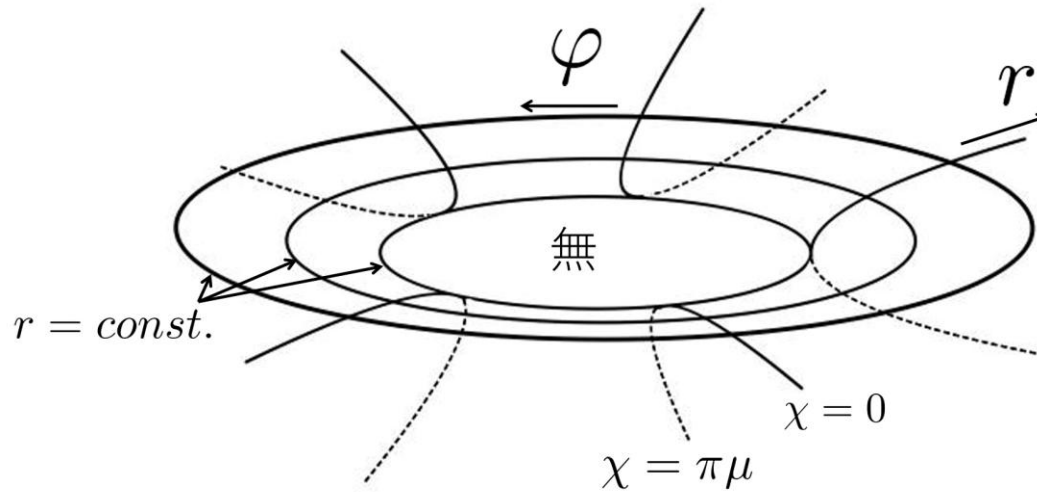
$$^{(4)}G_{ab} = -\Lambda_4 q_{ab} + 8\pi G_4 T_{ab} + (8\pi G_5)^2 \pi_{ab} - E_{ab}$$

$$\begin{cases} \Lambda_4 = \frac{\Lambda}{2} + \frac{(4\pi G_5)^2}{3} \sigma^2 & 8\pi G_4 = 8\pi G_5 \frac{4\pi G_5}{3} \sigma \\ \pi_{ab} = -\frac{1}{4} T_{ac} T_b^c + \frac{1}{12} T T_{ab} + \frac{1}{8} q_{ab} T_{cd} T^{cd} - \frac{1}{24} q_{ab} T^2 \end{cases}$$

[無の泡解

Witten 1981

余剰次元がコンパクト化されていると、正質量定理は成り立たない



5次元真空解

$$ds^2 = (1 - \mu^2/r^2)d\chi^2 + (1 - \mu^2/r^2)^{-1}dr^2 + r^2(-d\tau^2 + \cosh^2 \tau d\Omega_2^2)$$

Randall-Sundrumモデル $\sim$ Ida, Shiromizu & Ochiai 2001