複素鏡映群の平坦不変式

琉球大学　加藤満生　　於： EwM, 2017/6/24

概 要

対角化可能行列 T と，対角行列 B_∞ により定義される大久保型常微分方程式

$$dY = -(zI_n - T)^{-1} B_\infty \, dz \, Y \tag{0.1}$$

を多変数に拡張した、多変数大久保型微分方程式

$$dY = -\left(x_n I_n - T_0(x')\right)^{-1} \left(I_n \, dx_n + \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{B}^{(i)}(x') \, dx_i \right) B_\infty Y \tag{0.2}$$

を考える。ここで、$x = (x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) = (x', x_n)$ と記した。

本講演では多変数大久保型微分方程式の構造、可積分条件について述べ、そこから平坦座標と呼ばれる特別な座標関数 $t_i = t_i(x)$, $1 \leq i \leq n$ を定義し、平坦座標で表示された大久保型微分方程式の構造も示す。

次に、n 次元ベクトル空間 $U_n = \{(u_1, \ldots, u_n)\}$ に作用する well-generated な有限既約複素鏡映群 G に対し、G の orbit space $X = U_n/G$ の上で定義され、G をモノドロミー群にもつ大久保型微分方程式（G-quotient system）の存在を、その構成法を与えることにより示す。X の座標関数 x_i, $1 \leq i \leq n$ は U_n 上の G-不変多項式であり、また G-quotient system に対する平坦座標 $t_i(x)$, $1 \leq i \leq n$ は x の多項式となるので、これを G の平坦不変式と呼ぶ。本講演では、G の不変多項式 $x_i = F_i(u)$, $1 \leq i \leq n$ が与えられた時、それを使って G-quotient system を構成し、平坦不変式 $t_i(x)$, $1 \leq i \leq n$ を求めるまでのアルゴリズムを述べ、またいくつかの例を示す。

1 Okubo type differential equations

$T \sim \mathrm{diag}[z_1, \ldots, z_n]$ を対角化可能行列，$B_\infty = \mathrm{diag}\,[\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$ を対角行列とするとき，常微分方程式

$$dY = -(zI_n - T)^{-1} B_\infty \, dz \, Y \tag{1.1}$$

を大久保型微分方程式という．$H(z) = \det(zI_n - T)$ とし，z_i, $1 \leq i \leq n$ は互いに異なると仮定する．

ここで行列 T を変数 $x=(x_1,\dots,x_m)$ によって動かし，$T=T(x)$ とし，常微分方程式 (1.1) を次の形に変形する：

$$dY=\left(B^{(z)}(x,z)\,dz+\sum_{i=1}^{m}B^{(i)}(x,z)\,dx_i\right)Y, \tag{1.2}$$

$$B^{(z)}=-\left(zI_n-T(x)\right)^{-1}B_\infty, \tag{1.3}$$

$$B_\infty=\mathrm{diag}[\lambda_1,\dots,\lambda_n], \tag{1.4}$$

$$H(x,z)=\det(zI_n-T(x))=\prod_{i=1}^{n}(z-z_i(x)). \tag{1.5}$$

対角行列 $B_\infty=\mathrm{diag}[\lambda_1,\dots,\lambda_n]$ に対しては次の仮定をおく．

$$\lambda_i-\lambda_j\notin\mathbb{Z},\ 1\le i\ne j\le n,\quad \lambda_i\ne 0,\ 1\le i\le n \tag{1.6}$$

等式 (1.3) より $B^{(z)}$ は

$$B^{(z)}(x)=\sum_{j=1}^{n}\frac{B_j^{(z)}(x)}{z-z_j(x)} \tag{1.7}$$

の形に部分分数分解される。

$$T(x)=P(x)\,\mathrm{diag}[z_1(x),\dots,z_n(x)]\,P(x)^{-1}$$

のとき、$E_j=\mathrm{diag}[\delta_{1,j},\dots,\delta_{n,j}]$ に対して

$$\begin{aligned}B^{(z)}&=-P(x)\,\mathrm{diag}[z-z_1(x),\dots,z-z_n(x)]^{-1}\,P(x)^{-1}B_\infty\\&=-P(x)\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{E_j}{z-z_j(x)}\right)P(x)^{-1}B_\infty\end{aligned}$$

となり、従って

$$B_j^{(z)}(x)=-P(x)E_jP(x)^{-1}\,B_\infty \tag{1.8}$$

が成り立つので

$$\sum_{j=1}^{n}B_j^{(z)}(x)=-B_\infty,\quad \mathrm{rank}\,(B_j^{(z)})=1$$

がわかる。以下

$$r_j=\mathrm{trace}(B_j^{(z)})$$

とおき、$r_j\notin\mathbb{Z}$ を仮定する。

$B^{(i)}$, $1\le i\le m$ については次の補題が成り立つ：

補題 1.1. 方程式 (1.2) が可積分でかつ $H(x,z)B^{(i)}$, $1 \le i \le m$ の各成分が z の多項式であるなら次が成り立つ：

(1) x の正則関数を成分とする対角行列 $\mathcal{E}(x)$ と $n \times n$ 行列 $\tilde{B}^{(i)}(x)$, $1 \le i \le m$ が存在して

$$B^{(i)} = -(zI_n - T(x))^{-1}\tilde{B}^{(i)}B_\infty + \frac{\partial \mathcal{E}(x)}{\partial x_i}\mathcal{E}(x)^{-1},\ 1 \le i \le m \tag{1.9}$$

となる。$\mathcal{E}(x)$ に対しては

$$\frac{\partial \mathcal{E}(x)}{\partial x_i} = 0 \Leftrightarrow \deg_z\left(H(x,z)B^{(i)}_{k,k}\right) \le n-1,\ 1 \le k \le n \tag{1.10}$$

がいえる。

(2)

$$P(x)^{-1}T(x)P(x) = diag[z_1(x), \ldots, z_n(x)]$$

をみたす正則行列 $P(x)$ に対し

$$P(x)^{-1}\tilde{B}^{(i)}P(x) = -diag\left[\frac{\partial z_1(x)}{\partial x_i}, \ldots, \frac{\partial z_n(x)}{\partial x_i}\right],\ 1 \le i \le m \tag{1.11}$$

となる。 従って $T(x)$, $\tilde{B}^{(i)}(x)$, $1 \le i \le m$ は可換 である.

上の補題より、Y を $\mathcal{E}^{-1}Y$ に取り替えることで $\mathcal{E}$-term をもたない ($\mathcal{E} = I_n$ の) 大久保型方程式

$$dY = \left(B^{(z)}(x,z)\,dz + \sum_{i=1}^{m} B^{(i)}(x,z)\,dx_i\right)Y, \tag{1.12}$$

$$B^{(z)} = -\left(zI_n - T(x)\right)^{-1}B_\infty,\ B^{(i)} = -\left(zI_n - T(x)\right)^{-1}\tilde{B}^{(i)}B_\infty, \tag{1.13}$$

を得る.

定理 1.1. $\mathcal{E}$-*term* をもたない方程式系 (1.12), (1.13) に対する可積分条件は次と同値：

$$[T(x), \tilde{B}^{(i)}(x)] = O,\ [\tilde{B}^{(i)}(x), \tilde{B}^{(j)}(x)] = O,\ 1 \le i,j \le m, \tag{1.14}$$

$$\frac{\partial T(x)}{\partial x_i} + \tilde{B}^{(i)}(x) + [\tilde{B}^{(i)}(x), B_\infty] = O,\ 1 \le i \le m, \tag{1.15}$$

$$\frac{\partial \tilde{B}^{(i)}(x)}{\partial x_j} = \frac{\partial \tilde{B}^{(j)}(x)}{\partial x_i},\ 1 \le i,j \le m. \tag{1.16}$$

Remark. B_∞ に対する条件 (1.6) より等式 (1.16) は等式 (1.15) から導かれることがわかる。

ここで 変形座標 x を取り変えて $z_i(x)$ が $x_i,\ i>n$ に依らない次の形で表されるようにする：

$$z_i(x) = -x_n + z_i^0(x_1,\dots,x_{n-1}) = -x_n + z_i^0(x'),\ 1 \le i \le n. \tag{1.17}$$

ただし $z_i(x)$ に対して

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial z_1(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial z_n(x)}{\partial x_1} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial z_1(x)}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial z_n(x)}{\partial x_n} \end{vmatrix} \ne 0 \text{ at generic points } x \tag{1.18}$$

を今後常に仮定する．

補題 1.2. 式 (1.17) より次がわかる：
$T_0(x) := x_n I_n + T(x),\ \tilde{B}^{(i)}(x)$ は $x_i,\ i \ge n$ には依存しない $x_1,\dots,x_{n-1}$ の関数となる（以後 $x' = (x_1,\dots,x_{n-1})$ と記す）．また $\tilde{B}^{(n)}(x) = I_n$, $\tilde{B}^{(i)}(x) = O,\ i>n$ が成り立つ．

Proof. 式 (1.11):

$$P(x)^{-1}\tilde{B}^{(i)}(x)P(x) = -\mathrm{diag}\left[\frac{\partial z_1(x)}{\partial x_i},\dots,\frac{\partial z_n(x)}{\partial x_i}\right],\ 1 \le i \le m$$

より，$\tilde{B}^{(n)}(x) = I_n$, $\tilde{B}^{(i)}(x) = O,\ i>n$ が成り立つ．
可積分条件 (1.16) より $\partial\tilde{B}^{(i)}/\partial x_j = O,\ j \ge n$ を得る．
可積分条件 (1.15) より

$$\frac{\partial T_0}{\partial x_i} = \frac{\partial x_n I_n}{\partial x_i} + \frac{\partial T}{\partial x_i} = \delta_{n,i} I_n - \tilde{B}^{(i)} - [\tilde{B}^{(i)}, B_\infty]$$

が成り立ち，$\partial T_0/\partial x_i = O,\ i \ge n$ を得る． □

まとめると微分方程式は

$$dY = \left(B^{(z)}(x,z)\,dz + \sum_{i=1}^{n} B^{(i)}(x,z)\,dx_i \right) Y, \tag{1.19}$$

$$B^{(z)} = -\left((z+x_n)I_n - T_0(x')\right)^{-1} B_\infty, \tag{1.20}$$

$$B^{(i)} = -\left((z+x_n)I_n - T_0(x')\right)^{-1} \tilde{B}^{(i)}(x')B_\infty,\ B^{(n)} = B^{(z)} \tag{1.21}$$

となる。以下 $z+x_n$ を x_n と書き換えた方程式 (reduced form) :

$$dY = \left(\sum_{i=1}^{n} B^{(i)}(x)\,dx_i\right) Y, \tag{1.22}$$

$$B^{(n)}(x) = -(x_n I_n - T_0(x'))^{-1} B_\infty, \tag{1.23}$$

$$B^{(i)}(x) = -(x_n I_n - T_0(x'))^{-1} \tilde{B}^{(i)}(x') B_\infty,\ 1 \le i \le n-1, \tag{1.24}$$

$$T(x) = -x_n I_n + T_0(x') \tag{1.25}$$

を考察する．ここで

$$T(x) \sim \mathrm{diag}[z_1(x), \ldots, z_n(x)] = \mathrm{diag}[-x_n + z_1^0(x'), \ldots, -x_n + z_n^0(x')]$$

であった．また，

$$h(x) = h(x', x_n) = H(0, x) = \prod_{i=1}^{n}(x_n - z_i^0(x')) = x_n^n + \sum_{i=1}^{n}(-1)^i s_i(x') x_n^{n-i}$$

とおく．これまで述べた補題、定理等は $z \to x_n$, $(x_1, \ldots, x_m) \to (x')$, $B^{(z)} \to B^{(n)}$ 等の置き換えですべて成り立つ。例えば

$$T(x) = P(x')\,\mathrm{diag}[z_1(x), \ldots, z_n(x)]\,P(x')^{-1}, \tag{1.26}$$

$$\tilde{B}^{(i)}(x') = -P(x')\,\mathrm{diag}\left[\frac{\partial z_1(x)}{\partial x_i}, \ldots, \frac{\partial z_n(x)}{\partial x_i}\right] P(x')^{-1},\ 1 \le i \le n, \tag{1.27}$$

$$B^{(n)}(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{B_i^{(n)}(x')}{x_n - z_i^0(x')} = \sum_{i=1}^{n} \frac{-P(x')E_i P(x')^{-1} B_\infty}{-z_i(x)} \tag{1.28}$$

等が成り立つ。

定理 1.2. 可積分な方程式 $dY = \left(\sum_{i=1}^{n} B^{(i)}(x)\,dx_i\right) Y$ が *Okubo reduced form* になるための必要十分条件は、条件 (1.18) をみたす x_n の多項式 $h(x', x_n) = \prod_{i=1}^{n}(-z_i(x)) = \prod_{i=1}^{n}(x_n - z_i^0(x'))$ と条件 (1.6) をみたす対角行列 B_∞ に対し次の (1), (2), (3) が成り立つ事.

(1) $h(x)B^{(i)}(x) \in \mathcal{O}_{x'}[x_n]^{n\times n}$, $\deg_{x_n} h(x)B^{(n)}(x)_{j,k} < n$, $1 \le i, j, k \le n$.

(2) $\deg_{x_n}(h(x)B^{(i)}(x)_{k,k}) < n$, $1 \le i, k \le n$.

(3) $B^{(n)}(x) = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{B_i^{(n)}(x')}{x_n - z_i^0(x')}$ と部分分数分解をしたとき

$$\sum_{i=1}^{n} B_i^{(n)}(x') = -B_\infty, \quad \mathit{rank}\, B_i^{(n)}(x') \le 1. \tag{1.29}$$

Proof. $dY = \left(\sum_{i=1}^n B^{(i)}(x)\,dx_i\right) Y$ が Okubo reduced form になるとき (1), (2) が成り立つのは明らかで，また (1.28) 式より、(1.29) の 2 式も成り立つ。

逆の証明．等式 (1.23): $B^{(n)} = -(x_n I_n - T_0(x'))^{-1} B_\infty$ が成り立つような $T_0(x')$ の存在については次の通り．generic x' を固定し，

$$B_i^{(n)}(x')B_\infty^{-1} = -\begin{pmatrix} b_{1i} & \dots & b_{ni} \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} a_{i1} & \dots & a_{in} \end{pmatrix},\ 1 \le i \le n$$

とし，

$$P = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}, \quad P' = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

とおく。このとき、

$$B_i^{(n)}(x')B_\infty^{-1} = -PE_iP',\ 1 \le i \le n \tag{1.30}$$

となる。(1.30) の両辺に $\sum_{i=1}^n$ をほどこし、$\left(\sum_{i=1}^n B_i^{(n)}\right) B_\infty^{-1} = -PP'$ を得る。(1.29) より、$PP' = I_n$, $P' = P^{-1}$ を得る。ここで

$$T_0(x') = P\,\mathrm{diag}[z_1^0, \dots, z_n^0]P^{-1},\ T(x) = P\,\mathrm{diag}[z_1, \dots, z_n]P^{-1}$$

とおくと、(1.25) 式：$T(x) = -x_n I_n + T_0(x')$ が成り立つ。また、

$$\begin{aligned} &-(x_n I_n - T_0(x'))B^{(n)} = T(x)B^{(n)} \\ &= T\sum_{i=1}^n \frac{B_i^{(n)}(x')}{x_n - z_i^0(x')} = T\sum_{i=1}^n \frac{-PE_iP^{-1}B_\infty}{-z_i(x)} = TP\left(\sum_{i=1}^n \frac{E_i}{z_i(x)}\right)P^{-1}B_\infty \\ &= T\,P\,\mathrm{diag}[1/z_1, \dots, 1/z_n]\,P^{-1}B_\infty = B_\infty \end{aligned}$$

より $T_0(x')$ は等式 (1.23) を満たす事がわかる

再び等式 $-(x_n I_n - T_0(x'))h(x)B^{(n)} = h(x)B_\infty$ の両辺の x_n^n, x_n^{n-1} の係数を比較して、$C_{n-1}(x') = -B_\infty$, $T_0(x') = s_1(x')I_n - C_{n-2}(x')B_\infty^{-1}$ となることがわかる．ただし，$C_i(x')$ は $h(x)B^{(n)}(x) = \sum_{i=1}^{n-1} C_i(x')x_n^i$ の係数. 従って $T_0(x')$ は x' の関数として $h(x)$ 及び $h(x)B^{(n)}(x)$ が正則な領域で正則になる。

以上で方程式 $dY = \left(\sum_{i=1}^n B^{(i)}(x)\,dx_i\right) Y$ は $x_n \to z,\ x' \to x, h(x', x_n) \to H(x, z), T_0(x') \to T(x)$ と思うと、補題 1.1 の仮定を満たしたことになり、さらに、(2) の仮定より補題 1.1 の対角行列 $\mathcal{E}(x')$ は $\partial\mathcal{E}(x')/\partial x_i = 0$, $1 \le i \le n-1$ を満たす。従って補題 1.1 の等式 (1.9) は (1.24) 式に一致する。以上で (1.23), (1.24), (1.25) が示されたので逆の証明を終わる。 □

2 Weighted homogeneous Okubo equations

以後 $V_1 = \sum_{i=1}^n w_i x_i \partial_{x_i}$ を Euler vector field とする weight を定義する．

$$0 < w_1 \le w_2 \le \cdots \le w_n = 1 \tag{2.1}$$

と仮定する．

2.1 (meromorphic) logarithmic vector fields

$$h(x) = h(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) = h(x', x_n) = \prod_{i=1}^n (x_n - z_i^0(x')),$$

$$D = \{h(x) = 0\}$$

に対し，vector field

$$V = \sum_{i=1}^n v_i(x', x_n)\partial_{x_i} \in \sum_{i=1}^n \mathcal{M}(x')[x_n]\,\partial_{x_i}$$

が

$$(Vh)/h \in \mathcal{M}(x')[x_n]$$

をみたすとき，V を meromorphic logarithmic vector field along D (略して m.l.v.f) という．係数 $v_i(x)$ 及び $(Vh)/h$ が x' につき正則なとき，V を logarithmic vector field along D (略して l.v.f) という．

$$z_i(x) = -x_n + z_i^0(x'),\ 1 \le i \le n$$

は条件 (1.18)：

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial z_1(x)}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial z_n(x)}{\partial x_1} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ \frac{\partial z_1(x)}{\partial x_{n-1}} & \ldots & \frac{\partial z_n(x)}{\partial x_{n-1}} \\ \frac{\partial z_1(x)}{\partial x_n} & \ldots & \frac{\partial z_n(x)}{\partial x_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial z_1^0(x')}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial z_n^0(x')}{\partial x_1} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ \frac{\partial z_1^0(x')}{\partial x_{n-1}} & \ldots & \frac{\partial z_n^0(x')}{\partial x_{n-1}} \\ -1 & \ldots & -1 \end{vmatrix} \not\equiv 0 \tag{2.2}$$

を満たす。

定理 2.1.

$$P_h(x') = \begin{pmatrix} \frac{\partial z_1^0(x')}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial z_n^0(x')}{\partial x_1} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial z_1^0(x')}{\partial x_{n-1}} & \dots & \frac{\partial z_n^0(x')}{\partial x_{n-1}} \\ -1 & \dots & -1 \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

に対し，

$$\begin{aligned} M_{V^{(h)}}(x) &= x_n I_n - M_h(x') \\ &= -P_h(x') diag[z_1(x), \dots, z_n(x)] P_h(x')^{-1}, \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$V_{n-i+1}^{(h)}(x) = \sum_{j=1}^{n} (M_{V^{(h)}})_{i,j}(x)\, \partial_{x_j} \tag{2.5}$$

とおく．このとき次が成り立つ．

(1)

$$\det M_{V^{(h)}}(x) = h(x).$$

(2) $V_{n-i+1}^{(h)}(x)$ は斉次 *m.l.v.f* で，$V_1^{(h)}(x)$ は *Euler vector field* V_1 に等しい．

(3) $V_{n-i+1}^{(h)} - x_n \partial_{x_i} \in \sum_{i=1}^n \mathcal{M}(x')\, \partial_{x_i}$. 従って特に

$$w(V_{n-i+1}^{(h)}) = 1 - w(x_i)$$

が成り立つ。逆に V が $V - x_n \partial_{x_i} \in \sum_{i=1}^n \mathcal{M}(x')\, \partial_{x_i}$ を満たす *m.l.v.f* であるならば，$V = V_{n-i+1}^{(h)}$ である．

(4) $M_{V^{(h)}}(x)$ が正則な事と，D が *free* である事は同値．

定理 2.2. $h(x) = h(x', x_n) = x_n^n - s_1(x') x_n^{n-1} + \cdots + (-1)^n s_n(x')$ とするとき，行列 $M_{V^{(h)}}(x')$ の各成分は $s_i(x')$, $1 \leq i \leq n$, $\partial s_i(x')/\partial x_j$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n-1$ の有理式として表される．

Proof.

$$F(x') := \begin{pmatrix} (z_1^0(x'))^{n-1} & \dots & (z_n^0(x'))^{n-1} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ z_1^0(x') & \dots & z_n^0(x') \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

に対し，行列 M^0, M^1 を

$$M^0F = F\mathrm{diag}[z_1^0, \dots, z_n^0], \quad M^1F = P_h \tag{2.7}$$

により決めると

$$M_h(x') = M^1M^0(M^1)^{-1},\ M_{V(h)}(x) = x_nI_n - M_h(x') \tag{2.8}$$

となる．

$$M^0 = \begin{pmatrix} s_1(x') & -s_2(x') & \dots & (-1)^{n-2}s_{n-1}(x') & (-1)^{n-1}s_n(x') \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ & & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

は容易にわかる。$\delta(x') = \prod_{i<j}(z_i^0(x') - z_j^0(x'))^2$ とするとき、$\delta(x')M^1$ の各成分は消去法により、$s_i(x'),\ 1 \le i \le n$, $\partial s_i(x')/\partial x_j,\ \ 1 \le i \le n,\ 1 \le j \le n-1$ の多項式として求まる． □

Example. $n = 3$ の場合.

$$\begin{aligned} h(x) &= x_3^3 - s_1(x')x_3^2 + s_2(x')x_3 - s_3(x'), \\ \delta &= 18s_1s_2s_3 - 4s_1^3s_3 - 27s_3^2 + s_1^2s_2^2 - 4s_2^3 = \prod_{i<j}(z_i^0 - z_j^0)^2 \end{aligned}$$

とおく。また、$i = 1, 2$ に対し

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{1}{\delta}\Big(2(3s_1s_3 - s_2^2)\frac{\partial s_1}{\partial x_i} + (s_1s_2 - 9s_3)\frac{\partial s_2}{\partial x_i} + 2(3s_2 - s_1^2)\frac{\partial s_3}{\partial x_i}\Big), \\ b_i &= \frac{1}{\delta}\Big((s_1s_2^2 - 2s_1^2s_3 - 3s_2s_3)\frac{\partial s_1}{\partial x_i} + (2s_2^2 - s_1^2s_2 + 3s_1s_3)\frac{\partial s_2}{\partial x_i} \\ &\qquad + (2s_1^3 + 9s_3 - 7s_1s_2)\frac{\partial s_3}{\partial x_i}\Big), \\ c_i &= \frac{1}{\delta}\Big((9s_3^2 - s_1s_2s_3)\frac{\partial s_1}{\partial x_i} + 2(s_1^2 - 3s_2)s_3\frac{\partial s_2}{\partial x_i} + 4(s_2^2 - 3s_1s_3 - s_1^2s_3)\frac{\partial s_3}{\partial x_i}\Big) \end{aligned}$$

とおくとき,

$$M^1 = -\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ M^0 = \begin{pmatrix} s_1 & -s_2 & s_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ M_h = M^1M^0(M^1)^{-1} \tag{2.9}$$

となる．

2.2 Weighted homogeneous Okubo equations

大久保方程式及びその解もすべて斉次とする．つまり，

$$dY = \left(\sum_{i=1}^{n} B^{(i)}(x)\,dx_i\right) Y = T(x)^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} \tilde{B}^{(i)}(x')\,dx_i\right) B_\infty Y,$$
$$T(x) = -x_n I_n + T_0(x'),\ \tilde{B}^{(n)} = I_n$$

において，Y, $B^{(k)}$, T の各成分がすべて斉次とする．

補題 2.1. (1)

$$\sum_{i=1}^{n} w_i x_i \tilde{B}^{(i)} = -T, \quad \sum_{i=1}^{n} w_i x_i B^{(i)} = -B_\infty,$$

(2) $B_\infty =diag[\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 & \ldots & y_n \end{pmatrix}^t$ とすると，

$$w(y_i) = -\lambda_i.$$

(3)

$$w\left((B^{(k)})_{i,j}\right) = -w(x_k) - \lambda_i + \lambda_j,\ w\left(T_{i,j}\right) = 1 - \lambda_i + \lambda_j, \quad 1 \le i, j, k \le n$$

Proof. (1) の証明． (1.11) 式：$P(x)^{-1}\tilde{B}^{(i)}P(x) = -\mathrm{diag}\left[\frac{\partial z_1(x)}{\partial x_i}, \ldots, \frac{\partial z_n(x)}{\partial x_i}\right]$ より

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} w_i x_i \tilde{B}^{(i)} &= -P(x')\left(\sum_{i=1}^{n} w_i x_i \mathrm{diag}\left[\frac{\partial z_1}{\partial x_i}, \ldots, \frac{\partial z_n}{\partial x_i}\right]\right) P(x')^{-1} \\ &= -P(x')\left(V_1^{(h)}\,\mathrm{diag}\left[z_1, \ldots, z_n\right]\right) P(x')^{-1} \\ &= -P(x')\,\mathrm{diag}\left[z_1, \ldots, z_n\right]\ P(x')^{-1} = -T(x), \\ \sum_{i=1}^{n} w_i x_i B^{(i)} &= T^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} w_i x_i \tilde{B}^{(i)}\right) B_\infty = -B_\infty.\end{aligned}$$

(2) の証明．

$$V_1^{(h)} Y = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \frac{\partial Y}{\partial x_i} = \left(\sum_{i=1}^{n} w_i x_i B^{(i)}\right) Y = -B_\infty Y.$$

従って $V_1^{(h)}(y_i) = -\lambda_i\, y_i, 1 \le i \le n$ を得る．

(3) は (2) から従う． □

等式 (1.16): $\dfrac{\partial \tilde{B}^{(i)}(x)}{\partial x_j} = \dfrac{\partial \tilde{B}^{(j)}(x)}{\partial x_i}$ より、$\dfrac{\partial C(x)}{\partial x_i} = \tilde{B}^{(i)}(x'),\ 1 \le i \le n,$ を満たす weighted homogeneous な行列 $C(x)$ は 一意に求まる．このとき、補題 2.1, (1), (3) より

$$V_1^{(h)}\, C(x) = -T(x), \quad w(C_{i,j}(x)) = 1 - \lambda_i + \lambda_j,\ 1 \le i, j \le n \tag{2.10}$$

を得る．従って大久保型方程式は行列 $C(x)$ により与えられ、そのときの積分可能条件は次の通り：

定理 2.3. $B_\infty = diag[\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$ は以前の通りとする．$w(C_{i,j}(x)) = 1 - \lambda_i + \lambda_j$ を満たす斉次行列 $C(x) = x_n I_n + C'(x')$ によって決まる大久保型微分方程式系

$$d\,Y = -(V_1 C(x))^{-1}\,(d\,C(x))\,B_\infty\,Y \tag{2.11}$$

の積分可能条件は

$$\left[\frac{\partial C(x)}{\partial x_i}, \frac{\partial C(x)}{\partial x_j}\right] = 0,\ 1 \le i, j \le n \tag{2.12}$$

で与えられる．

行列 $C(x)$ の第 n 行が

$$\det\left(\frac{\partial(C_{n,1}(x), \ldots, C_{n,n}(x))}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}\right) \ne 0 \tag{2.13}$$

を満たすとき，$t_j = C_{n,j}(x),\ 1 \le j \le n$ を新たな座標関数にとり，この座標 $(t_1 \ldots, t_n)$ を大久保型方程式 (2.11) に関しての**平坦座標 (flat coordinate)** という。$C(x) = x_n I_n + C'(x)$ より、$t_j = t_j(x'),\ j < n,$ $t_n = x_n + t'_n(x')$ の形をしている。この平坦座標のもとでは積分可能条件

$$\left[\frac{\partial C(t)}{\partial t_i}, \frac{\partial C(t)}{\partial t_j}\right] = 0,\ 1 \le i, j \le n$$

の第 n 行より

$$\frac{\partial C_{i,k}(t)}{\partial t_j} = \frac{\partial C_{j,k}(t)}{\partial t_i},\ 1 \le i, j, k \le n$$

が導かれるので、

$$\frac{\partial g_k(t)}{\partial t_i} = C_{i,k}(t),\ 1 \le i,k \le n, \tag{2.14}$$

$$g_k(t) = t_k t_n + g'_k(t'),\ k < n,\ g_n(t) = \frac{1}{2}t_n^2 + g'_n(t') \tag{2.15}$$

を満たす weighted homogeneous な関数 $g_k(t)$ も 一意に求まる.

ベクトル $(g_1, \ldots, g_n)$ をこの大久保型方程式の **potential vector** という。Potential vector は行列 $C(t)$ により与えられ、逆に $C(t)$ は potential vector $(g_1, \ldots, g_n)$ により与えられる。

定理 2.4. $t = (t_1, \ldots, t_n)$ を平坦座標とする大久保型方程式

$$dY = -(V_1 C(t))^{-1} (dC(t))\, B_\infty Y \tag{2.16}$$

に対し、$h(t) = det(V_1 C(t))$ とおくとき 次が成り立つ.

(1) $V_1 C(t) = M_{V^{(h)}}(t)$. 従って行列 $C(t)$ は多項式 $h(t)$ より再生される。

(2) $Y = \begin{pmatrix} y_1 & \ldots & y_n \end{pmatrix}^t$ とするとき,

$$Y = -B_\infty^{-1} \begin{pmatrix} V_n^{(h)} & \ldots & V_1^{(h)} \end{pmatrix}^t y_n. \tag{2.17}$$

Proof. (2) の証明のみ与える.

$$\frac{\partial Y}{\partial t_i} = -(V_1 C)^{-1} \frac{\partial C}{\partial t_i} B_\infty Y = -\frac{\partial C}{\partial t_i} (V_1 C)^{-1} B_\infty Y$$

より,

$$\frac{\partial y_n}{\partial t_i} = -\begin{pmatrix} \delta_{i,1} & \ldots & \delta_{i,n} \end{pmatrix} (V_1 C)^{-1} B_\infty Y,$$

$$\begin{pmatrix} \partial_{t_1} \\ \vdots \\ \partial_{t_n} \end{pmatrix} y_n = -(V_1 C)^{-1} B_\infty Y$$

が成り立つ. 従って

$$Y = -B_\infty^{-1} (V_1 C) \begin{pmatrix} \partial_{t_1} \\ \vdots \\ \partial_{t_n} \end{pmatrix} y_n = -B_\infty^{-1} M_{V^{(h)}} \begin{pmatrix} \partial_{t_1} \\ \vdots \\ \partial_{t_n} \end{pmatrix} y_n = -B_\infty^{-1} \begin{pmatrix} V_n^{(h)} \\ \vdots \\ V_1^{(h)} \end{pmatrix} y_n$$

を得る. □

3 Flat invariant systems of finite irreducible complex reflection groups

G を $U_n = \{(u_1, \ldots, u_n) \,|\, u_i \in \mathbb{C}\}$ に作用する有限既約複素鏡映群とし，

$$X = U_n/G \simeq \mathbb{C}^n$$

を G-orbit からなる集合 (G-quotient space) とする．定義より G は reflection から生成されるが，特に n 個の reflection から生成されるとき，G を **well-generated** という．

G には n 個の斉次 G-不変多項式 $F_i(u)$, $1 \leq i \leq n$ があり，任意の G-不変多項式 $F(u)$ は $F_i(u)$ の多項式として表される．F_i の次数を d_i とすると $\{d_1, \ldots, d_n\}$ は G により決まる．

$$d_1 \leq \cdots \leq d_n$$

とする．また，$w_i = d_i/d_n$ とし，$w(x_i) = w_i$ で weight を定義する．従って $w(u_i) = 1/d_n$, $1 \leq i \leq n$ である。

以下 F_i を固定し，X 上の座標関数として $x_i = F_i(u)$, $1 \leq i \leq n$ をとる．G-quotient map $\pi_G : U_n \to X$ を

$$\pi_G(u) = x = (x_1, \ldots, x_n)$$

で定義する．$\pi_G(u)$ の branch locus $D \subset X$ の (reduced) defining function $h(x)$ を G の判別式とよぶ．判別式 $h(x)$ は x_n につき monic n-次多項式となる ([Bessis])。G の全ての reflection の order が r であるときは，その判別式は

$$h(x) = \det \left(\frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(u_1, \ldots, u_n)} \right)^{r/(r-1)} \tag{3.1}$$

で与えられる．

以下 well-generated な有限既約複素鏡映群 G に対し，X 上定義された大久保型可積分系で，G をそのモノドロミー群にもち，行列 $T(x)$, $C(x)$ の各成分が x の斉次多項式であるものの構成法を述べ，次の定理の形にまとめる．

定理 3.1. *There are special G-invariant homogeneous polynomials $F_i^{fl}(u)$ of degree d_i, $1 \leq i \leq n$, generating $\mathbb{C}[u]^G$ and satisfying the following conditions:*

(i) *Let $t_i = F_i^{fl}(u)$, and let $h(t) = t_n^n - s_1(t')t_n^{n-1} + \dots$ be the defining function of D in this coordinates $t = (t_1, t_2, \dots, t_n)$. Let $V_i^{(h)}(t)$, $1 \leq i \leq n$ and $M_{V^{(h)}}(t)$ be defined by* (2.5) *and* (2.4) *with respect to $h(t)$. Let $C(t)$ be the (weighted homogeneous) matrix satisfying $V_1^{(h)}C(t) = M_{V^{(h)}}(t)$. Then, for any homogeneous linear function $y(u)$ of u,*

$$Y' = -B_\infty^{-1} \begin{pmatrix} V_n^{(h)}(t) & V_{n-1}^{(h)}(t) & \dots & V_1^{(h)}(t) \end{pmatrix}^t y(u) \tag{3.2}$$

satisfies the Okubo type system

$$dY' = \left[-\left(V_1^{(h)} C(t) \right)^{-1} dC(t)\, B_\infty \right] Y', \tag{3.3}$$

where

$$B_\infty = diag\,[w(x_1), w(x_2), \dots, w(x_n)] - \left(1 + \frac{1}{d_n} \right) I_n. \tag{3.4}$$

Note that the n-th entry of Y' is $y(u)$.

(ii) *It holds that $C_{n,j}(t) = t_j$, $1 \leq j \leq n$, and hence $\{t_j\}$ gives a flat coordinate system on X associated to* (3.3).

If $d_1 < d_2 \dots < d_n$, then $F_i^{fl}(u)$ are unique up to constant multiplications.

G-不変多項式 $F_i^{fl}(u)$ を G の **flat invariant (平坦不変式）という.**

以下簡単のため

$$d_1 < \cdots < d_n$$

を仮定し，定理の証明と flat invariant の具体的構成法を 8 つの作業 Step 1-Step 8 に分けて述べる．

Step 1. 与えられた不変式から決まる判別式 $h(x) = h(x', x_n)$ を求める．この作業が 1 番面倒だが，rank≥ 3 の群では S-T number 26 以外の群では式 (3.1) により求まる．後は G-不変多項式を $F_i(u)$, $1 \leq i \leq n$ の多項式で表すという，対称式を基本対称式で表すことと同等の作業となる．

Step 2. 判別式 $h(x)$ と divisor D に対し，斉次 logarithmic vector fields $V_i^{(h)}$, $1 \leq i \leq n$, 及びその Saito matrix $M_{V^{(h)}}$ を定理 2.2 の方法または他の適当な方法で求める．2.1 節、rank$= 3$, **Example.** で示したような公式を rank$= 4$ でも得ている．

注意すべきことは、$M_{V^{(h)}}$ が (2.4) 式で定義されるためには、判別式 $h(x)$ が条件 (1.18):

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial z_1(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial z_n(x)}{\partial x_1} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial z_1(x)}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial z_n(x)}{\partial x_n} \end{vmatrix} \neq 0 \text{ at generic points } x$$

を満たさなければならないが、このことは、Logarithmic vector fields V_i で、

$$V_i - x_n \partial_{x_i} \in \sum_{k=1}^{n} \mathbb{C}[x']^{n\times n} \partial_{x_k}$$

を満たすものが存在する、という Bessis [Be] により示された定理により保障される。

Step 3 に進む前に G-quotient system (= G をモノドロミー群にもつ微分方程式) を求める．

Step 2 で求めた $V_i^{(h)}$, $1 \leq i \leq n$, $M_{V^{(h)}}$, with

$$\begin{pmatrix} V_n^{(h)} \\ \vdots \\ V_1^{(h)} \end{pmatrix} = M_{V^{(h)}} \begin{pmatrix} \partial_{x_1} \\ \vdots \\ \partial_{x_n} \end{pmatrix}$$

に対し，

$$M_{\tilde V} = M_{V^{(h)}} \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_n} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_n} \end{pmatrix}^{-1}$$

とおく．このとき

$$\begin{pmatrix} V_n^{(h)} \\ \vdots \\ V_1^{(h)} \end{pmatrix} = M_{V^{(h)}} \begin{pmatrix} \partial_{x_1} \\ \vdots \\ \partial_{x_n} \end{pmatrix} = M_{\tilde V} \begin{pmatrix} \partial_{u_1} \\ \vdots \\ \partial_{u_n} \end{pmatrix}$$

が成り立つ．$y(u)$ を任意の斉次 1 次多項式とし，

$$\hat Y = \begin{pmatrix} V_n^{(h)} & \ldots V_1^{(h)} \end{pmatrix}^t y(u)$$

とすると，

$$0 = d \begin{pmatrix} \partial_{u_1} \\ \vdots \\ \partial_{u_n} \end{pmatrix} y(u) = d\, M_{\tilde V}^{-1}\, \hat Y = -M_{\tilde V}^{-1}\, (d\, M_{\tilde V})\, M_{\tilde V}^{-1}\, \hat Y + M_{\tilde V}^{-1}\, d\, \hat Y$$

が成り立つ．従って $\hat Y$ は方程式

$$d\, \hat Y = (d\, M_{\tilde V})\, M_{\tilde V}^{-1}\, \hat Y \tag{3.5}$$

を満たす．

ここで，ω_i, $1 \le i \le n$ を

$$\begin{pmatrix} \omega_n & \ldots & \omega_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dx_1 & \ldots & dx_n \end{pmatrix} M_{V^{(h)}}^{-1}$$

できまる $V_i^{(h)}$ の dual form とすると，$df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx_i = \sum_i (V_i^{(h)}\, f)\, \omega_i$ が成り立つので，(3.5) 式右辺において

$$(d\, M_{\tilde V})\, M_{\tilde V}^{-1} = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \cdot (V_i^{(h)} M_{\tilde V})\, M_{\tilde V}^{-1}$$

となる．ここで $P_i = (V_i^{(h)} M_{\tilde V})\, M_{\tilde V}^{-1}$ とおくとき次の補題が成り立つ：

補題 3.1. 各 i につき，P_i の各成分は u の G-不変斉次多項式である．

Step 3. P_i の各成分を $x_1, \ldots, x_n$ の斉次多項式で表す.

$\hat{Y}$ が満たす方程式 (3.5) は

$$d\hat{Y} = \left(\sum_{i=1}^{n} \hat{B}^{(i)}\, dx_i\right)\hat{Y},\ \ \hat{B}^{(i)} = \sum_{j=1}^{n}(M_{V^{(h)}}^{-1})_{i,j}P_{n-j+1} \tag{3.6}$$

と表される. 従って特に

$$h(x)\hat{B}^{(i)} \in \mathbb{C}[x]^{n\times n} \tag{3.7}$$

を得る.

Step 4. $\hat{B}^{(n)}(x)$ を求める.（単純計算）

微分方程式 (3.6) は一般には大久保型ではないが、そのための条件である定理 1.2 の (1), (2), (3) のうち (1), (2) は成り立つ：

補題 3.2. (1) $\deg_{x_n} h(x)\hat{B}^{(n)}(x)_{j,k} < n,\ 1 \le i, j, k \le n.$
(2) $\deg_{x_n}(h(x)\hat{B}^{(i)}(x)_{k,k}) < n,\ 1 \le i, k \le n.$

Proof.

$$\hat{Y} = \begin{pmatrix}\hat{y}_1 & \ldots & \hat{y}_n\end{pmatrix}^t, \quad \lambda_i = -w(\hat{y}_i),\ 1 \le i \le n$$

とおく。$\hat{y}_i = V_{n-i+1}^{(h)}y(u)$, $w(V_{n-i+1}^{(h)}) = 1 - w_i$ より、

$$\lambda_i = w_i - 1 - \frac{1}{d_n} \tag{3.8}$$

を得る。補題 2.1, (3) より

$$w\left(\hat{B}_{i,j}^{(k)}\right) = -w_i + w_j - w_k \tag{3.9}$$

を得る。従って

$$w\left(h(x)\hat{B}^{(n)}(x)_{j,k}\right) < n, \quad w\left(h(x)\hat{B}^{(i)}(x)_{k,k}\right) < n \tag{3.10}$$

を得て、(1), (2) が成立する。 □

(3.10) の第 1 式より、

$$h(x)\hat{B}^{(n)}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} C_i(x')\, x_n^i. \tag{3.11}$$

とおくことができる．ここで $C_i(x')$ の各成分は x' の斉次多項式．特に $C_{n-1}(x')$ に対しては

$$w(C_{n-1}(x')_{i,j}) = w_j - w_i$$

が成り立つ．

Step 5. $C_{n-1}(x')$ を求める．(単純計算)

補題 2.1, (1) と同様にして $B_\infty = \mathrm{diag}[\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$ に対し，

$$\sum_{i=1}^{n} w_i x_i \hat{B}^{(i)} = -B_\infty$$

が成り立つが，$x' = 0$ とおくと $x_n \hat{B}^{(n)}|_{x'=0} = -B_\infty$, 従って

$$C_{n-1}(0) = -B_\infty \tag{3.12}$$

が成り立つ．$i > j$ なら $w(C_{n-1}(x')_{i,j}) < 0$ より $C_{n-1}(x')_{i,j} = 0$ となるので，対角成分が 1 で、各成分が x' の斉次多項式である上三角斉次行列 $R(x')$ が存在して

$$R(x')C_{n-1}(x')R(x')^{-1} = -B_\infty, \quad w(R(x')_{i,j}) = -w_i + w_j \tag{3.13}$$

を満たす。

Step 6. $R(x')$ を求める．(線形代数の単純計算)

このとき

$$Y_0 = R(x')\hat{Y}, \tag{3.14}$$

$$B^{(k)} = R(x')\hat{B}^{(k)}R(x')^{-1} + \frac{\partial R(x')}{\partial x_k}R(x')^{-1},\ 1 \le i \le n \tag{3.15}$$

とおくと

$$dY_0 = \left(\sum_{i=1}^{n} B^{(i)}dx_i\right)Y_0 \tag{3.16}$$

が成り立つ．$Y_0 = \begin{pmatrix} y_1^0 & \dots y_n^0 \end{pmatrix}^t$ とおくと、$w(y_i^0) = -\lambda_i$ となるので、$B^{(k)}$ に対しても

$$w\left(B_{i,j}^{(k)}\right) = -w_i + w_j - w_k \tag{3.17}$$

が成り立つ。

補題 3.3. 可積分系 (3.16) は $B_\infty = diag[w_1, \dots, w_n] - (1 + \frac{1}{d_n})I_n$ の大久保型方程式である．

Proof. (3.17) より定理 1.2 の条件 (1), (2) は成り立つ。

$B^{(n)}(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{B_i^{(n)}(x')}{x_n - z_i^0(x')}$ と部分分数分解をしたとき $\sum_{i=1}^{n} B_i^{(n)}(x') = R(x')C_{n-1}(x')R(x')^{-1}$ なのでこれは $-B_\infty$ に等しい． 従って定理 1.2 の条件 (3) も成り立つ。 □

Step 7. $B^{(n)} = R(x')\hat{B}^{(n)}R(x')^{-1}$，$T(x) = B_\infty(B^{(n)})^{-1}$ 及び $C(x) = (C_{i,j}) = (T_{i,j}/(1 - w_i + w_j))$ を求める．(単純計算)

補題 3.4.

$$\det\left(\frac{\partial(C_{n,1}(x),\dots,C_{n,n}(x))}{\partial(x_1,\dots,x_n)}\right)\neq 0. \tag{3.18}$$

Proof. $Y_0=\begin{pmatrix}y_1^0 & \dots & y_n^0\end{pmatrix}^t$ とおくと，$y_n^0=V_1^{(h)}y(u)=\frac{1}{d_n}y(u)$. また、$\partial_{x_i}Y_0=B^{(i)}Y_0$ より、

$$\partial_{x_i}y_n^0=\begin{pmatrix}B_{n,1}^{(i)} & \dots & B_{n,n}^{(i)}\end{pmatrix}Y_0$$

を得る。従って

$$\begin{aligned}Y_0=R(x')\begin{pmatrix}V_n^{(h)}\\ \vdots\\ V_1^{(h)}\end{pmatrix}y(u)&=d_nR(x')M_{V^{(h)}}\begin{pmatrix}\partial_{x_1}\\ \vdots\\ \partial_{x_n}\end{pmatrix}y_n^0\\ &=d_nR(x')M_{V^{(h)}}\begin{pmatrix}B_{n,1}^{(1)} & \dots & B_{n,n}^{(1)}\\ \vdots & \dots & \vdots\\ B_{n,1}^{(n)} & \dots & B_{n,n}^{(n)}\end{pmatrix}Y_0.\end{aligned}$$

従って

$$d_nR(x')M_{V^{(h)}}\begin{pmatrix}B_{n,1}^{(1)} & \dots & B_{n,n}^{(1)}\\ \vdots & \dots & \vdots\\ B_{n,1}^{(n)} & \dots & B_{n,n}^{(n)}\end{pmatrix}=I_n,$$

特に

$$\begin{vmatrix}B_{n,1}^{(1)} & \dots & B_{n,n}^{(1)}\\ \vdots & \dots & \vdots\\ B_{n,1}^{(n)} & \dots & B_{n,n}^{(n)}\end{vmatrix}\neq 0.$$

一方

$$B^{(i)}=-(V_1^{(h)}C)\frac{\partial C}{\partial x_i}B_\infty=-\frac{\partial C}{\partial x_i}(V_1^{(h)}C)B_\infty$$

より

$$\begin{pmatrix}B_{n,1}^{(1)} & \dots & B_{n,n}^{(1)}\\ \vdots & \dots & \vdots\\ B_{n,1}^{(n)} & \dots & B_{n,n}^{(n)}\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}\frac{\partial C_{n,1}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial C_{n,n}}{\partial x_1}\\ \vdots & \dots & \vdots\\ \frac{\partial C_{n,1}}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial C_{n,n}}{\partial x_n}\end{pmatrix}(V_1^{(h)}C)B_\infty.$$

従って (3.18) がいえる. □

各 $j,\ 1 \le j \le n$ に対し，$w(C_{n,j}(x)) = w_j$ より，ある定数 c_j と，ある斉次多項式 $f_j(x_1, \ldots, x_{j-1})$ が存在して

$$C_{n,j}(x) = c_j x_j + f_j(x_1, \ldots, x_{j-1})$$

が成り立つが，補題 3.4 より $c_j \neq 0$ である．従って

$$F_j^{fl}(u) = C_{n,j}(F_1(u), \ldots, F_n(u)),\ 1 \le j \le n$$

は G-不変多項式の基本系（= 生成系）になる．これが定理に述べた flat G-invariant polynomials である．

Step 8 $F_j^{fl}(u) = C_{n,j}(F_1(u), \ldots, F_n(u)),\ 1 \le j \le n$ を求める．（単純計算）

$t_j = F_j^{fl}(u),\ 1 \le j \le n$ を $X = U_n/X$ 上の座標とすると，$C_{n,j} = t_j$ で，potential vector $(g_1(t), \ldots, g_n(t))$ は

$$g_j(t) = \frac{1}{1 + w_j} \sum_{i=1}^{n} w_i\, t_i\, C_{i,j}(t)$$

により求まる．

(3.2) 式は定理 2.4, (2) より従う。

Flat invariant には定数倍の不定性があり，

$$\tilde{t}_j = \frac{1}{c_j} t_j,\ 1 \le j \le n$$

を新たな Flat invariant に選ぶとき，新たな potential vector $(\tilde{g}_1(\tilde{t}), \ldots, \tilde{g}_n(\tilde{t}))$ は

$$\tilde{g}_j(\tilde{t}) = \frac{1}{c_j c_n} g_j(c_1 \tilde{t}_1, \ldots, c_n \tilde{t}_n),\ 1 \le j \le n$$

で与えられる．Flat invariant が定数倍を除き一意であることの証明はここでは省略する。以上で定理 3.1 の証明は終わる。

Non well-generated group の場合。
階数 $(=n)$ が 3 以上で、well-generated でない群は S-T number 31 の群と $G(m,p,n),\ m=pq>p$ のみである。前者の判別式 $h(x',x_4)$ は x_4 につき 5 次多項式となり、この群に対しての大久保型方程式は考えにくい。一方 $G(m,p,n),\ m=pq>p$ に対しては判別式は $h(x',x_n)=\rho(x')h'(x',x_n)$, ここで $\rho(x')$ は x' の多項式、$h'(x',x_n)$ は $G(p,p,n)^{(注)}$ の判別式となっている。Step 2 以下を $h'(x',x_n)$ に対する logarithmic vector field $V_i^{(h')}$ 及びその Saito matrix $M_{V^{(h')}}$ で代用して進め Step 6 まで実行する。この時点で方程式 (3.16) は $i<n$ につき (1.9) の形、つまり、

$$B^{(i)}=T(x)^{-1}\tilde{B}^{(i)}(x')B_\infty+\frac{\partial\mathcal{E}(x')}{\partial x_i}\mathcal{E}(x')^{-1},\ T=B_\infty(B^{(n)})^{-1}$$

の形をしている。従って Step 6 の後に次の Step 6.5 を追加し、その後 Step 7,8 へ進んで終了する。

(注) EwM での配布資料では $G(m,m,n)$ と誤記されている。

Step 6.5. $Y\to\mathcal{E}^{-1}Y,\ B^{(i)}\to\mathcal{E}^{-1}B^{(i)}\mathcal{E}-\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial x_i}\mathcal{E}^{-1}$ の置き換えを行う。

こうして得られた大久保型方程式に対する平坦座標は必ずしも G-不変式とはならない。

3.1 Examples of flat invariants

Rank $(=n)$ が 3 の群に対し平坦不変式 t_i と potential vector $\vec{g}(t) = (g_1(t), g_2(t), g_3(t))$ を与える。行列 $C(t)$ は $C_{i,j} = \partial g_j / \partial t_i$ により与えられ、G-quotient system は定理 3.1 の形で与えられる。

なお、平坦不変式 t_i には定数倍の不定性があり、g_i にもそれに応じた定数倍の不定性がある。

3.1.1 $G(m, m, 3)$

$$F_0 = u_1 u_2 u_3, \quad F_1 = u_1^m + u_2^m + u_3^m, \quad F_2 = u_1^m u_2^m + u_1^m u_3^m + u_2^m u_3^m$$

とおくとき、平坦不変式は

$$t_1 = \frac{1}{2\sqrt{m}} F_1, \quad t_2 = (2\sqrt{m})^{1/m} F_0, \quad t_3 = F_2 - F_1^2/(4m).$$

で与えられる。また、potential vector は

$$g_1 = t_1 t_3 + \frac{-m+2}{3}\, t_1^3 + \frac{1}{2(m-1)} t_2^m, \quad g_2 = t_2 t_3 + t_1^2 t_2,$$
$$g_3 = \frac{1}{2} t_3^2 + \frac{m-1}{3}\, t_1^4 + t_1 t_2^m$$

で与えられる。

なお、$m = 2$ のときは $G(2,2,3) = A_3$ であり、また、$g_1\, dt_3 + g_2\, dt_2 + g_3\, dt_1$ は閉で、積分 (prepotential)

$$g(t) = \frac{1}{2}(t_1^2 t_2^2) + \frac{1}{2}(t_2^2 t_3) + \frac{1}{15} t_1^5 + \frac{1}{2}(t_1 t_3^2)$$

をもち、

$$g_1 = \frac{\partial g}{\partial t_3}, \quad g_2 = \frac{\partial g}{\partial t_2}, \quad g_3 = \frac{\partial g}{\partial t_1}$$

が成り立つ。

3.1.2 $G(q,1,3)$

$$F_1 = u_1^q + u_2^q + u_3^q, \quad F_2 = u_1^q u_2^q + u_1^q u_3^q + u_2^q u_3^q, \quad F_3 = u_1^q u_2^q u_3^q$$

とおくとき、平坦不変式は

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{1}{(6q)^{2/3}} F_1, \quad t_2 = \frac{1}{(6q)^{1/3}} \left(F_2 - \frac{q+1}{6q} F_1^2 \right), \\ t_3 &= F_3 - \frac{1}{3q}(F_1 F_2) + \frac{3q+1}{54q^2} F_1^3. \end{aligned}$$

で与えられる。また、potential vector は

$$\begin{aligned} g_1 &= t_1 t_3 + \frac{(q-2)(q-3)}{6}\, t_1^4 + (-q+2)\, t_1^2 t_2 + \frac{1}{2} t_2^2, \\ g_2 &= t_2 t_3 - \frac{(q^2-1)(q-2)}{5}\, t_1^5 + \frac{2q(q-1)}{3}\, t_1^3 t_2 + (-q+1)\, t_1 t_2^2, \\ g_3 &= \frac{1}{2}\, t_3^2 + \frac{4(q^2-2q+2)(q-1)}{15}\, t_1^6 - (q-1)(q-2)\, t_1^4 t_2 + 2(q-1)\, t_1^2 t_2^2 - \frac{1}{3}\, t_2^3, \end{aligned}$$

で与えられる。

なお、$q=2$ のときは $G(2,1,3) = B_3$ であり、また、$g_1\, dt_3 + g_2\, dt_2 + g_3\, dt_1$ は閉で、積分 (prepotential)

$$g(t) = \frac{8}{105}\, t_1^7 + \frac{2}{3}\, t_1^3 t_2^2 - \frac{1}{3}\, t_1 t_2^3 + \frac{1}{2}\, t_1 t_3^2 + \frac{1}{2}\, t_2^2 t_3$$

をもち、

$$g_1 = \frac{\partial g}{\partial t_3}, \quad g_2 = \frac{\partial g}{\partial t_2}, \quad g_3 = \frac{\partial g}{\partial t_1}$$

が成り立つ。

3.1.3 G_{23}

$$\begin{aligned} F_1 =& -2u_1 u_3 + u_2^2, \\ F_2 =& \sqrt{2} u_2 (u_1^5 - u_3^5) + 2u_1 u_3((u_1 u_3)^2 + (u_1 u_3) u_2^2 + 2u_2^4), \\ F_3 =& 2\sqrt{2} u_2 \left(5(u_1 u_3)^2 + 10(u_1 u_3) u_2^2 + 8u_2^4 \right) (u_1^5 - u_3^5) - u_1^{10} - u_3^{10} + 6(u_1 u_3)^5 \\ & - 10(u_1 u_3)^4 u_2^2 - 40(u_1 u_3)^3 u_2^4 - 40(u_1 u_3)^2 u_2^6. \end{aligned}$$

とおくとき、平坦不変式は

$$t_1 = -\frac{5^{1/5}}{2}\,F_1, \quad t_2 = 5^{3/5}\left(F_2 + \frac{1}{4}\,F_1^3\right), \quad t_3 = F_3 - \frac{1}{16}\,F_1^2(7F_1^3 + 40F_2).$$

で与えられる。また、potential vector は prepotential

$$g = \frac{2}{495}\,t_1^{11} + \frac{1}{5}\,t_1^5t_2^2 - \frac{1}{3}\,t_1^2t_2^3 + \frac{1}{2}\,t_1t_3^2 + \frac{1}{2}\,t_2^2t_3$$

により

$$g_1 = \frac{\partial g}{\partial t_3}, \quad g_2 = \frac{\partial g}{\partial t_2}, \quad g_3 = \frac{\partial g}{\partial t_1}$$

で与えられる。

3.1.4 G_{24}

不変式は Klein により次のように与えられている。

$$F_1 = u_1^3u_2 + u_2^3u_3 + u_3^3u_1, \quad F_2 = \frac{1}{54}\det\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F_1}{\partial u_1\partial u_1} & \frac{\partial^2 F_1}{\partial u_1\partial u_2} & \frac{\partial^2 F_1}{\partial u_1\partial u_3} \\ \frac{\partial^2 F_1}{\partial u_2\partial u_1} & \frac{\partial^2 F_1}{\partial u_2\partial u_2} & \frac{\partial^2 F_1}{\partial u_2\partial u_3} \\ \frac{\partial^2 F_1}{\partial u_3\partial u_1} & \frac{\partial^2 F_1}{\partial u_3\partial u_2} & \frac{\partial^2 F_1}{\partial u_3\partial u_3} \end{pmatrix},$$

$$F_3 = \frac{1}{9}\det\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F_1}{\partial u_1\partial u_1} & \frac{\partial^2 F_1}{\partial u_1\partial u_2} & \frac{\partial^2 F_1}{\partial u_1\partial u_3} & \frac{\partial F_2}{\partial u_1} \\ \frac{\partial^2 F_1}{\partial u_2\partial u_1} & \frac{\partial^2 F_1}{\partial u_2\partial u_2} & \frac{\partial^2 F_1}{\partial u_2\partial u_3} & \frac{\partial F_2}{\partial u_2} \\ \frac{\partial^2 F_1}{\partial u_3\partial u_1} & \frac{\partial^2 F_1}{\partial u_3\partial u_2} & \frac{\partial^2 F_1}{\partial u_3\partial u_3} & \frac{\partial F_2}{\partial u_3} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u_1} & \frac{\partial F_2}{\partial u_2} & \frac{\partial F_2}{\partial u_3} & 0 \end{pmatrix}.$$

このとき平坦不変式は

$$t_1 = 14^{2/7}F_1, \quad t_2 = 14^{3/14}F_2, \quad t_3 = F_3 - 34F_1^2F_2.$$

で与えられる。また、potential vector は

$$g_1 = t_1t_3 + \frac{1}{2}\,t_2^2, \quad g_2 = t_2t_3 + \frac{2}{5}\,(t_1^5t_2) - t_1^2t_2^2,$$
$$g_3 = \frac{1}{2}\,t_3^2 + \frac{2}{45}\,t_1^{10} + t_1^4t_2^2 - \frac{2}{3}\,t_1t_2^3$$

で与えられる。

3.1.5 G_{25}, Hessian group

$$
\begin{aligned}
F_1 =& u_1^6 - 10u_1^3u_2^3 - 10u_1^3u_3^3 + u_2^6 - 10u_2^3u_3^3 + u_3^6, \\
F_2 =& (u_2^3 - u_3^3)(u_3^3 - u_1^3)(u_1^3 - u_2^3), \\
F_3 =& (u_1^3 + u_2^3 + u_3^3)((u_1^3 + u_2^3 + u_3^3)^3 + 216(u_1u_2u_3)^3).
\end{aligned}
$$

とおくとき、平坦不変式は

$$
t_1 = \frac{(-6)^{1/2}}{4}F_1, \quad t_2 = (-6)^{3/4}4F_2, \quad t_3 = F_3 - \frac{5}{8}F_1^2.
$$

で与えられる。また、potential vector は prepotential

$$
g = \frac{t_1^5}{15} + \frac{t_1^2t_2^2}{2} + \frac{t_1t_3^2}{2} + \frac{t_2^2t_3}{2}
$$

により

$$
g_1 = \frac{\partial g}{\partial t_3}, \quad g_2 = \frac{\partial g}{\partial t_2}, \quad g_3 = \frac{\partial g}{\partial t_1}
$$

で与えられる。ここで注意すべきことは、この prepotential は $G(2,2,3)$ のそれと全く同じであるということ。B_∞ を $B_\infty - \frac{1}{6}I_3$ で置き換えると $G(2,2,3)$ の Okubo system が得られる。[K-S] の中でも別の観点からこれと同等の事実を指摘している。

3.1.6 G_{26}, extended Hessian group

$$
\begin{aligned}
F_1 =& u_1^6 - 10u_1^3u_2^3 - 10u_1^3u_3^3 + u_2^6 - 10u_2^3u_3^3 + u_3^6, \\
F_2 =& (u_1^3 + u_2^3 + u_3^3)((u_1^3 + u_2^3 + u_3^3)^3 + 216(u_1u_2u_3)^3), \\
F_3 =& \left((u_2^3 - u_3^3)(u_3^3 - u_1^3)(u_1^3 - u_2^3)\right)^2.
\end{aligned}
$$

とおくとき平坦不変式は

$$
t_1 = 6^{-4/3}F_1, \quad t_2 = \frac{1}{2\cdot 6^{8/3}}(F_1^2 - 6F_2), \quad t_3 = F_3 + \frac{1}{6^3}F_1F_2 - \frac{7}{3\cdot 6^4}F_1^3.
$$

で与えられる。また、potential vector は

$$g_1 = t_1t_3 + \frac{1}{2}t_2^2 + \frac{1}{2}t_1^2t_2 + \frac{1}{8}t_1^4, \quad g_2 = t_2t_3 - \frac{1}{2}t_1t_2^2 + \frac{1}{2}t_1^3t_2 + \frac{1}{8}t_1^5,$$
$$g_3 = \frac{1}{2}t_3^2 - \frac{1}{3}t_2^3 + t_1^2t_2^2 + \frac{1}{4}t_1^4t_2 + \frac{1}{6}t_1^6$$

で与えられる。この potential vector は $G(3/2,1,3)$ のそれと同じである。B_∞ を $B_\infty - \frac{1}{6}I_3$ で置き換えると $G(3/2,1,3)$ の Okubo system が得られる。この事実も [K-S] で述べた事実と対応する。

3.1.7 G_{27}

$$F_1 = 3^{3/2}u_3(u_2^5 - u_1^5) - 10u_1^3u_2^3 - 15(u_1u_2u_3)^2 + 15u_1u_2u_3^4 + u_3^6,$$
$$F_2 = \frac{1}{2\cdot 3^3\cdot 5^3}\begin{vmatrix} \frac{\partial^2F_1}{\partial u_1\partial u_1} & \frac{\partial^2F_1}{\partial u_1\partial u_2} & \frac{\partial^2F_1}{\partial u_1\partial u_3} \\ \frac{\partial^2F_1}{\partial u_2\partial u_1} & \frac{\partial^2F_1}{\partial u_2\partial u_2} & \frac{\partial^2F_1}{\partial u_2\partial u_3} \\ \frac{\partial^2F_1}{\partial u_3\partial u_1} & \frac{\partial^2F_1}{\partial u_3\partial u_2} & \frac{\partial^2F_1}{\partial u_3\partial u_3} \end{vmatrix},$$
$$F_3 = \frac{1}{2^4\cdot 3^8\cdot 5^8}\begin{vmatrix} \frac{\partial^2F_1}{\partial u_1\partial u_1} & \frac{\partial^2F_1}{\partial u_1\partial u_2} & \frac{\partial^2F_1}{\partial u_1\partial u_3} & \frac{\partial F_2}{\partial u_1} \\ \frac{\partial^2F_1}{\partial u_2\partial u_1} & \frac{\partial^2F_1}{\partial u_2\partial u_2} & \frac{\partial^2F_1}{\partial u_2\partial u_3} & \frac{\partial F_2}{\partial u_2} \\ \frac{\partial^2F_1}{\partial u_3\partial u_1} & \frac{\partial^2F_1}{\partial u_3\partial u_2} & \frac{\partial^2F_1}{\partial u_3\partial u_3} & \frac{\partial F_2}{\partial u_3} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u_1} & \frac{\partial F_2}{\partial u_2} & \frac{\partial F_2}{\partial u_3} & 0 \end{vmatrix}.$$

とおくとき平坦不変式は

$$t_1 = (5/18)^{1/5}F_1, \quad t_2 = \frac{(5/18)^{2/5}}{3}(-F_1^2 + 9F_2),$$
$$t_3 = F_3 - \frac{43}{54}F_1^5 + \frac{29}{3}F_1^3F_2 - \frac{17}{2}F_1F_2^2.$$

で与えられる。また、potential vector は

$$g_1 = t_1t_3 + \frac{4}{135}\,t_1^6 + \frac{2}{3}\,t_1^4t_2 - t_1^2t_2^2 - t_2^3,$$
$$g_2 = t_2t_3 - \frac{40}{81}\,t_1^7 - \frac{4}{9}\,t_1^5t_2 - \frac{10}{3}\,t_1^3t_2^2 + \frac{5}{3}\,t_1t_2^3,$$
$$g_3 = \frac{1}{2}t_3^2 - \frac{56}{27}\,t_1^{10} + \frac{160}{27}\,t_1^8t_2 + \frac{140}{9}\,t_1^6t_2^2 + \frac{35}{2}\,t_1^2t_2^4 - \frac{21}{10}\,t_2^5$$

で与えられる。

REFERENCES

[Be] D. Bessis: Finite complex reflection arrangements are $K(\pi, 1)$. Ann. of Math. **181** (2015), 809-904.
[K-T] M. Kato and J. Sekiguchi, Uniformization Systems of Equations with Singularities along the Discriminant Sets of Complex Reflection Groups of Rank Three, Kyushu J. of Math. Vol. **68** (2014) 181–221.
[S-T] G. C. Shephard and A. J. Todd: Finite unitary reflection groups. Canad. J. Math., **6** (1954), 274-304.