平坦構造の一般化と
大久保型方程式のモノドロミ保存変形

眞野智行（琉球大・理）

第69回 Encounter with Mathematics

中央大学　2017年6月23日

§1. 概要

K. Saito (1970's)

孤立特異点の普遍回折

⇝ パラメータ空間上の平坦構造

ex 有限実鏡映群の軌道空間上の平坦構造
(平坦基本不変式の構成)

with T. Yano and J. Sekiguchi

B. Dubrovin (1990's)

2D位相的場の理論におけるWDVV方程式

⇝ フロベニウス多様体

・正則半単純フロベニウス多様体と

(ある種の対称性をもつ)線形微分方程式の

モノドロミ保存変形との関係

特に3次元

(正則半単純)WDVV方程式

⟺ 第6パンルヴェ方程式の1-パラメータ族

フロベニウス多様体の一般化として
Hertling-Manin による F-manifold や
Sabbah による Saito structure (without metric)
などが知られている.

Kato-M.-Sekiguchi (2015)

正則半単純 Saito structure (without metric)
⟺ 正則大久保型方程式の普遍可積分変形
(モノドロミ保存変形)

その帰結

- (well-generatedな)有限複素鏡映群の
  軌道空間上の平坦構造(平坦基本不変式の構成)

- 3次元の拡張されたWDVV方程式と
  第6パンルヴェ方程式の同値性

- 第6パンルヴェ方程式の代数解に対応する
  ポテンシャルベクトル場の明示的記述

半単純とは限らない正則Saito structure(without metric)

と(不確定特異点も含む)一般大久保型方程式との対応に拡張することができる.

その結果 第2〜第5パンルヴェ方程式も自然に現れる (Kawakami-M. 2017)

次の形の連立線形常微分方程式を考える:

$$(zI_n + T)\frac{dY}{dz} = -B_\infty Y \qquad \text{— ①}$$

ただし I_n は n 次単位行列, T, B_∞ は n 次正方行列

① は T が対角化可能のとき大久保型方程式

それ以外のとき一般大久保型方程式という

① は $\det(zI_n + T) = 0$ となる点と $z = \infty$ に特異点をもつ

高々 n 点

大久保型のとき ‥‥すべて確定特異点 (Fuchs 型)

一般大久保型 ‥‥不確定特異点を含む, ∞ は確定

大久保型方程式の性質

- $n=2$ のとき ガウスの超幾何方程式

- オイラー変換の下で形を保つ：

$Y(z)$ が ① をみたすとき

$$Y_\lambda(z) := \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int (u-z)^{\lambda-1} Y(u)\, du$$

とおくと $Y_\lambda(z)$ は

$$(zI_n + T)\frac{dY_\lambda}{dz} = -(B_\infty - \lambda I_n) Y_\lambda$$

をみたす.

($\lambda = -n,\ n \in \mathbb{N}$ のとき、Y の n 階導関数)

§2 例

$F(u,t) = u^3 + t_1 u + t_2$ を考える

Fの判別式： $\Delta = 27t_2^2 + 4t_1^3$

$y_1 := \int_\gamma u F(u,t)^\lambda du$, $y_2 := \int_\gamma F(u,t)^\lambda du$,

$Y := {}^t(y_1, y_2)$ とおくと Y は次をみたす：

オイラー変換のパラメータ

$$② \begin{cases} \begin{pmatrix} t_2 & -\frac{2}{9}t_1^2 \\ \frac{2}{3}t_1 & t_2 \end{pmatrix} \frac{\partial Y}{\partial t_2} = -\begin{pmatrix} -\frac{2}{3}-\lambda & \\ & -\frac{1}{3}-\lambda \end{pmatrix} Y \\ \begin{pmatrix} t_2 & -\frac{2}{9}t_1^2 \\ \frac{2}{3}t_1 & t_2 \end{pmatrix} \frac{\partial Y}{\partial t_1} = -\begin{pmatrix} 0 & -\frac{t_1}{3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}-\lambda & \\ & -\frac{1}{3}-\lambda \end{pmatrix} Y \end{cases}$$

← 大久保型

← 変形方程式

$$\det\begin{pmatrix} t_2 & -\frac{2}{9}t_1^2 \\ \frac{2}{3}t_1 & t_2 \end{pmatrix} = t_2^2 + \frac{4}{27}t_1^3 = \frac{\Delta}{27}$$ となることに注意.

$V_1 := E = \frac{2}{3}t_1\frac{\partial}{\partial t_1} + t_2\frac{\partial}{\partial t_2}$, $V_2 := t_2\frac{\partial}{\partial t_1} - \frac{2}{9}t_1^2\frac{\partial}{\partial t_2}$ とおくと

$V_1\Delta = 2\Delta$, $V_2\Delta = 0$ ゆえ
V_1, V_2 はΔに沿った対数ベクトル場である.

特に $\Delta = 0$ は自由因子であり.
V_1, V_2 が対数ベクトル場のなす加群の基底を与える

$$C := \begin{pmatrix} t_2 & -\frac{t_1^2}{6} \\ t_1 & t_2 \end{pmatrix}$$ とおくと $T = V_1 C$, $\tilde{B}^{(i)} = \frac{\partial C}{\partial t_i}$ $(i=1,2)$

平坦座標

ただし
$$T = \begin{pmatrix} t_2 & -\frac{2}{9}t_1^2 \\ \frac{2}{3}t_1 & t_2 \end{pmatrix},\quad \tilde{B}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{t_1}{3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad \tilde{B}^{(2)} = I_2$$

ベクトル場のなす加群 $\mathbb{C}[t]\frac{\partial}{\partial t_1}\oplus\mathbb{C}[t]\frac{\partial}{\partial t_2}$ について
次によって 可換・結合的 $\mathbb{C}[t]$-代数の構造を定めることができる:

$$\frac{\partial}{\partial t_i}\star\frac{\partial}{\partial t_j}=\sum_{k=1,2}\tilde{B}^{(i)}_{jk}\frac{\partial}{\partial t_k}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_2}\text{ が単位元}\right)$$

$$F(t):=\frac{t_1t_2^2}{2}-\frac{t_1^4}{72},$$

$$\vec{g}(t)=(g_1,g_2):=\left(t_1t_2,\ \frac{t_2^2}{2}-\frac{t_1^3}{18}\right)$$ とおくと

$$g_1=\frac{\partial F}{\partial t_2},\quad g_2=\frac{\partial F}{\partial t_1}$$

$$C_{ij}=\frac{\partial g_j}{\partial t_i}\quad i,j=1,2$$ が成り立つ

Fをプレポテンシャル，$\vec{g}$をポテンシャルベクトル場という

Fおよび$\vec{g}$について★の結合条件を書き下したものを

それぞれWDVV方程式，拡張WDVV方程式という.

（ただし $n=2$ のときは自明）

②のモノドロミ群はλに依存して変化する：

$\lambda=\frac{1}{2}$のとき　モノドロミ群はモジュラー群 $SL(2,\mathbb{Z})$

$\lambda=0$ のとき　モノドロミ群は $W(A_2)$　（有限群）.

§3 大久保型方程式の多変数化

大久保型方程式

$$(zI_n+T)\frac{dY}{dz}=-B_\infty Y \quad —③$$

を以下の条件を保つように(多変数)積分可能Pfaff系に拡張する：

$$dY=\left(B^{(z)}dz+\sum_{i=1}^{n}B^{(i)}dx_i\right)Y \quad —④$$

ただし $B^{(z)}=-(zI_n+T)^{-1}B_\infty$.

(A1) $B_\infty = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$, $\lambda_i - \lambda_j \notin \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ for $i \neq j$

(A2) T の成分は $x = (x_1, \cdots, x_n)$ について
(ある領域 U 上の) 正則関数

(A3) $\det(zI_n + T)$ を z の多項式とみたとき
その判別式は U 上恒等的に 0 とはならない
(正則半単純条件)

(A4) $\det(zI_n + T) \cdot B^{(i)}$ の成分は z について多項式,
x について U 上正則.

命題1　Pfaff系④が積分可能条件をみたす

$\Longleftrightarrow$ U上の正則関数を成分とする
n次正方行列 $\tilde{B}^{(i)}$ $(i=1,\cdots,n)$ が存在して
$B^{(i)}=-(zI_n+T)^{-1}\tilde{B}^{(i)}B_\infty \quad (i=1,\cdots,n)$
と書けて，次の関係式をみたす：

$$\begin{cases} [T, \tilde{B}^{(i)}] = [\tilde{B}^{(i)}, \tilde{B}^{(j)}] = O \\ \dfrac{\partial T}{\partial x_i} = \tilde{B}^{(i)} + [\tilde{B}^{(i)}, B_\infty] \\ \dfrac{\partial \tilde{B}^{(i)}}{\partial x_j} = \dfrac{\partial \tilde{B}^{(j)}}{\partial x_i} \end{cases}$$

定義1

Pfaff系

$$dY = -(zI_n + T)^{-1}\left(dz + \sum_{i=1}^{n} \tilde{B}^{(i)} dx_i\right) B_\infty Y$$

が積分可能であるとき，多変数大久保型方程式という.

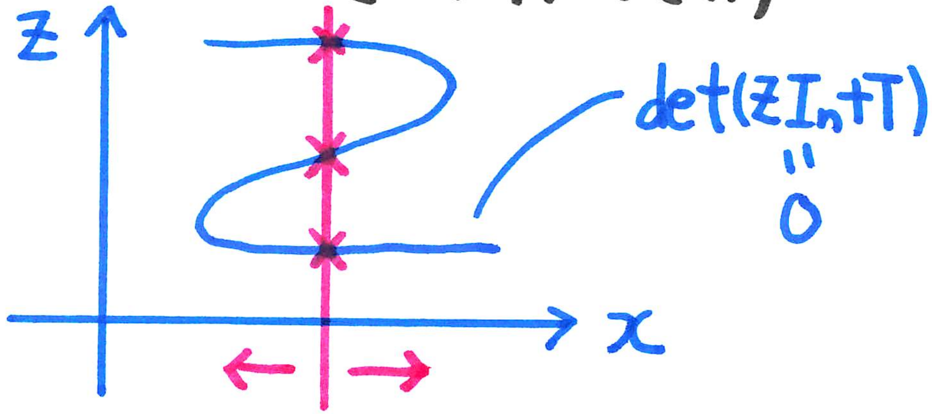
注1 $\tilde{B}^{(n)} = I_n$ と仮定しても一般性を失わない

以下そのように仮定する

<u>命題2</u> 多変数大久保型方程式は

大久保型方程式③のモノドロミ保存変形

を与える.



<u>注2</u> 多変数大久保型方程式は大久保型方程式の

普遍可積分変形を与える.

特に与えられた大久保型方程式に対して,

多変数大久保型方程式は(独立変数 x の

変換の自由度を除いて)一意に決まる.

§4. Saito structure (without metric)

定義2 (C. Sabbah)

X : n-dim 複素多様体, TX : Xの接束

X上の Saito structure (without metric) とは次の対象からなるデータ (∇, Φ, e, E) で (a), (b) の条件をみたすものである:

(i) ∇ : TX上の平坦かつ捩れのない接続

(ii) Φ : TX上の対称ヒッグス場

(i.e. Φは $End(TX)$に値をもつ1-形式)

(iii) e, E : TXの大域切断

(eを unit field, Eを Euler field という)

(a)

$$
\begin{tikzcd}
\pi^*TX \arrow[r] \arrow[d] & TX \arrow[d] \\
\mathbb{P}^1 \times X \arrow[r, "\pi"'] & X
\end{tikzcd}
$$

π^*TX上の有理型接続を

$$\boldsymbol{\nabla} := \pi^*\nabla + \frac{\pi^*\Phi}{z} - \left(\frac{\Phi(E)}{z} + \nabla(E)\right)\frac{dz}{z}$$

と定めると $\boldsymbol{\nabla}$ は平坦

ただし z は $\mathbb{P}^1$ の非斉次座標

(b) e は ∇-水平的 (i.e. $\nabla(e)=0$)

$$\Phi_e = \mathrm{Id}_{TX} \in \mathrm{End}(TX)$$

ただし Φ_e は 1-形式 Φ とベクトル場 e との縮約を表す.

<u>注3</u> TX 上の積構造が次のように定まる：

$\xi, \eta \in TX$ に対して

$$\xi \star \eta := \Phi_\xi(\eta)$$

Φ が対称 $\Longleftrightarrow$ $\star$ が可換

Φ が積分可能 (i.e. $\Phi \wedge \Phi = 0$) $\Longleftrightarrow$ $\star$ が結合的

↳ 条件(a)より従う

条件(b)より e は $\star$ の単位元

∇は平坦かつ捩れがないので（少くとも連結開集合上で）$\nabla\left(\frac{\partial}{\partial t_i}\right)=0,\ i=1,\cdots,n$ をみたす座標系$(t_1,\cdots,t_n)$が存在する．これを平坦座標系と呼ぶ

次を仮定する：

(B1) $e=\frac{\partial}{\partial t_n}$

(B2) $E=w_1 t_1\frac{\partial}{\partial t_1}+\cdots+w_n t_n\frac{\partial}{\partial t_n},\quad w_i\in\mathbb{C}$

$$w_n=1,\quad w_i-w_j\notin\mathbb{Z}\setminus\{0\}\ \text{for}\ i\neq j$$

平坦座標系$(t_1,\cdots,t_n)$を用いて

$$\Phi=\sum_{i=1}^{n}\Phi^{(i)}dt_i,\quad \Phi^{(i)}\in\mathrm{End}(TX)\ \text{と表す}$$

TXの基底として$\{\frac{\partial}{\partial t_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial t_n}\}$を取り、$\Phi^{(i)}$, $\Phi(E)$, $\nabla(E)$を行列表示したものをそれぞれ$\widetilde{\beta}^{(i)}$, $\mathcal{T}$, β_∞とする
すなわち

$$\Phi^{(i)}\left(\frac{\partial}{\partial t_j}\right)=\sum_{k=1}^{n}\widetilde{\beta}^{(i)}_{jk}\frac{\partial}{\partial t_k}, \quad \Phi_{\frac{\partial}{\partial t_i}}(E)=\sum_{j=1}^{n}\mathcal{T}_{ij}\frac{\partial}{\partial t_j},$$

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial t_i}}(E)=\sum_{j=1}^{n}(\beta_\infty)_{ij}\frac{\partial}{\partial t_j}$$

以下$\mathcal{T}$は正則半単純であると仮定する, i.e. $\mathcal{T}\sim\begin{pmatrix} z_1 & & \\ & \ddots & \\ & & z_n\end{pmatrix}$

$(z_1, \cdots, z_n)$は標準座標と呼ばれる:

$$\frac{\partial}{\partial z_i}\star\frac{\partial}{\partial z_j}=\delta_{ij}\frac{\partial}{\partial z_j}$$

補題1 $\beta_\infty=\begin{pmatrix} w_1 & & \\ & \ddots & \\ & & w_n\end{pmatrix}$

命題3　有理型接続 ∇ が平坦

$\Leftrightarrow$ $\hat{T}$, B_∞, $\tilde{B}^{(i)}$ が次の関係式をみたす:

$$\begin{cases} [\hat{T}, \tilde{B}^{(i)}] = [\tilde{B}^{(i)}, \tilde{B}^{(j)}] = 0 \\ \dfrac{\partial \hat{T}}{\partial t_i} = \tilde{B}^{(i)} + [\tilde{B}^{(i)}, B_\infty] \\ \dfrac{\partial \tilde{B}^{(i)}}{\partial t_j} = \dfrac{\partial \tilde{B}^{(j)}}{\partial t_i} \end{cases}$$

これは Pfaff 系

$$dY = -(zI_n + \hat{T})^{-1}\left(dz + \sum_{i=1}^{n} \tilde{B}^{(i)} dt_i\right) B_\infty Y \quad \text{―⑤}$$

の積分可能条件である. よって

Saito structure (without metric)

$\Longrightarrow$ 多変数大久保型方程式

<u>注4</u> 有理型接続 ∇ は Fourier-Laplace 変換によって ある対数接続に変換される
それを行列表示を用いて微分方程式の形で書いたものが⑤である.

命題4 $h(t) := \det \mathcal{J}$ として

$D := \{h(t)=0\} \subset X$ とおく.

$$\begin{pmatrix} V_n \\ \vdots \\ V_1 \end{pmatrix} := \mathcal{J} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial t_n} \end{pmatrix}$$

と定めると. $V_i \ (i=1,\cdots,n)$ は

D に沿った対数ベクトル場である.

また. D は自由因子であり. $\{V_1,\cdots,V_n\}$ が

対数ベクトル場のなす加群の基底を与える.

特に $V_1 = E$ である.

<u>補題2</u>　tについての荷重斉次関数を成分とするn次正方行列Cで

$$\Upsilon = EC \quad , \quad \widetilde{B}^{(i)} = \frac{\partial C}{\partial t_i}$$

をみたすものが一意的に存在する.

命題5 (Konishi - Minabe 2014)

tの荷重斉次関数を成分とするベクトル $\vec{g} = (g_1, \cdots, g_n)$ で

$$C_{ij} = \frac{\partial g_j}{\partial t_i}$$

をみたすものが一意的に存在する.

$\vec{g}$ (あるいは $g = \sum_{i=1}^{n} g_i \frac{\partial}{\partial t_i}$) を Saito structure (without metric) のポテンシャルベクトル場という.

命題6 $\vec{g}$ は次の関係式をみたす：

$$\sum_{m=1}^{n} \frac{\partial^2 g_m}{\partial t_k \partial t_i} \frac{\partial^2 g_j}{\partial t_l \partial t_m} = \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial^2 g_m}{\partial t_l \partial t_i} \frac{\partial^2 g_j}{\partial t_k \partial t_m}, \quad i,j,k,l=1,\cdots,n \quad — ⑥$$

$$\frac{\partial^2 g_j}{\partial t_n \partial t_i} = \delta_{ij}, \quad i,j=1,\cdots,n \quad — ⑦$$

$$E g_j = (1+w_j) g_j, \quad j=1,\cdots,n \quad — ⑧$$

これらを 拡張WDVV方程式と呼ぶことにする

証明 ⑥は☆の結合条件を書き下したもの

⑦は $e = \frac{\partial}{\partial t_n}$ が単位元となる条件

⑧は $\vec{g}$ の成分の荷重斉次性から従う //

逆に⑥⑦⑧の解 $\vec{g}$ が与えられると

saito structure (without metric) が構成できる.

$J := \begin{pmatrix} & & 1 \\ & ⋰ & \\ 1 & & \end{pmatrix}$ すなわち $J_{ij} = \delta_{i+j,n+1}$

n 次正方行列 A に対して A^* を $A^* := J\,{}^tAJ$ で定める.

<u>命題7</u> Saito structure (without metric) について
次の3つの条件は互いに同値:

(i) 平坦座標を適当に正規化すると $\underline{C^* = C}$

(ii) 平坦座標を適当に正規化すると, t の荷重斉次関数 F が存在して $\underline{\dfrac{\partial F}{\partial t_i} = (\vec{g}J)_i = g_{n+1-i}}$, $i=1,\cdots,n$ が成り立つ.

(iii) ${}^\exists r \in \mathbb{C}$ s.t. $w_{n+1-i} + w_i = -2r$, $i=1,\cdots,n$ かつ ${}^\exists$計量 η (i.e. TX 上非退化対称 $\mathbb{C}$-双線形形式) s.t.

$$\left[\begin{array}{l} \eta(\sigma \star \xi, \zeta) = \eta(\sigma, \xi \star \zeta) \qquad \sigma, \xi, \zeta \in TX \\ (\nabla\eta)(\xi,\zeta) := d(\eta(\xi,\zeta)) - \eta(\nabla\xi,\zeta) - \eta(\xi,\nabla\zeta) = 0 \\ (E\eta)(\xi,\zeta) := E(\eta(\xi,\zeta)) - \eta(E\xi,\zeta) - \eta(\xi,E\zeta) = -2r\eta(\xi,\zeta) \end{array}\right.$$

これらの条件のどれかが成り立つとき
Saito structure (without metric) は
(K. Saito の) 平坦構造 = フロベニウス多様体となる
F はプレポテンシャルと呼ばれ WDVV 方程式を
みたす.

多変数大久保型方程式

$$dY = -(zI_n + T)^{-1}\left(dz + \sum_{i=1}^{n} \tilde{B}^{(i)} dx_i\right) B_\infty Y \quad — ⑨$$

が "Saito structure (without metric) から生じる" とは次の条件をみたす U 上の Saito structure (without metric) が存在することである：

平坦座標系を $(t_1, \cdots, t_n)$，表現行列を $\mathcal{T}, \mathcal{B}_\infty, \hat{\mathcal{B}}^{(i)}$ としたとき，変数変換 $(t_1, \cdots, t_n) = (t_1(x), \cdots, t_n(x))$ が存在して

$$\mathcal{T} = T,\ \mathcal{B}_\infty = B_\infty - (\lambda_n - 1) I_n,\ \hat{\mathcal{B}}^{(i)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_j}{\partial t_i} \tilde{B}^{(j)}$$

が成り立つ.

定理1 多変数大久保型方程式⑨が
Saito structure (without metric) から生じる
ための必要十分条件は
T の n 行目からなる行ベクトルを $(T_{n1}, \cdots, T_{nn})$
とすると U 上至るところ

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial T_{n1}}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial T_{nn}}{\partial x_1} \\ \vdots & & \\ \dfrac{\partial T_{n1}}{\partial x_n} & \cdots & \dfrac{\partial T_{nn}}{\partial x_n} \end{vmatrix} \neq 0$$

が成り立つことである.

また、このとき

$$t_j := (\lambda_j - \lambda_n + 1)^{-1} T_{nj}(x)$$

が平坦座標を与える.

証明の概略

key observation ⑨ が Saito structure から生じるとき

$QTQ^{-1} = \begin{pmatrix} z_1 & & \\ & \ddots & \\ & & z_n \end{pmatrix}$ となる正則行列 Q をとると

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{\partial t_1}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial t_n}{\partial z_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial t_1}{\partial z_n} & \cdots & \frac{\partial t_n}{\partial z_n} \end{pmatrix}$$ が成り立つ

一般の⑨に対しても積分可能条件を用いて Q から

ある座標系 $(t_1, \cdots, t_n)$ の存在がいえる.

$E := \sum_{i=1}^{n} z_i \frac{\partial}{\partial z_i}$, $e := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial z_i}$, $\frac{\partial}{\partial z_i} * \frac{\partial}{\partial z_j} = \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial z_j}$ と定めたとき

$(t_1, \cdots, t_n)$ が平坦座標系の条件をみたすことをチェックする //

注5 多変数大久保型方程式は解の成分の入れかえによる自由度をもつ. すなわち

$$T=\begin{pmatrix} T_{11} & \cdots & T_{1n} \\ & \vdots & \\ T_{i1} & \cdots & T_{in} \\ & \vdots & \\ T_{n1} & \cdots & T_{nn} \end{pmatrix} \leftarrow i\text{行目} \qquad B_\infty=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \boxed{\lambda_i} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

i行とn行を入れかえると別のSaito structureが定まる
すなわち最大n個の異なるSaito structureを構成しうる.

言いかえると<u>B∞の固有値を1つ決めれば</u>, 対応する<u>Saito structure (without metric)は一意</u>に決まる

系1 (Saito structureの初期値問題)

(∇, Φ, e, E) をX上のSaito structure, $p_0 \in X \setminus \Delta_H$ とする

ただし Δ_H は $\det(z \cdot id + \Phi(E))$ の判別式の零点集合

このときSaito structureは

"p_0における初期条件" $\left(\underset{\text{End}(T_{p_0}X)}{\underset{\Cap}{\Phi(E)|_{p_0}}}, \underset{\Cap}{\nabla(E)|_{p_0}}, \underset{T_{p_0}X}{\underset{\Cap}{e|_{p_0}}}\right)$

によって一意に定まる.

証明 $\Phi(E)|_{p_0}$, $\nabla(E)|_{p_0}$ から大久保型方程式がゲージ変換の自由度を除いて一意に定まる. $\nabla_e(E) = e$ より $e|_{p_0}$ は $\nabla(E)|_{p_0}$ の固有ベクトルである.

よって定理1と注5より対応するSaito structureが一意に定まる. //

§5 応用

discriminant が $x_n^n + a_1(x')x_n^{n-1} + \cdots + a_n(x')$

(Besis 2015)

(i) well-generated な有限複素鏡映群の軌道空間上の平坦構造

G : well-generated 有限複素鏡映群

$$
\begin{array}{ccl}
G \curvearrowright & \mathbb{C}^n & : \text{標準的作用} \\
 & \downarrow & \\
D \subset & X = \mathbb{C}^n/G \cong \mathbb{C}^n &
\end{array}
$$

この構造から標準的な多変数大久保型方程式が X 上に構成できる(G-quotient system と呼ぶ)

⇒ G-quotient system に対応する X 上の Saito structure が存在する.

(ii) パンルヴェ方程式と平坦構造

第6パンルヴェ方程式 (P6)

$$y'' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{y-1}+\frac{1}{y-t}\right)(y')^2 - \left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t-1}+\frac{1}{y-t}\right)y'$$
$$+\frac{y(y-1)(y-t)}{t^2(t-1)^2}\left(\alpha+\beta\frac{t}{y^2}+\gamma\frac{t-1}{(y-1)^2}+\delta\frac{t(t-1)}{(y-t)^2}\right)$$

は次の線形微分方程式系のモノドロミ保存変形から得られる:

$$\frac{dY}{dz} = \left(\frac{A_1}{z}+\frac{A_2}{z-1}+\frac{A_3}{z-t}\right)Y,$$ A_i は 2×2 行列

$\det A_1 = \det A_2 = \det A_3 = 0$, $A_\infty := -A_1 - A_2 - A_3 = \begin{pmatrix} k_1 & \\ & k_2 \end{pmatrix}$

を仮定する.

⇝ 3階大久保型方程式に変換できる.

系2　3次元拡張WDVV方程式

$$
\begin{cases}
\displaystyle\sum_{m=1}^{3} \frac{\partial^2 g_m}{\partial t_k \partial t_i} \frac{\partial^2 g_j}{\partial t_l \partial t_m} = \sum_{m=1}^{3} \frac{\partial^2 g_m}{\partial t_l \partial t_i} \frac{\partial^2 g_j}{\partial t_k \partial t_m}, & i,j,k,l=1,2,3 \\[2ex]
\displaystyle\frac{\partial^2 g_j}{\partial t_3 \partial t_i} = \delta_{ij}, & i,j=1,2,3 \\[2ex]
E g_j = (1+w_j) g_j, & j=1,2,3
\end{cases}
$$

の正則半単純条件をみたす解とP6のgenericな解との間に対応が存在する.

(半単純性を外して正則条件をみたす解を考えるとP5, P4のgenericな解も現われる)

(iii) P6の代数解に対応するポテンシャルベクトル場

P6の代数解は(最終的に) Lisovyy-Tykhyy 2014
によって分類された.

系2によりそれに対応するポテンシャルベクトル場
が存在する.

特にrank 3の有限複素鏡映群に対応する
代数解のクラスがあり, ポテンシャルベクトル場
は平坦座標についての多項式となる.

問題1 多項式ポテンシャルベクトル場の分類

(Hertlingの定理の拡張?)

多項式ポテンシャルベクトル場をもつが
有限複素鏡映群に対応しないものが存在

問題2 代数的ポテンシャルベクトル場の分類

代数的ポテンシャルベクトル場
$\overset{?}{\Longleftrightarrow}$ モノドロミ保存変形方程式の代数解

(P6の代数解だがポテンシャルベクトル場は
超越的となる例の存在. しかしおそらく例外的)

§6 正則だが半単純でない場合

Tが対角化可能でないとき一般大久保型であった

$$T \sim J_1 \oplus \cdots \oplus J_\ell$$

J_i は $m_i \times m_i$ ジョルダンブロック

$$J_i = \begin{pmatrix} z_{i,0} & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & z_{i,0} \end{pmatrix} \qquad m_1 + \cdots + m_\ell = n$$

$z_{i,0} \neq z_{j,0}$ for $i \neq j$ が成り立つとき正則という。

対応が次のように拡張される：

正則Saito structure (without metric)

$\Leftrightarrow$ 正則一般大久保型方程式の普遍可積分変形

正則 Saito structure (without metric) について

$\Phi(E)$ の表現行列を $\mathcal{T}$ とすると

$$P^{-1}\mathcal{T}P = Z_1 \oplus \cdots \oplus Z_\ell$$

$$Z_i = \begin{pmatrix} z_{i,0} & z_{i,1} & \cdots & z_{i,m_i-1} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & z_{i,1} \\ 0 & & & z_{i,0} \end{pmatrix}$$ とできる

$(z_{1,0}, \cdots, z_{1,m_1-1}, \cdots, z_{\ell,0}, \cdots, z_{\ell,m_\ell-1})$ が標準座標

(David-Hertling 2014)

積構造は標準座標を用いて

$$\frac{\partial}{\partial z_{i,j}} * \frac{\partial}{\partial z_{p,q}} = \begin{cases} \delta_{i,p} \dfrac{\partial}{\partial z_{i,j+q}}, & 0 \le j+q \le m_i - 1 \\ 0, & j+q \ge m_i \end{cases}$$

P4～P6 のモノドロミ保存変形

⇒ 3階(以上の)正則一般大久保型に変換できる

P2, P3 のモノドロミ保存変形

⇒ 4階(以上の)正則一般大久保型

P1 のモノドロミ保存変形

⇒ 7階(以上の)一般大久保型 しかし 正則でない

4次元拡張WDVV方程式を用いると P2～P6 が統一的に扱える.

系3 4次元拡張WDVV方程式

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{m=1}^{4} \frac{\partial^2 g_m}{\partial t_k \partial t_i} \frac{\partial^2 g_j}{\partial t_l \partial t_m} = \sum_{m=1}^{4} \frac{\partial^2 g_m}{\partial t_l \partial t_i} \frac{\partial^2 g_j}{\partial t_k \partial t_m}, & i,j,k,l=1,2,3,4 \\ \displaystyle\frac{\partial^2 g_j}{\partial t_4 \partial t_i} = \delta_{ij}, & i,j=1,2,3,4 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{4} w_i t_i \frac{\partial g_j}{\partial t_i} = (1+w_j) g_j, & j=1,2,3,4 \end{cases}$$

ただし $w_1=w_2,\ w_3=w_4$ の正則条件をみたす解と P2〜P6 の generic な解との対応が存在する

この対応においてパンルヴェ方程式の退化図式

$$\begin{tikzcd}
P6 \arrow[r] & P5 \arrow[r] \arrow[dr] & P4 \arrow[dr] & \\
& & P3 \arrow[r] & P2\ (\longrightarrow P1)
\end{tikzcd}$$

は4次正方行列のジョルダン標準形の退化図式

$$\begin{tikzcd}
\begin{pmatrix} z_{1,0} & & & \\ & z_{2,0} & & \\ & & z_{3,0} & \\ & & & z_{4,0} \end{pmatrix} \arrow[r] & \begin{pmatrix} z_{1,0} & 1 & & \\ & z_{1,0} & & \\ & & z_{2,0} & \\ & & & z_{3,0} \end{pmatrix} \arrow[r] \arrow[d] & \begin{pmatrix} z_{1,0} & 1 & & \\ & z_{1,0} & 1 & \\ & & z_{1,0} & \\ & & & z_{2,0} \end{pmatrix} \arrow[d] \\
& \begin{pmatrix} z_{1,0} & 1 & & \\ & z_{1,0} & & \\ & & z_{2,0} & 1 \\ & & & z_{2,0} \end{pmatrix} \arrow[r] & \begin{pmatrix} z_{1,0} & 1 & & \\ & z_{1,0} & 1 & \\ & & z_{1,0} & 1 \\ & & & z_{1,0} \end{pmatrix}
\end{tikzcd}$$

に対応する。