齋藤構造の概双対性と複素鏡映群

三鍋 聡司 (東京電機大・工)

第 69 回 EwM
於 中央大学
2017 年 6 月 24 日

0. Introduction.

- **実鏡映群の軌道空間上の平坦構造** (Frobenius **構造**):
  Saito, Saito–Yano–Sekiguchi (70's), Dubrovin ('90 **頃**)

$G \subset \mathrm{O}(V^\ell)$: **有限既約実鏡映群**, $V_{\mathbb{C}}/G = \mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[p_1, \ldots, p_\ell]$

Thm. (Saito, Saito–Yano–Sekiguchi, Dubrovin)

$\exists$ a unique Frobenius str $(\eta, \circ, e, E)$ on $V_{\mathbb{C}}/G$ satisfying the following three conditions:

1. $e = \partial_{p_\ell}$ (p_ℓ **は最高次不変式**),
2. $E = \sum (d_i/d_\ell)\, p_i\, \partial_{p_i}$ ($d_i = \deg p_i$)
3. **次で定まる** g **が**, V **の** Euc. metric **から誘導される** $V_{\mathbb{C}}/G$ **の内積** (**昨日の** I) **に一致する**:

$$g(\partial_{p_i}, \partial_{p_j}) := \eta(\partial_{p_i}, \partial_{p_j} \circ E^{-1}).$$

- この背景に, almost duality と呼ばれる現象がある.
- g と同様に, 新しい積 $*$ を

$$\partial_{p_i} * \partial_{p_j} := \partial_{p_i} \circ \partial_{p_j} \circ E^{-1}$$

と定めると, $(g, *, E, e)$ は almost Frob. str. になる.

新しい積 $*$ の単位元は E であることに注意.

[Dubrovin '04] $\exists$ duality: Frob. str. $\leftrightarrows$ almost Frob. str.

$$(\eta, \circ, e, E) \quad \leftrightarrows \quad (g, *, E, e)$$

- $V_{\mathbb{C}}/G$ 上の Frob. str. の一意性:

先の 3 条件 $\Longrightarrow$ dual 側の almost Frob. str. が unique

$\Longrightarrow$ $V_{\mathbb{C}}/G$ 上の Frob. str. も一意.

複素鏡映群の場合はどうか?

- Kato–Mano–Sekiguchi (2015): existence of “Saito str (w.o. metric)” for duality groups (= well-generated groups).
- Arsie–Lorenzoni (2016): explicit computation for duality gps of $\mathrm{rank} \leq 3$.
- Konishi–M.–Shiraishi (2016): existence and uniqueness of “natural” Saito str based on almost duality for Saito str.

Aim of this talk.

1. Almost duality の観点から, 複素鏡映群の “natural” Saito str の存在と一意性の問題を定式化する.
2. (non-duality gp を含む) 全ての既約な複素鏡映群に対して, 問題の解答を与える.

Plan.

§1 Almost duality for Saito structure

§2 Complex reflection groups

§3 Natural Saito structure for complex reflection groups

§4 The cases of irreducible non-duality groups

1. Almost duality for Saito structure

References

- Sabbah (2002): *Isomonodromic Deformations and Frobenius manifolds*.
- Dubrovin (2004): *On almost duality for Frobenius manifolds*.
- Konishi–M.–Shiraishi (2016): *Almost duality for Saito structure and complex reflection groups*.

1-1. Saito structure (cf.[Sabbah])

M : a cpx mfd, TM: holo tan b'dle of M.

Def. M 上の Saito str (w/o metric) $(\nabla, \circ, e, E)$ とは,

- flat torsion-free connection ∇ on TM,
- comm. ass. product $\circ$ on TM with unit e,
- Euler vector field E,

の組で, 次の 4 条件を満たすもの.

(S1) [Potentiality] 積 $C_x := x\circ$ を $\mathrm{End}\, TM$ の元とみたとき,

$$\nabla_x C_y - \nabla_y C_x = C_{[x,y]}.$$

(S2) $\mathrm{Lie}_E(\circ) = \circ$, i.e.,

$$[E, x \circ y] - [E, x] \circ y - x \circ [E, y] = x \circ y.$$

(S3) $\nabla e = 0$.

(S4) $\nabla(\nabla E) = 0$, i.e.

$$\nabla_x \nabla_y E - \nabla_{\nabla_x y} E = 0.$$

Rmk. (昨日の復習)

- potentiality (S1) $\Rightarrow$ 積 $\circ$ の potential v.f. $\vec{g}$ が存在.
- associativity of $\circ$ $\Leftrightarrow$ $C_x C_y = C_y C_x$

  $\Rightarrow$ "extended WDVV" eq. for $\vec{g}$.

1-2. Almost Saito structure (cf.[KoMiShi])

N : a cpx mfd, TN: holo tan b'dle of N.

Def. N 上の almost Saito str $(\nabla, *, E, e)$ とは,

- flat torsion-free connection ∇ on TN,
- comm. ass. product $*$ on TN with unit E,
- "almost" Euler vector field e,

の組で, 次の 4 条件を満たすもの.

(AS1) Potentiality: same as (S1).

(AS2) $[e, x * y] - [e, x] * y - x * [e, y] = -e * x * y$.

(AS3) $\exists r \in \mathbb{C}$ s.t. $\nabla_x E = rx \quad (\forall x \in TN)$.

(AS4) $\nabla_x \nabla_y e - \nabla_{\nabla_x y} e = -\nabla_{x*y} e$.

Rmk. (AS3) の r を almost Saito str の "次元" という.

1-3. Almost duality (cf.[Dubrovin], [KoMiShi])

$\exists$ Duality SS $\leftrightarrows$ ASS

(1) SS $(M, \nabla, \circ, e, E) \to$ ASS $(N, \boldsymbol{\nabla}, *, E, e)$

Let $(M, \nabla, \circ, e, E)$ be a SS. Define

- $\mathcal{U}(x) := E \circ x \quad : TM \circlearrowleft$.
- $N := \{p \in M \mid \mathcal{U} \text{ is invertible}\}$.
- $x * y := \mathcal{U}^{-1}(x \circ y)$.
- $\boldsymbol{\nabla}_x y := \nabla_x y + r x * y - \nabla_{x*y} E$. $\quad (r \in \mathbb{C}$ は任意.)

Prop. $(N, \boldsymbol{\nabla}, *, E, e)$ is an ASS of dim r.

- $\boldsymbol{\nabla}$ は, ∇ と $\circ$ の情報を持っている.

(2) SS $(M, \nabla, \circ, e, E) \leftarrow$ ASS $(N, \boldsymbol{\nabla}, *, E, e)$

Let $(N, \boldsymbol{\nabla}, *, E, e)$ be an ASS. Define

- $\mathcal{T}(x) := e * x \quad : TN \circlearrowleft$.
- $M := \{p \in N \mid \mathcal{T} \text{ is invertible}\}$.
- $x \circ y := \mathcal{T}^{-1}(x * y)$.
- $\nabla_x y := \boldsymbol{\nabla}_x y - \boldsymbol{\nabla}_{x \circ y} e$

Prop. $(M, \nabla, \circ, e, E)$ is a SS.

Thm. (almost duality) ASS の次元 r を 1 つ固定すれば, 上の (1) と (2) は互いに逆対応, i.e.,

$$(1) \circ (2) = \mathrm{Id}, \quad (2) \circ (1) = \mathrm{Id}.$$

$(2) \circ (1) : SS \to ASS \to SS$ が Id の確認

- **積に関して**: $\mathcal{T}$ と $\mathcal{U}$ は互いに逆なので,

$$\mathcal{T}^{-1}(x * y) = \mathcal{T}^{-1}\mathcal{U}^{-1}(x \circ y) = x \circ y.$$

- **接続に関して**: $x * y = \mathcal{T}(x \circ y) = (x \circ y) * e$ より,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla}_x y - \boldsymbol{\nabla}_{x \circ y} e = & \quad \nabla_x y + rx * y - \nabla_{x * y} E \\ & - \nabla_{x \circ y} e - r(x \circ y) * e + \nabla_{(x \circ y) * e} E \\ = & \quad \nabla_x y \end{aligned}$$

最後に $\nabla e = 0$ も使った.

$\boxed{例}$ $M = \mathbb{C}v_1 \oplus \mathbb{C}v_2$

- 結合的な積 $\circ$

$\circ$	v_1	v_2
v_1	v_1	v_2
v_2	v_2	$c_1 v_1 + c_2 v_2$

- t_1, t_2: linear coord.
- $M \cong T_pM$; $v_i \mapsto \frac{\partial}{\partial t_i} =: \partial_{t_i}$.
- $\nabla = d$ (trivial conn), $\circ$ (上の同一視のもとで), $e = \partial_{t_1}$, $E = t_1\partial_{t_1} + t_2\partial_{t_2}$ は, M 上の SS.
- $\mathcal{U}(x) = E \circ x$ の $\partial_{t_1}, \partial_{t_2}$ に関する行列表示は,

$$U = \begin{bmatrix} t_1 & c_1 t_2 \\ t_2 & t_1 + c_2 t_2 \end{bmatrix}$$

- $\Delta := \det U = t_1^2 + c_2 t_1 t_2 - c_1 t_2^2$ (“discriminant”)
- $(M, \nabla, \circ, e, E)$ の dual ASS $(N, \boldsymbol{\nabla}, *, E, e)$:
  - $N = M \setminus \{\Delta = 0\}$
  - 積の行列表示は

$$\partial_{t_1} * = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} t_1 + c_2 t_2 & -c_1 t_2 \\ -t_2 & t_1 \end{bmatrix},$$

$$\partial_{t_2} * = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} -c_1 t_2 & c_1 t_1 \\ t_1 & c_2 t_1 - c_1 t_2 \end{bmatrix}.$$

  - 接続は

$$\boldsymbol{\nabla}_{\partial_{t_i}}(\partial_{t_j}) = (r-1)\, \partial_{t_i} * \partial_{t_j}.$$

2. Complex reflection groups

References

- Shephard–Todd (1954): *Finite unitary reflection groups*.
- Orlik–Terao (1992): *Arrangements of Hyperplanes*.
- Lehrer–Taylor (2009): *Unitary Reflection Groups*.

2-1. Reflection groups and their degrees

$V = \mathbb{C}^n$.

Def. $g \in \mathrm{GL(V)}$ が reflection

$:\Leftrightarrow$ g は位数有限で, 固有値が $\underbrace{1,\ldots,1}_{n-1}, \zeta \neq 1$.

- 鏡映 g の固有値 1 の固有空間を, g の reflection hyperplane という.

Def. $G \subset \mathrm{GL(V)}$ が complex reflection group

$:\Leftrightarrow$ G is a finite subgroup generated by reflections.

$\Leftrightarrow \mathbb{C}[V]^G = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$

- $x_1, \ldots, x_n$: basic invariants.
- 以下, $d_i := \deg x_i$ とおき, $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n$ とする.
- d_i たちは basic invts の取り方によらない (degrees of G).

2-2. Discriminants

$G \subset \mathrm{GL}(V)$ a cpx ref gp.
$\mathcal{A}_G :=$ the set of ref hyperplanes of G

Def. 次の Δ_G を G の discriminant という.

$$\Delta_G := \prod_{H \in \mathcal{A}_G} L_H^{e_H} \in \mathbb{C}[V]^G = \mathbb{C}[x_1, \ldots x_n],$$

where

- $L_H \in V^*$ s.t. $\mathrm{Ker}\, L_H = H$.
- $e_H =$ the order of cyclic subgp of G fixing H pointwise.

$\boxed{例 1}$ $G = A_1 \times A_1 = \left\langle \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\rangle$ $(= G(2,2,2))$

- discriminant : $\Delta_G = u_1^2 u_2^2$
- degrees : $d_1 = 2,\ d_2 = 2$
- basic invts を
$$y_1 = u_1^2, \quad y_2 = u_2^2$$
と選ぶと, $\Delta_G = y_1 y_2$.
- basic invts を
$$x_1 = (u_1^2 + u_2^2)/2, \quad x_2 = (u_1^2 - u_2^2)/2$$
と選ぶと, $\Delta_G = x_1^2 - x_2^2$.

$\boxed{例 2}$ $G = G_4, \quad \omega^3 = 1, \omega \neq 1,$

$$G = \langle \frac{\omega}{2}\begin{bmatrix} -1-i & 1-i \\ -1-i & -1+i \end{bmatrix}, \frac{\omega}{2}\begin{bmatrix} -1-i & -1+i \\ 1+i & -1+i \end{bmatrix} \rangle$$

- degrees: $d_1 = 6, d_2 = 4$.
- basic invts:

$$x_1 = u_1^5 u_2 - u_1 u_2^5, \qquad x_2 = u_1^4 + 2i\sqrt{3}u_1^2 u_2^2 + u_2^4.$$

- discriminant :

$$\Delta_G = (u_1^4 - 2i\sqrt{3}u_1^2 u_2^2 + u_2^4)^3 = -12\sqrt{3}\,i(x_1^2 - \frac{1}{12\sqrt{3}\,i}x_2^3).$$

Rmk. Δ_G が x_1 の 2 次 monic になっている.

2-3. Duality groups

Fact. (Orlik–Solomon, Bessis)

既約な cpx ref gp $G \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ に対し，次の 3 条件は同値．

(i) G may be generated by n reflections.

(ii) Δ_G は x_1 に関して n 次 monic.

(iii) $d_1^* \leq d_2^* \leq \cdots \leq d_n^*$ を G の codegree とするとき，

$$d_i + d_i^* = d_1 \qquad (\forall i).$$

Rmk. G の codegree とは，V 上の G-inv poly. v.f. の基底 (basic derivations) の次数のこと．(以下では使わない.)

Def. 既約な cpx ref gp G が上の同値な条件を満たすとき，G を duality group (or well-generated) という．

2-4. 分類

既約な cpx ref gp の分類 (Shephard–Todd)

- infinite series: $G(m,p,n) \quad (m,n>0,\ 0<p\,|\,m)$.
- exceptional series: $G_4,\cdots,G_{37}$ (計 34 個)

$$G(m,p,n) := \{(\theta_1,\ldots,\theta_n)\in(\mu_m)^n \mid (\theta_1\cdots\theta_n)^{m/p}=1\}\rtimes S_n$$
$$G(m,m,n)\lhd G(m,p,n)\lhd G(m,1,n)=(\mu_m)^n\rtimes S_n$$

例 (Coxeter gps)

- $G(1,1,n)=A_{n-1}$ (既約な $n-1$ 次元表現に制限)
  $G(2,1,n)=B_n,\quad G(2,2,n)=D_n,$
  $G(m,m,2)=I_2(m),\quad G(2,2,2)=A_1\times A_1$ (可約)
- $G_{23}=H_3,\ G_{28}=F_4,\ G_{30}=H_4$
- $G_{35}=E_6,\ G_{36}=E_7,\ G_{37}=E_8$

- Duality groups:
  - $G(m, 1, n)$, $G(m, m, n)$.
  - 例外型のうち, 下の 8 個を除く 26 個.

  特に, Coxeter gp は全て duality gp.

- 既約な non-duality gps:
  - $G(m, p, n) \quad (1 < p < m,\ p \mid m)$
  - $\underbrace{G_7, G_{11}, G_{12}, G_{13}, G_{15}, G_{19}, G_{22}}_{\text{rank } 2},\ \underbrace{G_{31}}_{\text{rank } 4}.$

- Duality gp に対しては, $d_1 > d_2$.

- Non-duality gp に対してはそうとは限らない.
  (実際に $d_1 = d_2$ となる場合もある.)

3. Natural Saito structures for complex reflection groups

References

- Saito (1979, 1993): *On a linear structure of the quotient variety by a finite reflexion group*.
- Saito–Yano–Sekiguchi (1980): *On a certain generator system of the ring of invariants of a finite reflection group*.
- Dubrovin (1993): *Geometry of 2D topological field theories*.
- Dubrovin (2004): 前掲.
- Kato–Mano–Sekiguchi (2015): *Flat structure on the space of isomonodromic deformations*.
- Konishi–M.–Shiraishi (2016): 前掲.

3-1. Settings

$G \subset \mathrm{GL}(V)$ a cpx ref gp. $\quad (V = \mathbb{C}^n)$.

$\mathbb{C}[V]^G = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$

- $\pi : V \to M_G := \operatorname{Spec} \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$: the orbit map
- π は $\Delta_G = 0$ で分岐する $|G|$-fold covering.

$$\begin{array}{cccc} \pi : & V & \longrightarrow & M_G \\ & \bigcup & & \bigcup \\ & \cup_{H \in \mathcal{A}_G} H & \longrightarrow & \{\Delta_G = 0\} \end{array}$$

例. $G = A_1 \times A_1$, $\quad x_1 = (u_1^2 + u_2^2)/2$, $\; x_2 = (u_1^2 - u_2^2)/2$.

- $\pi : V = \mathbb{C}^2 \ni p \mapsto (x_1(p), x_2(p)) \in \mathbb{C}^2 = M_G$.
- $\pi : V \supset \{u_1 u_2 = 0\} \to \{\Delta_G = x_1^2 - x_2^2 = 0\} \subset M_G$.

- $M_G = \mathrm{Spec}\, \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ 上の vector fields:

$$\partial_{x_i} := \frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad E := \sum \frac{d_i}{d_1} x_i \partial_{x_i}.$$

- $N_G := M_G \setminus \{\Delta_G = 0\}$.
- ∇^V: TV 上の trivial conn から π によって誘導される TN_G 上の flat torsion-free conn.

Def. (1) N_G 上の "natural" ASS $(\nabla, *, E, e)$ とは,

- $\nabla = \nabla^V$, $\quad E = \sum \frac{d_i}{d_1} x_i \partial_{x_i}$,
- e is a vector field of deg $-d_1$,

である次元 $r = 1/d_1$ の ASS のこととする.

(2) M_G 上の SS が "natural" :$\Leftrightarrow$ 双対の ASS が "natural".

3-2. Main results

以下, 次の 2 条件を仮定.

(i) Δ_G は x_1 の n 次 monic.

(ii) $d_n > 1$.

- (ii) は V が G の自明表現を含まないということ.
- 既約な G に対しては, (ii) は自動的に成立し,
  (i) が成立する $\Leftrightarrow$ G が duality gp.
- G が既約でない場合は, (i) が成立するかどうかは basic invts の取り方に依存する. (cf. $A_1 \times A_1$ の例.)

Main Thm. (Konishi–M.–Shiraishi)

仮定 (i), (ii) の下で次が成立.

1. M_G 上に natural SS $(\nabla, \circ, e, E)$ が存在する.
2. この SS は polynomial (i.e. ∇-flat な basic invts が存在し, それに関する積の構造定数が多項式) である.
3. $d_1 > d_2$ ならば, natural SS は unique (up to equivalence) である.

- G が duality gp の場合の 1,2 は Kato–Mano–Sekiguchi の結果. この場合は 3 の条件を満たし, 一意性も成立.
- 大久保型方程式 (G-quotient system)
  $\leftrightarrow$ Dual 側の ∇^V の水平切断の方程式.

3-3. Proofs

1. まず, ∇^V の接続行列から, 接続 ∇ と積 $\circ$ を具体的に構成し, $(\nabla, \circ, e, E)$ が SS であることを示す. この構成は, 実鏡映群の場合の構成 (Saito, Dubrovin) とパラレル.
2. 次に, その双対が natural ASS $(\nabla^V, *, E, e)$ であることを示す.

Step 1 の構成

- $\Delta_G = x_1^n + \Delta_1 x_1^{n-1} + \cdots$ とする. $(\Delta_1 \in \mathbb{C}[x_2, \ldots, x_n])$
- $\nabla^V_{\partial_{x_\alpha}}$ の $\{\partial_{x_i}\}$ に関する行列表示を Ω_α とすると,

$$\Delta_G \Omega_\alpha \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^{n \times n}.$$

(Step 1 の続き)

- 仮定 (i) $\Rightarrow \Delta_G \Omega_\alpha$ は x_1 の高々 n 次. よって

$$\Delta_G \Omega_\alpha = \Gamma_\alpha x_1^n + D_\alpha x_1^{n-1} + \cdots ,$$

とする. ただし, $\Gamma_\alpha, D_\alpha \in \mathbb{C}[x_2, \ldots, x_n]^{n \times n}$.

- 仮定 (ii) $\Rightarrow \Delta_G \det \Omega_1 = \det D_1 = \prod \frac{1-d_i}{d_i} \neq 0$. よって, D_1 は M_G 上で, Ω_1 は N_G 上で, それぞれ可逆.

- 接続 ∇ を Γ_α で, 積 $\circ$ を $C_\alpha := D_1^{-1}(D_\alpha - \Delta_1 \Gamma_\alpha)$ で定め, $e = \partial_{x_1}$ とすると, $(\nabla, \circ, e, E)$ は SS になる.

  (注: $d_1 > d_2$ ならば e は unique up to const.)

Step 2

- $U := \sum \frac{d_\alpha}{d_1} x_\alpha C_\alpha = \Omega_1^{-1} D_1$ となり, $\det U = \Delta_G$. 双対の接続が ∇^V であることも直接示せる.

一意性

- $\mathcal{Q}(x) = \nabla^V_x(e) : TN_G \circlearrowleft$ の行列表示は Ω_1. よって $\mathcal{Q}$ は, 仮定 (i), (ii) の下で可逆.

- Recall (AS4):

$$\nabla^V_x \nabla^V_y e - \nabla^V_{\nabla^V_x y} e = -\nabla^V_{x*y} e.$$

よって $\mathcal{Q}$ が可逆なら,

$$\boxed{x * y = -\mathcal{Q}^{-1}(\nabla^V_x \nabla^V_y e) + \nabla^V_x y}.$$

- これより, e が一意なら natural ASS は一意 (積 $*$ が上式で決まる). 双対性より, natural SS も一意.

$\boxed{\text{例 1}}$ $G = A_1 \times A_1, \quad \Delta_G = x_1^2 - x_2^2$

$$\Delta_G \Omega_1 = \underbrace{\begin{bmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{bmatrix}}_{D_1} x_1 + \begin{bmatrix} 0 & x_2/2 \\ x_2/2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_G \Omega_2 = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 \end{bmatrix}}_{D_2} x_1 + \begin{bmatrix} x_2/2 & 0 \\ 0 & x_2/2 \end{bmatrix}$$

- $\Gamma_1 = \Gamma_2 = O \implies x_1, x_2$: flat coord.
- $C_1 = D_1^{-1} D_1 = \mathrm{Id} \implies \partial_{x_1}$: unit
- $C_2 = D_1^{-1} D_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \implies \partial_{x_2} \circ \partial_{x_2} = \partial_{x_1}$.
- **これは**, §1-3 **の代数の例で**, $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, $r = 1/d_1 = 1/2$ **の場合になっている**.

$\boxed{\text{例 2}}$ $G = G_4, \quad \Delta_G = x_1^2 - \frac{1}{12\sqrt{3}i} x_2^3 \quad (d_1 = 6,\ d_2 = 4)$

$$\Delta_G \Omega_1 = \underbrace{\begin{bmatrix} -5/6 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{bmatrix}}_{D_1} x_1 + \begin{bmatrix} 0 & \frac{5}{48\sqrt{3}i} x_2^2 \\ x_2/3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_G \Omega_2 = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -\frac{15}{96\sqrt{3}i} x_2 \\ -1/2 & 0 \end{bmatrix}}_{D_2} x_1 + \begin{bmatrix} \frac{5}{48\sqrt{3}i} x_2^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{16\sqrt{3}} x_2^2 \end{bmatrix}$$

- $\Gamma_1 = \Gamma_2 = O$.
- $C_2 = D_1^{-1} D_2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{3}}{16i} x_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \implies \partial_{x_2} \circ \partial_{x_2} = \frac{\sqrt{3}}{16i} x_2 \partial_{x_1}$.

4. The cases of irreducible non-duality groups

- 既約な non-duality gps:
  - $G(m,p,n) \quad (1 < p < m,\ p \mid m)$
  - $\underbrace{G_7, G_{11}, G_{12}, G_{13}, G_{15}, G_{19}, G_{22}}_{\text{rank } 2}, \underbrace{G_{31}}_{\text{rank } 4}.$

(A) $d_1 > d_2$; Δ_G is of deg n in x_1 but not monic.

- $G(m,p,n)$ ただし, $(m,p,n) \neq (2k,2,2)$.
- G_{15}

(B) $d_1 = d_2$; Δ_G is of deg n in x_1 but not monic.

- $G(2k,2,2)$ $(k > 1)$
- G_7, G_{11}, G_{19}

(C) $d_1 > d_2$; Δ_G is monic in x_1 but of deg $n+1$.

- $G_{12}, G_{13}, G_{22}, G_{31}$

Thm. (Konishi–M.–Shiraishi)

- If G is of type (A), $\exists$ unique natural SS $(\nabla, \circ, e, E)$ on M_G. This SS is not polynomial and ∇ has log pole along the discriminant divisor.
- If G is of type (B), $\exists$ three natural SS's on M_G (up to equiv.). These SS's are not polynomial and connections are logarithmic.
- If G is of type (C), $\exists$ no natural SS on M_G.

- (A) は, ある duality gp $K \lhd G$ が存在して, 巡回分岐被覆 $M_K \to M_G$ によって SS が誘導される. 積 $\circ$ は M_G 全体で定義されるが, 接続 ∇ は分岐因子に log pole を持つ.
- (B) は, e の取り方が 3 種類ある. 全て (A) と同様の巡回分岐被覆で誘導される.
- (C) は, natural ASS が存在しないことが示せる.

$\boxed{\text{例}}$ $G = G(m, p, 3) \quad (1 < p < m,\ p \mid m)$

- $K = G(m, m, 3) \lhd G$.
- Basic invts of K:

$$x_1 = (u_1 u_2)^m + (u_2 u_1)^m + (u_3 u_1)^m,$$

$$x_2 = u_1^m + u_2^m + u_3^m, \quad x_3 = u_1 u_2 u_3.$$

- Basic invts of G: $x_1, \ x_2, \ y_3 = x_3^{m/p}$.
- $\Delta_G = y_3 \Delta_K$.
- $M_K \to M_G : (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_2, x_3^{m/p})$ **は**, $\{y_3 = 0\}$ **で分岐する** $\mu_{m/p}$-covering.
- Natural SS on M_K is $\mu_{m/p}$-invariant. Hence induces that on M_G.

- Induced SS on M_G is not polynomial and ∇ has log pole along $y_3 = 0$.
- Flat coord on M_K:

$$t_1 = x_1 + \mathrm{const} \cdot x_2^2, \quad t_2 = x_2, \quad t_3 = x_3.$$

- Flat coord on M_G:

$$t_1 = x_1 + \mathrm{const} \cdot x_2^2, \quad t_2 = x_2, \quad t_3 = y_3^{p/m}.$$