

対数的に自由な因子と平坦構造

— 原始型式への道 —

数物連携宇宙研究機構 斎藤恭司

対数的に自由な因子と平坦構造、そして原始型式は僕の研究の出発点の時期 (1970 年代) に考えた主テーマであり、その後の研究の発展に大きな影響があった (勿論それ以外のことも考えていたが)。僕がそれ等の数学とどの様に出会ったのか、記憶する範囲で復元してみたい (いろいろなアイデアが複合して同時進行していたので、その順がどうであったかは正確ではないが)。

1. 学生時代: 僕が大学院生活を過ごした 1967-69 年東京大学は紛争の真っ只中にあった。講義やセミナーは閉じ、種々の集会やデモに明け暮れる毎日だった。それは数学教室とて例外ではなかった。その様な中で僕は自分の数学の方向を探し求めて、数学教室内ある各種の文献を、あるいは集会の合間にあるいはデモに移動する都電の中で、読みまくった。その中で、僕の心を捉えたものは二つあった。一つは C.L. Siegel による楕円積分に関する講義ノート、もう一つは E. Artin による類体論の講義ノートであった。それは三角関数や指数関数を超える最初の周期の理論であり、その様な周期が数体や関数体の拡大構成と繋がる最初のステップを記述していた。それ等のノートは、紛争のさなかにあって学問に飢えていた僕には百年の彼方から差し込んでくる光芒のように思われた。当時自覚はなかったが、その後僕の研究はそこで学んだことを高次元化することをひたすら目指して歩んでいるように思う。その様な高次元の周期から生まれる超越関数の間のヒエラルヒーは数の体系にも新たなヒエラルヒーをもたらさないだろうか [31]。

2. Milnor の定理: 1970 年 2 月僕はドイツに渡り二ヶ月の語学研修の後 4 月より Göttingen 大学に行った。そこでは Grauert と Brieskorn が共同で出版されたばかりの Milnor による消滅サイクルに関する [17] を読んでいた: $f(x)$ を $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ の原点近傍で定義された正則関数として \mathbb{C}^n の原点の近傍で定義された超曲面 $f(x) = 0$ は原点のみで特異点を持ち他の点では滑らかと仮定する。この時充分小さい $t \in \mathbb{C}$ に対し、変形 $F(x, t) = f(x) + t$ の超曲面 $\{F(x, t) = 0\}$ は複素 $n - 1$ 次元多様体として中間 (=n-1) 次元のホモロジー類 (消滅サイクルと呼ばれる) を $\mu := \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0} / (\partial f)$ -個の一次独立にもつ (但しここで $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0}$ は \mathbb{C}^n の原点の近傍で正則になる関数の芽のなす局所環で (∂f) はその中で f の偏導関数達 $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ で生成されるイデアルのこと。今日では $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0} / (\partial f)$ の事をしばしばヤコビ環と呼ぶ)。

この仕事はいろいろな意味で僕の注意を引きつけた:

i) 理論の一番簡単な場合の Morse 特異点 = A_1 -型のときは $f = x^2 + y^2$ のサイクルは円周であり、そのつぎの A_2 -型の時は $f = x^3 + y^2$ で楕円曲線のサイクルになっている。Milnor の定理は指数関数や楕円関数の一般化への道?

ii) Brieskorn はそのサイクルを相対微分形式で積分した周期の満たす微分方程式系 (Gauss-Manin connection) を研究している (Oda-Katz の研究 [16])。

iii) 上記の i),ii) を組み合わせれば、消滅サイクル上の積分 (= 周期) をパラメータ $t \in (\mathbb{C}, 0)$ の関数と見なしてその満たす微分方程式系が得られ、その解、または、独立な解を並べて得られる写像 (周期写像) の逆写像 (Jacobi の逆問題) として新たな多変数超越関数が得られる期待がある。

3. Thom の理論. その夢を実現する為には、もう一つ視点が必要だった。即ちその時点では未だパラメータは 2. で述べたように t のみで 1 次元だが、もっと一般に $f(x)$ を μ -個のパラメータ $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_\mu)$ で変形した関数族 $F(x, \mathbf{t}) = f(x) + t_1\varphi_1(x) + \dots + t_\mu\varphi_\mu(x)$ (但し $\varphi_1 = 1, \dots, \varphi_\mu$ はヤコビ環 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0}/(\partial f)$ の基底の代表系) を考えないと例えば楕円積分の時の二次元のパラメータ関数族 $F(x, y, s, t) = y^2 + x^3 + sx + t$, $(s, t) \in \mathbb{C}^2$ を復元できない。

ここで、一つ考え方の分水嶺があった。当時、 f の変形に関しては代数幾何の影響でセミナーでは 空間の孤立特異点の半普遍変形 という考えが主流であったが¹、僕は寧ろ R.Thom による 関数の特異点の “unfolding” という概念 [47] の方がより本質的であると思った。上記の $F(x, \mathbf{t})$ はその Thom の意味で universal unfolding (即ち最も大きいが無駄のない族) となっている。Universal unfolding という視点により、見えてくるものはいくつもあるが、二点ほど (後の原始型式の理論で必要になる) 重要な点を挙げよう。多少技術的な事項を説明する必要がある。正確には文献 [25] を見て頂く事にしてここでは大雑把に状況を説明しよう。まず、変形のパラメータ空間を $S = \{\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_\mu) \in \mathbb{C}^\mu\}$ (の原点の近傍) とおくと、 F は $\mathbb{C}^n \times S$ の開集合で定義されており、 $F(x, 0) = f(x)$ となる。 $\mathbb{C}^n \times S$ から S への射影を π と記す。 F の π に関して相対的な critical set を $C = \{\frac{\partial F}{\partial x_1} = \dots = \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0\}$ と置くと、 $\pi|_C : C \rightarrow S$ は μ 枚の分岐被覆となる。ここで、 \mathcal{O}_C 及び Der_S でそれぞれ、 C 上正則 (holomorphic) 関数 及び S 上正則なベクトル場の (芽の) なす層を現すことにする。すると、 F が universal unfolding である事の従来の定義は次の対応が同型 (bijection) となる事である。

$$Der_S \simeq \pi_*(\mathcal{O}_C), \quad v \mapsto \hat{v}F|_C \quad (1)$$

但し S 上のベクトル場 v に対して \hat{v} とはその $\mathbb{C}^n \times S$ への持ち上げを一つ選ぶ事だが $\hat{v}F|_C$ は持ち上げの選び方によらず唯一定まる。この同型 (1) は特に、

¹変形関数 $F(x, \mathbf{t})$ の定義に $\varphi_1, \dots, \varphi_r$ はヤコビ環ではなくて Tjurina 環 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0}/(\partial f, f)$ の基底の代表系をとる。Grauert, Brieskorn は代数幾何的に自然な半普遍変形族を採用したのに対し僕は函数論的立場から Thom の universal unfolding の立場をとった。両者が一致する ($\Leftrightarrow \mu = \tau \Leftrightarrow f \in (\partial f)$) 必要十分条件が f が quasi-homogeneous となることである [21]。Brieskorn の勧めで僕はその仕事で Goettingen 大学の学位を取ることになった。

S の原点 0 における接空間 $T(S)_0$ は特異点の定義式 f の Jacobi 環 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}/(\partial f)$ に同型と成ることを意味する。これは universal unfolding に対する新たな意味での Kodaira-Spencer 理論ではないのか? 更には、この同型 (1) により、 S の接バンドルに環構造が入る:具体的には S 上のベクトル場 v, v' が与えられたときその積 $v * v'$ が関係式 $(\hat{v}F \cdot \hat{v}'F)|_C = \widehat{v * v'}F|_C$ により定まる。この事は後で原始型式の定義にも用いられ、平坦構造 (又は Frobenius 多様体構造) の理論の萌芽にもなっている。

この同型 (1) により、パラメータ空間 S 内の特別な方向が二つ見えてくる。

一つは右辺の環の単位元 1 に対応する左辺のベクトル場でそれを unit ベクトル場または原始ベクトル場という。具体的には、 F の定数項を現すパラメータ座標を t_1 とすると、 $\frac{\partial}{\partial t_1}$ が原始ベクトル場となる。

もう一つは、右辺の環の中で F のクラス $[F]$ に対応する左辺のベクトル場を E と書いて Euler operator 又は Euler ベクトル場と呼ぶことにする (f が斉次多項式の時にはそれを特徴付ける Euler の微分作用素が出てくるからである)。この定義の利点は f が斉次でなくとも (更には重み付き斉次でさえなくとも) Euler operator が定まることで、後に原始型式の斉次性の定義 (第 9 節定義 (iii) 参照) に必要になる。

次に S 内に Discriminant loci を (集合としては)

$$D := \pi(C \cap \{\text{超曲面 } F(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = 0\}) \quad (2)$$

と定義すると S の中で余次元 1 の因子になっている。それを更に原始方向に射影すると、 $\mu - 1$ 次元の関数の変形パラメータ空間内に discriminant D の discriminant B (=bifurcation set 又は caustics と呼ばれる) を考察できる。

4. 対数ベクトル場 (=対数場) と対数極と対数接続: 上記 第 2、3 節の考えに導かれて、1970-73 の間 Goettingen にて僕は孤立特異点の普遍 unfolding $F(\mathbf{x}, \mathbf{t})$ に対する Gauss-Manin connection $\nabla : \mathcal{H}_F \rightarrow \mathcal{H}_F \otimes \Omega_S^1(*D)$ を研究した (ここで \mathcal{H}_F は F の消滅サイクルに対する De Rham cohomology \mathcal{O}_S -module で ∇ は共変微分と呼ばれるパラメータ空間 S -上の接続であって discriminant $D \subset S$ に極を持つ)。この時に今日数学界で一般的に使われるいろいろな概念が生まれた (例えば Euler ベクトル場 或いは Euler operator, quasi-homogeneous 特異点、semi-infinite Hodge filtration、等々)。

その一つが対数極 (logarithmic pole) や対数場 (logarithmic vector field) である [23]。ここでまず D はパラメータ空間 S 中の超曲面 (因子) として $\{h = 0\}$ と定義されているとして、用語と記号を用意する。まず Ω_S^1 または Der_S でそれぞれ、 S 上 正則 (holomorphic) な 1-form または正則なベクトル場の (芽の) なす層を現すことにする。この時

$$\begin{aligned} \Omega_S^1(\log(D)) &:= \{\omega \in \Omega_S^1(*D) \mid h\omega \in \Omega_S^1, h d\omega \in \Omega_S^2\} \\ Der_S(-\log(D)) &:= \{v \in Der_S \mid v(h) \in (h) \subset \mathcal{O}_S\}. \end{aligned} \quad (3)$$

それぞれ D に対数極を持つ 1 形式または D に対数的に接するベクトル場加群と呼ばれる。それ等は自然なペアリングで互いに dual \mathcal{O}_S module になる。²

すると、普遍変形族 $F(x, t)$ に対し次が成立する。

- i) Gauss-Manin connection は対数極を持つ $\nabla : \mathcal{H}_F \rightarrow \mathcal{H}_F \otimes \Omega_S^1(\log(D))$ 。
- ii) $\Omega_S^1(\log(D))$ 及び $Der_S(-\log(D))$ は互いに dual な \mathcal{O}_S -自由加群。

ここで i) は、普遍族 $F(x, t)$ の特異点は generic には Morse 特異点 (特に quasi-homogeneous) なので Gauss-Manin connection の極は generic には対数極と成ることから示せる (その証明は、脚注 1. で述べた quasi-homogeneous singularity の特徴付けが使われる)。ii) のディスクリミネラントに対する対数型式や対数場の加群達が \mathcal{O}_S -加群として自由となる事実 (証明には族 $F(x, t)$ の critical set の分析を要するので略。次の第 5 節で述べる鏡映群の場合と重なる事実だがどちらを先に発見したか記憶はない) は当時話題だった Sullivan による minimal model 理論 [?] 及び Deligne による $K(\pi, 1)$ 空間の記述 (後出 [8]) との関連で非常に着目すべき性質のように思えた。一般に $Der_S(-\log(D))$ が \mathcal{O}_S -加群として自由となる様な S の因子 D を 対数的に自由因子 と呼ぶことにする。その場合には 対応した幾何的に対数場ベクトル束が定義されることにより、いろいろなことが明快になり、後に、第 7 節で述べる一般の対数接続そして第 9 節で述べる原始型式の研究へと発展していく (例えば二つのベクトル束の包含関係 $Der_S(-\log(D)) \subset Der_S$ は後に考察する半無限 Hodge filtration を直和分解する鍵になる。式番号の (12)-(15) 参照)。

5. 有限鏡映群の場合：これより先に、Brieskorn は既に単純特異点の universal unfolding を単純 Lie 環の言葉で記述していた。特にその変形パラメータ空間 S はカルタン代数 V (有限次元複素ベクトル空間) の Weyl 群 (有限鏡映群) による商空間 V/W で与えられた。Chevalley の定理により 不変式環 $S(V^*)^W = \{V \text{ 上の多項式関数であって } W\text{-不変なもの全体}\}$ は多項式環 $C[P_1, \dots, P_l]$ に同型と成る (ここで斉次多項式による生成系 P_1, \dots, P_l ($2 = \deg P_1 < \dots < \deg P_l = h$) を基本不変式とも言う。それ等は商空間 $S := V/W$ の座標系を与えるが、それ等の取り方は唯一ではなく重み付き座標変換の自由度がある)。他方 W -反不変式のなす加群の基底を Δ (定数倍を除いて唯一) とすると $\Delta^2 \in S(V^*)^W$ がディスクリミネラント D の定義方程式となる。その場合の対数場加群の基底は、以下のように驚くほど簡単に求まる：

$$Der_S(-\log(\Delta^2)) = \{I^*(dP_i, \cdot)\}_{i=1}^{\mu} \text{ を基底とする } \mathcal{O}_S \text{ 自由加群} \quad (4)$$

ここで I^* は V の W -不変内積 I (up to constant で unique, Killing form) の dual 内積を V の cotangent bundle $T^*(V)$ の fiber 毎に定義したもので、

²Free divisor 又はその一般化に関して、現在に至るまで実に多くの研究が為されている。筆者はその全体像はつかみ切れていないが、それ等の解説は本稿の趣旨とはずれると思われるので、ここでは立ち入らない。寧ろこの後、本稿の第 5 節、6 節で述べる有限鏡映群に対する平坦構造を複素鏡映群に拡張した加藤、眞野、関口等による一連の仕事 [12, 13, 14, 15] に着目したい。

$I^*(dP_i, \cdot)$ は \cdot に 1-form を代入すると関数を返すので、ベクトル場と見なせる (具体的には脚注 6. の計算を参照)。

ここで少し寄り道であるが、超平面配置について述べる。有限鏡映群による商写像 $V \rightarrow S$ により、ディスクリミナント D を V に引き戻した集合は丁度 W にある鏡映変換 s 達の鏡映面 H_s の合併 $\cup_s H_s$ になっている。すると面白いことに $Der_V(-\log(\cup_s H_s))$ も $\{I^*(dP_i, \cdot)\}_{i=1}^{\mu}$ を基底に持つ \mathcal{O}_V -自由加群になる (その様な超平面配置を自由配置とも呼ぶ)。この時 $\deg(I^*(dP_i, \cdot)) + 1 = \deg(P_i) - 1$ は exponent と呼ばれて、超平面配置 $\cup_s H_s$ の重要な不変量となる。寺尾宏明氏はこの様な自由配置の研究を課題として、自由性の判例法や特性多項式の決定など多くの成果を上げられた。詳細は同氏と Orlik の共著 [18] に譲り、ここでは立ち入らない。

単純特異点の universal unfolding 場合のディスクリミナントの補集合 $S \setminus D$ は (一般化された) 配置空間とも呼ばれ、いろいろな数学構造の分類パラメータに登場する重要な空間である。その基本群は 70 年代はじめに Brieskorn により Artin 群に成る事が計算された ([5], c.f. [28])。それにともなって、その配置空間の高次のホモトピー群は消滅するのではないかと、即ち $S \setminus D$ は $K(\pi, 1)$ 空間になるのではないかと問われた。実際、鏡映群 W が A_l, B_l, C_l, D_l 型のときは、空間を 1 次元のファアイバーのイテレイションに分解する事により、この事実は簡単に示せる。その一般的解決の為には $S \setminus D$ の普遍被覆空間 (= $V \setminus \cup\{\text{鏡映面}\}$ の普遍被覆空間) の有る開被覆系の nerv の精密な記述が必要で、その為には Artin 群の語の問題などの種々の組み合わせ論的問題を解く必要があった。Brieskorn と僕とはこの問題に一冬取り組んだが [6], 最終的にこの問題は Deligne によるずっと一般的な定理: 「simplicial arrangement の複素化の補集合は $K(\pi, 1)$ -空間となる」により解決された [8]。³

6. 一意化問題: ここで、問題を提起しよう。記号は今まで通り、既約有限鏡映群 W が既約かつ簡約に μ -次元実ベクトル空間に作用し、その複素化 V の商空間を $S := V/W$ 、又その中のディスクリミナント因子を D とする。

問題 1. $S \setminus D$ の普遍被覆空間は C^μ の有る領域として実現できるか?

問題をもう少し細かく見てみよう。基本群 $\pi_1(S \setminus D, *)$ は Artin 群 G_W により記述できるが、特にそのセンター $z(G_W)$ は基本元 Δ または Δ^2 で

³その頃、僕は「free arrangement (より一般に free divisor) の補集合は $K(\pi, 1)$ -空間となるであろうか」と問うたが残念ながら簡単な反例がある。にもかかわらず、free divisor の補集合でありかつ $K(\pi, 1)$ -空間となる興味深い事例が配置空間以外でも数多くある。元々ある因子が free に成る事は稀である一方、因子の補集合が $K(\pi, 1)$ 空間になることも稀であり、その稀になる事象が頻繁に同時に起きると言う事は注目に値する。両者の相互関係を構造的に記述する理論があると思われるがその解明は将来の課題である。他方、既に述べたように、超曲面孤立特異点の universal unfolding のディスクリミナントは free divisor であるがその補集合は楕円特異点の時さえ $K(\pi, 1)$ 空間にならないのではないかと「疑い」もある (Lazzeri)。それは上記の期待と一見矛盾する「疑い」であり、 S 上の constructible sheaves との関連で何か未解明の様に思われる。

生成される無限巡回群となる [6]。4 更にはその Δ^2 で生成される巡回群は $V \setminus \cup\{\text{鏡映面}\}$ の上への自然な C^\times 作用から定まる主 C^\times -bundle (実は自明束になってしまう) のファイバー方向 C^\times の基本群と同一視できる。勿論ファイバー方向 C^\times の普遍被覆空間は C であるから、問題 1. を精密化して

問題 2. $S \setminus D$ の普遍被覆空間は $CP^{\mu-1}$ の有る有界疑凸領域 B_W が有って $C \times B_W$ と実現できるか? その時、領域 B_W およびその双正則自己同型群 $Aut(B_W)$ を“具体的に決定せよ”。その群は $\mu \geq 3$ の時には $G_W/z(G_W)$ の高々有限位の拡大だろうか。

ここで“具体的に決定せよ”と言う意味は回答の仕方による曖昧なものである。構成から Artin 群 G_W は自然に $C \times B_W$ に作用しており特に商空間 $(C \times B_W)/\langle \Delta^2 \rangle$ は B_W 上の主 C^\times -bundle になっている。それに付随した B_W 上の線束を $L_W \rightarrow B_W$ とする。同語反復的に V 上の斉次 k 次多項式は $\Gamma(B_W, L_W^{-k})$ の元と見なせるので自然な埋め込み

$$C[P_1, \dots, P_\mu]_k \longrightarrow \Gamma(B_W, L_W^{-k})^{G_W/z(G_W)} \quad (5)$$

が定まる (ここで左辺は重み付き多項式環の斉次 k 次部分空間)。これが上への同型でないのは右辺に非多項式的関数を持つてくることにより明らかであろう。そこで、多少技術的な問題として

問題 3. (5) の右辺の元に適当な増大度条件を設けて等号が成立するようにせよ。その時、右辺の元を (左辺を用いずに) L_W の切断として記述を与えよ。

以上の問題 1-3 が解けて環同型: $C[P_1, \dots, P_\mu] \simeq \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}_{\neq 0}} \Gamma(B_W, L_W^{-k})^{G_W/z(G_W)}$ が定まったとする (但し右辺は増大度制限付き)。そのとき、左辺の P_1, \dots, P_μ に対する右辺の元を Φ_1, \dots, Φ_μ とすれば、それらを並べて

$$(\Phi_1, \dots, \Phi_\mu) : L \setminus \text{zero section} \longrightarrow S \setminus D \quad (6)$$

という被覆が作られる。このような被覆を構成するのは伝統的に一変数複素解析学に於いて一意化問題 (uniformization problem) とよばれており、問題 1-3 はその高次元化といえる。ここでは、抽象的に $S \setminus D$ の被覆空間 $L \setminus \text{zero section}$ の C^n の領域としての記述とそこから元の空間 S への逆写像 (保型形式) の記述とを求めた。数学としてのこの問題の由来は、周期写像とその像領域 (周期領域) の決定及びそれに対するモジュラー関数の構成を問う問題である (その場合には周期領域は不変被覆空間の Artin 群のような中心を含む部分群による商空間かが問題になるが)。以下に、古典的 Weierstrass 型の楕円積分論に即して想定される模範解答を与えることによりこの問題を説明してみる。

⁴ここで基本元 Δ とは G_W を W の Coxeter system により記述したときの単純生成系で生成される G_W の submonoid G_W^+ の中で単純生成系の最小公倍元のこと (それは対応 $G_W^+ \simeq W$ により W の最長元に対応する)[6]。残念ながらこの記号 Δ は W -反不変式の生成元を表す記号とかぶっているが、それぞれ使われる場所が異なるので、この記号の乱用を許すことにする。

出発点にあるのは楕円曲線族 $F = y^2 - (4x^3 - g_2x - g_3)$ である。それは既に見たように A_2 -型特異点の universal unfolding とも思え、パラメータ (g_2, g_3) がディスキリiminant $D = \{g_3^2 - g_2^3 = 0\}$ の外に有るときは無限遠に穴が一つ有る楕円曲線を定義して、一次独立な二つの (消滅) サイクルの基底 γ_1, γ_2 をもつ。⁵ この時、第一種微分 $\zeta := \text{Res}\left[\frac{dx dy}{F}\right] = \frac{dx}{2y}$ を積分することにより多価周期写像 $(g_2, g_3) \in S \setminus D \mapsto (\oint_{\gamma_1(\mathbf{g})} \zeta, \oint_{\gamma_2(\mathbf{g})} \zeta) \in \mathbb{C}^2$ が定まる。サイクル γ_1, γ_2 の交叉数の符号を適当に取ってやると、周期写像の値域 (即ち周期領域) は $\tilde{H} := \{(\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{C}^2 \mid \Im(\omega_1/\omega_2) > 0\}$ となり、逆写像 $\tilde{H} \rightarrow S \setminus D$ が Eisenstein 級数 $g_2 = 60 \sum_{m,n \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} 1/(m\omega_1 + n\omega_2)^4$, $g_4 = 140 \sum_{m,n \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} 1/(m\omega_1 + n\omega_2)^6$ により与えられる。

即ちこの場合は問題への答えとして有界領域 B_W は上半平面 \mathbb{H} で与えられ、その上に不連続群 $G_W / \langle \Delta^2 \rangle = \text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ が作用し、保型形式環の生成系として Eisenstein 級数 E_4 と E_6 とが取れることになる。このような周期写像とそれに対する保型形式の理論を A_2 -型に限らず任意の W に対して構築せよと言うのが上記の問題の趣旨である。現実にはこのような単純化されたモデルでは描けない現象があるのであろうが、その様な理論が出来れば70年代に夢見た Siegel や Artin に学んだことの高次元化に向けて一歩進めるかもしれない。

それでは、このような周期写像を定義するために何を積分すれば良いのだろうか。楕円積分における第一種微分に相当するものがあるのだろうか。それに対する一つの答えが、第9節で導入する原始型式である。

6. 平坦構造：前節の一化写像 (6) を記述するには有限鏡映群の商空間 $S = V/W$ の座標系が必要となる。それは不変式環の生成系 P_1, \dots, P_μ を用いる事により与えられるが、ここで、一つ問題がある。即ち：

問題 4. S に“自然な”あるいは“標準的な”座標系が入るか。即ち、平たく言って、不変式環 $S(V^*)^W = \mathbb{C}[P_1, \dots, P_\mu]$ に“自然”な生成系はあるか？例えば、対称群の不変式環である対称多項式環は基本対称式で生成されるが、それ等は“理論的に自然なもの”であろうか？

この問題 4. は“自然”の解釈により答えが異なり得る多義的な問いである。その答えの一つとして登場したのが平坦構造である。即ち「 S に自然に平坦なメトリックが入り、その為に S はアフィン空間と見なせ、従って up to graded linear transformation で自然な線形座標系が入る」と言うのが主張である。

ではどうして、その様な平坦構造に発見したのか経過をスケッチしてみる。それは、第5節 (4) で記述した対数場の記述に由来する。即ち、その記述をじっくりと見ていると、 S の二つの余接ベクトル $dP_i, dP_j \in T^*(S)$ 間の内積を

$$I^*(dP_i, dP_j) \quad i, j = 1, \dots, \mu \quad (7)$$

⁵ サイクル γ という言葉でその水平族 $\gamma(\mathbf{g})(\mathbf{g} \in S \setminus D)$ を指しているが誤解はないであろう。

定義しようと思うのは自然な成り行きであろう。⁶ しかるにそのインデックス i, j を動かして得られる $\mu \times \mu$ 行列 (それは対数ベクトル場 $I^*(dP_i, \cdot)$ を偏微分作用素 $\frac{\partial}{\partial P_j}$ ($j = 1, \dots, \mu$) で展開した係数行列とも思える) の行列式 $= \det(\frac{\partial P_i}{\partial X_k})_{ik} \cdot \det(\frac{\partial P_j}{\partial X_l})_{jl} \cdot \det(I^*(X_k, X_l))_{kl} = \Delta^2 \cdot \text{const}$ となる。つまり、この内積 (7) はディスクリミネント D で退化していることになる。それでは非退化の内積は定義できないのか? 具体的に (7) を計算してみると、それは P_l に関して高々1次式となり (但し、ここで基本不変式 P_1, \dots, P_l の内一番高い次数 (=Coxeter 数 =: h) のものを P_l とする、その係数を取ると、非退化になるようである。実際、高々1次式になることは $0 \leq \deg(I^*(dP_i, dP_j)) = \deg(P_i) + \deg(P_j) - 4 < 2h = 2 \deg(P_l)$ から直ちに分かる。それでは、その P_l の係数達の行列、それを J と呼ぶ、是非退化であろうか。Exponents の対称性より、 $\deg(P_i) + \deg(P_{\mu-l+1}) = h + 4$ である事が知られているので、 J は本質的には右下三角行列となるので、⁷ J の反対角成分達が非零で有れば良い。その答えの鍵になるのが次の事実である。:

補題 1. Δ^2 は P_l に関して次数が μ の monic polynomial に成る。

補題 2 (Coleman). Weyl 群の基本鏡映 s_1, \dots, s_μ の積である Coxeter 変換 c の位数を h とする。すると 1 の原始 h 乗根は c の固有値となり、それに属する固有ベクトルはいかなる鏡映面にも含まれない (固有ベクトルの regularity)。

補題 2. 補題 1. の証明概略: 1 の原始 h 乗根固有値 λ に対する c の固有ベクトルを ξ とする。 $i = 1, \dots, \mu - 1$ に対し、 $P_i(\xi) = P_i(c\xi) = P_i(\lambda\xi) = \lambda^{\deg(P_i)} P_i(\xi)$ であるが $\deg(P_i) < h$ なので $P_i(\xi) = 0$ 。他方 ξ は鏡映面に入らないので $\Delta^2(\xi) \neq 0$ 。他方 Δ^2 を P_1, \dots, P_μ の多項式として $\sum_{k=0}^{\mu} A_k P_\mu^k$ (但し A_k は $P_1, \dots, P_{\mu-1}$ に関して $k \cdot \mu$ 次の重み付き齊次多項式) と展開しておくとして $0 \neq \Delta^2(\xi) = A_0 P_\mu(\xi)^\mu$ なので、特に A_0 は非零の定数となる。了

補題 2. はカナダ人数学者 Coleman による [?] がここでは説明を略する。

J の非退化性にもどらう。 Δ^2 は定数倍を除いて (7) の行列式であるが、補題 1. が言えると、 Δ^2 の P_μ に関する最高次の係数 A_0 が $\det(J)$ と等しくなってしまうからである。別の言い方をすると

$$J(dP_i, dP_j) := \frac{\partial}{\partial P_\mu} I^*(dP_i, dP_j) \quad i, j = 1, \dots, \mu \quad (8)$$

を内積とすれば非退化内積になるというわけである。ここで、注意するのは基本不変式の中で P_μ の次数が最大と言う事は $\partial/\partial P_\mu$ は次数最小 (=

⁶式 (4) の基底や式 (7) の内積の具体的な意味は次の通りである。 V の線形座標系 $X = (X_1, \dots, X_\mu)$ を一つ固定すると P_i 達は X の多項式になる一方、内積値 $I^*(X_k, X_l) \in \mathbb{C}$, $1 \leq k, l \leq \mu$ が定まる。そこで $I^*(dP_i, dP_j) := \sum_{k,l} \frac{\partial P_i}{\partial X_k} \frac{\partial P_j}{\partial X_l} I^*(X_k, X_l)$ と置くと、右辺は W -不変多項式なので再度 P_1, \dots, P_l の多項式となる。

⁷この命題はもし $\deg(P_i)$ ($i = 1, \dots, \mu$) が全て互いに異なる時は正しいが、 D_{2l} -型の時には多少修正が必要。

– $\deg(P_\mu) = -h$) のベクトル場と言う事で定数倍をのぞいて基本不変式系 P_1, \dots, P_μ の取り方によらずユニークに決まる (これが第3節で述べた原始ベクトル場または unit 方向と成る) と言う事実である。即ち空間 S の余接空間 $T^*(S)$ の上に非退化な内積 J が intrinsic に定義されたのである。

この内積を A_3 型の例で具体計算していき奇妙な事に気付いた。

即ち、i) 基本不変式をうまく選ぶと、(8) J は定数係数の反対角行列となる、ii) その様な基本反不変式系は up to constant factor で唯一しかない。即ち、 J の係数が定数になる (ような座標系がある) と言う事は、 J に付随した Levi-Civita 接続が平坦に成る事を意味し、空間 S にはアフィン構造が入り、そのアフィン座標系で計算したのが 定数行列となった J と言うわけである。

これこそ、探していた空間 S の平坦座標系ではないのか！そう直感した。僕は、当時 ('75 年頃?) 佐藤スクール周辺の人々とコンタクトがあったが、どういう経過だったかその中でも一番若かった矢野環氏と関口次郎氏を駒場の第一研究室 (旧駒場寮の一部、現在は存在しない) に招いてこの事実を説明し「同様なことが任意の有限鏡映群で生じていると思う。それ等の平坦座標系を片っ端から計算しよう」と提案した。その提案はすぐには信じて貰えなかった様だが、しばらくして彼らより「 H_3 型の場合をパソコンで計算して正しいこと (平坦座標系が存在すること) が分かった」と、興奮しながらの連絡を貰った。それで、平坦座標系の計算に本格的に乗り出した。その仕事は鏡映群の不変式環を具体的に書き下すことから始まるかなりの膨大な計算 (それは矢野-関口氏等の計算力に完全に頼った) でその完成まで数年かかり 1979 に論文が出来た [35]。これが今日、平坦構造 (その命名は成木勇夫氏による、後にはフロベニウス多様体構造) と呼ばれる構造に関する最初の論文で、その具体式まで完全に記述した唯一のものとして、未だに基本文献となっている。

ここで、同時に進行した平坦構造の理論的考察にも触れておく。上記の平坦座標系の存在とその一意性の証明は計量 J が非退化かつ平坦であること、即ち J に対応する Levi-Civita connection が integrable であることを言えば良いが、それは元々の Killing form I が平坦であること (即ち、 V 上では定数係数の内積であること) に還元できる。その還元の為には技術的に対数加群 第4節 (3) に $(\frac{\partial}{\partial P_i})^{-1}$ の作用により定まる半無限の (Hodge)-filtration を入れる議論が必要で、後に原始型式を導入する際必要だった filter 付き De Rham cohomology の理論それは半無限 Hodge 構造、非可換 Hodge 構造、または Saito 構造と呼ばれる) の原型になるのだが、技術的な話なのでここでは割愛する [26].

Remark. 上記の証明概略で分かるように Coxeter 変換の 1 の原始 h 乗根固有値に属する固有ベクトル ξ は商空間 $S = V/W$ の中に射影すると原始方向 (つまり $P_1(\xi) = \dots = P_{\mu-1}(\xi) = 0$ かつ $P_\mu(\xi) \neq 0$) と成り、更にそれはディスクリミネント D に transversal となる。この事は単に上記の平坦構造の構成に必要であったのみならず、後に何度も使う非常に基本的な事実である。

Remark. 平坦構造及び平坦座標系は問題 6. で述べた様に、元々は保型形式環に座標系を与える事が目的であった。他方それを使って $\partial_i = \frac{\partial}{\partial P_i}$ ($i = 1, \dots, \mu$) とおくと、 S の上に平坦ポテンシャル関数 \mathcal{F} が関係式

$$\partial_i \partial_j \partial_k \mathcal{F} = J^*(\partial_i * \partial_j, \partial_k)$$

によって (P_i 達の二次多項式の不定性を除いて) 定義出来る。その関数を矢野環樹氏と計算したのであるがその当時は重要性を認識しておらずそのまま放置してしまっただが、現在の数理物理学からの視点から見ると、その関数は分配関数と呼ばれ、Landau-Ginzburg model の間の鏡像対称性を記述する鍵となる関数となる ([20],[10])。

問題 6. 全節の一意化問題の解として同形射 (5) が与えられた時、左辺の多項式環に入る平坦構造を右辺の線束 $L_W \rightarrow B_W$ の幾何の言葉のみで記述せよ。特に、平坦座標に対する保型形式の特徴付けはあるか？

7. **Torsion free connection:** ここで 3. で議論した、消滅サイクルに対する Gauss-Manin 接続に戻る。当時僕は ある課題 (後に原始性と呼ばれる) を抱えていた。既に第 5 節で見たように、古典的 Weierstrass 型の楕円積分論の周期写像では、第一種微分 ζ 唯一個を積分するので定義域 S の次元 μ と値域 \tilde{H} の次元 μ とが一致する。更にその周期写像は maximal rank である事が示せ局所同相写像となるので、逆写像を考える事は意味が有り (Jacobi の逆問題)、結果として大域的な逆写像を与える Eisenstein series が登場することになる。

問題 6. それでは消滅サイクルに対する De Rham コホモロジー群 \mathcal{H}_F の中で ζ に相当する特別な微分形式を取り出す方法はあるだろうか。楕円積分のときは楕円曲線をコンパクトな多様体と思ったときに大域的に正則微分形式は一次元しか無い (即ち楕円曲線はカラビ-ヤウ多様体となる) が、いま考えている消滅サイクルに対する Gauss-Manin connection では $F(x, t)$ で定まる超局面はコンパクトでない。其の様な開多様体 (の族) に対し特定の微分形式 (cohomology class) を選別する方法は有るのだろうか。

この問いに対する一つの答えは後に原始形式で与えられるのだが、そこに至るには、2 ステップがある。まず試しに、何も考えずに、すべてのコホモロジー類を平等に扱うためにコホモロジー群 \mathcal{H}_F の \mathcal{O}_S -free basis $\zeta_1, \dots, \zeta_\mu$ 及び消滅サイクル加群の \mathbb{Z} -基底 $\gamma_1, \dots, \gamma_\mu$ を選べば、“周期写像”は $S \setminus D \mapsto (\oint_{\gamma_i(t)} \zeta_j)_{ij} \in \mathbb{C}^{\mu^2}$ と定義できるであろう (もっと intrinsic な言い方も可能だが略)。すると勿論この値域の次元 μ^2 は定義域の次元 μ より (A_1 の場合を除いて) 大きくなり、 μ^2 次元の値域の中で μ 次元の像と成る部分多様体を決定せよという問題が生じる (Schottky problem の類似)。

しかし直ちにこのアプローチは単純すぎる事がわかる。まず、 \mathcal{H}_F を単に \mathcal{O}_S -加群と見なしているときはその元間の差別化は出来なかったが、 \mathcal{D}_S -加

群と見なすと別の視点(従属関係)が見えてくる(これが第一ステップ)。次には \mathcal{H}_F にはある種の内積構造(後に高次剰余構造として定式化する)が入り、それによって元の間に強い相互関係が生じる(これが第二ステップ)。

まず第一ステップから見ていく。第6節の平坦構造の話にもどる。そこでは、平坦構造とは(8)で与えられた内積 J に対する Levi-Civita connection ∇ が可積分であることを示す必要があった。そしてその事は、(7)で与えられた内積 I^* に対する Levi-Civita connection ∇ が可積分であることに帰着した。ところでこの I は Killing form として知られているが、それは定数倍を除いて対応するリー環の root lattice 内積となる。一方 Brieskorn は 4. で述べたように単純特異点の universal unfolding を対応するリー環の言葉で記述していたが、特にリー環の root lattice と単純特異点の消滅サイクルのなす加群は同一視され、更にそれ等の加群上定義された Killing form と消滅サイクルの交叉型式とは同一視される。従って、内積(7)に対する Levi-Civita connection ∇ と Gauss-Manin connection ∇ とは同一視される！つまり、De Rham 加群 \mathcal{H}_F と対数的接バンドル $Der_S(\log(\Delta^2))$ とが同一視され、従って特に、Gauss-Manin connection の共変微分 ∇ は対数的アフィン接続、即ち対数的接バンドルの上に定義された接続であってそのトーションテンソル $\text{Tor}(\nabla)$ は消えている。即ち、 S 上の二つのベクトル場 $v_1, v_2 \in Der_S(\log(\Delta^2))$ に対し

$$\text{Tor}(\nabla)(v_1, v_2) := \nabla_{v_1} v_2 - \nabla_{v_2} v_1 = 0 \quad (9)$$

と成る。特にこれは v_i 等をドラムコホモロジー類と思って消滅サイクルの水平族 $\gamma(t)$ ($t \in (S \setminus D)^\sim = S \setminus D$ の普遍被覆空間) 上積分した周期の間の関係 $v_1 \oint_{\gamma(t)} v_2 = v_2 \oint_{\gamma(t)} v_1$ を意味している。これは所謂可積分条件で、その結果ある原始関数 $\omega_\gamma(t)$ が存在し、

$$v\omega_\gamma(t) = \oint_{\gamma(t)} v \quad (\forall v \in Der_S(\log(\Delta^2)))$$

となる。この $\omega_\gamma(t)$ の原始性こそ後に原始型式を導入する原動力となった。正確にはこのように積分した関数のレベルではなく相対ドラムコホモロジー群のレベルで原始性を要求することになる(第9節の原始型式の定義参照)。

消滅サイクルの基底 $\gamma_1, \dots, \gamma_\mu$ に対する原始関数を並べて周期写像を

$$t \in (S \setminus D)^\sim \mapsto (\omega_{\gamma_i}(t))_{i=1}^\mu \in \mathbf{C}^\mu \quad (10)$$

と定義すれば定義域と値域の次元が等しい局所同相な写像が得られる。まだスペクトル次元(=connection matrix の対角成分 $d\Delta^2/\Delta^2$ の係数)をどう取るかという課題は残っているが、一先ず楕円積分による周期写像の一般化が行われたとみなす(スペクトル次元が偶数=2 のとき周期写像はディスクリミネント D の generic points まで接続され、そこでは逆写像は有限分岐被覆と成っている。即ちディスクリミネント D の像は周期領域の中で鏡映面の配

置集合となる。奇数=1 の時には、周期領域の境界にパラボリック固定点が現れる)。ここで一旦、元来の消滅サイクルに対する対数的周期写像の視点を離れて話を可積分の接続に関する問題に一般化すると次の問題提起が出来る。

問題 7. 与えられた一般の (ディスクリミナントとは限らない) 対数的に自由な因子 D に対し、対数的アフィン可積分接続

$$\nabla : Der_S(-\log(D)) \times Der_S(-\log(D)) \rightarrow Der_S(-\log(D))$$

を考えよ。それ等はどの位あるのか。次にその良いスペクトル次元の時の“周期写像 (10)”およびその逆写像を考察 (記述) せよ (Jacobi の逆問題)。

この課題について僕自身も幾つかの簡単な事例を調べたが、関口次郎氏はこの課題について広範に研究されて、多くの興味ある事例を発見されている (文献参照)。他にも A.Alexandrov 氏、等の研究もある。

8. Picard の二変数保型形式。ここで少し遡って 1970-73 に Goettingen 大学で過ごした時の事を書く。Bunsen 通り (化学の Bunsen 核で著名) にある数学研究所には大きな図書室があった。一寸冷りした書庫には手書きの F. Klein の講義録などいろいろなものを持っていたが、Hilbert による discriminant の研究もこの書庫で発見し Brieskorn とその内容を話した記憶もある。Jacobi や Riemann 以来の (ドイツ数学の) 伝統であった種々の (閉じていない) サイクル上のアーベル積分の周期による写像の逆写像をテータ関数関数の比で表示すると言う、所謂 Jacobi の逆問題を僕が自覚したのもおそらくこの書庫で有ったと思う。当時まだ存命で Goettingen の研究所に在籍していた C.L.Siegel も毎朝書庫にきて勉強していたようである。しかし当時の僕はこの様な 19c 後半から 20c 前半にわたる膨大な経験の蓄積で宝の山である書庫の価値を理解してなく (現在の視点では、僕は原始型式の周期に関して未解決の逆問題に対する解答のヒントは開周期に対する逆表示を与えたこの時代の仕事の中にあるのではないかとみている) 漫然といろいろな文献に当たっただけであった。その中でも、後に大きな影響を与えた印象的な論文が 1883 年 Act Math. に書かれた Emile Picard の論文である [19]。Bourbaki 数学で教育された僕には、その解読は困難で、Siegel 先生にその解読をお願いした。一週間後に「Picard の論文は全て読んだつもりだが、この論文は知らなかった。」といいながらその論文の概説をして頂いた当時の経過を別の文献 [31] に書いた (Picard の仕事やそれに続く志村の仕事は今から見ればまさに原始型式の周期の理論になっている)。その内容は本校の趣旨と合致するので、以下二ページにわたり引用する。先を急ぐ読者はこの項目を飛ばしてかまわない。

===== [31] §1 E4. より引用開始 =====

E4. Picard[P], Shimura[Shim2], Shiga[Shig1,2] の例.

1883 Emile Picard は次の曲線族上のアーベル積分を考察しました。

$$y^3 = x(x-1)(x-\mu)(x-\nu).$$

この例は、多変数保型形式考察した最も初期の例として知られていますが、Picard のこの仕事をアウトラインしてみます。

この曲線は3点コンパクト化により種数3に成り、その上のアーベル微分の基底として dx/y^2 , xdx/y^2 , dx/y がとれます。そこで、Picard は通常通り定義域 $\{(\mu, \nu) \in \mathbb{C}^2 \mid \mu \neq \nu, \mu, \nu \neq 0, 1\}$ から種数3の Siegel 上半空間に写像します。他方、定義方程式は変換 $(x, y) \mapsto (x, \lambda y)$ (ただし λ は1の三乗根) で不変です。そこで、周期はそれにより誘導された上半空間への作用 (complex multiplication) の固定点に入ります。その関係式を考え周期達の中で "独立なもの" を探します。すると、なんと定義域の次元2と等しいだけの二個の周期の比)

$$u := \int_{b_3} dx/y^2 / \int_{b_1} dx/y^2, \quad v := \int_{b_2} dx/y^2 / \int_{b_1} dx/y^2$$

が独立のものとして生き残ります。周期全体をこの (u, v) で記述すると、Riemann の不等式は $2\text{Re}(v) + |U|^2 \leq 0$ となり、それは簡単な変換 $(,)$ により複素二次元の超球にうつります。ここで、Picard はこの周期写像の周期領域は超球であるとして、その超球からもとの moduli parameter μ と λ は Siegel 上半空間上で定義された、テータ函数の比で表示出来る事を主張します。すなわち、これにより、彼は二次元超球上の不連続群作用とその上の二変数の純超越的な保型関数体を構成した事に成ります。

Picard から80年を経て、志村 [Shim2] は同様に complex multiplication により、周期をリダクションして、周期領域が (独立な) moduli 変数の個数と一致した次元の超球になる様な一連の例を与えています。

一方その後、Picard による周期写像とその逆写像は志賀弘典氏により K3 曲面の二次元の族の上での周期積分による写像と読み直され、その逆写像の保型形式も分母分子ともに零に成らない様なテータ函数の比で表示を与えられました。⁸ このほかにも、K3 曲面の族に対する周期写像とその逆

⁸僕は1970年4月-1973年9月 ドイツの Göttingen 大学に留学しました。その間、何度となく Siegel 先生と親しく接する機会をえました。E.Picard による二変数の保型形式の研究 [P] (及び [Shim1,2]) はその時に解説して頂き、その論文の欠陥「Jacobi の逆問題を解く際に、Picard は Siegel 上半空間全体をパラメーターにする θ -関数の比を用いた為に分母分子が同時に周期領域で零になってしまう危険が有る」を指摘されたのもその頃です。それに続けて「しかし Picard は賢い犬 (schrauer Hund) だから何処か別の所で、その様な事が起きない事を検算しているであろう。しかし、周期領域で零に成らない関数の比で逆問題を解くのが望ましい」と言われ、また多変数 Eisenstein 級数の研究を示唆されました。その後、日本に帰国して多変数の保型形式への関心が広がりだした時期と重なり、色々な機会にこの話を伝えてきましたが、志賀弘典氏はまさにその方向でお仕事をされて完成されたのを見るにつけ、改めて Siegel 先生の偉さを感じます。この機会に、Siegel 先生への心よりの感謝と尊敬の念を述べたいと思います。

僕自身この時 Siegel 先生に接した経験が一つの大きな動機と成って原始形式の理論の建設に取り組む事に成ります。実際この Picard による周期写像と古典的楕円積分を見比べながら、それ等の持っている原始性や同次元性の意味を何年も考え続けました。脚注5で述べた様な、半無限ホッジ構造に到達するには、寧ろ R.Thom [T] のアイデアに負う所が大きいです。というのは当時の代数幾何には多様体の族という考えは主流としてありましたが、函数の族という考えは寧ろ R.Thom から学んだのです。すると多様体の族と函数の族という考えの間に函数値方向という特別な方向が生じます (脚注5の δ_w)。それを、原始方向と呼んだのですが、その変数が、今日も多くの可積分系の理論で鍵と成っています。

問題については志賀氏の研究に引き続いて幾つかの具体例が知られています ([C-D],[Ko1,2],[Ko-Shig],[Mat],[Mat-Sas-Y],[Mat-Te],[Na],[S-Y]).

問題. E.Picard の曲線族は斉次座標を用いて三次元の族

$$y^3 = x^4 + a_2x^2 + a_3x + a_4$$

とも書けますが、これは E3. 2. で見た E_6 型の曲線族の内、上で述べた $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ の作用で不変な部分族に他成りません。そう見ると Picard が三個ある正則アーベル微分のうち用いた、ただ一つの微分 $\frac{dx}{y^2}$ はまさに E_6 型の原始形式に成っています。よって、Picard-Shiga 流の非斉次周期写像: $(\mu, \nu) \rightarrow (u, v)$ とその逆写像を考える代わりに、斉次周期写像:

$$(a_2, a_3, a_4) \rightarrow \left(\int_{b_1} \frac{dx}{y^2}, \int_{b_2} \frac{dx}{y^2}, \int_{b_3} \frac{dx}{y^2} \right)$$

とその逆写像を考える事が出来ます。その周期領域は複素二次元の超球上の \mathbf{C}^\times -主束と成ります。周期領域上の保型形式環はおそらく、何らかの一般化された Eisenstein 級数により生成されるものと期待します。一方この周期写像の定義空間は平坦構造を持っており、特にその平坦座標系 $(a_2, a_3, a_4 - ca_2^2)$ (c は或定数) は内在的意味を持っていますが、それ等は周期領域上どのような表示を持っているのでしょうか。周期領域上の保型形式環に内在的に平坦構造をいれることはできるのでしょうか。残念ながら知られていません。その決定も今後の宿題です。

===== [31] §1 E4. より引用終了 =====

9. 原始型式と高次剰余理論. ここで問題 6 . に対する原始型式による解答に戻ろう。我々は第一ステップの途中であったが、それはまだ完了していない。本節では、その解答を概説する (記号の煩雑さを避けるためにしばしば、 S 上の層とその原始方向 ($\partial/\partial t_1$ 方向) の global sections の加群とを混同する。)

上記 (10) の周期写像に関する議論では、単純特異点の場合に可積分条件 (9) は積分関数達 $\oint_\gamma(t)v$ に対する原始関数の存在を示すのに用いたが、その議論を完成させるためには、任意の孤立特異点の消滅サイクルに対して 関数のレベルではなく De Rham コホモロジー群 \mathcal{H}_F のレベルで \mathcal{O}_S -加群の同型:

$$Der_S \simeq \mathcal{H}_F, \quad v \mapsto \nabla_v(\nabla_{\partial/\partial t_1})^{-1}\zeta, \quad (11)$$

を与えるような “ 原始性 ” をもつ ζ の存在 (つまり、 \mathcal{H}_F は \mathcal{D}_S -加群として “ 一階単独生成 ” と成ること) を言うべきである。但し、ここで $\partial/\partial t_1$ はパラメータ空間 S の原始方向であり、単純特異点の時には $\partial/\partial P_1$ であったことを思いだそう。実際この同型を遂行するには、すでに第 6 節の最後に述べたように減少フィルトレーション:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_F &= \mathcal{H}_F^{(0)} \supset \mathcal{H}_F^{(-1)} \supset \mathcal{H}_F^{(-2)} \supset \dots \\ \mathcal{H}_F^{(-k)} &:= (\nabla_{\partial/\partial t_1})^{-k} \mathcal{H}_F \quad (k \in \mathbf{Z}_{\geq 0}) \end{aligned} \quad (12)$$

の議論が必要となり、本稿の枠を越えてしまう。興味ある読者は僕の原論文または僕と高橋篤史氏との共著の解説論文を見ることを勧める。

それでは (11) の同型を与える ζ はどの位あるだろうか。実は殆ど全ての volume form (即ち top degree の微分形式で係数が零値を取らないもののコホモロジー類) は (すくなくとも S の原点の近傍では) (11) の同型を与える。即ち原始性の条件 (11) だけではある特定のクラスを選別することは出来ない。にもかかわらず原始性を持つ ζ が果たす重要な役割を以下に指摘しておこう (多少技術的で面倒な話なので急ぐ読者はこの項を飛ばしてもかまわない)。

まず少し戻って、消滅サイクルに対する Hodge 構造について述べる。当時 (70 年代半ば) 既に Deligne による Hodge 理論が現れていたとは言え、代数幾何では Griffiths 流の Hodge 理論がメジャーであった。そこでは Hodge filtration は De Rham cohomology 群を有理関数係数まで拡張してやると、その極の位数で Hodge filtration を入れると言う考え方である。我々の消滅サイクルに対する De Rham cohomology group である \mathcal{O}_S -free module \mathcal{H}_F についてその方針を採ると、まずは S 上ディスクリミネント D に極を持つような有理型関数環をテンソルして $\mathcal{H}_F(*D)$ を考え、次にその中で極 (または零点の) 位数を不等式で指定した部分加群 $\mathcal{H}_F(kD)$ ($k \in \mathbb{Z}$) の増大列を考えよと言うものである。僕も当初その様に考えていて、1976 年 Varchenko 氏に Bonn で初めて会ったときはそのアイデアを同氏に解説した記憶がある。しかしその後すぐにその考えでは、消滅サイクルのように非コンパクト多様体の Hodge 理論を考えるとときには整数の exponent が有るときには破綻することに気が付いた。つまり、フィルトレーションが退化してしまう。それに代わって採択すべきなのが (12) で採用したような “pseudo-differential operator” を用いて filtration を定義することが適切である事はすぐに分かった。⁹ この考えはすぐには Brieskorn ら特異点研究者には支持されなかったが、Malgrange や柏原氏と話して彼らも僕の考えが良いと同意してくれた。数年して Varchenko に何らかの研究会で会ったときに彼が未だ極の位数を使って Hodge filtration を定義しており「それではうまくいかない」とぼやくのを聞いた。それは上に述べたように整数値 exponent が有るときにその定義では退化してしまうのが問題だったのである。

さて、原始性を持つクラス ζ の役割についての議論に戻ろう。古典的な射影多様体やコンパクトケーラー多様体の時に有限次元のコホモロジー群に Hodge filtration はイントリンシックに定まっている (Griffiths, Deligne) がコホモロジー群をその graded piece の直和と同一視する (つまり filtration を split する) には多様体に (ケーラー) 計量の一つを選んで、コホモロジー群を それに関する harmonic form の張るベクトル空間 達によって直和分解する方法があったことを思いだそう。それでは、(12) を Hodge filtration と見

⁹この様な考え方は今では Kashiwara, Malgrange 等により広く知られているが 70 年代では新しかったのではないか。1 変数 t で考えるとわかりやすい。交換関係 $-t \cdot \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \cdot t = 1$ を用いると両者はほぼ逆作用だが、exponent ($\frac{\partial}{\partial t} \cdot t$ の固有値) が整数の時作用に違いが生じる。

なしたときに、その graded pieces の直和 (の何らかの完備化) と元の加群 \mathcal{H}_F との同一視 (つまり filtration(12) の splitting) はどうしたら得られるであろうか。不思議なことに原始性を持つ ζ の選択がその役割を果たすのである。その事を説明する為には S 上の正則ベクトル場のなす加群 Der_S の次の直和分解を用いる。

$$Der_S = Der_S(-\log(D)) \oplus \mathcal{G}. \quad (13)$$

但し ここで $\mathcal{G} := \{v \in Der_S \mid [\frac{\partial}{\partial t_1}, v] = 0\}$. すると、 ζ が原始性を持つとき $\zeta^{(-k)} := (\frac{\partial}{\partial t_1})^{-k} \zeta$ とおくと、 \mathcal{O}_S -isomorphism: $Der_S \simeq \mathcal{H}^{(-k)}$, $v \mapsto \nabla_v \zeta^{(-k-1)}$ は次の短完全列の間の同型を引き起こす。

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & Der_S(-\log(D)) & \rightarrow & Der_S & \rightarrow & \mathcal{G} & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & \mathcal{H}_F^{(-k-1)} & \rightarrow & \mathcal{H}_F^{(-k)} & \rightarrow & \mathcal{H}_F^{(-k)}/\mathcal{H}_F^{(-k-1)} & \rightarrow & 0 \end{array} \quad (14)$$

ここで、(13) と (14) を組み合わせれば \mathcal{H}_F は完備無限直和

$$\hat{\bigoplus}_{k=0}^{\infty} \mathcal{G} \cdot \zeta^{(-k-1)} \quad (15)$$

に埋め込める (ここで \mathcal{G} の作用の共変微分 ∇ は略記した)。

1979 年 4 月僕は数理解析研究所に移り、やがては原始型式と呼ぶべきよいを選別する課題に取り組んでいた。その時考えていたのは、古典 Hodge 理論においてコンパクト、ケーラー多様体のコホモロジー群を調和型式により直交分解を行うのと同様に、(15) で与えられた直和分解を何らかの意味で \mathcal{H}_F の内積に関する直交分解として理解したいと言う事だった。勿論 \mathcal{H}_F は有限次元ではなく、無限個のフィルトレーションを持つという難物であった。その為に既に知られている事としては、(8) で与えられる内積 J は \mathcal{H}_F 側では次のような古典的な residue 理論でかけるという事実があった。即ち $\zeta_1 = [\phi(\mathbf{x}, \mathbf{t})d\mathbf{x}]$, $\zeta_2 = [\psi(\mathbf{x}, \mathbf{t})d\mathbf{x}] \in \mathcal{H}_F$ とすると、その内積 J は古典的剰余理論

$$K^{(0)}(\zeta_1, \zeta_2) := \text{Res} \left[\frac{\phi(\mathbf{x}, \mathbf{t})\psi(\mathbf{x}, \mathbf{t})d\mathbf{x}}{\frac{\partial F}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial F}{\partial x_n}} \right] \in \mathcal{O}_{S'}$$

を用いて定義できる (但し $\mathcal{O}_{S'} = \ker(\partial/\partial t_1 : \mathcal{O}_S \rightarrow \mathcal{O}_S)$)。しかし、この内積は実質は $\mathcal{H}_F^{(0)}/\mathcal{H}_F^{(-1)}$ つまり直和分解の第一項の非退化内積の引き戻しと成っており、 $\mathcal{H}_F^{(-1)}$ の元を検出する事は出来ない。その夏東京に置いてきた学生達 (野海氏ほか) が数研を尋ねてきた際、どのような経過であったか次のような反対称内積があるという話をした :

$$K^{(-1)}(\zeta_1, \zeta_2) := \sum_{i=1}^n \text{Res} \left[\frac{\frac{\partial \phi(\mathbf{x}, \mathbf{t})}{\partial x_i} \psi(\mathbf{x}, \mathbf{t}) - \phi(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \frac{\partial \psi(\mathbf{x}, \mathbf{t})}{\partial x_i} d\mathbf{x}}{\frac{\partial F}{\partial x_1} \cdots (\frac{\partial F}{\partial x_i})^2 \cdots \frac{\partial F}{\partial x_n}} \right] \in \mathcal{O}_{S'}.$$

この内積は $\mathcal{H}_F^{(0)}$ と $\mathcal{H}_F^{(-1)}$ との“初項”の関係を検出できるがその先は出来ない。程なくして僕は $K^{(-2)}$ と呼ぶ対称内積を発見した。もはやこの様な内積の無限系列がある事は疑う余地なかったが、具体公式は既に煩雑でそのまま一般化するわけにはいかなかった。その年の9月から僕は廣中平祐氏の招聘で Harvard 大学で過ごした。そこで僕は F の critical point set にサポートを持つ相対コホモロジー群を用いることにより内積の無限系列

$$K^{(-k)} : \mathcal{H}_F \times \mathcal{H}_F \rightarrow \mathcal{O}_{S'}, \quad k \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$$

であって「(i) $K^{(-k)}$ は k の偶奇に応じて symmetric または skew-symmetric, (ii) $K^{(k+1)}(\zeta_1, \zeta_2) = K^{(k)}(\nabla_{\partial/\partial t_1} \zeta_1, \zeta_2)$, (iii) $vK^{(k)}(\zeta_1, \zeta_2) = K^{(k)}(\nabla_v \zeta_1, \zeta_2) + K^{(k)}(\zeta_1, \nabla_v \zeta_2)$, (iv) $K^{(k)}(t_1 \zeta_1, \zeta_2) - K^{(k)}(\zeta_1, t_1 \zeta_2) = (n+k)K^{(k-1)}(\zeta_1, \zeta_2)$, (v) $K^{(0)}$ は古典剰余理論で与えられたものと一致する。」を満たすものが作れた。この無限系列の内積を higher residue pairings とよぶ。

この構成ではそれまで単純に \mathcal{H}_F を $F=0$ から定まる超平面の族に対する相対 DeRham cohomology group と見なしていた（もともとの Brieskorn による視点）のではなくて、de Rham 微分作用素 d と F の微分 dF の外積作用の一次結合 $\delta_1^{-1} d - dF \wedge$ に関するコホモロジー理論の方が適切である事に気付いた（但し δ_1 関数 F の定数パラメーター t_1 の Fourier dual 変数を表している（ $\partial/\partial t_1$ のシンボル）。今日ではその様な一次結合を考えることは普通に行われているが、僕の記憶では当時その様なことを書いた文献は見当たらず、僕はその様な一次結合を考えたと最初（の一人）であると思う。¹⁰

さて、頁数も予定を超してしまったので、最後に原始型式の定義を天下りのに与えて本稿を終えることにする。

定義. \mathcal{H}_F の元 ζ が原始型式であるとは以下の五条件を満たすことである。

- (i) 原始性: ζ は (11) の意味での原始性をもつ。
- (ii) 直交性: $k > 0$ に対して $K^{(k)}(\nabla_v \zeta^{(-1)}, \nabla_{v'} \nabla^{(-1)}) = 0$.
- (iii) 斉次性: 定数 $r \in \mathbf{C}$ があって $\nabla_E \zeta^{(0)} = (r-1)\zeta^{(0)}$.
- (iv) 微分条件: $k \geq 2$ に対して $K^{(k)}(\nabla_v \nabla_{v'} \zeta^{(-2)}, \nabla_{v''} \nabla^{(-1)}) = 0$.
- (v) 関数条件: $k \geq 2$ に対して $K^{(k)}(t_1 \nabla_v \zeta^{(-1)}, \nabla_{v'} \nabla^{(-1)}) = 0$.

ここで、条件 (ii), (iv) と (v) はそれぞれ、内積に関する条件、関数環上の加群としての条件そして微分をコントロールする条件という意味で、D-加群的発想（佐藤-柏原理論）からすれば自然なものであろう。それに比して、条件 (i) における原始性（それは既に第7節で見たように Torsion free connection の研究に源流を持つ）および (iii) における Euler operator（第3節で導入）による斉次性の概念こそがこの定義の非常に特徴的な所であろう。

¹⁰後知恵であるが、このオペレーター $\delta_1^{-1} d - dF \wedge$ は oscillatory integral 型の微分形式 $e^{\delta_1 \cdot F(x,t)} \omega$ （ここで ω は変数 x, t に関する関数を係数にもつ 変数 $x = (x_1, \dots, x_n)$ に関する微分形式）に対する複体における微分と見なすのが自然である。そう見ると、原始型式がその後物理と深く関わる様になったことが了解できる。しかし高次剰余理論と oscillatory integral の直接的な関係は余り論じられていない様にみえる。今後の課題なのであろう。

この定義の条件 (ii), (iv) と (v) の帰結として $\nabla_v \nabla_{v'} \zeta^{(-2)}$ および $t_1 \nabla_v \zeta^{(-1)}$ を (13) の意味で展開するとそれぞれ以下のように第二項で切れてしまう。

$$\begin{aligned}\nabla_v \nabla_{v'} \zeta^{(-2)} &= \nabla_{v*v'} \zeta^{(-1)} + \nabla_{\nabla/v'} \zeta^{(-2)} \\ t_1 \nabla_v \zeta^{(-1)} &= \nabla_{E*v} \zeta^{(-1)} - \nabla_{Nv} \zeta^{(-2)}\end{aligned}$$

ただしここで

一つ一つの条件について、その意味を解説したいが、それは別の機会に譲る。

このような原始型式を与えると、空間 S の上に平坦構造を定義できることは、ほぼ自明な帰結となる。

終わりに、当稿では Siegel や Artin 等の数学に導かれて、平坦構造、対数的アフィン可積分接続、そして原始型式に導かれた経緯をスケッチしてみた。

しかし、短時間に熟考する間もなく一気に書き下したもので、今読み返してみても、説明不足であったり、逆にずらずらとメリハリがなく書いたり、最後は駆け足になってしまった。変数 t_1 の取り扱いも、原論文の古いスタイルと斎藤-高橋による新スタイルとが混線している可能性がある。今回は書き直す時間はないが、機会あればもう少し読めるきちんとしたものに書き直したい。

本稿では一切立ち入ることが出来なかったが続いて'80年代、'90年代に研究した、一般化されたルート系やリー環 (楕円リー環、カスピダルリー環、e-ハイパボリックリー環など) や一般化した weight 系からのアプローチや、高エネルギー物理 (String Theory, Landau-Ginzburg model や Super conformal field theory, Mirror Symmetry 等) との関連についても、更には非可換モノイド上構成された分配函数の理論についても、機会あれば書いてみたい。

謝辞。本稿を書く機会を頂いた三松佳彦氏及び関口次郎氏に、そして、つたない稿にお付き合い願った読者諸氏に心からの感謝を申し上げます。

参考文献

- [1] Bridgeland, Tom: *Stability conditions on triangulated categories*, Ann. of Math. (2) **166** (2007), no. 2, 317-345.
- [2] Bridgeland, Tom and Smith, Ivan: *Quadratic differentials as stability conditions*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **121** (2015), 155-278.
- [3] Egbert Brieskorn: *Die Monodromie der isolierten Singularitäten von Hyperflächen*, Manuscripta Math. **2** (1970), 103-161.
- [4] Egbert Brieskorn: *Singular elements of semi-simple algebraic groups*, Actes du Congrès International des Mathématiciens (Nice, 1970), Tome 2, pp. 279-284. Gauthier-Villars, Paris, 1971.

- [5] Egbert Brieskorn: *Die Fundamentalgruppe des Raumes der regulären Orbits einer endlichen komplexen Spiegelungsgruppe*, (German) Invent. Math. **12** (1971), 57-61.
- [6] Egbert Brieskorn and Kyoji Saito : *Artin-Gruppen und Coxeter-Gruppen*, (German) Invent. Math. **17** (1972), 245-271.
- [7] Pierre Deligne: *Theorie de Hodge*
- [8] Pierre Deligne: Immeuble de tresse generalize, Invent. Math. **17** (1972), .
- [9] Phillip Griffiths and Joseph Harris: *Principles of algebraic geometry*, Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York, 1978. Pure and Applied Mathematics.
- [10] Weiqiang He, Si Li, Yefeng Shen, Rachel Webb: *Landau-Ginzburg Mirror Symmetry Conjecture*, arXiv:1503.01757
- [11] Akishi Ikeda: *Stability conditions on CY_N categories associated to A_n -quivers and period maps*, Math. Ann., **367**(1) (2017):1-49.
- [12] Mitsuo Kato and Jiro Sekiguchi: *Uniformization systems of equations with singularities along the discriminant sets of complex reflection groups of rank three*, Kyushu J. Math. **68** (2014), 181-221.
- [13] Mitsuo Kato, Toshiyuki Mano and Jiro Sekiguchi: *Flat structures without potentials*. Revue Roumaine Math. Pures Appl. **60** (2015), 4, 481-505.
- [14] Mitsuo Kato, Toshiyuki Mano and Jiro Sekiguchi: *Flat structure on the space of isomonodromic deformations*. Preprint arXiv:1511.01608
- [15] Mitsuo Kato, Toshiyuki Mano and Jiro Sekiguchi: *Flat structures and algebraic solutions to Painlevé VI equation*. To appear in “Analytic, Algebraic and Geometric Aspects of Differential Equations”, in Trends in Mathematics Seires, Springer.
- [16] Nicolas Katz and Tadao Oda, *On the differentiation of De Rham cohomology classes with respect to parameters*, J. Math. Kyoto Univ. **8** 1968, 199-213.
- [17] John Milnor, *Isolated singularity of hypersurface*, Princeton (1969).
- [18] Peter Orlik and Hiroaki Terao:

- [19] Picard, Emile: *Sur les fonctions de deux variables indépendentes analogues aux fonctions modulaires.* Acta Math. 2 (1883), 114-135.
- [20] Si Li, Changzheng Li, Kyoji Saito, Yefeng Shen: *Mirror symmetry for exceptional unimodular singularities*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **19** (2017), no. 4, 1189-1229.
- [21] Kyoji Saito: *Quasihomogene isolierte Singularitäten von Hyperflächen*, Invent. Math. 14 (1971), 123–142.
- [22] Kyoji Saito: *On the periods of primitive integrals*, preprint in Harvard University, 1980; unpublished.
- [23] Kyoji Saito: *Theory of logarithmic differential forms and logarithmic vector fields*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **27** (1980), no. 2, 265-291.
- [24] Kyoji Saito: *The higher residue pairings $K_F^{(k)}$ for a family of hypersurface singular points*, Singularities, Part 2 (Arcata, Calif., 1981), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 40, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1983, pp. 441-463.
- [25] Kyoji Saito: *Period mapping associated to a primitive form*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 19 (1983), no. 3, 1231–1264.
- [26] Kyoji Saito: *On a linear Structure of the Quotient Variety by a finite Reflection Group*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **29** (1993), 535–579.
- [27] Kyoji Saito: *Duality for Regular Systems of Weights*, Asian. J. Math. **2** (1998) no.4, 983–1048.
- [28] Kyoji Saito: *Polyhedra dual to the Weyl chamber decomposition: a précis*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **40** (2004), no. 4, 1337-1384.
- [29] Kyoji Saito: *Uniformization of the orbifold of a finite reflection group*, in Frobenius Manifolds, C. Hertling, M. Marcolli (eds.), Aspect Math. **E36** (2004), 265–320.
- [30] Kyoji Saito: *Primitive Automorphic Forms*, Mathematics Unlimited - 2001 and Beyond, edited by Engquist & Schmidt, Springer Verlag, (2001) 1003–1018.
- [31] Kyoji Saito *Jugendtraum of a mathematician*, Asia Pac. Math. Newsl. 1 (**2011**), no. 3, 1-6.

- [32] Kyoji Saito: 原始型式から鏡像対称性へ (*From Primitive forms to Mirror symmetry, in Japanese*), RIMS Kokyuroku, 2015?.
- [33] Kyoji Saito *Primitive automorphic forms on extended period domain of type IV*, in preparation.
- [34] Kyoji Saito and Atsushi Takahashi: *From primitive forms to Frobenius manifolds*, From Hodge theory to integrability and TQFT tt^* -geometry, 31–48, Proc. Sympos. Pure Math., 78, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008.
- [35] Kyoji Saito, Tamaki Yano and Jiro Sekiguchi: *On a certain generator system of the ring of invariants of a finite reflection group*, Comm. algebra **8** (1980), 373–408.
- [36] Jiro Sekiguchi: *Three dimensional Saito free divisors and deformations of singular curves*, J. Siberian Federal Univ., Mathematics and Physics, **1** (2008), 33-41.
- [37] Jiro Sekiguchi: *A classification of weighted homogeneous Saito free divisors in three dimensional space*, J. Math. Soc. Japan, **61** (2009), 1071-1095.
- [38] Jiro Sekiguchi: *Systems of uniformization equations along Saito free divisors and related topics*, in “The Third Japanese-Australian Workshop on Real and Complex Singularities”, Proceedings of the Centre for Mathematics and its Applications, **43** (2010), 83-126.
- [39] Alexandrov G. Alexandrov and Jiro Sekiguchi: *Free deformations of hypersurface singularities*, J. Math. Sci., **175** (2011), 1-16.
- [40] Jiro Sekiguchi: *Systems of uniformization equations and hyperelliptic integrals*, J. Math. Sci., **175** (2011), 57-79.
- [41] Jiro Sekiguchi: *Saito free divisors in four dimensional affine space and reflection groups of rank four*, In: S. Koike et.al. (Eds.), *Topics on Real and Complex Singularities*, pp.141-158, Proceedings of the 4th Japanese-Australian Workshop, 2014.
- [42] Jiro Sekiguchi: *Holonomic systems of differential equations of rank two with singularities along Saito free divisors of simple type*, In: S. Koike et.al. (Eds.), *Topics on Real and Complex Singularities*, pp.159-188, Proceedings of the 4th Japanese-Australian Workshop, 2014.

- [43] Shimura, Goro: *On analytic families of polarized abelian varieties and automorphic functions*, Ann. of Math. (2) **78** (1963), 149–192; MR0156001 (27 #5934).
- [44] Shimura, Goro: *On purely transcendental fields automorphic functions of several variable*, Osaka J. Math., **Vol.1** (1964), 1-14.
- [45] Shiga, Hironori: *One attempt to the K3 modular function I*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Ser IV vol. VI (1979), 609-635.
- [46] Shiga, Hironori: *On the representation of the Picard modular function by theta constants I-II*, Pub. R.I.M.S. Kyoto Univ. **24** (1988), 311-360.
- [47] René Thom: *Structural Stability and Morphogenesis: An Outline of a General Theory of Models*, Reading, MA: Addison-Wesley, 1989. ISBN 0-201-09419-3.