
フーリエ-カールソンから 21 世紀の調和解析へ

東海大学 古谷康雄

Grafakos による教科書「Classical and Modern Fourier Analysis」(現在は2分冊になり Springer より出版)の序文には以下のようなことが書いてあります .

analysis という言葉はギリシャ語の $\alpha\nu\acute{\alpha}\lambda\nu\sigma\iota\varsigma$ に由来し , 意味は "dissolving into pieces" である .

対義語として synthesis: $\alpha\nu\theta\epsilon\sigma\iota\varsigma$ "combining things" があり , 両方が重要である

今回は関数の分解をキーワードに話をしようと思います .

1. フーリエ (1807) からカールソン (1966) まで

フーリエの提起した問題を解くために解析学がどのように発展したか
リーマン積分, 集合論, ルベグ積分, 関数解析

2. 2変数フーリエ級数の収束問題から派生した現在の調和解析の問題

総和法 $\implies$ ボホナー・リース平均の有界性

掛谷問題 $\implies$ 掛谷集合 (ベシコビッチ集合) の幾何学的性質

フーリエ制限定理

3つがそれぞれ互いに関連している.

これらの問題を解くために開発されたテクニックが他の分野へも有用である.

1. フーリエ (1807) からカルソン (1966) まで

フランスアカデミーの問題「自然と熱伝導」に対して

1807年 フーリエ: フーリエ級数展開を主張する

「**任意の**周期1の関数はフーリエ級数展開できる」

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{2\pi i n x}$$

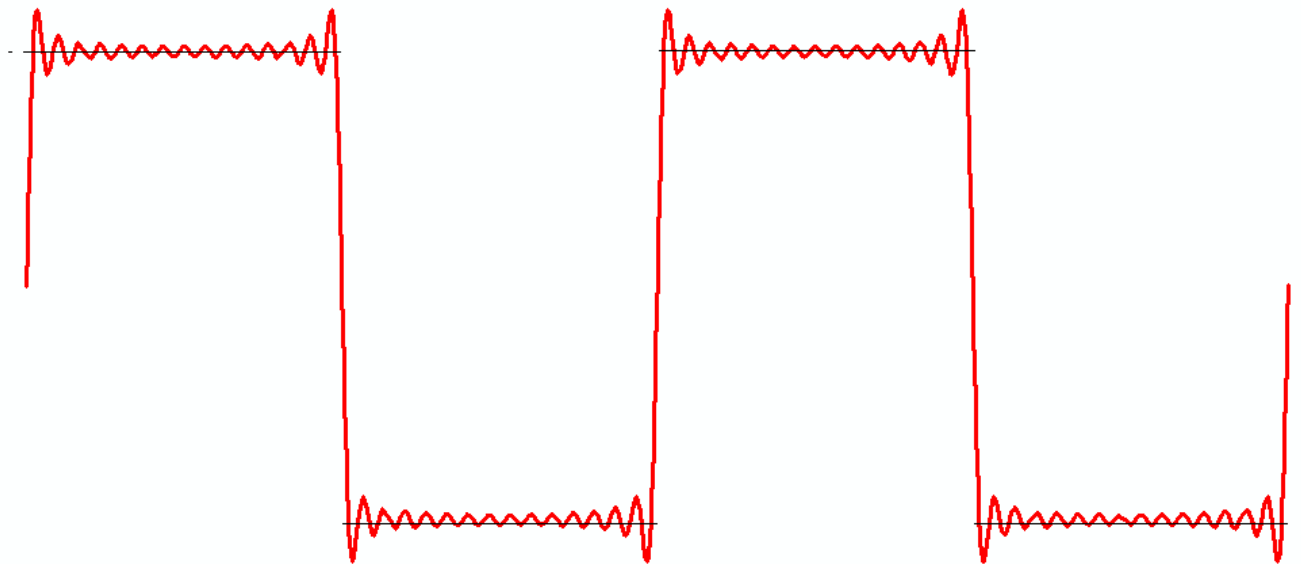
$$\hat{f}(n) = \int_{-1/2}^{1/2} f(x) e^{-2\pi i n x} dx$$



「**任意の**周期1の関数はフーリエ級数展開できる」

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{2\pi i n x}$$

「関数とは何か」がはっきりしない時代に反発も多かった．ラグランジュの猛反発により出版されるのは1822年になった．



不連続関数がなぜ連続関数で表現できるのか？（収束概念の未発達）

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{2\pi i n x}$$

$$\hat{f}(n) = \int_{-1/2}^{1/2} f(x) e^{-2\pi i n x} dx$$

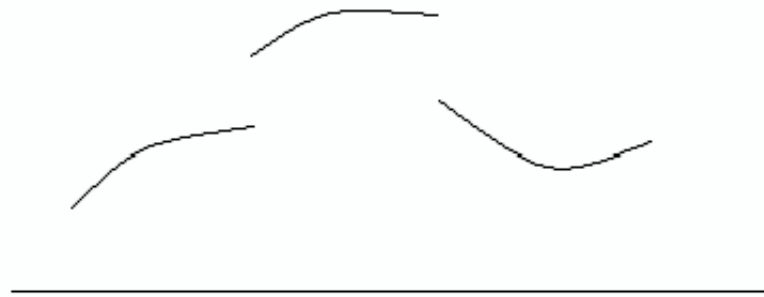
そもそもフーリエ係数求めるのに積分している．積分可能である必要がある．

定積分 = 面積という暗黙の了解があった（リーマンはまだ登場しない）

ディリクレ(1829)

$f(x)$ が 区分的に滑らかな関数 ならば, 連続点でフーリエ部分和は元の関数に収束する .

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N f(x) = f(x), \quad S_N f(x) = \sum_{|n| \leq N} \hat{f}(n) e^{2\pi i n x} \quad (\text{フーリエ部分和})$$



この結果を突破口として色々な十分条件が考えられた .

リプシッツ条件 , ディニ条件...

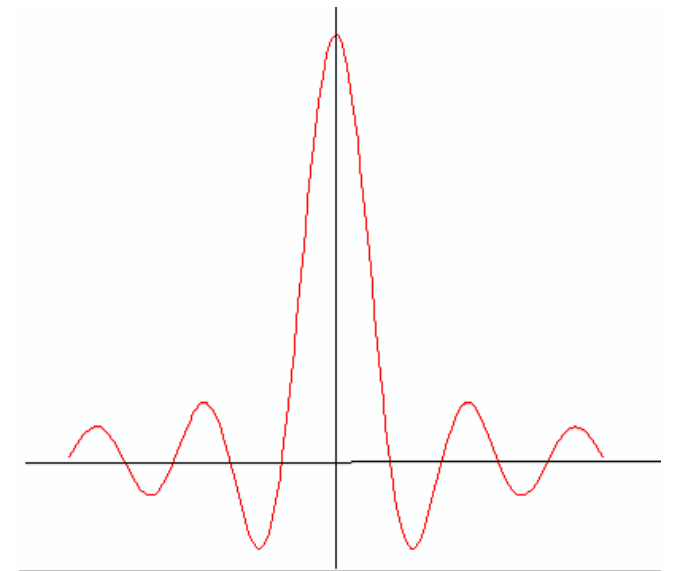
そしてこの時代 , 「連続関数ならばフーリエ級数は収束する」 と考えられていた .

ディリクレの方法

$$S_N f(x) = \sum_{|n| \leq N} \hat{f}(n) e^{2\pi i n x}$$

$$S_N f(x) = \int_{-1/2}^{1/2} D_N(x-y) f(y) dy$$

$$D_N(y) = \sum_{|n| \leq N} e^{2\pi i n y} = \frac{\sin 2\pi \left(N + \frac{1}{2}\right) y}{\sin \pi y} \quad (\text{ディリクレ核})$$



級数の問題を積分作用素の問題に帰着させた。(特異積分作用素につながる)

激しく振動する積分核 $\frac{\sin Ny}{y}$ をどのように評価するかが問題となる

$$S_N f(x) = \sum_{|n| \leq N} \hat{f}(n) e^{2\pi i n x}$$

そしてこの時代, 「連続関数ならばフーリエ級数は収束する」と考えられていたが

デュ・ボア・レイモン (1876)

連続関数でも $S_N f(x)$ が発散する関数が存在する.

このような例が見つかったことによりフーリエ級数の収束の意味付けがあやしくなった. そこで数列に関する**総和法**をフーリエ級数に応用すると, 収束が確保される.

級数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ がチェザロ総和可能であるとは, $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$

$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{s_1 + s_2 + \cdots + s_N}{N}$ (チェザロ平均) が収束する.

$$S_N f(x) = \sum_{|n| \leq N} \hat{f}(n) e^{2\pi i n x}$$

$$\sigma_N(f)(x) = \frac{S_0 f(x) + S_1 f(x) + \cdots + S_N f(x)}{N+1} = \int_{-1/2}^{1/2} F_N(x-y) f(y) dy$$

F_N : フェイエル核

$$\sigma_N(f)(x) = \sum_{|n| \leq N} \left(1 - \frac{|n|}{N+1}\right) \hat{f}(n) e^{2\pi i n x}$$

フェイエールの定理(1900)

f が連続関数ならば, すべての点において $\sigma_N f(x) \rightarrow f(x)$ ($N \rightarrow \infty$).

1867 リーマンの定理

$f(x)$ がリーマン積分可能ならば $\hat{f}(n) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$

1868 カントルの一意性定理

除外集合の研究から集合論へ進む

1906 リーマン・ルベークの定理

$f(x)$ がルベーク積分可能ならば $\hat{f}(n) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$

1913 ルジン予想

$f \in L^2(\mathbb{T})$ ならばほとんどすべての点でフーリエ級数は収束する

1923, 1926 コルモゴロフ

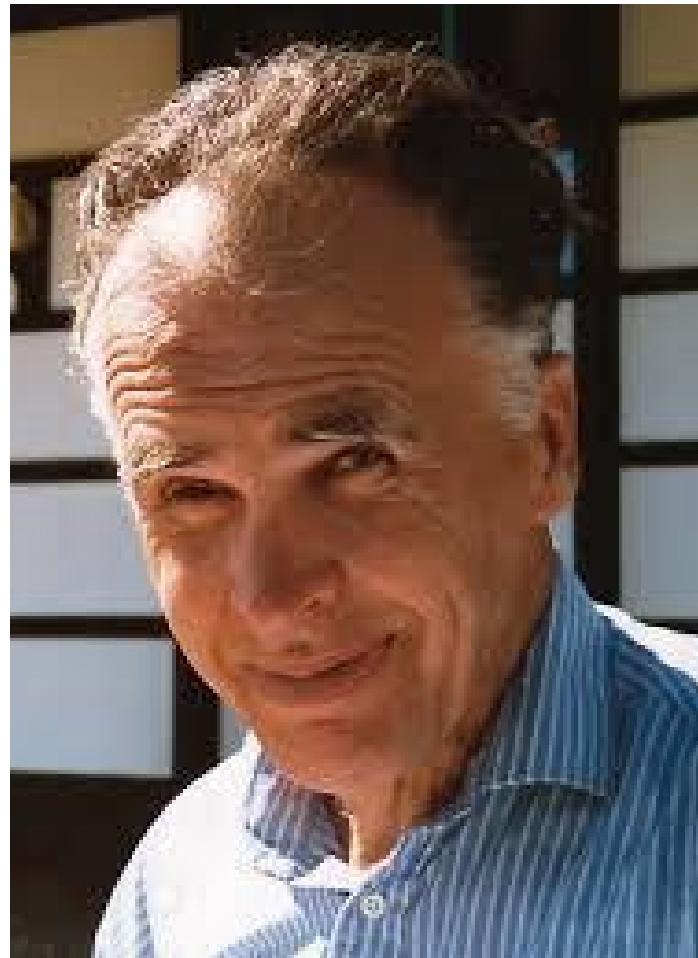
$f \in L^1(\mathbb{T})$ ですべての点においてフーリエ級数が発散するような関数が存在する .

$$L^2(\mathbb{T}) \subset L^1(\mathbb{T})$$

定理 (Kolmogorov-Seliverstov(1925, 1926), Plessner (1926))

$$\sum_{n \neq 0} |\hat{f}(n)|^2 \log |n| < \infty \quad \text{ならば} \quad S_N f(x) \rightarrow f(x) \text{ a.e.}$$

そしてカールソン登場



定理 (Kolmogorov-Seliverstov(1925, 1926), Plessner (1926))

$$\sum_{n \neq 0} |a_n|^2 \log n < \infty \quad \text{ならば} \quad S_N f(x) \rightarrow f(x) \quad \text{a.e.}$$

定理 (カールソン (1966))

$$f \in L^2(\mathbb{T}) \quad \text{ならば} \quad S_N f(x) \rightarrow f(x) \quad \text{a.e.}$$

カールソンの証明はこれまでの証明の改良ではない。

20世紀末になってカールソンのアイデアが解説されて、教科書に載るような証明がつけられた。現在の最先端の理論を理解するには、この関数の分解の方法をマスターする必要がある。

ノルム収束について

リース・フィッシャーの定理(1907)

$$f \in L^2(\mathbb{T}) \quad \text{ならば} \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \|S_N f - f\|_{L^2} = 0.$$

$\{e^{2\pi i n x}\}$ が $L^2(\mathbb{T})$ における完全正規直交系になる.

関数解析のさきがけとなる定理である.

定理 (M. Riesz(1927))

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|S_N f - f\|_{L^p} = 0 \quad 1 < p < \infty.$$

定理 (M. Riesz(1927))

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|S_N f - f\|_{L^p} = 0 \quad 1 < p < \infty.$$

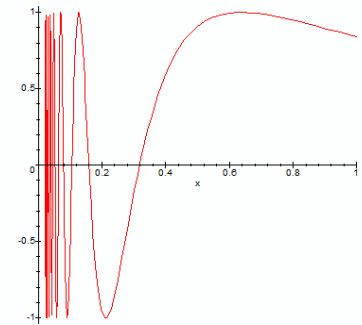
証明は $\sup_N \|S_N f\|_{L^p} \leq C_p \|f\|_{L^p}$ に帰着させる .

実は各点収束は $\|\sup_N |S_N f|\|_{L^p} \leq C_p \|f\|_{L^p}$ に帰着させる .
各点収束の方がはるかに難しいことが分かる .

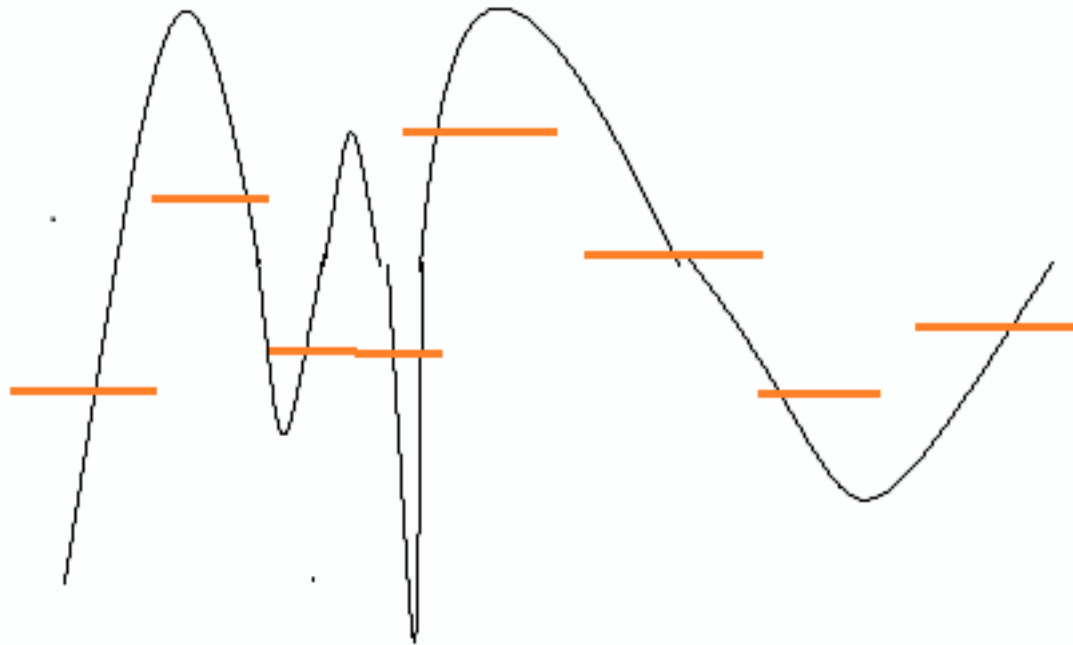
注意 : 最近の教科書では M. Riesz のオリジナルの証明は載せていない .
 f から 共役関数 $\tilde{f}$ を作り , $f + i\tilde{f}$ が正則関数になることを使って証明している . (complex method)

現在の教科書に載っている証明の基本アイデア (real method)

関数の様子を各点で調べることは難しい。
実際ルベーグ積分の世界 (a.e.) では意味がない。



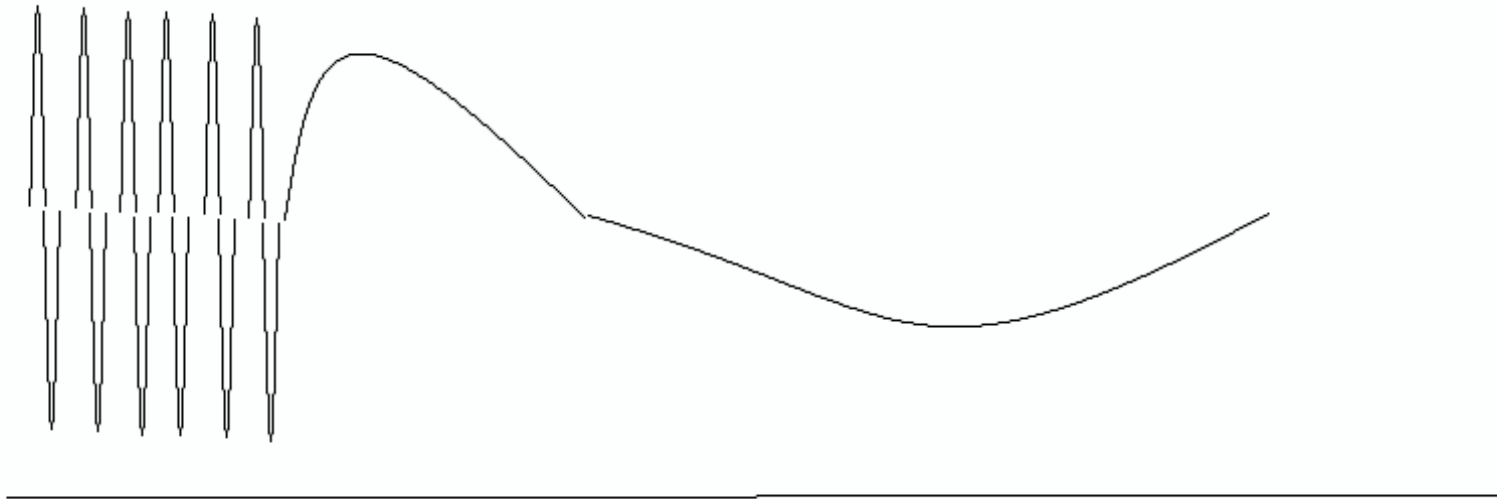
そこで平均値を考えると，穏やかな振る舞いをするようになる。



現在の教科書に載っている証明の基本アイデア (real method)

関数の様子を各点で調べることは難しい。
実際ルベーグ積分の世界 (a.e.) では意味がない。

そこで平均値を考えると、穏やかな振る舞いをするようになる。



ここで平均をとる区間の幅が問題となる。そこで

Hardy-Littlewood maximal operator

$$Mf(x) := \sup_{I \ni x} \frac{1}{|I|} \int_I |f(y)| dy,$$

sup は x を含むすべての区間 I をとる.

$|f(x)| \leq Mf(x)$ だが

定理 $\|Mf\|_{L^p} \leq C_p \|f\|_{L^p}, \quad 1 < p \leq \infty.$

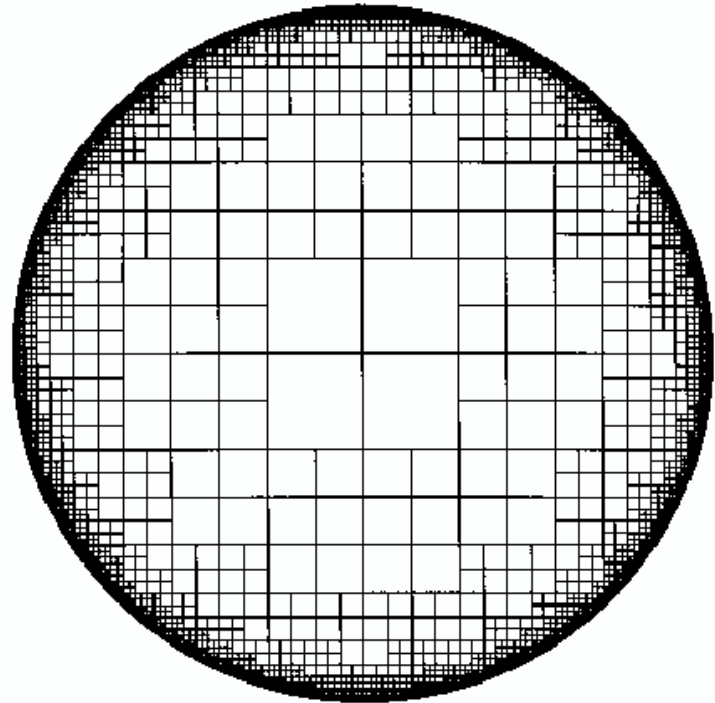
$$\|\sup_N |S_N f|\|_{L^p} \leq C_p \|f\|_{L^p}$$

Calderón-Zygmund 分解 (1952)

$$f(x) = g(x) + \sum_{j=1}^{\infty} (f(x) - f_{I_j}) \chi_{I_j}(x)$$

g : good part, f_{I_j} は区間 I_j 上の平均値

この区間をどう選ぶかがこの理論の最重要ポイント



Whitney 分解

解析学に幾何を取り入れたことが重要である.

2. 2変数フーリエ級数の収束問題から派生した 現在の調和解析の問題

ボホナー・リース平均

掛谷問題

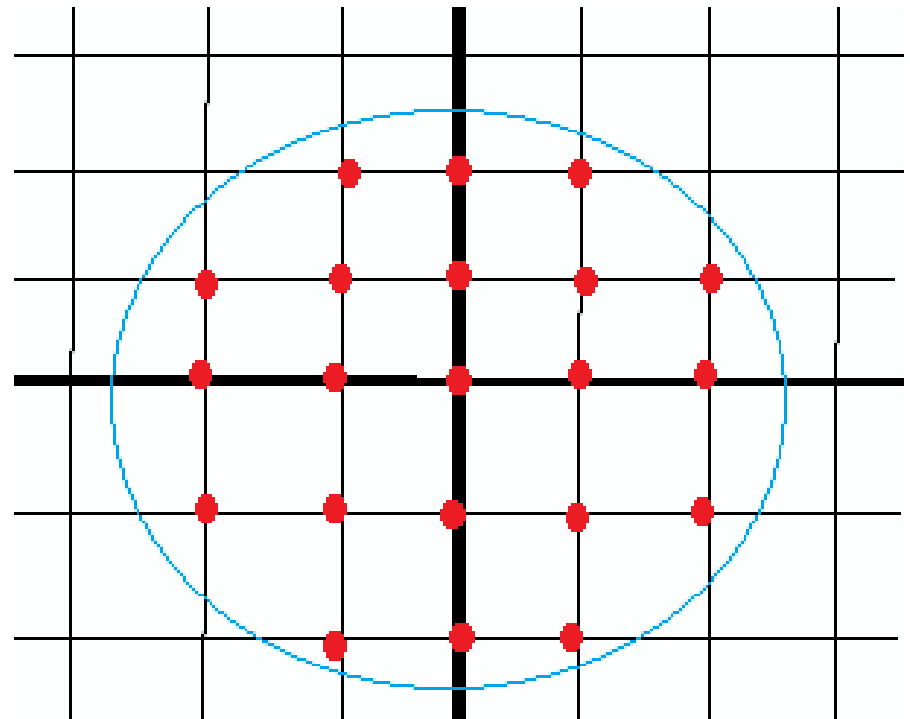
フーリエ制限定理

2. 2変数(多変数)のフーリエ級数

$$S_N f(x) = \sum_{|n| \leq N} \hat{f}(n) e^{2\pi i n x}$$

問題 the spherical partial sum

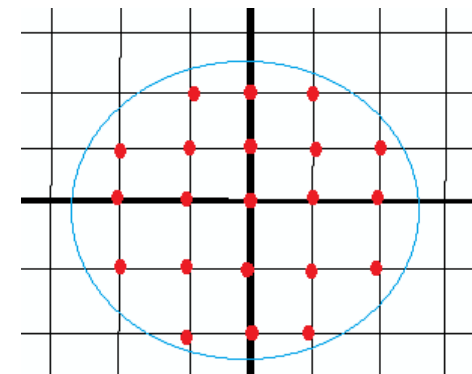
$$f(x, y) = \lim_{R \rightarrow \infty} \sum_{|m|^2 + |n|^2 \leq R^2} \hat{f}(m, n) e^{2\pi i (mx + ny)} \quad ?$$



2. 2変数(多変数)のフーリエ級数

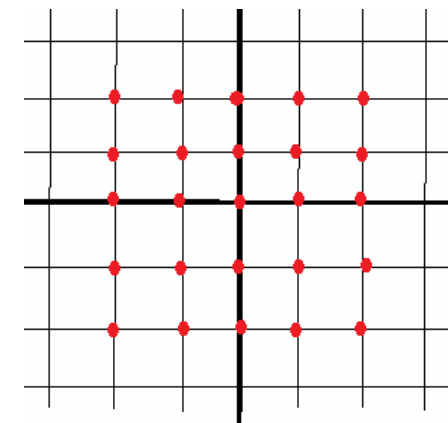
問題 the spherical partial sum

$$f(x, y) = \lim_{R \rightarrow \infty} \sum_{|m|^2 + |n|^2 \leq R^2} \hat{f}(m, n) e^{2\pi i(mx + ny)} \quad ?$$



the square partial sum

$$f(x, y) = \lim_{R \rightarrow \infty} \sum_{\substack{|m| \leq R \\ |n| \leq R}} \hat{f}(m, n) e^{2\pi i(mx + ny)} \quad ?$$

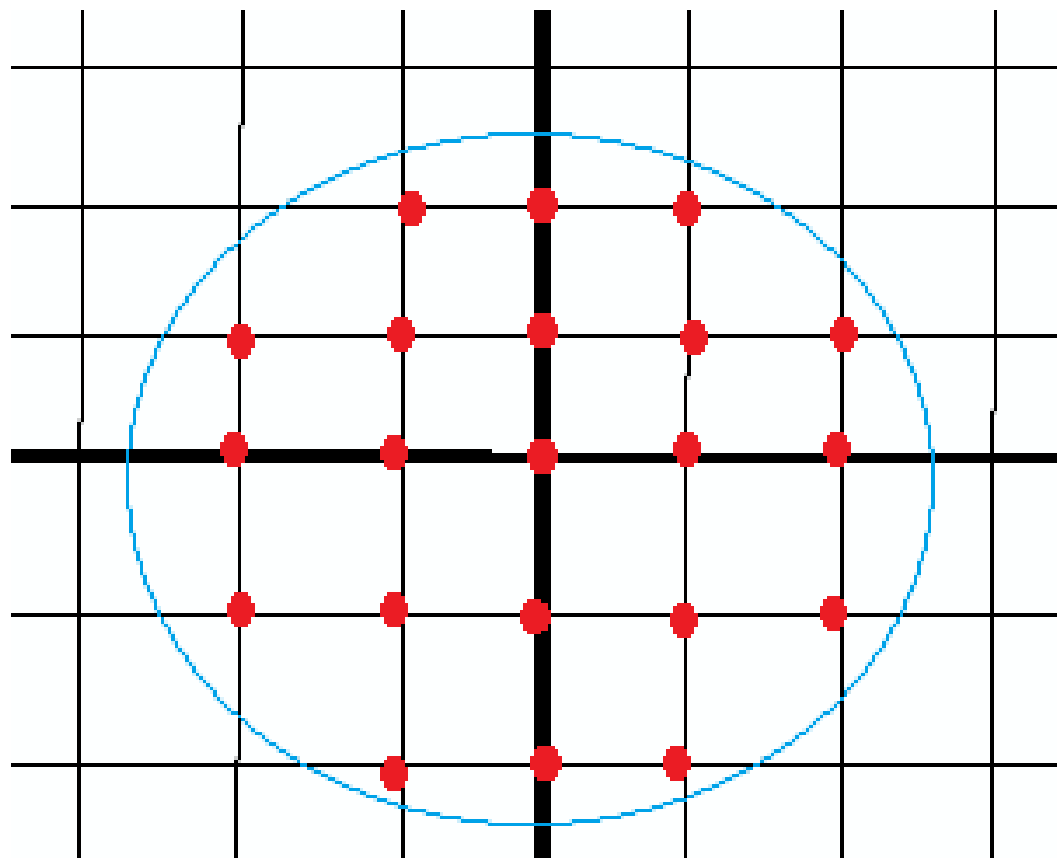


The square partial sum は1変数の繰り返しとして考えられて、収束はすでに分かっているので、the square partial sum について考えることにする.

問題 the spherical partial sum

$$f(x, y) = \lim_{R \rightarrow \infty} \sum_{|m|^2 + |n|^2 \leq R^2} \hat{f}(m, n) e^{2\pi i(mx + ny)} \quad ?$$

格子点問題



固有関数展開

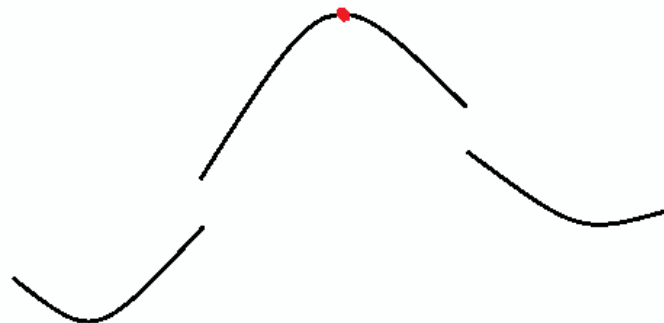
問題 the spherical partial sum

$$f(x, y) = \lim_{R \rightarrow \infty} \sum_{|m|^2 + |n|^2 \leq R^2} \hat{f}(m, n) e^{2\pi i(mx + ny)} \quad ?$$

話は急に難しくなる .

$p = 2$ のとき, カールソンの定理に相当すること (a.e. 収束) が成り立つかどうかは**未解決問題** .

リーマンの局所性定理が成り立たないからである .
そこで**総和法**を考えることにする .



$$\sum_{|m|^2+|n|^2 \leq R^2} \hat{f}(m, n) e^{2\pi i(mx+ny)}$$

the spherical partial sum

$$S_R f(x) := \sum_{|n| \leq R} \hat{f}(n) e^{2\pi i n \cdot x} \quad n = (n_1, n_2), x = (x_1, x_2)$$

Riesz mean (Fejér mean)

$$\sigma_R f(x) := \sum_{|n| \leq R} \left(1 - \frac{|n|}{R}\right) \hat{f}(n) e^{2\pi i n \cdot x}$$

$$\text{1変数のとき} \quad \sigma_N(f)(x) = \sum_{|n| \leq N} \left(1 - \frac{|n|}{N+1}\right) \hat{f}(n) e^{2\pi i n x}$$

Riesz mean (Fejér mean)

$$\sigma_R f(x) := \sum_{|n| \leq R} \left(1 - \frac{|n|}{R}\right) \widehat{f}(n) e^{2\pi i n \cdot x}$$

1変数のときは

$f \in L^1(\mathbb{T}^1)$ のとき $\sigma_R f \rightarrow f$ in $L^1(\mathbb{T}^1)$ ($1 \leq p < \infty$ でも)
であった.

同様に2変数のときは

$f \in L^1(\mathbb{T}^2)$ のとき $\sigma_R f \rightarrow f$ in $L^1(\mathbb{T}^2)$ ($1 \leq p < \infty$ でも)

ところが3変数のときは

$f \in L^1(\mathbb{T}^3)$ のとき $\sigma_R f \rightarrow f$ in $L^1(\mathbb{T}^3)$ は成り立たない.

$$\sigma_R f(x) := \sum_{|n| \leq R} \left(1 - \frac{|n|}{R}\right) \widehat{f}(n) e^{2\pi i n \cdot x}$$

3変数のとき

$f \in L^1(\mathbb{T}^3)$ のとき $\sigma_R f \rightarrow f$ in $L^1(\mathbb{T}^3)$ は**成り立たない** .

しかし

$$\sigma_R^\varepsilon f(x) := \sum_{|n| \leq R} \left(1 - \frac{|n|}{R}\right)^{1+\varepsilon} \widehat{f}(n) e^{2\pi i n \cdot x} \quad \varepsilon > 0$$

とすると

3変数のときでも

$f \in L^1(\mathbb{T}^3)$ のとき $\sigma_R^\varepsilon f \rightarrow f$ in $L^1(\mathbb{T}^3)$ が**成り立つ** .

これが Bochner-Riesz mean を考える理由である .

後の話との繋がりを持たせるために，対応するフーリエ逆変換の収束問題で考える．

すなわち1変数で言うと

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi \quad \rightarrow \quad f(x) \quad \text{a.e.} \quad \text{or} \quad \text{norm} \quad ?$$

the spherical partial sum

$$S_R f(x) := \int_{B_R} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi \quad B_R = \{\xi : |\xi| < R\}$$

(disc multiplier)

Riesz mean

$$\sigma_R f(x) := \int_{B_R} \left(1 - \frac{|\xi|}{R}\right)_+ \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi$$

Bochner-Riesz mean ??

$$B_R^\lambda f(x) := \int_{B_R} \left(1 - \frac{|\xi|}{R}\right)_+^\lambda \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi$$

フーリエマルチプ라이어 $\widehat{Tf}(\xi) = m(\xi) \widehat{f}(\xi)$

$$?? B_R^\lambda f(x) := \int_{B_R} \left(1 - \frac{|\xi|}{R}\right)_+^\lambda \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi$$

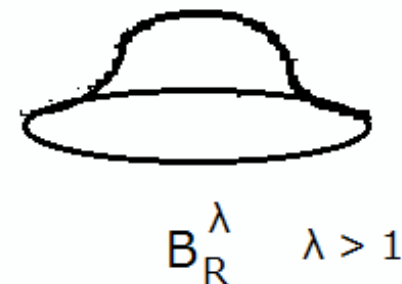
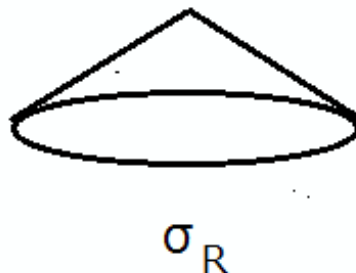
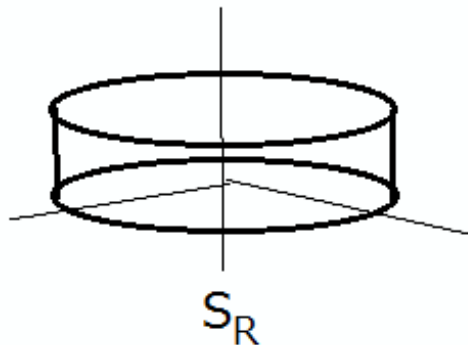
Bochner-Riesz mean

$$B_R^\lambda f(x) = \int_{B_R} \left(1 - \frac{|\xi|^2}{R^2}\right)_+^\lambda \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi$$

注意: $(1 - |\xi|^2) = (1 + |\xi|)(1 - |\xi|)$ で multiplier 本質的な singularity は $|\xi| = 1$ にあるので本質的には同じ .

$(1 + |\xi|)$ において $\xi = 0$ は許容できる singularity.

$\mathbb{R}^2$ のとき



以下の作用素の L^p 有界性に帰着される .

$$\begin{aligned} B^\lambda f(x) &= \int_{B_1} \left(1 - |\xi|^2\right)_+^\lambda \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} m_\lambda(\xi) \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} K_\lambda(x - y) f(y) dy \end{aligned}$$

次元により状況が異なるのは積分核の評価から分かる .

$$K_\lambda(x) = \check{m}_\lambda = \frac{\Gamma(\lambda + 1)}{\pi^\lambda} \frac{J_{\frac{n}{2} + \lambda}(2\pi|x|)}{|x|^{\frac{n}{2} + \lambda}} \approx \frac{e^{\pm 2\pi i|x|}}{(1 + |x|)^{n + (\lambda - \frac{n-1}{2})}}$$

$\lambda > (n - 1)/2$ ならば $K_\lambda \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

$n = 1$ のとき $\lambda > 0$, $n = 2$ のとき $\lambda > 1/2$, $n = 3$ のとき $\lambda > 1$.

同様に積分核を評価すると L^p 有界のための必要条件がわかる .

$$\begin{aligned} K_\lambda(x) = \check{m}_\lambda &\approx \frac{e^{\pm 2\pi i|x|}}{(1 + |x|)^{n+(\lambda - \frac{n-1}{2})}} \\ &\approx \frac{e^{\pm 2\pi i|x|}}{(1 + |x|)^{\frac{n+1}{2} + \lambda}} \end{aligned}$$

$p(\frac{n+1}{2} + \lambda) \leq n, \quad p'(\frac{n+1}{2} + \lambda) \leq n$ では L^p 有界にならない.

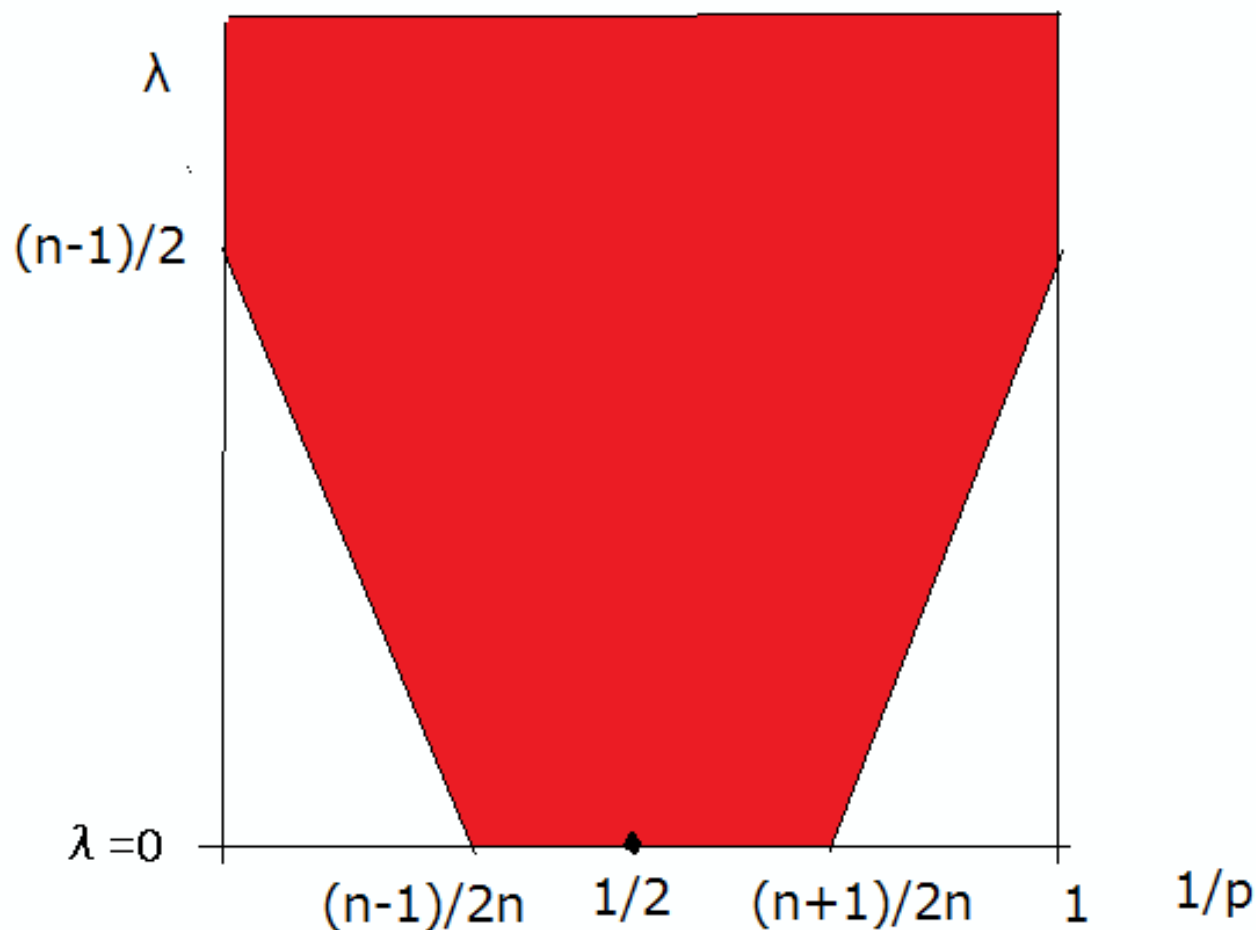
$$B^\lambda f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K_\lambda(x - y) f(y) dy$$

$$f = \chi_{B(0,1)}$$

Bochner-Riesz conjecture

$$B^\lambda f(x) = \int_{B_1} \left(1 - |\xi|^2\right)_+^\lambda \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi$$

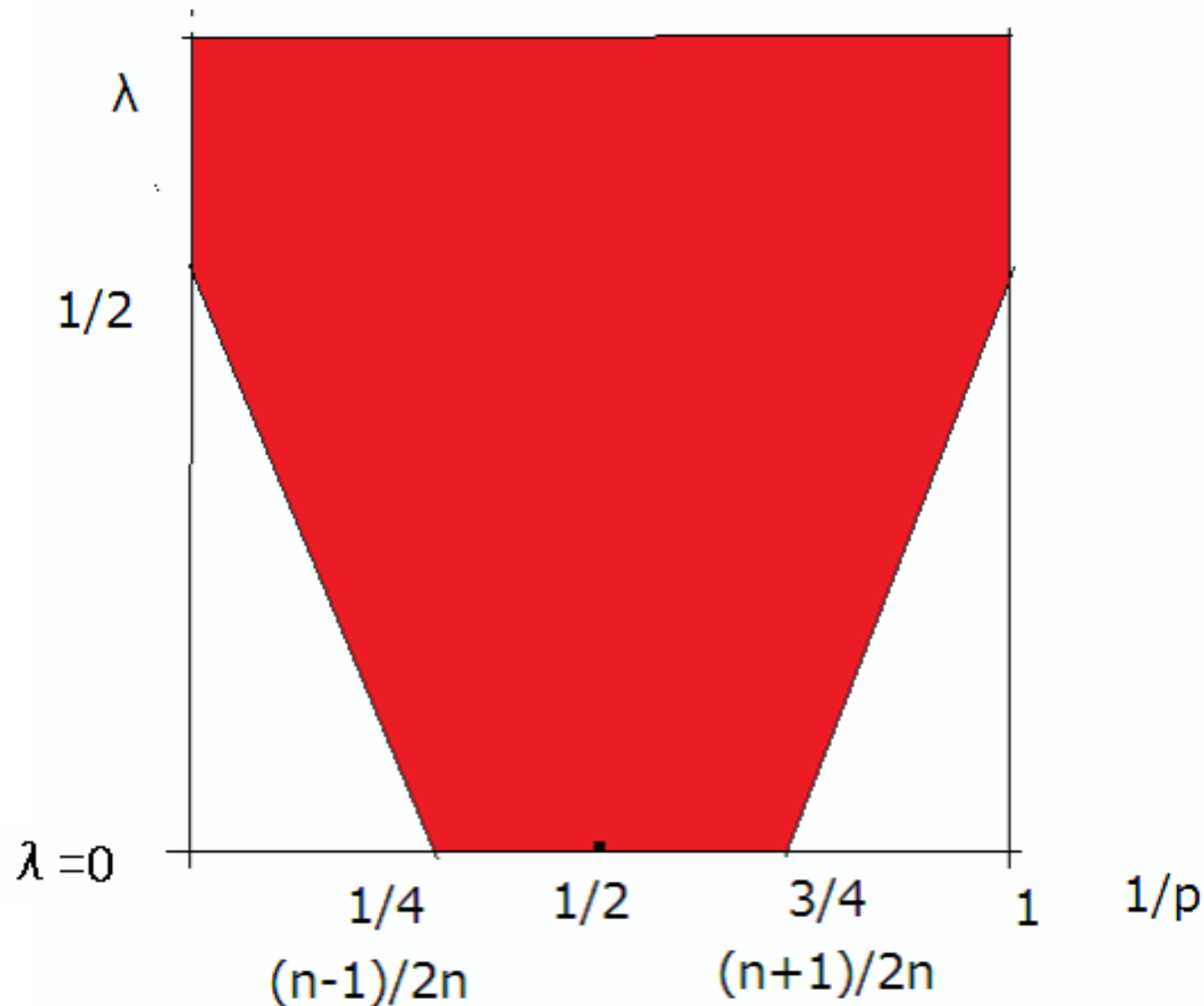
$$\|B^\lambda f\|_{L^p} \leq C_p \|f\|_{L^p}$$



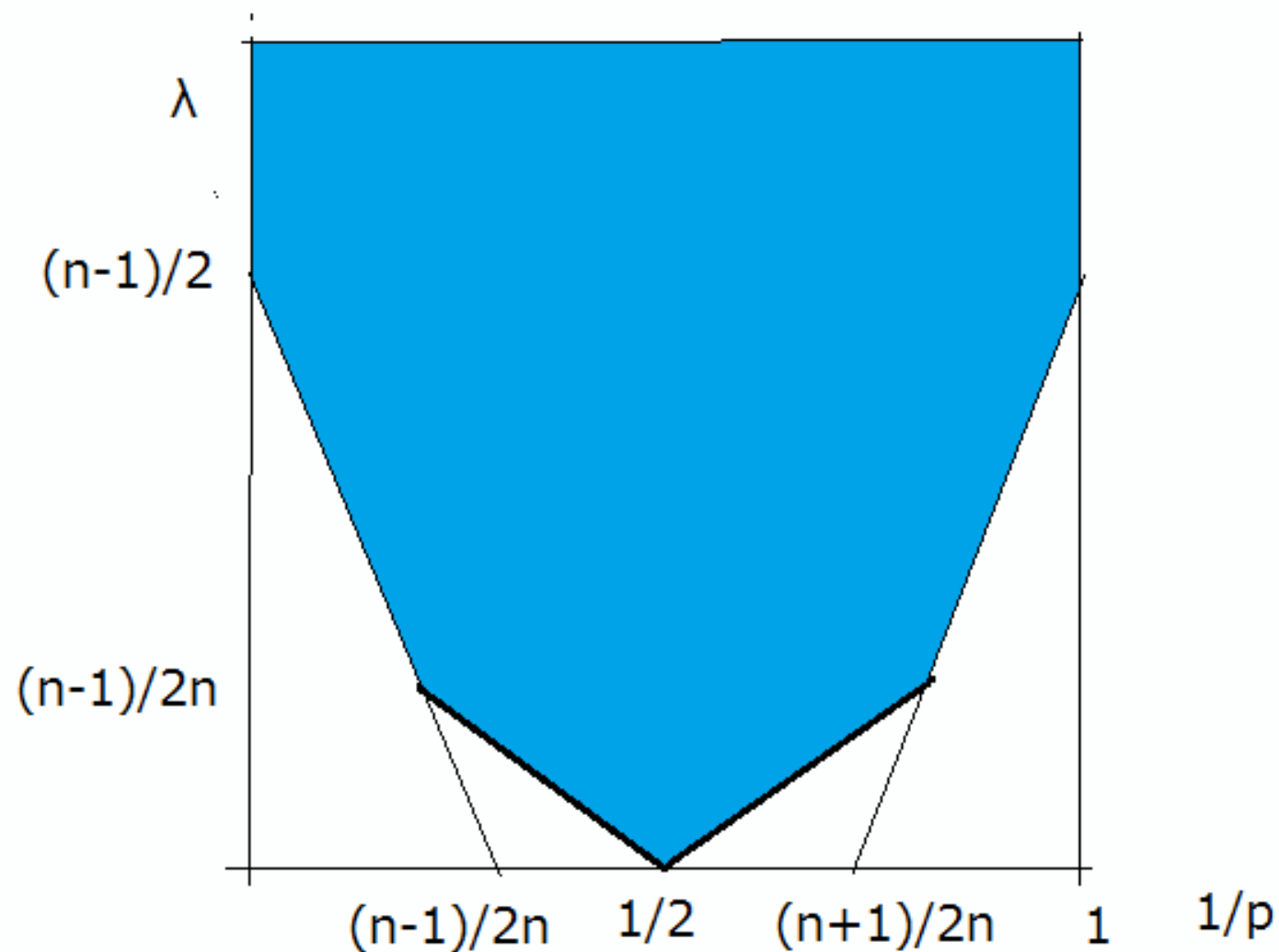
$$\left| \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \right| < \frac{2\lambda + 1}{2n}$$

$m_\lambda(\xi) = (1 - |\xi|^2)^\lambda \in L^\infty$ だから, プランシュレルの定理より L^2 有界は自明. $\lambda = 0$ でも.

$n = 2$ のときは完全に解けた . $B^\lambda f(x) = \int_{\mathbb{R}^2} \left(1 - |\xi|^2\right)_+^\lambda \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi$
 定理 (Carleson-Sjölin (1972))

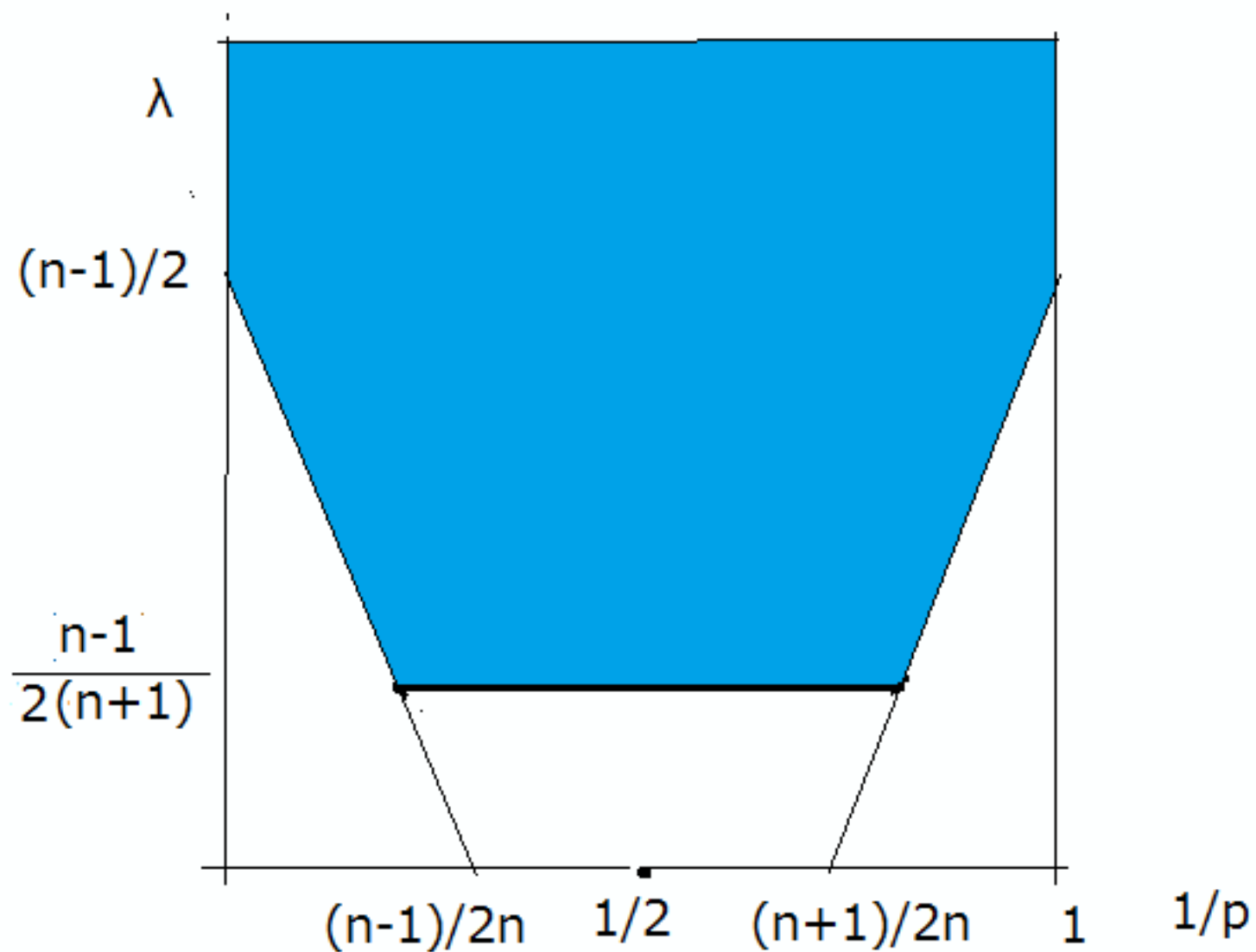


Bochner-Riesz conjecture ($n \geq 3$) 分かっていること



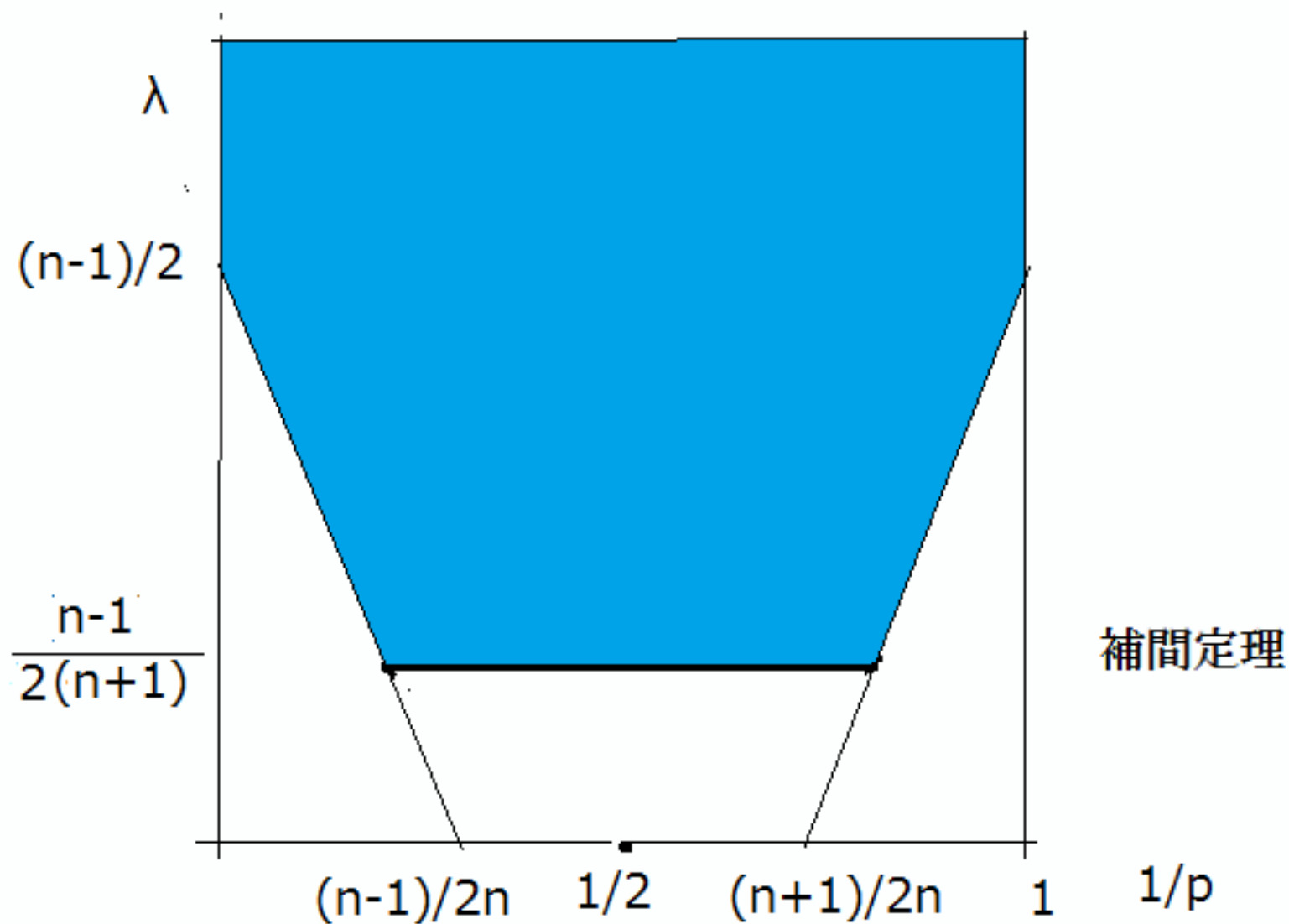
$$\left| \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \right| < \frac{2\lambda + 1}{2n}$$

Bochner-Riesz conjecture ($n \geq 3$) 分かっていること



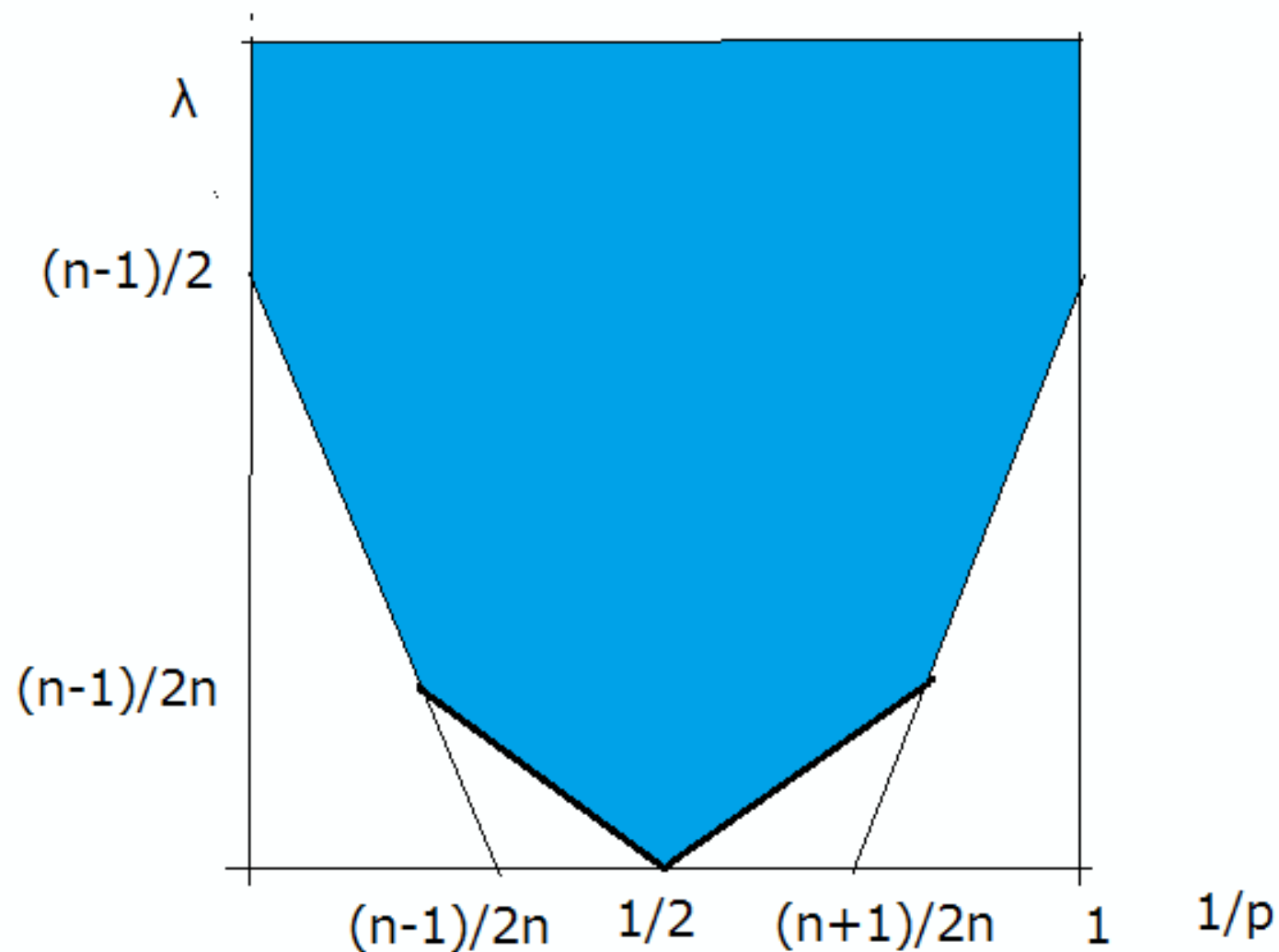
$$\left| \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \right| < \frac{2\lambda + 1}{2n}$$

Bochner-Riesz conjecture ($n \geq 3$) 分かっていること



$$\left| \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \right| < \frac{2\lambda + 1}{2n}$$

Bochner-Riesz conjecture ($n \geq 3$) 分かっていること



$$\left| \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \right| < \frac{2\lambda + 1}{2n}$$

$n = 2$ のとき

$$B^\lambda f(x) = \int_{B_1} \left(1 - |\xi|^2\right)_+^\lambda \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi$$

$\lambda \rightarrow 0$ とすると

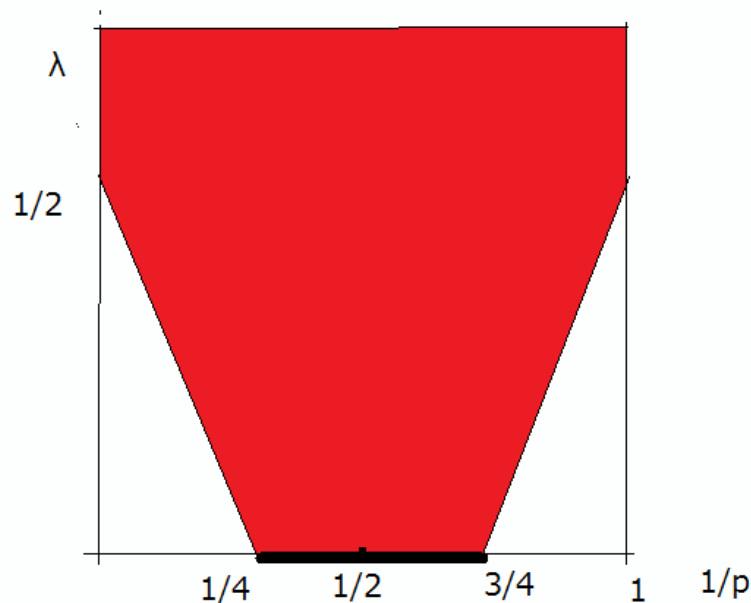
the disc multiplier = the spherical partial sum

$$S_1 f(x) := \int_{B_1} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi \quad B_1 = \{\xi \in \mathbb{R}^2 : |\xi| < 1\}$$

は $\frac{4}{3} < p < 4$ において $L^p(\mathbb{R}^2)$ 有界になることが予想される .

注意: $n = 1$ のときは $\lambda = 0$ の場合でも有界性はすでに分かっている .

(M. Riesz).



C. Fefferman (1971) による驚くべき結果がある .

定理

$n \geq 2$ のとき $p \neq 2$ では S_1 は L^p 有界に**ならない**

$$S_1 f(x) = \int_{B_1} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi$$

このことから the spherical partial sum

$$S_R(f)(x, y) = \sum_{|n| \leq R} \hat{f}(n) e^{2\pi i n \cdot x}$$

は $p \neq 2$ のときは L^p ノルムで f に収束しない例があることが分かる.



C. Fefferman の証明と掛谷問題との関係

これは結果が驚くべきものであっただけでなく、証明も驚くべきものであった。2つめのキーワードの掛谷問題と関係がある。

掛谷問題 (掛谷宗一 1916)

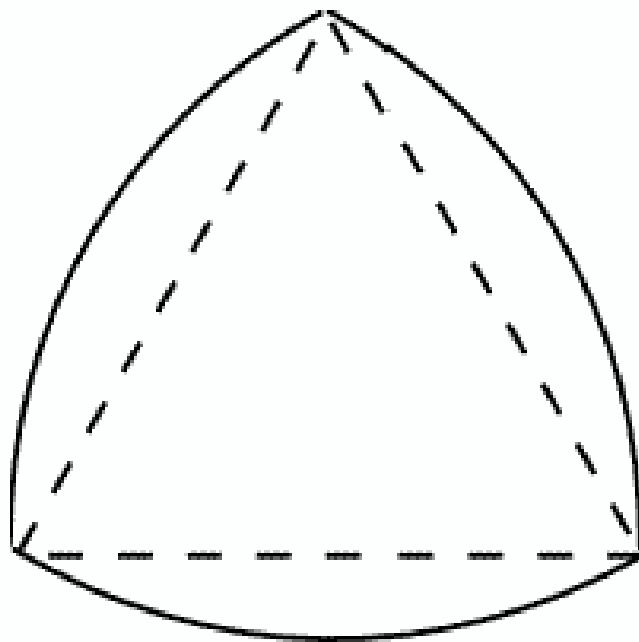
長さ1の線分を領域内で1回転させることのできる図形のうち、面積が最小の図形は何か？



C. Fefferman の証明と掛谷問題との関係

掛谷問題

長さ1の線分を領域内で1回転させる
ことのできる図形のうち、
面積が最小の図形は何か？



ベシコビッチ (1927)

どんな小さな正の数 ε に対しても、面積がそれよりも小さい平面図形で、その中で長さ 1 の線分を回転させることができるようなものが存在する。

定義 ルベグ測度 0 で、あらゆる方向の単位線分を含む集合をベシコビッチ集合（掛谷集合）という。

問題 ベシコビッチ集合の幾何学的性質を調べよ。特にハウスドルフ次元

掛谷予想 n 次元ベシコビッチ集合のハウスドルフ次元は n である。

$$S_1 f(x) = \int_{B_1} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi$$

Fefferman の反例 $n = 2, p \neq 2$ とする.

背理法による .

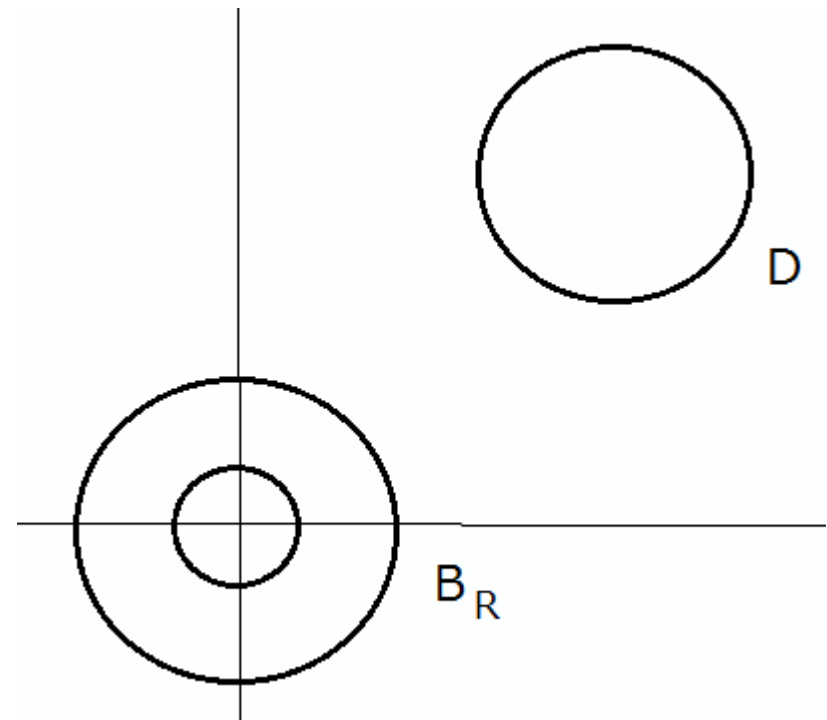
$$\|S_1 f\|_{L^p} \leq \|S_1\| \|f\|_{L^p} \quad \text{として矛盾を導く .}$$

補題 1 $\|S_1\| = \|S_R\| = \|S_D\|.$

$$\widehat{S_1 f}(\xi) = \chi_{B_1} \widehat{f}(\xi)$$

$$\widehat{S_R f}(\xi) = \chi_{B_R} \widehat{f}(\xi)$$

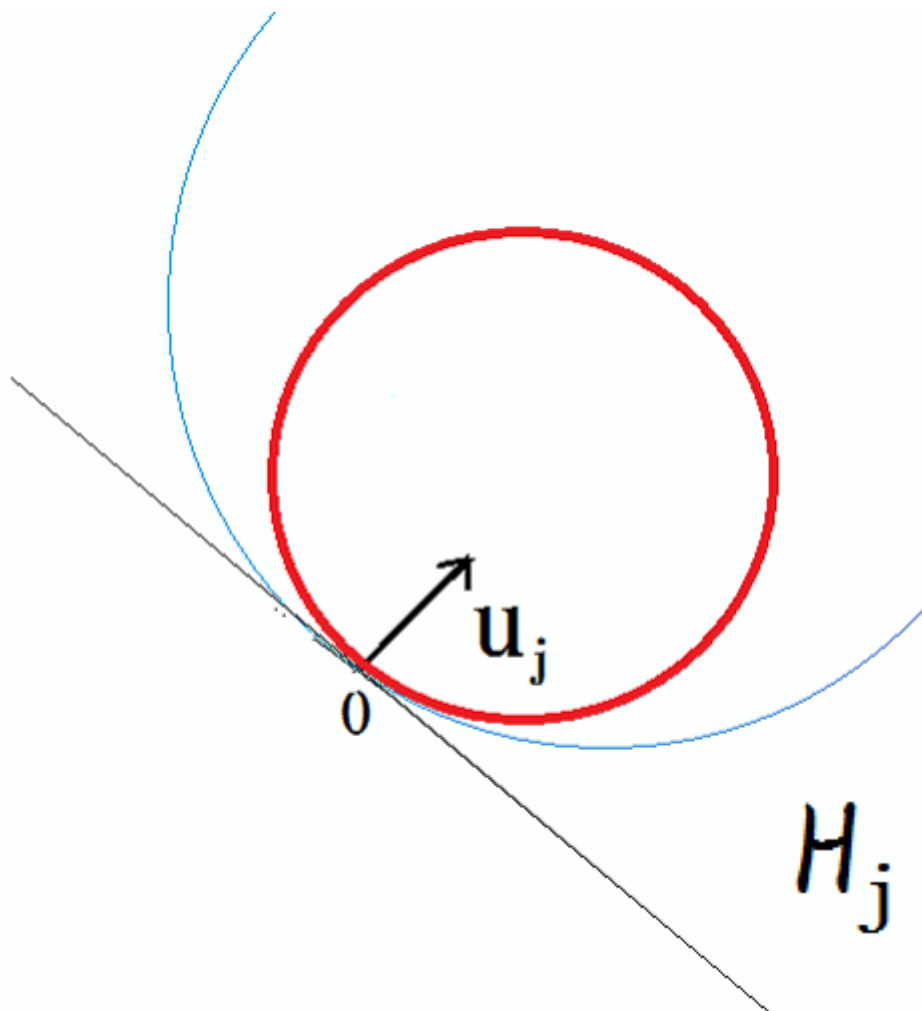
$$\widehat{S_D f}(\xi) = \chi_D \widehat{f}(\xi)$$



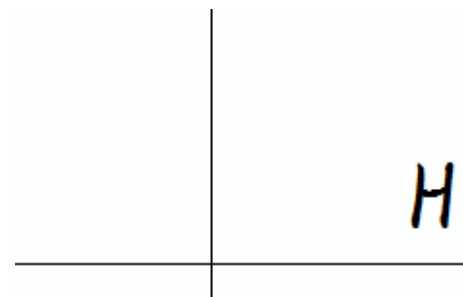
$$S_1 f(x) = \int_{B_1} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi$$

$$\widehat{T_j^R f}(\xi) := \chi_{B_1} \left(\frac{\xi - Ru_j}{R} \right) \widehat{f}(\xi), \quad \text{とすると} \quad T_j^R f \rightarrow S_{\mathcal{H}_j} f$$

$$\widehat{S_{\mathcal{H}_j} f}(\xi) = \chi_{\mathcal{H}_j}(\xi) \widehat{f}(\xi)$$



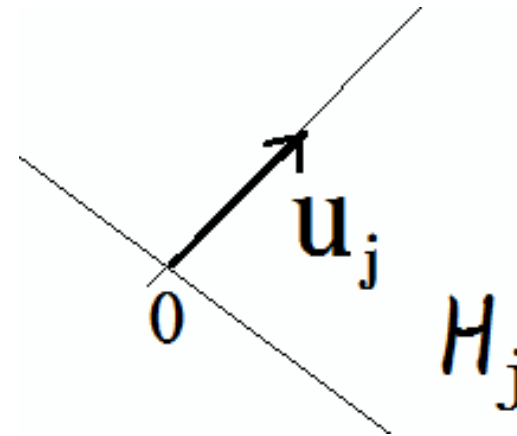
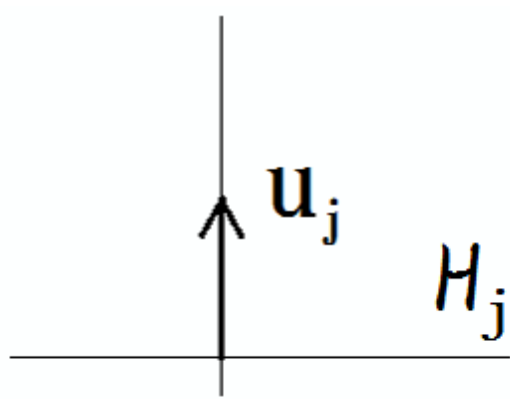
$$S_{\mathcal{H}} f(x_1, x_2) \approx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x_1, x_2 - t)}{t} dt$$



補題2(ベクトル値不等式)

$$\left\| \left(\sum_j |S_{\mathcal{H}_j} f_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p} \leq \|S_1\| \left\| \left(\sum_j |f_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p}.$$

この補題では単位ベクトル u_j は任意だが，後で巧妙に決める．



$$\|S_1 f\|_{L^p} \leq \|S_1\| \|f\|_{L^p}$$

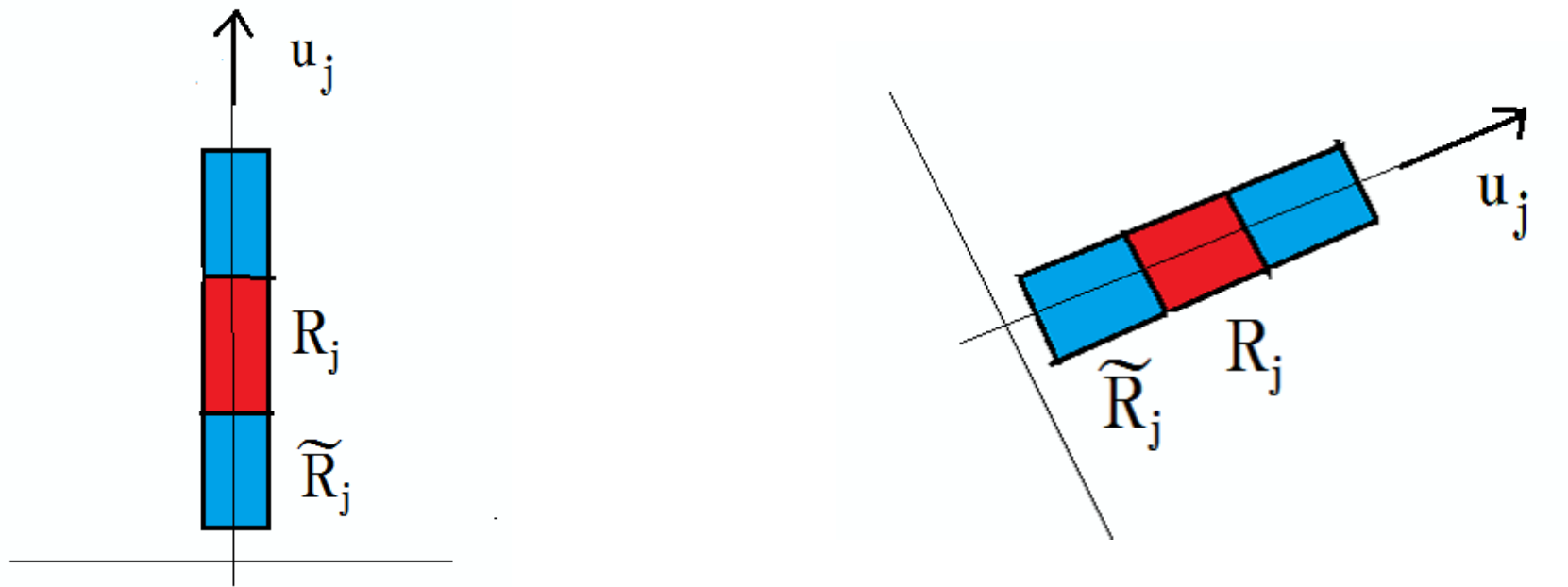
$$\left\| \left(\sum_j |S_1 f_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p} \leq \|S_1\| \left\| \left(\sum_j |f_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p}$$

補題2(ベクトル値不等式)

$$\left\| \left(\sum_j |S_{\mathcal{H}_j} f_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p} \leq \|S_1\| \left\| \left(\sum_j |f_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p}.$$

ここで $f_j = \chi_{R_j}$, R_j はベクトル u_j に平行な長方形で互いに素なものをとる. $S_{\mathcal{H}_j} \chi_{R_j}(x) \geq 1/2$ if $x \in \widetilde{R}_j$. だから

$$\left\| \left(\sum_j \chi_{\widetilde{R}_j} \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p} \leq C \left\| \left(\sum_j \chi_{R_j} \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p}$$



$$\left\| \left(\sum_j \chi_{\tilde{R}_j} \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p} \leq C \left\| \left(\sum_j \chi_{R_j} \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p}$$

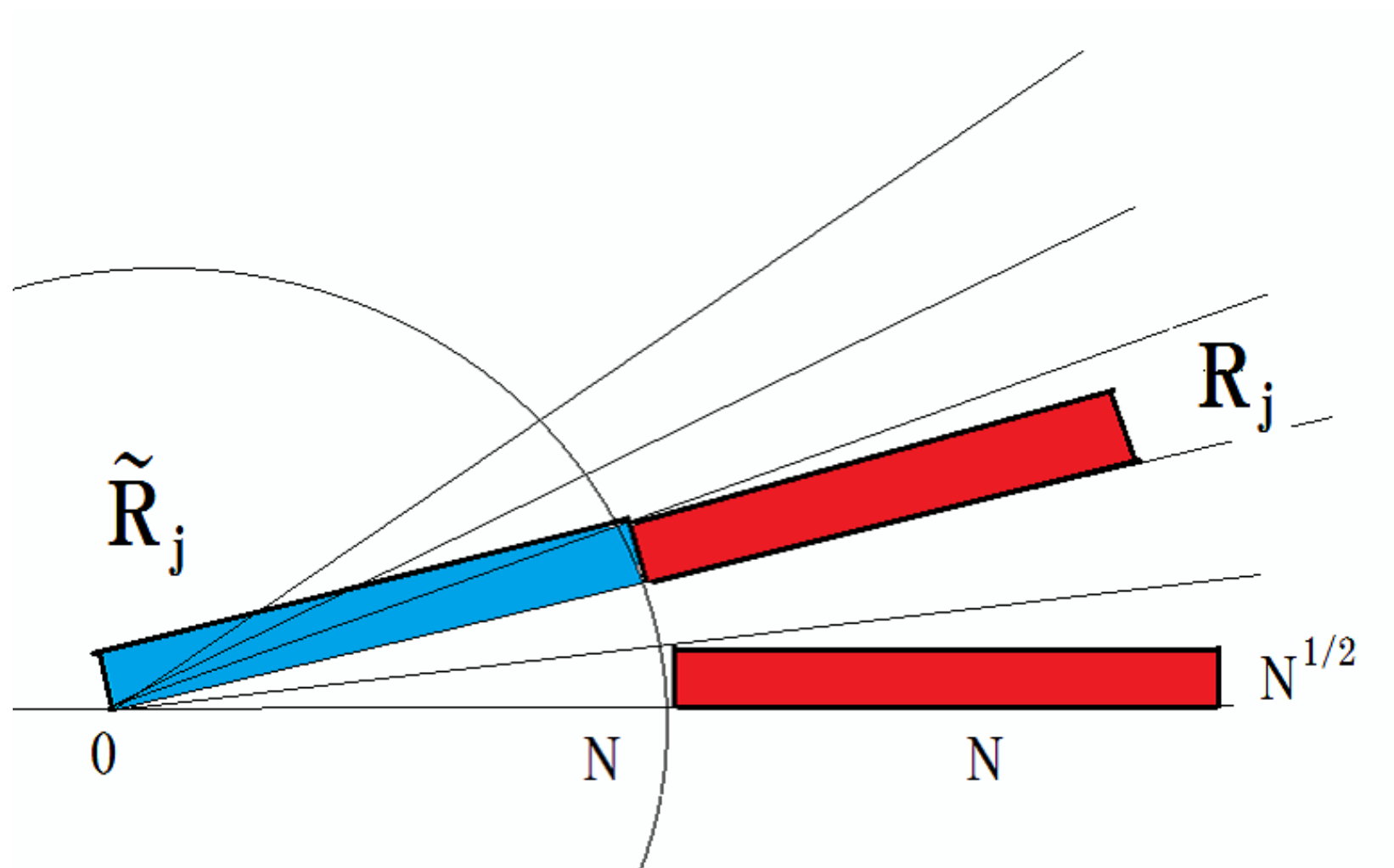
簡単のために $p = 4$ で考えると

$$(\text{右辺})^4 = \left\| \left(\sum_j \chi_{R_j} \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^4}^4 = \int \left(\sum_j \chi_{R_j} \right)^2 dx = \sum_j |R_j|$$

$$(\text{左辺})^4 = \left\| \left(\sum_j \chi_{\tilde{R}_j} \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^4}^4 = \int \left(\sum_j \chi_{\tilde{R}_j} \right)^2 dx = \sum_{j,k} |\tilde{R}_j \cap \tilde{R}_k|$$

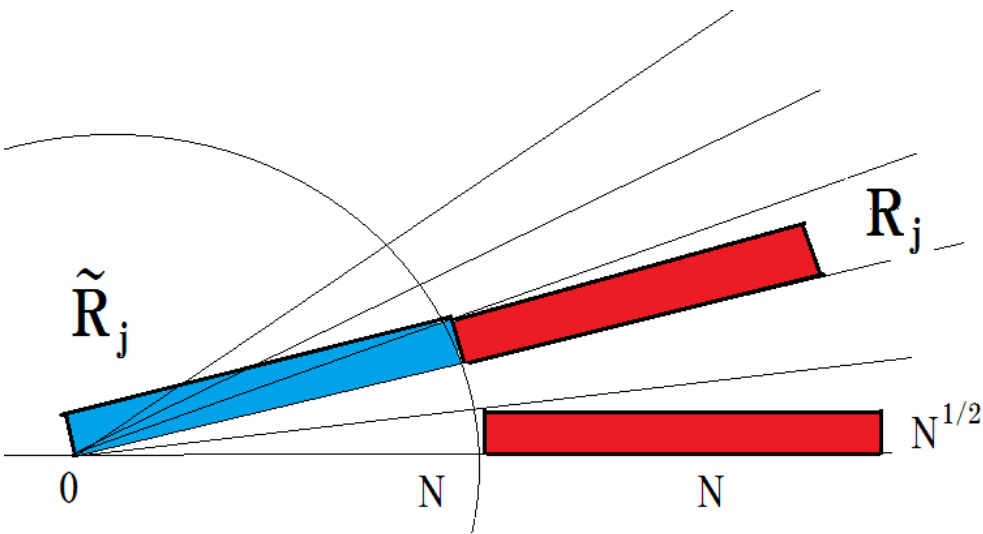
具体的には次のようにとる.

N 大きな自然数, 円周を $N^{\frac{1}{2}}$ 等分する. R_j は $N^{\frac{1}{2}} \times N$ の合同な長方形



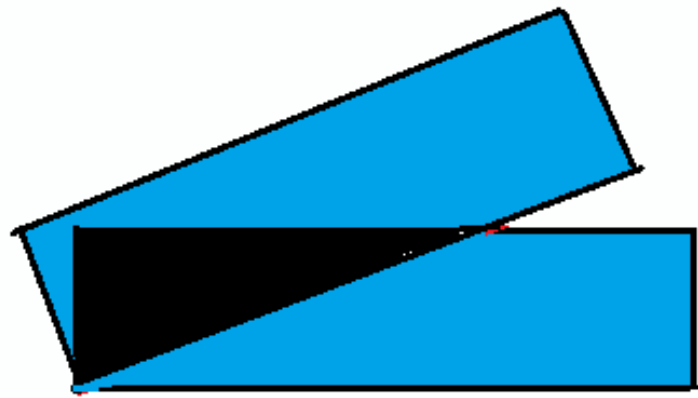
$$(\text{左辺})^4 = \sum_{j,k} |\tilde{R}_j \cap \tilde{R}_k|, \quad (\text{右辺})^4 = \sum_j |R_j|.$$

$$(\text{右辺})^4 = N^{\frac{1}{2}} \cdot N^{\frac{3}{2}} = N^2$$

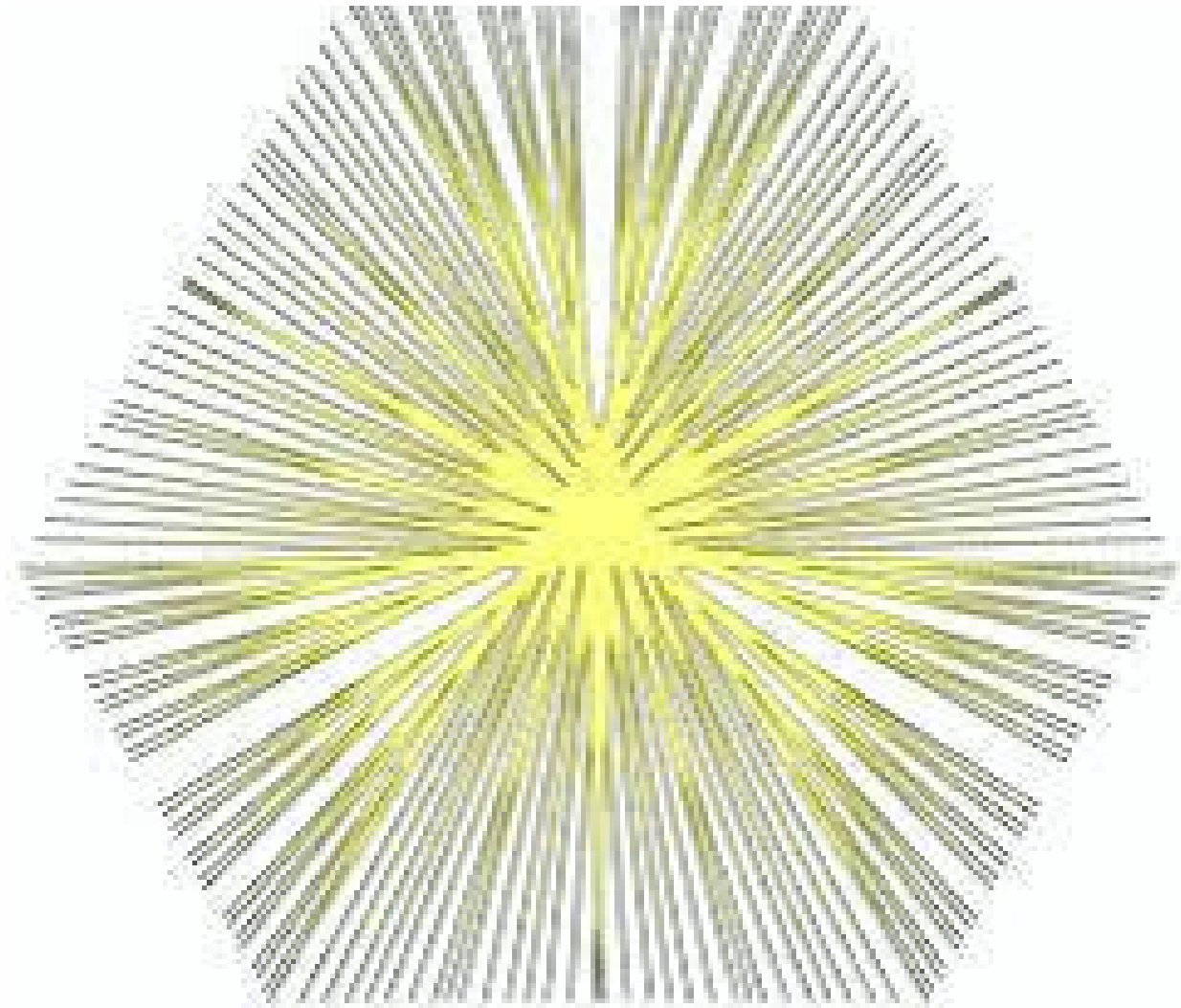


$$|\tilde{R}_j \cap \tilde{R}_k| \approx \frac{N^{\frac{3}{2}}}{1 + |j - k|} \quad \text{だから} \quad (\text{左辺})^4 \approx \sum_{j,k} \frac{N^{\frac{3}{2}}}{1 + |j - k|} \approx N^2 \log N$$

矛盾



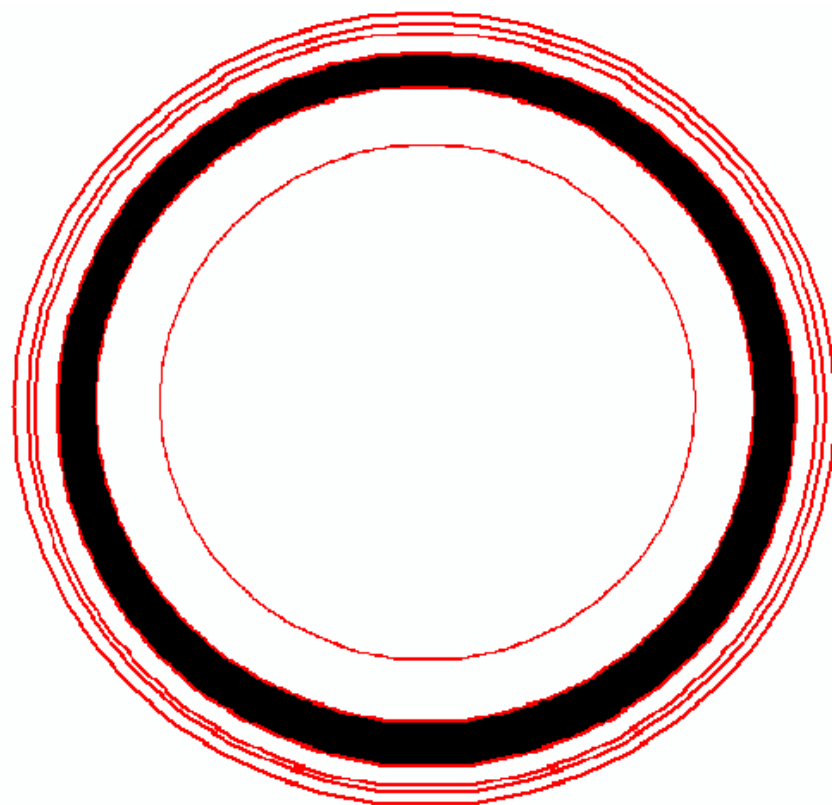
$p \neq 4$ のときは本当のベシコビッチ集合が必要になる .



Bochner-Riesz mean と掛谷問題

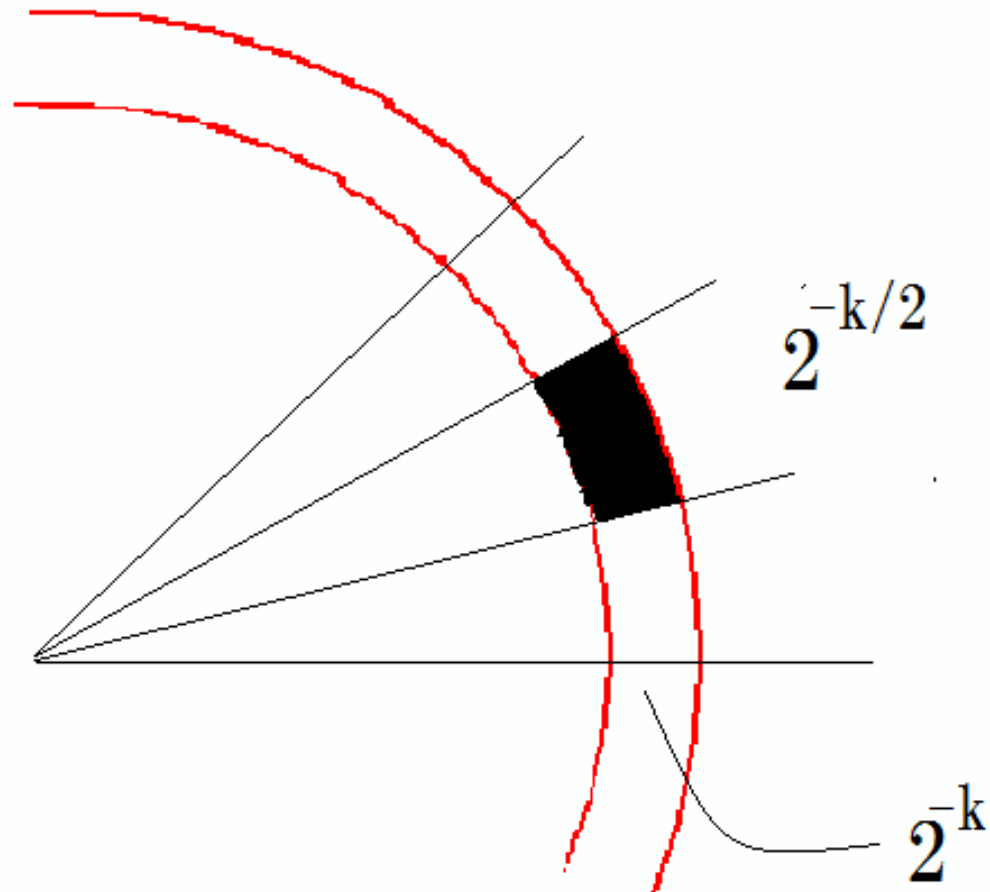
multiplier $m_\lambda(\xi) = (1 - |\xi|^2)_+^\lambda$ は単位円周上に singularity があるから , 円環上にサポートを持つように分解する .

$$1 - \frac{5}{8}2^{-k} \leq |\xi| \leq 1 - \frac{1}{8}2^{-k}$$



その円環をさらに分解する .

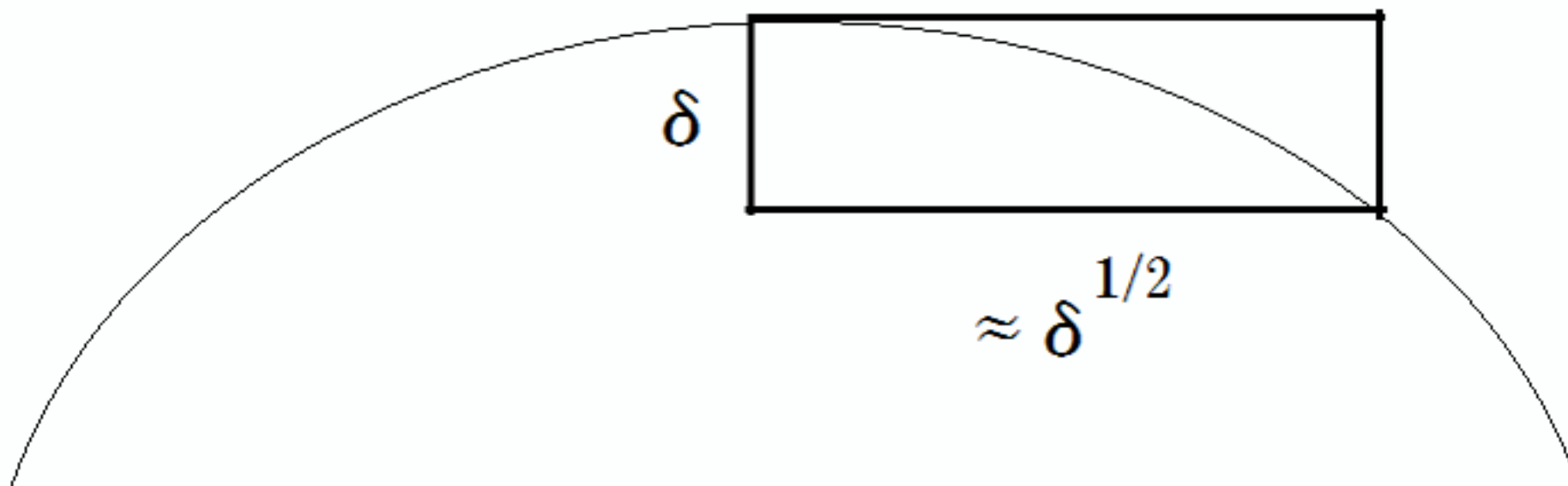
$$\Gamma_{k,\ell} = \{re^{2\pi i\theta} \in \mathbb{R}^2 : |\theta - \ell 2^{-\frac{k}{2}}, 1 - \frac{5}{8}2^{-k} \leq r \leq 1 - \frac{1}{8}2^{-k}\}$$



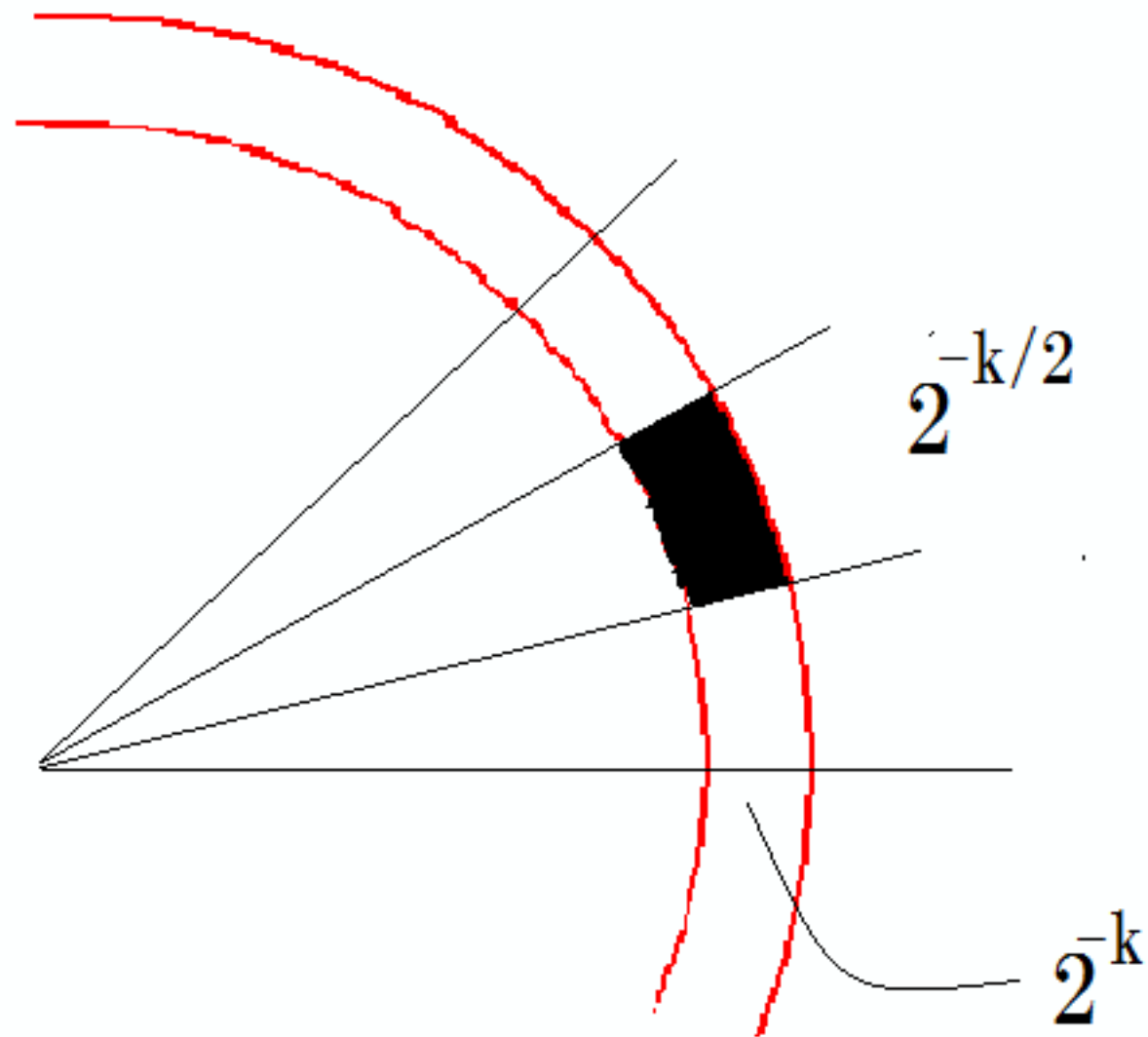
$$1 - \frac{5}{8}2^{-k} \leq |\xi| \leq 1 - \frac{1}{8}2^{-k}$$

$$\Gamma_{k,\ell} = \{re^{2\pi\theta} \in \mathbb{R}^2 : |\theta - \ell 2^{-\frac{k}{2}}, 1 - \frac{5}{8}2^{-k} \leq r \leq 1 - \frac{1}{8}2^{-k}\}$$

$1/2$ のオーダーが出て来るには必然性がある .



このような長方形を円に adjust した長方形という .

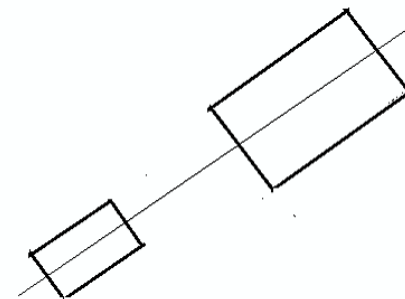


傾いた長方形上にサポートを持った関数の評価が必要になる

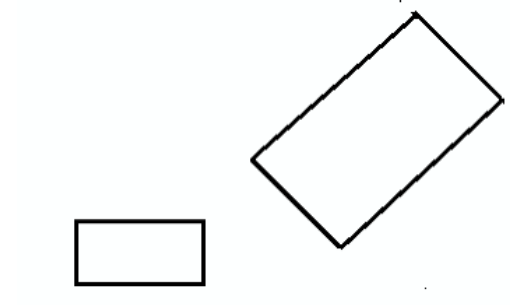
色々な maximal operators

$$\mathcal{M}f(x) := \sup_{R \ni x} \frac{1}{|R|} \int_R |f(y)| dy,$$

(1) 長い辺があるベクトルと平行な長方形



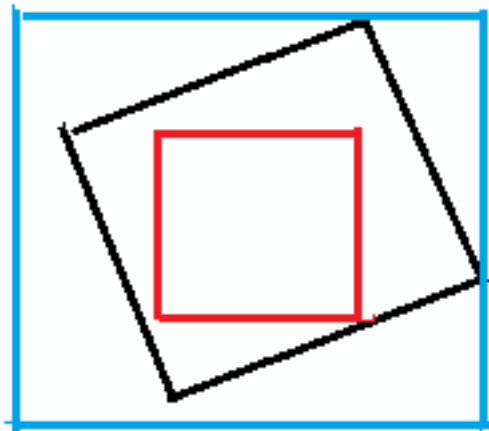
(2) 2辺の長さの比が一定の長方形



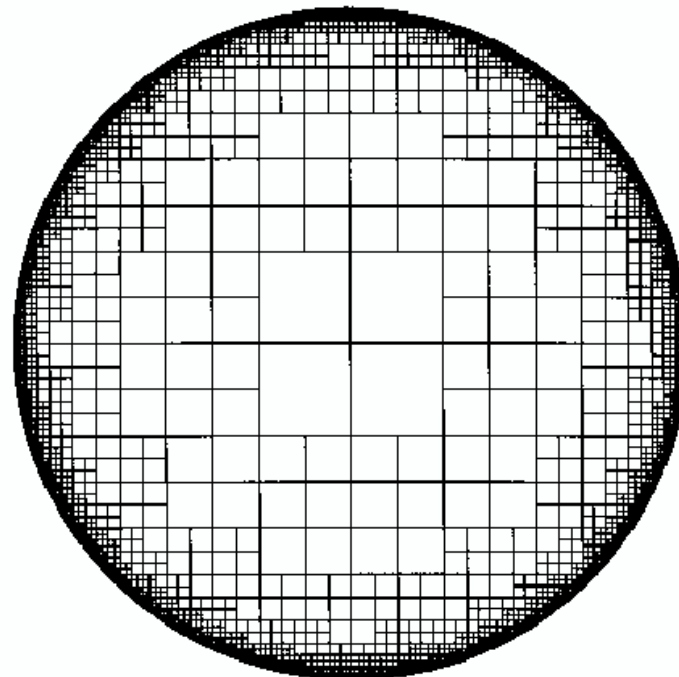
掛谷最大関数に関する「掛谷予想」もある。

Hardy-Littlewood maximal operator $Mf(x) := \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| dy,$
 Q は正方形

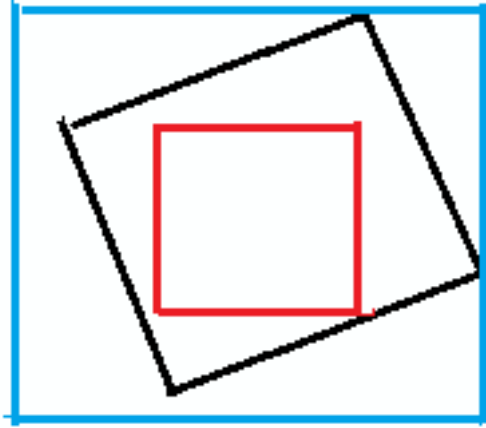
傾いた正方形は怖くない



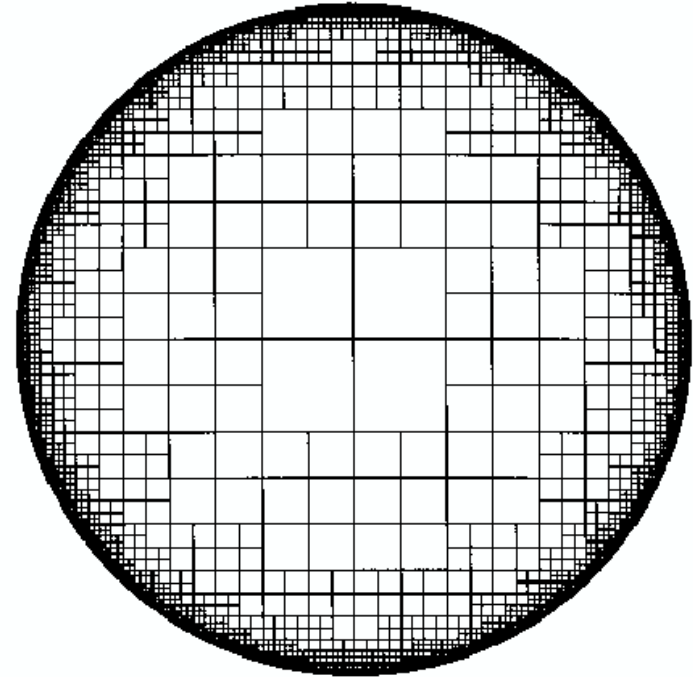
Calderón-Zygmund 分解は
は正方形による分解



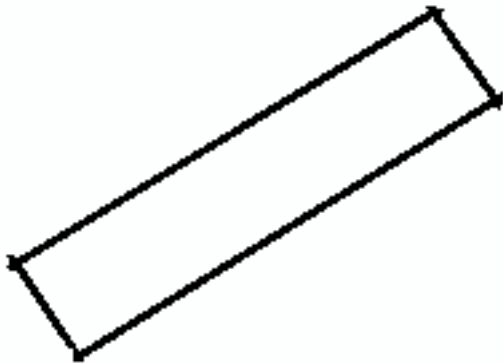
傾いた正方形は怖くない



Calderón-Zygmund 分解は
は正方形による分解



しかし傾いた長方形は?



フーリエ制限定理

ボホナー・リース平均
掛谷問題

問題 f の大きさと $\widehat{f}$ の大きさの関係は？

プランシュレルの定理 $\|\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$

$$\|\widehat{f}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

ハウスドルフ・ヤングの不等式

$$\|\widehat{f}\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \quad 1 \leq p \leq 2, \quad 1/p + 1/p' = 1.$$

$$\|\widehat{f}\|_{L^q(B(0,1))} \leq C \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \quad 1 \leq p \leq 2, \quad q \leq p'.$$

$B(0,1)$ は単位球

$$\begin{aligned}\|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \\ \|\hat{f}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} &\leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.\end{aligned}$$

$B(0, 1)$ を S^{n-1} に変えると話は面白くなる .

$f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ のとき $\hat{f}$ は連続関数になり , $\|\hat{f}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$ だから

$$\|\hat{f}\|_{L^\infty(S^{n-1})} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$$

は自明である . しかし

$$\|\hat{f}\|_{L^2(S^{n-1})} \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

は意味を持たない.

$$\begin{aligned}\|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \cdot \\ \|\hat{f}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} &\leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.\end{aligned}$$

$B(0, 1)$ を S^{n-1} に変えると話を面白くなる .

$f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ のとき $\hat{f}$ は連続関数になり , $\|\hat{f}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$ だから

$$\|\hat{f}\|_{L^\infty(S^{n-1})} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$$

は自明である . しかし

$$\|\hat{f}\|_{L^2(S^{n-1})} \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

は意味を持たない.

60 年代 E.M. Stein は適当な $p \neq 1$ に対して

$$\|\hat{f}\|_{L^2(S^{n-1})} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

が成り立つことを発見した .

フーリエ制限問題

$$\|\widehat{f}\|_{L^q(S^{n-1})} \leq C_{p,q} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

が成り立つ (p, q) を決定せよ .

共役作用素を考えると次と同値
フーリエ拡張問題

$$\|\widehat{gd\sigma}\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \leq C'_{p,q} \|g\|_{L^{q'}(S^{n-1})}$$

が成り立つ (p, q) を決定せよ .

$$\widehat{gd\sigma}(x) = \int_{S^{n-1}} g(\xi) e^{-2\pi i x \cdot \xi} d\sigma(\xi) \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

一般化されたフーリエ制限(拡張)問題

$$\|\widehat{f}\|_{L^q(S)} \leq C_{p,q,S} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

$$\|\widehat{gd\mu}\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \leq C'_{p,q,S} \|g\|_{L^{q'}(S)}$$

が成り立つ (p, q) を決定せよ . S は超曲面 .

$$\|\widehat{gd\sigma}\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \leq C'_{p,q} \|g\|_{L^{q'}(S)}$$

この形で考えると PDE の問題との関係が見えてくる.

$$\begin{cases} i\partial_t u - \frac{1}{2\pi} \Delta u &= 0 \\ u(x, 0) &= f(x) \end{cases} \quad \text{シュレディンガー方程式}$$

$$\text{の解は } u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i(x,t) \cdot (\xi, |\xi|^2)} d\xi = (\widehat{f} d\mu)^\vee,$$

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}} g(\xi, \eta) d\mu(\xi, \eta) := \int_{\mathbb{R}^n} g(\xi, |\xi|^2) d\xi,$$

測度 μ は $S = \{\eta = |\xi|^2\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ (parabola) にサポートを持つ.

一般化されたフーリエ制限(拡張)問題

$$\|\widehat{f}\|_{L^q(S)} \leq C_{p,q,S} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

$$\|\widehat{gd\mu}\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \leq C'_{p,q,S} \|g\|_{L^{q'}(S)}$$

が成り立つ (p, q) を決定せよ． S は超曲面．

$$\|\widehat{gd\mu}\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \leq C'_{p,q} \|g\|_{L^{q'}(S)}$$

の指数 p' は解の無限遠点での減衰の速さに対応している．

Strichartz (1977) は一般化されたフーリエ制限(拡張)定理を使って，シュレディンガー方程式の解の評価を得た．

ここまでではBochner-Riesz mean などは特異点が円周上にあることが問題の難しさであると話してきたが、
制限問題においては**曲面が曲がっている**ことが重要になる。
実際 $\mathbb{R}^2$ において 実軸 $S = \mathbb{R}^1$ への制限を考えると

$$f(x_1, x_2) = \varphi(x_1) \frac{1}{|x_2| + 1} \in L^p(\mathbb{R}^2) \quad p > 1,$$

$$\widehat{f}(\xi_1, 0) = \widehat{\varphi}(\xi_1) \int_{\mathbb{R}^1} \frac{1}{|x_2| + 1} dx_2 = \infty.$$

一般化されたフーリエ制限(拡張)問題

$$\|\widehat{f}\|_{L^q(S)} \leq C_{p,q,S} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

$$\|\widehat{gd\mu}\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \leq C'_{p,q,S} \|g\|_{L^{q'}(S)}$$

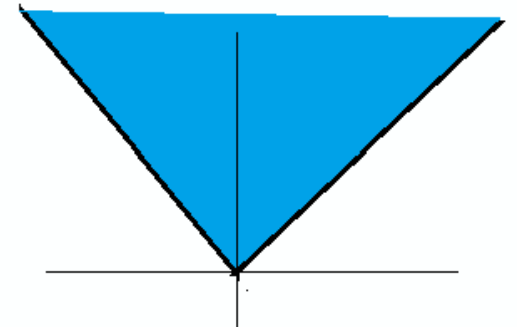
が成り立つ (p, q) を決定せよ。 S は超曲面。

ここまでではBochner-Riesz mean などは特異点が円周上にあることが問題の難しさであると話してきたが、
制限問題においては曲面が曲がっていることが重要になる。
実際 $\mathbb{R}^2$ において 実軸 $S = \mathbb{R}^1$ への制限を考えると

$$f(x_1, x_2) = \varphi(x_1) \frac{1}{|x_2| + 1} \in L^p(\mathbb{R}^2) \quad p > 1,$$

$$\hat{f}(\xi_1, 0) = \hat{\varphi}(\xi_1) \int_{\mathbb{R}^1} \frac{1}{|x_2| + 1} dx_2 = \infty.$$

波動方程式 ($u_{tt} - \Delta u = 0$) の場合は対応する曲面がコーン $\{(\xi, |\xi|)\}$ になるので話は難しくなる。



必要条件

フーリエ拡張問題

$$\|\widehat{gd\sigma}\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \leq C'_{p,q} \|g\|_{L^{q'}(S^{n-1})}$$

$g \equiv 1$ を考えると

$$\widehat{d\sigma}(x) \approx (1 + |x|)^{-\frac{n-1}{2}}$$

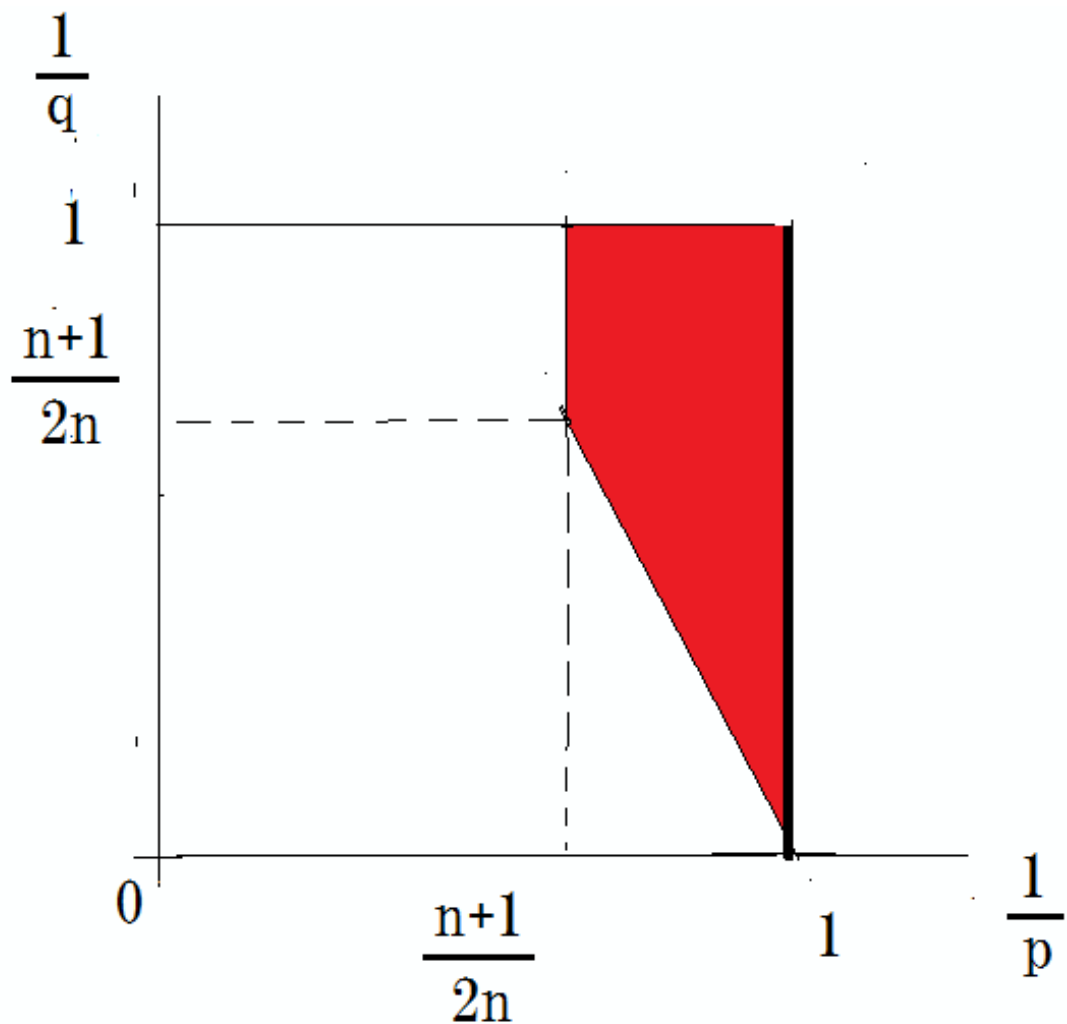
だから $\frac{p'(n-1)}{2} > n$ が必要.

$f_N(x_1, x_2) = \varphi\left(\frac{x_1}{\sqrt{N}}, \frac{x_2}{N}\right)$ のような関数を考えると

$$\frac{1}{q} \geq \frac{n+1}{n-1} \frac{1}{p'} \quad \text{が必要.}$$

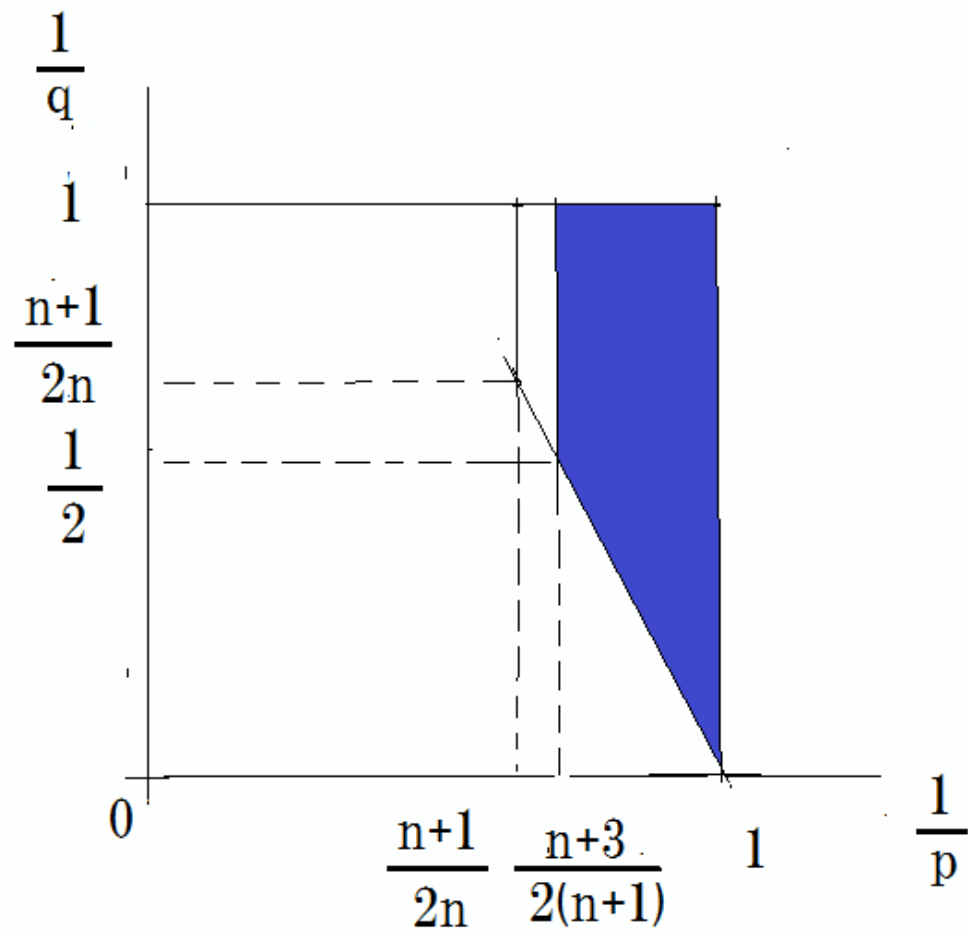
Restriction conjecture

$$\|\widehat{f}\|_{L^q(S^{n-1})} \leq C_{p,q} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$



$$\frac{n+1}{2n} < \frac{1}{p} \leq 1, \quad \frac{1}{q} \geq \frac{n+1}{n-1} \frac{1}{p'}$$

定理 (Stein and Tomas (1975))



$$\frac{n+3}{2(n+1)} < \frac{1}{p} \leq 1, \quad \frac{1}{q} \geq \frac{n+1}{n-1} \frac{1}{p'}$$

Fefferman (1970) は Restriction conjecture と Bochner-Riesz conjecture の関係を示す以下の定理を証明した.

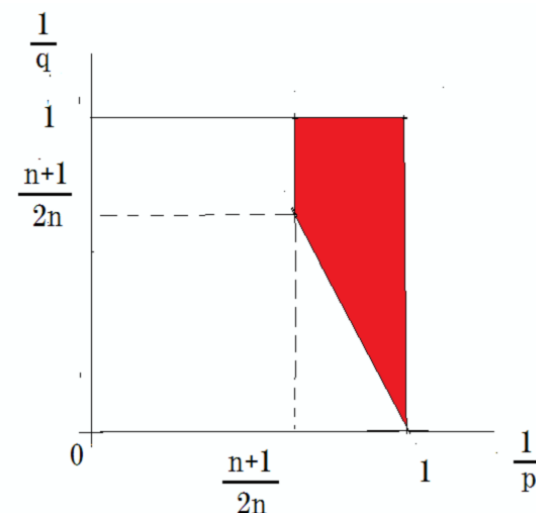
定理 ある $p > 1$ に対して

$$\|\widehat{f}\|_{L^2(S^{n-1})} \leq C_{p,2} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

が成り立つならば $\left| \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \right| < \frac{2\lambda + 1}{2n}$ を満たす λ に対して B^λ は L^p 有界である.

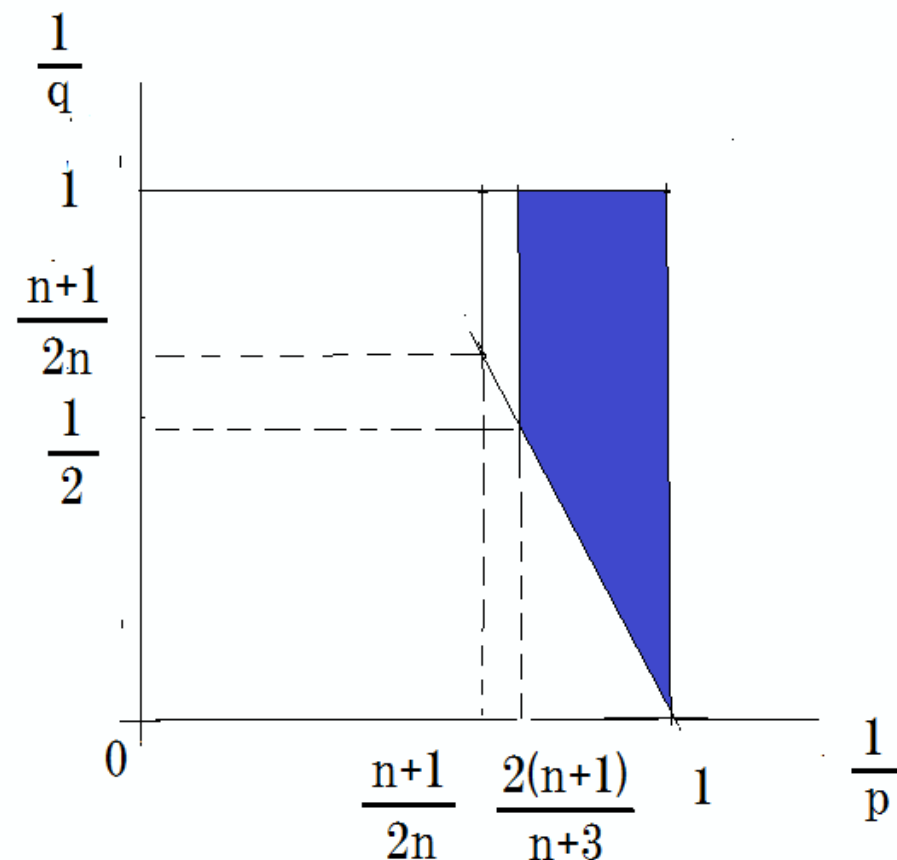
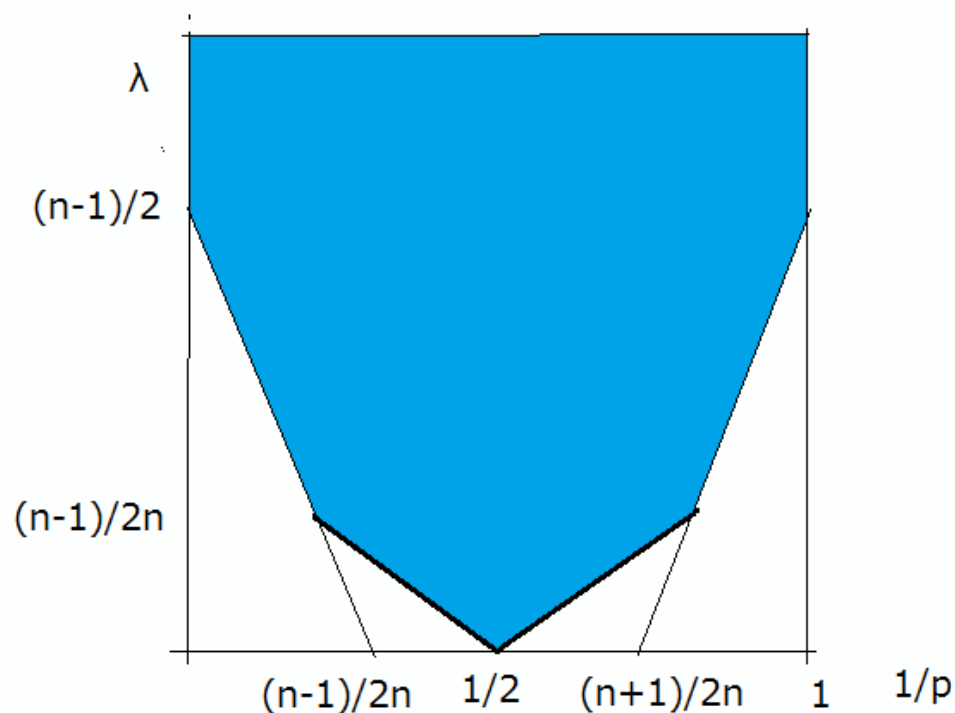
さらに $n = 2$ のとき Restriction conjecture を証明した.

$$\frac{3}{4} < \frac{1}{p} \leq 1, \quad \frac{1}{q} \geq \frac{3}{p'}$$



Keakeya conjecture (Davis, 1971), Bochner-Riesz conjecture, Restriction conjecture はすべて $n = 2$ のときは解決.

Bourgain, Tao 等により $n \geq 3$ の場合の結果の改良がなされている.

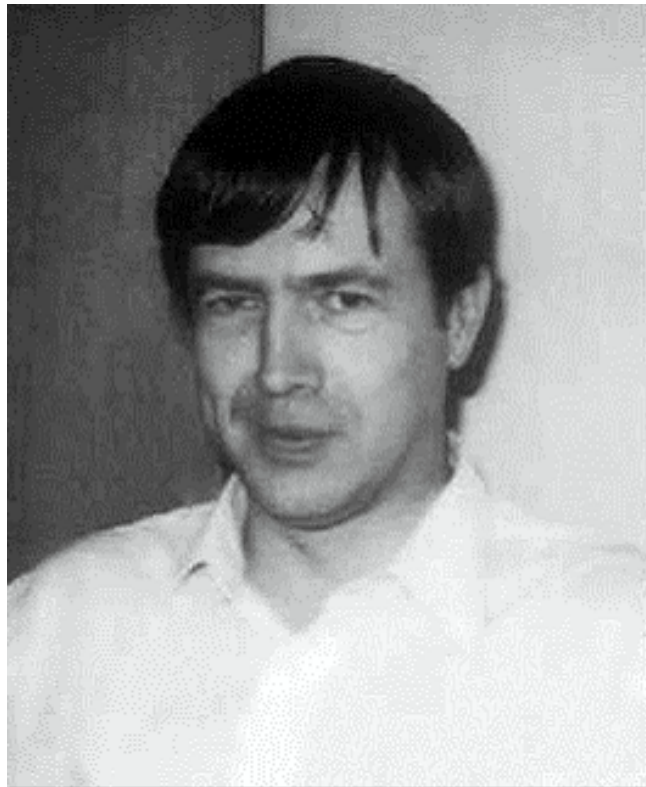


Bourgain, Tao 等により $n \geq 3$ の場合の結果の改良がなされている。

さらに

Restriction conjecture $\Rightarrow$ Kakeya conjecture (Bourgain)

Bochner-Riesz conjecture $\Rightarrow$ Restriction conjecture (Tao)



付録

$1 \leq p < 2$ のとき $f \in L^p(\mathbb{T}^2)$ で, the spherical partial sum が a.e. で発散するような関数が存在する.