Fourier級数の概収束

宮地晶彦（東京女子大学数理科学科）

Encounter with Mathematics 第71回
“フーリエ・カールソンから21世紀の調和解析へ”
2018年11月30日∼12月1日, 中央大学理工学部

$\boxed{1}$ Fourier級数の概収束定理

関数系 $\{e^{2\pi i n x}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ は区間 $(-1/2, 1/2]$ 上の L^2 空間の完全正規直交系である.

$\mathbb{R}$ 上の周期 1 の関数 $f(x)$ の Fourier 級数展開:

$$c_n(f) = \int_{-1/2}^{1/2} f(x) e^{-2\pi i n x}\, dx,$$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f) e^{2\pi i n x}.$$

Fourier 級数の部分和

$$S_N(f)(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f) e^{2\pi i n x}.$$

$$
\begin{aligned}
c_n(f)e^{2\pi inx} &= \int_{-1/2}^{1/2} f(y)e^{-2\pi iny}\,dy\,e^{2\pi inx} \\
&= \int_{-1/2}^{1/2} f(y)e^{2\pi in(x-y)}\,dy \\
&= \int_{-1/2}^{1/2} f(x-y)e^{2\pi iny}\,dy.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S_N(f)(x) &= \int_{-1/2}^{1/2} f(x-y)\sum_{n=-N}^{N} e^{2\pi iny}\,dy \\
&= \int_{-1/2}^{1/2} f(x-y)\,\frac{\sin 2\pi(N+1/2)y}{\sin \pi y}\,dy,
\end{aligned}
$$

$$
D_N(y) = \frac{\sin 2\pi(N+1/2)y}{\sin \pi y} \qquad \text{Dirichlet 核.}
$$

$$
\begin{aligned}
C_N(f)(x) &= \frac{S_0(f)(x) + \cdots + S_{N-1}(f)(x)}{N} \\
&= \int_{-1/2}^{1/2} f(x-y)\, \frac{D_0(y) + \cdots + D_N(y)}{N+1}\, dy \\
&= \int_{-1/2}^{1/2} f(x-y)\, \frac{1}{N+1}\left(\frac{\sin \pi (N+1) y}{\sin \pi y}\right)^2 dy,
\end{aligned}
$$

$$
K_N(y) = \frac{1}{N+1}\left(\frac{\sin \pi (N+1) y}{\sin \pi y}\right)^2 \qquad \text{Fejér 核.}
$$

L. Fejér (1904) f が周期1の連続関数ならば，$C_N(f)(x)$ はすべての x において $f(x)$ に収束する．

$f \in L^1$ ならば，$C_N(f)(x)$ は，ほとんどすべての x において $f(x)$ に収束する．

<u>問題</u>　$S_N(f)(x)$ が各 x において $f(x)$ に収束するか？

Paul du Bois-Reymond (1873) 連続関数 f で $S_N(f)(0) \not\to f(0)$ となるものがある.

A. N. Kolmogorov (1923, 1926) $f \in L^1$ で，$\forall x$ において $\limsup_{N\to\infty} |S_N(f)(x)| = \infty$ となるものが存在する.

<u>問題</u>　連続関数 f で $S_N(f)(x)$ が Lebesgue 測度が正の集合上で発散するものがあるか？

$$f \in L^p(I) \Leftrightarrow \|f\|_{L^p} = \left(\int_I |f(x)|^p \, dx\right)^{1/p} < \infty.$$

<u>定理</u> **(L. Carleson, 1966)** $f \in L^2$ ならば，f の Fourier 級数の部分和 $S_N(f)(x)$ は，ほとんどすべての x において $f(x)$ に収束する（概収束）.

<u>定理</u> **(R. A. Hunt, 1967)** $f \in L^p$, $p > 1$, ならば，f の Fourier 級数の部分和は概収束する.

C. Fefferman (1973) 別証明

M. T. Lacey and C. M. Thiele (2000) 別証明

M. T. Lacey and C. M. Thiele (1997) 双線形Hilbert変換

$\mathrm{p.}v. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x-y)g(x+y)}{y}\,dy$ は，$1/p + 1/q = 1/r$，$r > 2/3$，のとき

$L^p(\mathbb{R}) \times L^q(\mathbb{R}) \to L^r(\mathbb{R})$ で有界.

Carlesonに端を発し，Feffermanを経て，Lacey-Thieleによって整備された方法は，今日，Time-frequency analysisとして発展し利用されている.

長さTの区間上の関数のFourier級数展開

$$c_{n,T}(f) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)e^{-2\pi inx/T}\,dx,$$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{n,T}(f)e^{2\pi inx/T}.$$

以下，$f \in L^2$ の **Fourier** 級数の部分和が概収束することの **Fefferman** による証明を紹介する.

$\boxed{2}$ $\forall f \in L^2$ について概収束を証明するためには

- 最大部分和 $S_*(f)(x) = \sup_N |S_N(f)(x)|$ の評価 $\|S_*(f)\|_{L^1} \leq c\|f\|_{L^2}$ を示せばよい.

任意の $f \in L^2$ に対して $\limsup_{N\to\infty} |S_N(f)(x) - f(x)| = 0$ a.e. を示したい.

$\varphi \in C^\infty$ で $\|f - \varphi\|_{L^2} < \epsilon$ なるものをとる.

$\lim_{N\to\infty} S_N(\varphi)(x) = \varphi(x)$ だから

$$\begin{aligned}
&\limsup_{N\to\infty} |S_N(f)(x) - f(x)| \\
&= \limsup_{N\to\infty} |S_N(f-\varphi)(x) - (f-\varphi)(x)| \\
&\leq S_*(f-\varphi)(x) + |(f-\varphi)(x)|.
\end{aligned}$$

$\|\limsup_{N\to\infty} |S_N(f)(x) - f(x)|\|_{L^1} \leq (c+1)\|f-\varphi\|_{L^2} < (c+1)\epsilon.$

$f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ として不等式を示せばよい.

$$S_*(f)(x) = \sup_N \left| \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\sin 2\pi(N+1/2)y}{\sin \pi y} f(x-y)\,dy \right|$$ の代わりに

$$\sup_{N\in\mathbb{R}} \left| \int_{-1/2}^{1/2} \frac{e^{2\pi i N y}}{y} f(x-y)\,dy \right|$$ の評価ができればよい.

f を任意にひとつ固定するとき,

$$\frac{1}{2}\sup_{N\in\mathbb{R}} \left| \int_{-1/2}^{1/2} \frac{e^{2\pi i N y}}{y} f(x-y)\,dy \right| \le \left| \int_{-1/2}^{1/2} \frac{e^{2\pi i N(x) y}}{y} f(x-y)\,dy \right|$$

なる関数 $N : (0,1] \to \mathbb{R}$ をとれる.

- 任意に関数 $N : (0,1] \to \mathbb{R}$ をとり，線形写像

$$Tf(x) = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{e^{2\pi i N(x) y}}{y} f(x-y)\,dy$$

に対して，関数 $N(\cdot)$ に依らない評価 $\|Tf\|_{L^1} \le c\|f\|_{L^2}$ を示せばよい.

$\boxed{3}$ 線形写像Tを分解する

次のようなθをとる: $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp}\theta \subset \{y \in \mathbb{R} \mid 1/4 \le |y| \le 1\}$, $\theta(-y) = \theta(y)$, $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \theta(2^k y) = 1 \ (y \ne 0)$.

$$\frac{1}{y} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{y}\theta(2^k y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^k y}\theta(2^k y)$$

$\psi(y) = \dfrac{1}{y}\theta(y)$とおくと,

$\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp}\psi \subset \{y \in \mathbb{R} \mid 1/4 \le |y| \le 1\}$, $\psi(-y) = -\psi(y)$,

$$Tf(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \int e^{2\pi i N(x) y}\, 2^k \psi(2^k y) f(x-y)\, dy + (\dots).$$

定義　2進区間とは$(2^{-k}m, 2^{-k}(m+1)]$，$k, m \in \mathbb{Z}$，の形の$\mathbb{R}$の区間のこと．タイルとは，2つの2進区間I, ωのペア$[I, \omega]$で，$I \subset (0,1]$と$|I| \cdot |\omega| = 1$をみたすもののこと．タイルの全体をDと書く．

タイルを使ってTを

$$Tf(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\substack{[I,\omega]\in \mathrm{D} \\ |I|=2^{-k}}} 1\{(x, N(x)) \in I \times \omega\} \int e^{2\pi i N(x) y}\, 2^k \psi(2^k y) f(x-y)\, dy$$

と分解する．

定義　$s = [I, \omega] \in \mathrm{D}$に対して，

$$E(s) = E(I,\omega) = \{x \mid (x, N(x)) \in I \times \omega\} \subset I,$$

$$T_s f(x) = 1_{E(s)}(x) \int e^{2\pi i N(x) y}\, 2^k \psi(2^k y) f(x-y)\, dy$$

$$= 1_{E(s)}(x) \int e^{2\pi i N(x)(x-y)}\, 2^k \psi(2^k (x-y)) f(y)\, dy$$

（$|I| = 2^{-k}$）と定義する．

評価すべき線形作用素は

$$Tf(x) = \sum_{s \in \mathbf{D}} T_s f(x)$$

と書ける.

$s = [I, \omega]$ のとき T_s は

$$T_s f(x) = 1_{E(s)}(x) T_s(1_{3I} f)(x)$$

をみたす.

T_s の共役作用素は

$$T_s^* g(y) = \int_{E(s)} g(x) e^{-2\pi i N(x)(x-y)} 2^k \overline{\psi(2^k(x-y))}\, dx$$

（$s = [I, \omega]$, $|I| = 2^{-k}$）で，このFourier変換は

$$(T_s^* g)^\wedge(\xi) = \int_{E(s)} g(x) \overline{\widehat{\psi}\left(\frac{\xi - N(x)}{|\omega|}\right)}\, e^{-2\pi i x \xi}\, dx$$

となる.

集合 $\mathbf{E} \subset \mathbf{D}$ に対して $T(\mathbf{E}) = \sum_{s \in \mathbf{E}} T_s$ と書く．評価したい作用素は $T = T(\mathbf{D})$ である．

２進区間 ω に対して，ω を含む２進区間で ω の 4 倍の長さを持つものを ω' とするとき，$3\omega \subset w'$ ならば，すなわち ω が w' を 4 等分してできる 4 個の２進区間のうち中央の 2 個のどちらかであるならば，ω は <u>セントラル</u> な２進区間であると言う．タイル $s = [I, \omega]$ の ω がセントラルであるとき，s は <u>アドミシブル</u> なタイルであると言う．$\mathbf{D}$ に属すアドミシブルなタイルの全体を $\mathbf{D}_{\mathrm{admis}}$ と書く．

ω を平行移動して平均すれば $T(\mathbf{D}_{\mathrm{admis}})$ から $2^{-1}T(\mathbf{D})$ が得られるので，$T(\mathbf{D})$ の代わりに $T(\mathbf{D}_{\mathrm{admis}})$ の評価を示せばよい．

$\boxed{4}$ タイルの密度と順序関係

<u>定義</u>　$s = [I, \omega] \in \mathrm{D}$ に対して，

$$\begin{aligned}\rho(s) &= \rho(I, \omega) \\ &= \sup\left\{ \frac{|E(I', \omega')|}{|I'|} \left(1 + \frac{\mathrm{dis}\,(\omega, \omega')}{|\omega|}\right)^{-1} \,:\, [I', \omega']\,\text{タイル},\ I' \supset I \right\}.\end{aligned}$$

<u>定義</u>　$\mathrm{D}_n = \{s \in \mathrm{D}_{\mathrm{admis}} \mid 2^{-n-1} < \rho(I, \omega) \leq 2^{-n}\}.$

$T(\mathrm{D}_{\mathrm{admis}}) = \sum_{n=0}^{\infty} T(\mathrm{D}_n)$ である．

$s = [I, \omega] \in \mathrm{D}_n \ \Rightarrow\ \|T_s\|_{L^2 \to L^2} \approx \left(\dfrac{|E(s)|}{|I|}\right)^{1/2} \leq 2^{-n/2}$ は容易にわかる．

Fefferman の議論をごく大雑把に言うと，

$$\|T(\mathrm{D}_n)\|_{L^2 \to L^2} \approx \sup_{s \in \mathrm{D}_n} \|T_s\|_{L^2 \to L^2} \lesssim 2^{-n/2}$$

に相当することを示して，

$$\|T(\mathrm{D}_{\mathrm{admis}})\|_{L^2\to L^2} \leqq \sum_{n=0}^{\infty} \|T(\mathrm{D}_n)\|_{L^2\to L^2} \lesssim \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n/2} \approx 1$$

を示す，というものである．(実際はこの評価よりずっと弱い評価が示される.)

<u>定義</u> (タイルの間の順序関係)．2つのタイル $s = [I, \omega]$，$s' = [I', \omega']$ に対して，$I \subset I'$ かつ $\omega \supset \omega'$ のとき $s \leq s'$ と定義する．

D_n に属すタイル s のうち，$s < s_1 < s_2 < \cdots < s_{n+10}$ なる $n+10$ 個のタイル s_j が D_n の中にとれるような s の全体を D_n^0 とする．

<u>定義</u>　$|E(J,\sigma)|/|J| > 2^{-n-1}$ をみたすタイル $[J,\sigma]$ のうち，タイルの順序関係 $\leq$ に関して極大であるもの全体を $\{t_k^n\}_k$，$t_k^n = [J_k^n, \sigma_k^n]$，とする．

<u>補題 1</u>　$s \in \mathrm{D}_n^0$ ならば，或る t_k^n について $s \leq t_k^n$.

<u>補題 2</u>　$\sum_k |J_k^n| \leq 2^{n+1}$.

$\boxed{5}$ ツリー

定義　$\mathrm{A} \subset \mathrm{D}_{\mathrm{admis}}$ が $t \in \mathrm{D}$ をトップとするツリーであるとは，次の２条件が成り立つこと:

(i) すべての $s \in \mathrm{A}$ について $s \leq t$;

(ii) $s_1, s_2 \in \mathrm{A}$，$s \in \mathrm{D}_{\mathrm{admis}}$，$s_1 < s < s_2 \Longrightarrow s \in \mathrm{A}$.

補題３　$\mathrm{A} \subset \mathrm{D}_n$ かつ A がツリーならば，$\|T(\mathrm{A})\|_{L^2 \to L^2} \lesssim 2^{-n/2}$.

A が $t = [J, \sigma]$ をトップとするツリーであるとし，$\xi_0 \in \sigma$ をひとつとる．$x \in (0, 1]$ に対して，$(x, N(x)) \in I \times \omega$ をみたす $[I, \omega] \in \mathrm{A}$ のうち，$|I|$ が最大のものを $[I_1(x), \omega_1(x)]$，最小のものを $[I_0(x), \omega_0(x)]$ とする．また，

$$\mathcal{J} = \{k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid \xi_0 \text{ を含む長さ } 2^k \text{ の２進区間がセントラル}\}$$

とする.

すると，

$$
\begin{aligned}
&T(\mathrm{A})f(x) \\
&= \sum_{\substack{k\in J,\\ |I_0(x)|\le 2^{-k}\le |I_1(x)|}} \int e^{2\pi i N(x) y}\, 2^k \psi(2^k y) f(x-y)\, dy \\
&= \sum_{\substack{k\in J,\\ |I_0(x)|\le 2^{-k}\le |I_1(x)|}} \int e^{2\pi i \xi_0 y}\, 2^k \psi(2^k y) f(x-y)\, dy + (\text{error}).
\end{aligned}
$$

$T(\mathrm{A})f$ は，最大 Hilbert 変換

$$
H_*(f)(x) = \sup_{\epsilon>0} \left| \int_{|y|>\epsilon} \frac{f(x-y)}{y}\, dy \right|
$$

の評価法と Hardy-Littlewood 最大関数を使って評価できる.

$\boxed{6}$ ツリーの和

A が $[I_0, \omega_0]$ をトップとするツリーであり，かつすべての $[I, \omega] \in \mathrm{A}$ について $21\, I \subset I_0$ が成り立つとき，A は <u>良いツリー</u> であると言う.

A が $[I_0, \omega_0]$ をトップとする良いツリーなら，

$$
\begin{aligned}
T(\mathrm{A})f &= 1_{I_0} T(\mathrm{A})(1_{I_0} f), \\
T^*(\mathrm{A})g &= 1_{I_0} T^*(\mathrm{A})(1_{I_0} g)
\end{aligned}
$$

が成り立つ.

<u>補題４</u>　 $\mathrm{A}_i \subset \mathrm{D}_n$ が $[I_i, \omega_i]$ をトップとする良いツリーで $\{I_i\}$ が互いに素ならば，

$$
\Big\| \sum_i T(\mathrm{A}_i) \Big\|_{L^2 \to L^2} = \sup_i \|T(\mathrm{A}_i)\|_{L^2 \to L^2} \lesssim 2^{-n/2}.
$$

<u>補題５</u>　$\{\mathrm{A}_i\}$, $\{\mathrm{A}'_k\} \subset \mathrm{D}_n$,

A_i は $[\boldsymbol{I}_i, \boldsymbol{\omega}_i]$ をトップとする良いツリー，$\{\boldsymbol{I}_i\}$ は互いに素,

A'_k は $[\boldsymbol{I}'_k, \boldsymbol{\omega}'_k]$ をトップとする良いツリー，$\{\boldsymbol{I}'_k\}$ は互いに素,

とし，さらに次を仮定する：

(i) すべての $\boldsymbol{k}$ について或る $\boldsymbol{i}$ が存在して $\boldsymbol{I}'_k \subset \boldsymbol{I}_i$;

(ii) すべての $\boldsymbol{i}$ と $\boldsymbol{k}$ について,

$$\mathbf{dis}\,(\boldsymbol{\omega}_i, \boldsymbol{\omega}'_k) \geq \boldsymbol{R}\,\mathbf{sup}\{|\boldsymbol{\omega}| \mid [\boldsymbol{I}, \boldsymbol{\omega}] \in \mathrm{A}_i \cup \mathrm{A}'_k\}.$$

このとき，$\mathrm{B} = \bigcup_i \mathrm{A}_i$，$\mathrm{B}' = \bigcup_k \mathrm{A}'_k$ とすると，任意の $\boldsymbol{L} > \mathbf{0}$ について,

$$(\boldsymbol{T}(\mathrm{B})\boldsymbol{f}, \boldsymbol{T}(\mathrm{B}')\boldsymbol{g}) = \mathbf{0},$$
$$|(\boldsymbol{T}^*(\mathrm{B})\boldsymbol{f}, \boldsymbol{T}^*(\mathrm{B}')\boldsymbol{g})| \lesssim \boldsymbol{R}^{-\boldsymbol{L}}\|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{L}^2}\|\boldsymbol{g}\|_{\boldsymbol{L}^2}.$$

$\boxed{7}$ 概収束定理の証明

復習

$\boldsymbol{T}(\mathrm{D}) = \sum_{s \in \mathrm{D}} \boldsymbol{T}_s$.

$\boldsymbol{T}(\mathrm{D}_{\mathrm{admis}}) = \sum_{s \in \mathrm{D}_{\mathrm{admis}}} \boldsymbol{T}_s$.

$\mathrm{D}_n = \{s \in \mathrm{D}_{\mathrm{admis}} \mid 2^{-n-1} < \rho(s) \leq 2^{-n}\}$.

$\boldsymbol{T}(\mathrm{D}_{\mathrm{admis}}) = \sum_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{T}(\mathrm{D}_n)$.

各 n について，$\|\boldsymbol{T}(\mathrm{D}_n)\|_{L^2 \to L^2} \lesssim 2^{-n/2}$ を示したい.

- $s \in \mathrm{D}_n \ \Rightarrow \ \|\boldsymbol{T}_s\|_{L^2 \to L^2} \lesssim 2^{-n/2}$
- $\mathrm{A} \subset \mathrm{D}_n$ かつ A がツリーならば $\|\boldsymbol{T}(\mathrm{A})\|_{L^2 \to L^2} \lesssim 2^{-n/2}$.
- 補題４，補題５

$\mathbf{D}_n$ をツリーに分割する．

ℓ を自然数の変数として，以下のような $\mathbf{A}_{n,i,k}$, $\mathbf{B}_{n,i,j}$ を構成することができる:

$$\mathbf{D}_n = \bigcup_{i=0}^{\ell+10n} \bigcup_{j=1}^{2^{\ell+10n}} \mathbf{B}_{n,i,j} + (\dots),$$

$$\mathbf{B}_{n,i,j} = \bigcup_{k\in\mathcal{K}_j} \mathbf{A}_{n,i,k},$$

$\mathbf{A}_{n,i,k}$ は良いツリーで，そのトップの I 区間は互いに素,

$\|T(\mathbf{B}_{n,i,j})\|_{L^2\to L^2} \lesssim 2^{-n/2}$ （補題４）,

$j \neq j'$ ならば，$\mathbf{B}_{n,i,j}$ と $\mathbf{B}_{n,i,j'}$ は，補題５の仮定を $R = 2^{2\ell+20n}$ でみたす,

$$j \neq j' \;\Rightarrow\; T^*(\mathbf{B}_{n,i,j'})T(\mathbf{B}_{n,i,j}) = 0,$$

$$j \neq j' \;\Rightarrow\; \|T(\mathbf{B}_{n,i,j'})T^*(\mathbf{B}_{n,i,j})\|_{L^2\to L^2} \lesssim 2^{-10\ell-100n}.$$

$\sum_{j=1}^{2^{\ell+10n}} T(\mathrm{B}_{n,i,j})$ の $L^2 \to L^2$ ノルムを評価するのに次の補題を使う.

<u>補題</u>　$S_j : L^2 \to L^2$, $j = 1, 2, \ldots, H$ について,

(i) $\|S_j\|_{L^2\to L^2} \le \delta$,

(ii) $j \ne j' \ \Rightarrow \ S_{j'}^* S_j = 0$, $\|S_{j'} S_j^*\|_{L^2\to L^2} \le \delta^2/H$

が成り立つならば, $\|\sum_{j=1}^{H} S_j\|_{L^2\to L^2} \le \sqrt{2}\,\delta$.

注意. もしも $j \ne j'$ のとき, $S_{j'}^* S_j = 0$ かつ $S_{j'} S_j^* = 0$ ならば,
$\|\sum_{j=1}^{H} S_j\|_{L^2\to L^2} = \sup_j \|S_j\|_{L^2\to L^2}$ である.
もう少し一般的な補題が Cotlar-Stein の補題として知られている.

この補題を用いて,

$$\Bigg\| \sum_{j=1}^{2^{\ell+10n}} T(\mathrm{B}_{n,i,j}) \Bigg\|_{L^2\to L^2} \lesssim 2^{-n/2}$$

が言える.

結局，すべての自然数ℓについて

$$|\{x \in (0,1] \mid |T(\mathrm{D}_{\mathrm{admis}})f(x)| > \lambda\}| \lesssim 2^{-\ell/2} + \ell^4 \left(\frac{\|f\|_{L^2}}{\lambda}\right)^2$$

が示される．

上の不等式はすべてのℓに対して成り立つので，ℓをうごかして最良化すると，任意の$\epsilon > 0$について

$$|\{x \in (0,1] \mid |T(\mathrm{D}_{\mathrm{admis}})f(x)| > \lambda\}| \lesssim \left(\frac{\|f\|_{L^2}}{\lambda}\right)^{2-\epsilon}$$

が出る．λについて積分して

$$\|T(\mathrm{D}_{\mathrm{admis}})f\|_{L^{2-\epsilon}} \lesssim \|f\|_{L^2}$$

が言える．