三角形の圧縮による掛谷集合の構成

田中仁

筑波技術大学

P1

本講演では三角形の圧縮による掛谷集合の構成法について解説する．
$0 < \delta \ll 1$ を非常に小さいパラメーターとして，集合 $E \subset \mathbb{R}^n$ の δ 近傍を

$$\mathcal{N}_\delta(E) := \{x \in \mathbb{R}^n : \ \mathrm{dist}\,(x, E) < \delta\}$$

と表す．特に，単位線分の δ 近傍を「δ チューブ」と表す．
単位球面 $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ 上に δ 分離した最大数のベクトル列 $\{\omega_i\}_{i=1,2,\ldots}$ を取る．(総数は $\sim \delta^{1-n}$ となる.) 各 ω_i に対して，同じ方向を持つ δ チューブ T_{ω_i} を一つずつ用意して，$\{T_{\omega_i}\}_{i=1,2,\ldots}$ をその方向を変えることなく平行移動させてできるだけ小さいエリアへ押し込めることを考えたい．
そのエリアは，2 次元に於いて $\sim (\log(1/\delta))^{-1}$ となることが Keich によって証明されている．[1]

[1] U. Keich: 'On L^p bounds for Kakeya maximal functions and the Minkowski dimension in $\mathbb{R}^2$', Bull. London Math. Soc., **31** (1999), 213–221.

P2

以下の記法を用いる．

$$l = \{(x, mx + b) : x \in [0, 1]\}$$

を線分と呼ぶことにして，

$$m(l) := m \in [0, 1], \qquad b(l) := b \in [-1, 0]$$

と約束する．
$\delta > 0$ と線分 l に対して，三角形 $R_\delta(l)$ を頂点

$$\{(0, l(0)), (0, l(0) - \delta), (1, l(1))\}$$

により定義する．
$R_\delta(l)$ を l の正の向きに $2\sqrt{2}$ 平行移動させた三角形を $\vec{R}_\delta(l)$ と表す．

P3

補題

すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して，次のような 2^n 個の線分 $\{l_i^n : i = 0, 1, \ldots, 2^n - 1\}$ が存在する．
各線分の傾きは $m(l_i^n) = i2^{-n}$ であり，三角形 $R_{2^{-n}}(l_i^n)$ は以下の二つの性質を持つ．

(i) $\left| \bigcup_i R_{2^{-n}}(l_i^n) \right| < \dfrac{2}{n}.$

(ii) 平行移動させた三角形 $\vec{R}_{2^{-n}}(l_i^n)$ は互いに共通部分を持たない．

P4

次の各ステージにおいて三角形を圧縮する.
1. 頂点 $\{(0,0),(0,-1),(1,0)\}$ の三角形から始める.
鉛直辺に中点 $\left(0,-\dfrac{1}{2}\right)$ を加えこれを二つの三角形に切り分ける.
下側に位置する三角形を二つの三角形の鉛直辺がぴったり重なるよう上にスライドさせる.

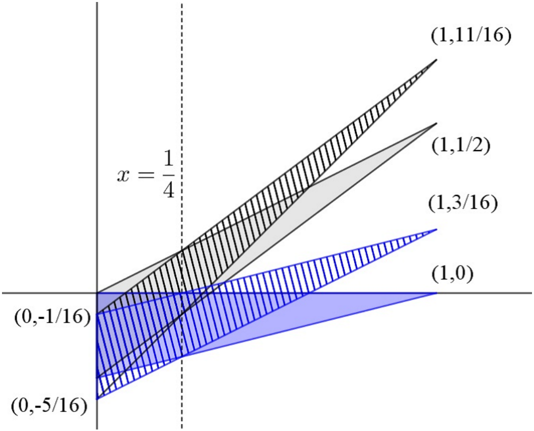

Figure: ステップ 1． $n = 4$ のとき．

P5

2. 得られた二つの三角形の各々について，鉛直辺に中点を加えこれを二つの三角形に切り分け新たな対を作る．
各対で下側に位置する三角形を，対をなす三角形のそれぞれの上辺の交点が $x = \dfrac{1}{n}$ となるよう上にスライドさせる．

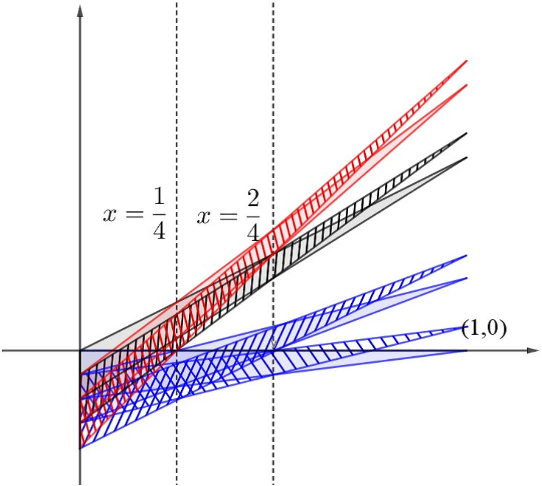

Figure: ステップ 2． $n = 4$ のとき．

P6

k. ($k = 3, 4, \ldots, n$) 得られた 2^{k-1} 個の三角形の各々について，鉛直辺に中点を加えこれを二つの三角形に切り分け新たな対を作る．
各対で下側に位置する三角形を，対をなす三角形のそれぞれの上辺の交点が $x = \dfrac{k-1}{n}$ となるよう上にスライドさせる．
これらのステージにより 2^n 個の面積が共に 2^{-n-1} である三角形の族が得られる．
構成法は複雑で一見してこの族を数式を通して認識することは困難に思われる．ところが，Keich はこれに簡明な表現を与えた．

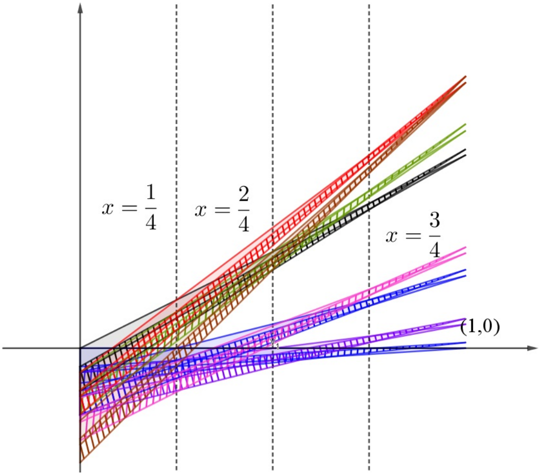

Figure: ステップ 3. $n = 4$ のとき.

P7

三角形を切り分け上にスライドさせたとき，各辺の傾きは不変であることを想起しておこう．
$i = 0, 1, \ldots, 2^n - 1$ とし，2^n 個の各三角形の上辺をなす線分を l_i^n として，この傾き不変性を適用すれば，それは

$$m(l_i^n) = i2^{-n}$$

を満たすようにできる．
すなわち，ステージ 1 において，l_i^n は 2 点

$$\{(0, -i2^{-n}), (1, 0)\}$$

を結ぶ線分であったことになる．
(構成法はこの最初の順序を保たないことに注意しておく．)
この y 切片 $b(l_i^n)$ はどのように計算されるであろうか？

P8

ステージ k においてどれだけ上にスライドさせたかは，スライド量 t と対をなす三角形のそれぞれの上辺の交点の x 座標が，

$$t2^k + x = 1 \tag{1}$$

を満たすことから，

$$\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) 2^{-k}$$

と計算できる．
(1) は，t, x が 1 次式を満たすこと，さらに $t = 0$, $x = 1$ および $t = 2^{-k}$, $x = 0$ をそれぞれ満たさなければならないことから従う．

P9

$k = 1, 2, \ldots, n$ について，0 または 1 の値のみを取る関数 $\varepsilon_i^n(k)$ を一意に定めて

$$m(I_i^n) = i2^{-n} = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_i^n(k) 2^{-k}$$

と表すことができる．
これは $i2^{-n}$ の 2 進数による小数表示である．
この小数表示を用いると，ステージ k において，$\varepsilon_i^n(k) = 0$ であれば I_i^n は対の上側の三角形に含まれ，$\varepsilon_i^n(k) = 1$ であれば対の下側の三角形に含まれていたことが分かる．

P10

ゆえに，ステージ 1 の y 切片にステージ k の各スライド量を順次加えて，

$$\begin{aligned} b(l_i^n) &= -i2^{-n} + \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_i^n(k)\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)2^{-k} \\ &= -\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_i^n(k)2^{-k} \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_i^n(k)\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)2^{-k} \\ &= -\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_i^n(k)\frac{k-1}{n}2^{-k}. \end{aligned}$$

P11

これら二つの等式を

$$l_i^n(x) = m(l_i^n)x + b(l_i^n)$$

に代入して，次の簡明な表現を得る．

$$l_i^n(x) = \sum_{k=1}^{n} \left(x - \frac{k-1}{n} \right) \varepsilon_i^n(k) 2^{-k}. \tag{2}$$

ひとたびこの数式による表現を得れば，初等幾何によらず，代数によって計算を進めることができる．

P12

(i) を確認しよう．次を示せば十分である．ここで

$$E_n = \bigcup_i R_{2^{-n}}(I_i^n)$$

とおくことにしよう．

主張

どのような $\kappa = 1, 2, \ldots, n$ と，どのような

$$x \in \left[\frac{\kappa - 1}{n}, \frac{\kappa}{n}\right)$$

についても E_n の x における切り口の測度は $\dfrac{2}{n}$ 以下である．

P13

三角形 $R_{2^{-n}}(l_i^n)$ の上辺は $l_i^n(x)$, $0 \leq x \leq 1$, と表されたから，その下辺は,

$$h(x) := 2^{-n}(x-1)$$

として，$l_i^n(x) + h(x)$, $0 \leq x \leq 1$, と表されることは良いであろう．
これより，三角形 $R_{2^{-n}}(l_i^n)$ の x における切り口は

$$\{x\} \times [l_i^n(x) + h(x),\ l_i^n(x)]$$

と書ける．これを念頭に置いて考えて行こう．

P14

$0.\varepsilon(1)\varepsilon(2)\cdots\varepsilon(n) \geq 0$ を任意の 2 進小数表示とし,

$$f(x) := \sum_{k=1}^{\kappa} \left(x - \frac{k-1}{n} \right) \varepsilon(k) 2^{-k},$$

$$g(x) := \sum_{k=\kappa+1}^{n} \left(x - \frac{k-1}{n} \right) \varepsilon(k) 2^{-k}$$

とおいて,

$$\{x\} \times [f(x) + g(x) + h(x), f(x) + g(x)]$$

とすれば, これはどれか一つの三角形の x における切り口に対応している.

まず, $f(x)$ を固定する. すなわち, $\varepsilon(1), \varepsilon(2), \ldots, \varepsilon(\kappa)$ を固定する. そのうえで, $g(x)$ を変化させてみよう. すなわち, $\varepsilon(\kappa+1), \varepsilon(\kappa+2), \ldots, \varepsilon(n)$ を自由に動かしてみる.

P15

もし，$\varepsilon(\kappa+1)=\varepsilon(\kappa+2)=\cdots=\varepsilon(n)=0$ とすれば，$g(x)=0$ である．
$x\in\left[\dfrac{\kappa-1}{n},\dfrac{\kappa}{n}\right)$ であるから，いつでも $g(x)\leq 0$ であり，特に
$\varepsilon(\kappa+1)=\varepsilon(\kappa+2)=\cdots=\varepsilon(n)=1$ とした場合が最も小さい値を取る．
ゆえに，$g(x)$ を変化させて現れるすべての区間を合併してできる区間の長さは次のように表される．

$$2^{-n}(1-x)+\sum_{k=\kappa+1}^{n}\left(\frac{k-1}{n}-x\right)2^{-k}. \tag{3}$$

(3) は $x=\dfrac{\kappa-1}{n}$ としたときが最大であり，それは次のように評価される．

P16

$$
\begin{aligned}
(3) &\le \frac{n+1-\kappa}{n}2^{-n} + \sum_{k=\kappa+1}^{n} \frac{k-\kappa}{n}2^{-k} \\
&= \frac{1}{n}2^{-\kappa}\left(\sum_{k=1}^{n-\kappa} k2^{-k} + (n+1-\kappa)2^{-(n-\kappa)}\right) \\
&= \frac{1}{n}2^{-\kappa} \\
&\qquad \times \left(\sum_{k=1}^{n-\kappa} k2^{-k} + (n+1-\kappa)\sum_{k=n-\kappa+1}^{\infty} 2^{-k}\right) \\
&\le \frac{1}{n}2^{-\kappa}\sum_{k=1}^{\infty} k2^{-k} \\
&= \frac{2}{n}2^{-\kappa}.
\end{aligned}
$$

P17

ここまで計算した後，今度は最初に固定した $f(x)$ を変化させる．
$f(x)$ が確定すると，いつでも $\dfrac{2}{n}2^{-\kappa}$ の長さを持つ区間が現れる．ゆえに，総計では $f(x)$ の値の数 2^{κ} をこの量に乗じて，E_n の切り口の大きさは上から $\dfrac{2}{n}$ と見積もれる．

P18

(ii) を確認しよう．次を示せば十分である．

$$i < j \quad \text{であれば} \quad l_i^n(1) \le l_j^n(1).$$

このとき，ある κ が存在して，それは

$$\begin{aligned} \varepsilon_i^n(k) &= \varepsilon_j^n(k) \qquad (k < \kappa), \\ 0 = \varepsilon_i^n(\kappa) &\ne \varepsilon_j^n(\kappa) = 1 \end{aligned}$$

を満たす．(2) に注意して

$$\begin{aligned} \sum_{k=\kappa+1}^{n} \frac{n+1-k}{n} \varepsilon_i^n(k) 2^{-k} &\le \sum_{k=\kappa+1}^{n} \frac{n+1-k}{n} 2^{-k} \\ &\le \frac{n-\kappa}{n} \sum_{k=\kappa+1}^{\infty} 2^{-k} \le \frac{n+1-\kappa}{n} 2^{-\kappa}. \end{aligned}$$

これは確かに $l_i^n(1) \le l_j^n(1)$ を意味している．