掛谷最大作用素

田中仁

筑波技術大学

P1

本講演は掛谷最大作用素に関するWolffの定理を中心に話すことにしたい.
次は調和解析における四つの古典的作用素である.

P2

Hardy 作用素：$f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ に対して，

$$\mathcal{T}f(x) := \frac{1}{x}\int_0^x f(y)\,\mathrm{d}y, \qquad x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Hardy-Littlewood 最大作用素：$f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ に対して，

$$\mathcal{M}f(x) := \sup_{a,b>0}\frac{1}{a+b}\int_{x-a}^{x+b}|f(y)|\,\mathrm{d}y, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

分数冪積分作用素：$\alpha \in (0,1)$, $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ に対して，

$$\mathcal{I}_\alpha f(x) := \int_{\mathbb{R}}\frac{f(y)}{|x-y|^{1-\alpha}}\,\mathrm{d}y, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Hilbert 変換：$f \in C_0(\mathbb{R})$ に対して，

$$\mathcal{H}f(x) := \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x-y|>\varepsilon}\frac{f(y)}{x-y}\,\mathrm{d}y, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

P3

次が成立する.

- $|f(x)| \le \mathcal{M}f(x)$ a.e. $x \in \mathbb{R}$.
- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \mathcal{M}f(x)^p \, dx \lesssim \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \, dx, \qquad p > 1.$
- $|\mathcal{T}f(x)| \le \mathcal{M}f(x)$ a.e. $x \in \mathbb{R}$.
- $1 < p < \frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \alpha$, $f \in L^p(\mathbb{R})$ とすれば,

$$|\mathcal{I}_\alpha f(x)|^q \lesssim \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}^{q-p} \mathcal{M}f(x)^p \text{ a.e. } x \in \mathbb{R}.$$

- $1 < r < p < \infty$ とすれば,

$$\int_{\mathbb{R}} |\mathcal{H}f(x)|^p \, dx \lesssim \int_{\mathbb{R}} \mathcal{M}[|f|^r](x)^{\frac{p}{r}} \, dx.$$

P4

最大作用素は他にも現れる.
$\mathbb{R}^n$ 上の試験関数 $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ に対して，そのフーリエ変換を

$$\hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi\cdot y} f(y)\,\mathrm{d}y$$

で定義する． ここで,

$$\xi \cdot y := \xi_1 y_1 + \xi_2 y_2 + \cdots + \xi_n y_n$$

は ξ と y の内積を表す.
このとき，フーリエ反転公式

$$f(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} \hat{f}(\xi)\, d\xi$$

の成立が知られている.
f をルベーグ空間 $L^p(\mathbb{R}^n)$, $p > 1$, のより一般な関数とすれば，超関数の意味でのフーリエ反転公式は成立している.

P5

しかし，たとえばフーリエ変換の a.e. 収束を論じるには Carleson 作用素：

$$\mathcal{C}f(x) := (2\pi)^{-n} \sup_{r>0} \left| \int_{|\xi|\le r} e^{ix\cdot\xi} \hat{f}(\xi)\, \mathrm{d}\xi \right|$$

に対して，不等式

$$\sup_{t>0} t |\{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{C}f(x) > t\}|^{\frac{1}{p}} \lesssim \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad p \ge 1, \tag{1}$$

の成立を調べることが必要とされる．

P6

Carleson は $n = 1$, $p = 1$ のときに (1) の成立を示し，フーリエ変換の a.e. 収束の問題を 1 次元において解決した.
もし，$n > 1$, $p = 2$ のときに (1) の成立を確認できたとすれば，$L^2(\mathbb{R}^n)$ に属する関数に対するフーリエ変換の a.e. 収束の問題が解決する.

P7

Hardy-Littlewood 最大作用素は $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ に対して,

$$\mathcal{M}f(x) := \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)| \, \mathrm{d}y$$

で定義される．ここで，$B(x,r) \subset \mathbb{R}^n$ は x を中心とした半径 r の球を表し，$|B(x,r)|$ でその体積を表す.
このとき，不等式

$$\sup_{t>0} t|\{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}f(x) > t\}| \leq 3^n \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \tag{2}$$

が成立する．この不等式を用いることでルベーグの微分定理：

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} f(y) \, \mathrm{d}y = f(x) \text{ a.e. } x \in \mathbb{R}^n \tag{3}$$

が容易に示される.
(2) の成立を確認してみたい.

$B_i = B(x_i, r_i)$, $i = 1, 2, \ldots, N$, を有限な大きさを持つ有限個の球の族として

$$t|B_i| \le \int_{B_i} |f(y)|\,\mathrm{d}y$$

を満たしているとする．このとき次が従う：

$$t\left|\bigcup_i B_i\right| \le 3^n \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

まず, 必要なら番号を変更して, B_i, $i = 1, 2, \ldots, N$, は半径の大きい順に番号付けられているものとする．この中から順次最初から初めて最後まで互いに共通部分を持たない部分族 B_{i_j}, $j = 1, 2, \ldots, M$, を選ぶ．次に「選ばれなかった球」B_i に注目しよう.「選ばれた球」の内でこれと共通部分をもつ半径最大のものを B_{i_j} とすれば,

$$B_i \cap B_{i_j} \ne \emptyset, \qquad r_i \le r_{i_j}.$$

P9

これより
$$3B_{i_j} = B(x_{i_j}, 3r_{i_j}) \supset B(x_i, r_i) = B_i.$$
ゆえに
$$\begin{aligned} t\left|\bigcup_i B_i\right| &\le t\left|\bigcup_j 3B_{i_j}\right| \\ &\le t\sum_j |3B_{i_j}| \\ &= 3^n \sum_j t|B_{i_j}| \\ &\le 3^n \sum_j \int_{B_{i_j}} |f(y)|\,\mathrm{d}y \\ &\le 3^n \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$
最後の不等式は B_{i_j} が互いに共通部分を持たないことによる． □

P10

フーリエ解析では, 不確定性原理が遠因となっているのか, 一風変わった最大作用素の評価が問題にされる.

$N \gg 1$ を大きな整数とする. 掛谷最大作用素は

$$\mathcal{K}_N f(x) := \sup_{T \ni x} \frac{1}{|T|} \int_T |f(y)| \, \mathrm{d}y$$

で定義される. ここで, 上限は, 長さ N 半径 1 の「チューブ」T で, x を含むあらゆる方向 (長軸の方向) のものについて取る.

この最大作用素に現れるチューブの族に対して, 上の被覆補題の証明を適用すると, 長軸の方向が一定ならばそのまま適用できるが, その方向に自由度を許すと, 3 倍で他を含む代わりに, $n-1$ 次元方向に $3N$ 倍, 残りの 1 次元方向に 3 倍必要となり, 次のナイーブな評価しか得られない.

$$\sup_{t>0} t|\{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{K}_N f(x) > t\}| \leq 3^n N^{n-1} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}. \tag{4}$$

(4) と容易に従う

$$\|\mathcal{K}_N f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \tag{5}$$

を等置して, 論点は L^p, $p > 1$, ノルム評価に現れる N の大きさとなる．p を大きくしたとき, どれだけ N の影響を小さく見積もることができるかが問題とされる．
1977 年 Córdoba は文献[1] において,

$$\|\mathcal{K}_N f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \lesssim (\log N)^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \tag{6}$$

を示した．これより未だ解決を見ない次の評価が予想されている．

$$\|\mathcal{K}_N f\|_{L^n(\mathbb{R}^n)} \lesssim (\log N)^{\alpha_n} \|f\|_{L^n(\mathbb{R}^n)}, \qquad \alpha_n > 0, \quad n > 2. \tag{7}$$

[1] A. Córdoba: 'The Kakeya maximal function and the spherical summation multiplier', Amer. J. Math., **99** (1977), 1–22.

P12

1986 年東北大学の猪狩教授は文献[2] において変数分離型関数

$$f(x) = \prod_{i=1}^{n} f_i(x_i)$$

に制限すれば,

$$\|\mathcal{K}_N f\|_{L^n(\mathbb{R}^n)} \lesssim \log N \|f\|_{L^n(\mathbb{R}^n)} \tag{8}$$

が成立することを示した. 1991 年 Cabery et al は文献[3] において, radial 関数

$$f(x) = f_0(|x|)$$

に制限すれば, (8) が成立することを示した. 猪狩教授の手法は, トーラス上の Hardy 空間を用いた複素補間法により, 射影を通じて Córdoba の 2 ~~次元の結果に帰着させるという~~独創的なものである.

[2] S. Igari: 'On Kakeya's maximal function', Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci., **62** (1986) 292–293.

[3] A. Carbery, E. Hernández and F. Soria: 'Estimates for the Kakeya maximal operator on radial functions in $\mathbb{R}^n$', in Harmonic Analysis (S. Igari, ed.), ICM-90 Satellite Conference Proceedings, Springer–Verlag, Tokyo, 1991, 41–50.

P13

これに対して筆者は Hölder の不等式を用いた直接計算により，変数分離型関数に制限して，

$$\|\mathcal{K}_N f\|_{L^n(\mathbb{R}^n)} \lesssim (\log N)^{1-\frac{1}{n}} \|f\|_{L^n(\mathbb{R}^n)} \tag{9}$$

の成立を示した[4]．さらに，square radial 関数

$$f(x) = f_0(|x|_\infty), \qquad |x|_\infty := \max_{1 \le i \le n} |x_i|,$$

について，(8) が成立することを確認した．この結果は後に文献[5] において，

$$f(x) = f_0(|x|_p), \quad 2 \le p \le \infty, \qquad |x|_p := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

にまで拡張されている．

[4] H. Tanaka: ‘An elementary proof of an estimate for the Kakeya maximal operator on functions of product type’, Tôhoku Math. J., **48** (1996), 429–435.

[5] J. Duoandikoetxea and V. Naibo: ‘The universal maximal operator on special classes of functions’, Indiana Univ. Math. J., **54** (2005), no. 5, 1351–1369.

P14

変数分離型関数に対して良い評価が従うのは, そのような関数については Hölder の不等式を用いることで

$$\mathcal{K}_N f(x) \lesssim \mathcal{M}_{\leq N}[f^n](x)^{\frac{1}{n}} \text{ a.e. } x \in \mathbb{R}^n$$

と評価できることに依る. ここで, $\mathcal{M}_{\leq N}$ は, 各辺が各座標軸に平行な直方体でその最大辺と最小辺の長さの比が $\leq N$ であるものについて上限を取る最大作用素である.
この形の最大作用素は, 方向に関する難点が無く, 容易に評価できてしまう.

P15

掛谷問題は不思議な集合 (掛谷集合) のある意味の広がりを調べる問題である. その視点から見るなら，関数の形に制限を課すことは賢明とは言えない.
われわれには「ナイーブな評価」:

$$\sup_{t>0} t|\{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{K}_N f(x) > t\}| \leq 3^n N^{n-1} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \tag{4}$$

と「成立を切望する評価」:

$$\|\mathcal{K}_N f\|_{L^n(\mathbb{R}^n)} \lesssim (\log N)^{\alpha_n} \|f\|_{L^n(\mathbb{R}^n)}, \qquad \alpha_n > 0, \quad n > 2, \tag{7}$$

の二つがある. この二つを補間すれば,

$$\|\mathcal{K}_N f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \lesssim N^{\frac{n}{p}-1} (\log N)^{\alpha_{n,p}} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \qquad 1 < p \leq n, \quad \alpha_{n,p} > 0, \tag{10}$$

の成立が期待される.

分かりやすさのため $n = 3$ としてこの不等式成立の歴史を概観する.
文献[6], $1 < p \leq 2$.
文献[7], $1 < p \leq 2 + \frac{1}{3}$.
文献[8], $1 < p \leq 2 + \frac{1}{2}$.
この 3 次元では未だ前世紀の Wolff の結果が最良である.

---

[6] M. Christ, J. Duoandikoetxea and J. L. Rubio de Francia: ‘Maximal operators associated to the Radon transform and the Calderón-Zygmund method of rotations’, Duke Math. J., **53** (1986), 189–209.

[7] J. Bourgain: ‘Besicovitch type maximal operators and applications to Fourier analysis’, Geom. Funct. Anal., **1** (1991), no. 2, 147–187.

[8] T. Wolff: ‘An improved bound for Kakeya type maximal functions’, Rev. Mat. Iberoamericana, **11** (1995), 651–674.

筆者はこの Wolff の結果に対する Fefferman-Stein 型荷重付ノルム不等式を示した[9]. すなわち,w を任意の否不可測関数 (荷重) として,

$$\begin{aligned}&\left(\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{K}_N f(x)^p w(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\quad \lesssim N^{\frac{n}{p}-1}(\log N)^{\alpha_{n,p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \mathcal{K}_N w(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}},\\ &\qquad 1 < p \le \tfrac{n+2}{2}, \quad \alpha_{n,p} > 0,\end{aligned} \tag{11}$$

の成立を証明した.
荷重付き評価を得るには評価の手法を洗練することが必須である. この仕事は掛谷予想に係る既知の手法の質をより高めたことに寄与するものと信じている.

[9] H. Tanaka: ‘The Fefferman-Stein type inequality for the Kakeya maximal operator in Wolff’s range’, Proc. Amer. Math. Soc., **133** (2005), 763–772.

以下 Wolff の証明に用いられた基本的なアイディアを見て行きたい．分かりよい「チューブバージョンの掛谷問題」の形で述べることにする．
$N \gg 1$ を大きな整数とする．長さ N 半径 1 のチューブの族 $\{T_i\} \subset \mathbb{R}^n$ が「チューブの掛谷集合」であるとは, 各方向ベクトル $V(T_i) \in S^{n-1}$ が $\frac{1}{N}$ 分離した最大数のベクトル列であることにより定義される．(その総数は $\sim N^{n-1}$ となる.)
「チューブバージョンの掛谷予想」は, $\{T_i\}$ をチューブの掛谷集合とすれば,

$$(\log N)^{\alpha_n} |\bigcup_i T_i| \gtrsim N^n, \qquad \alpha_n > 0, \tag{12}$$

が成立するというものである．
これは左辺の集合がそれほど小さくはできないことを主張している．
Wolff の定理は

$$(\log N)^{\alpha_n} |\bigcup_i T_i| \gtrsim N^{\frac{n+2}{2}} \tag{13}$$

の成立を保証する．

P19

$n=2$ として，この予想の成立を確認しよう．
$E := \bigcup_i T_i$ とする．$n=2$ であるから i の総数は $\sim N$, また $|T_i| \sim N$.
これより，Schwarz の不等式を用いて，

$$
\begin{aligned}
N^2 \sim \sum_i |T_i| &= \int_E \sum_i \chi_{T_i} \\
&\le \left\{ \int_E \left(\sum_i \chi_{T_i} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \cdot |E|^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

P20

さらに

$$\int_E \left(\sum_i \chi_{T_i}\right)^2 = \sum_i \sum_j |T_i \cap T_j|.$$

Córdoba の補題 (簡単な幾何的補題です) より,

$$\sum_j |T_i \cap T_j| \lesssim \sum_j \frac{1}{|V(T_i) - V(T_j)|}$$

$$\sim N \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{j} \sim N \log N.$$

すべてを合わせて

$$N^2 \lesssim \log N|E|. \quad \square$$

P21

bush-type argument を説明する．
$E := \bigcup_i T_i$ とする．$y \in E$ に対して，

$$I_y := \{i : y \cap T_i \neq \emptyset\}$$

とする．このとき，各 $i \in I_y$ について，

$$N \sim |B(y, \frac{N}{3})^{\mathrm{c}} \cap T_i|. \tag{14}$$

方向ベクトル $V(T_i)$, $i \in I_y$, が少なくとも $\frac{1}{N}$ 分離していることから，
$B(y, \frac{N}{3})^{\mathrm{c}}$ 上での T_i, $i \in I_y$, の重なりは ~ 1 と評価できる．これと (14) より，

$$N|I_y| \lesssim \sum_{i \in I_y} |B(y, \frac{N}{3})^{\mathrm{c}} \cap T_i| \lesssim |E|. \tag{15}$$

これを用いて次が従う.

$$N^{\frac{n+1}{2}} \lesssim |E|. \tag{16}$$

実際，今 i の総数は $\sim N^{n-1}$, また $|T_i| \sim N$. これより

$$N^n \sim \sum_i |T_i| = \int_E \sum_i \chi_{T_i}.$$

右辺の積分の中で最大の重複度を持つ点を $y \in E$ として，上の bush-type argument を適用すれば,

$$N^n \lesssim |I_y| \cdot |E| \lesssim \frac{|E|^2}{N}.$$

整理すれば (16) が得られる. $\square$

P23

hair-brush argument は，2 次元の方法および bush-type argument を合わせたものと考えられる．ここではその主張のみに留めたい．

hair-brush argument

$\{T_i\} \subset \mathbb{R}^n$ をチューブの掛谷集合とする．もし，すべての $\{T_i\}$ が一つの直線 $L \subset \mathbb{R}^n$ と共通部分を持つならば，

$$(\log N)^{\alpha_n} \left| \bigcup_i T_i \right| \gtrsim N^n, \qquad \alpha_n > 0, \tag{12}$$

と評価できる．

Wolff の定理は

$$\sum_i \sum_j |T_i \cap T_j|$$

に現れるたくさんの hair-brush を丁寧に評価して行くことで示される．

P24

3 次元で hair-brush argument は

$$|\bigcup_i T_i| \gtrsim N^{\frac{5}{2}}$$

を保証する．(ここでは $\log N$ のファクターは省略する．) これを改善するのは驚くほど困難であり，Katz-Laba-Tao は文献[10] において，

$$|\bigcup_i T_i| \gtrsim N^{\frac{5}{2}+10^{-10}}$$

を少し弱い条件下で示している．

Wolff はこの困難を打破することを意図し，一つの toy model として有限体上の掛谷予想を提案した[11]．

[10] N. Katz, I. Laba, and T. Tao: 'An improved bound for the Minkowski dimension of Besicovitch sets in $\mathbb{R}^3$', Ann. of Math. (2) **152** (2000) no. 2, 383–446.

[11] 以下は Jonathan Hickman の概説 http://math.uchicago.edu/ j.e.hickman/Slides/Kakeya.pdf に基づく．

F を有限体とする．$K \subset F^n$ が掛谷集合であることを，任意の方向 $\omega \in F^n \setminus \{0\}$ に対してある $y \in F^n$ を選んで

$$\{y + t\omega : t \in F\}$$

で与えられる直線が K に含まれることとして定義する．
有限体 F 上の掛谷予想は，$K \subset F^n$ を掛谷集合とすれば，その大きさが

$$|K| \geq C_n |F|^n$$

と下からの評価を持つとする予想である．

P26

この予想が正しいとすれば，異なる方向が $\dfrac{|F|^n - 1}{|F| - 1} \sim |F|^{n-1}$ 個あることに注意して，この方向の各直線はちょうど $|F|$ 個の点を持つゆえ，掛谷集合の中で直線はほとんど分離した形で位置することになる．すなわち，掛谷集合はある意味の広がりを持つべきことが分かる．
この問題は他の掛谷問題と同じ程度に難しいものと想像されていた．しかし，文献[12] において以下のように実に簡単に証明された．

[12] Z. Dvir: 'On the size of Kakeya sets in finite fields ', J. Amer. Math. Soc. **22** (2009), 1093–1097.

P27

有限体 F 上 n 変数 d 次以下の多項式全体の集合を $\mathcal{P}_{n;\le d}$ とすれば,

$$\dim_F \mathcal{P}_{n;\le d} = \binom{n+d}{n}.$$

今，$d = |F| - 1$ として,

$$\dim_F \mathcal{P}_{n;\le d} > |K|$$

と仮定してみる.

P28

このとき，評価作用素：

$$\mathrm{eval} : \mathcal{P}_{n,\le d} \to F^{|K|}$$

の核は正の次元を持ち，従って 0 ではない多項式

$$P = \sum_{i=0}^{c} P_i$$

が存在して

$$P(k) = 0 \text{ for all } k \in K$$

とできる．ここで P_i は n 変数の i 次多項式であり，$0 < c \le d$, $P_c \ne 0$ である．

任意の $\omega \in F^n \setminus \{0\}$ に対して，$y \in F^n$ を選んで多項式 P は直線 $\{y + t\omega : t \in F\}$ の上で消えているようにできる．すなわち，

$$Q(t) := P(y + t\omega) = 0 \text{ for all } t \in F.$$

$Q(t)$ は $d = |F| - 1$ 以下の次数を持つ t の多項式ゆえ，$Q = 0$ となる[13]. 特に，t^c の係数となる $P_c(\omega)$ は 0 に等しい.

[13] $Q \neq 0$ と仮定して因数定理によりそれを分解すれば, $|F| - 1$ 以下の t の 1 次式の積となる．すると, $f_0 \in F$ で $Q(f_0) \neq 0$ を満たすものが現れてしまい矛盾する.

P30

$\omega \in F^n \setminus \{0\}$ は任意であり，P_c の次数は $d = |F| - 1$ 以下ゆえ $P_c = 0$ が従い[14] 矛盾に至る．
ゆえに，仮定は否定されて

$$|K| \geq \dim_F \mathcal{P}_{n;\leq d} = \frac{1}{n!}\prod_{i=1}^{n}(|F| + n - i) > \frac{|F|^n}{n!}.$$

有限体上の掛谷予想は正しい．

[14] $P_c \neq 0$ と仮定して因数定理によりそれを分解すれば, $|F| - 1$ 以下の n 変数の 1 次式の積となる．すると, $\omega_0 \in F^n \setminus \{0\}$ で $P_c(\omega_0) \neq 0$ を満たすものが現れてしまい矛盾する．

P31

この有限体上で見出された手法は Dvir's polynomial method とよばれている．これは掛谷予想に適用しうる全く新たな手法であった．現在，これによる連続体上の掛谷予想の改善に向けての試みが盛んに進められている．今のところまだ少なくとも 3 次元では hair-brush argument を超えることはできていないようである．この手法の連続体上への最初の適用例は，文献[15] とされている．

[15] Larry Guth: 'The endpoint case of the Bennett-Carbery-Tao multilinear Kakeya conjecture', Acta Math., Volume 205, Number 2 (2010), 263–286.

P32

この多項式による議論を連続体上の掛谷集合上に適用するために，次の幾何の定理が用いられている．

ham sandwich theorem

Given n bodies (finite volume open sets) in $\mathbb{R}^n$, there is a hyperplane that bisects all of them.

この定理の多項式版が必要とされる．
それは，1941 年に文献[16] において，Stone-Tukey によって発見され，次いで 2003 年に文献[17] において，Gromov により再発見された．

polynomial ham sandwich theorem

Given E bodies in $\mathbb{R}^n$, there exists an algebraic hypersurface of degree $O(E^{1/n})$ that bisects all of them.

[16] A. H. Stone and J. W. Tukey: 'Generalized sandwich theorems', Duke Math. J., **9** (1942) 356–9.

[17] M. Gromov: 'Isoperimetry of waists and concentration of maps', Geom. Funct. Anal., **13** (2003) no. 1, 178–215.