第 76 回 ENCOUNTERwithMATHEMATICS

正標数の K3 曲面

桂　利行（東大数理）

中央大学

２０２３年6月１０日

記号

k：標数 $p>0$ の代数的閉体

X：k 上の n 次元非特異射影代数多様体

$\mathcal{O}_X$：X の structure sheaf

Ω_X^i：正則 i-形式の芽のなす sheaf

ω_X：X 上の dualizing sheaf, $\omega_X = \Omega_X^n$

Θ_X：X の tangent sheaf

$\mathrm{NS}(X)$：X の Néron-Severi group, i.e. $\mathrm{NS}(X) = \{\text{divisors/algebraic equivalence}\}$

$W_m(k)$：長さ m の Witt vectors のなす環

$W_m(k) = \{(a_0, a_1, \cdots, a_{m-1}) \mid a_i \in k\}$

(和と積は普通のものではない!)

$\sigma : W_m(k) \longrightarrow W_m(k)$：Frobenius

$(a_0, a_1, \cdots, a_{m-1}) \mapsto (a_0^p, a_1^p, \cdots, a_{m-1}^p)$

$V : W_m(k) \longrightarrow W_{m+1}(k)$：Vershiebung

$(a_0, a_1, \cdots, a_{m-1}) \mapsto (0, a_0, a_1, \cdots, a_{m-1})$

$R : W_m(k) \longrightarrow W_{m-1}(k)$：restriction

$(a_0, a_1, \cdots, a_{m-1}) \mapsto (a_0, a_1, \cdots, a_{m-2})$

$$W = W(k) = \lim_{\overleftarrow{R}} W_m(k) : \text{Witt ring}$$

この環は p-進環である. (p) を極大イデアルとする局所環, discrete valuation ring

$H^i(X, W(\mathcal{O}_X)) = \varprojlim H^i(X, W_m(\mathcal{O}_X))$: Witt vectors の環のなす層係数の cohomology

$H^i_{et}(X, \mathbf{Q}_\ell)$: (i-次)ℓ-adic étale cohomology ($\ell \neq p$)

$$H^i_{et}(X, \mathbf{Z}_\ell) = \varprojlim H^i_{et}(X, \mathbf{Z}/\ell^m\mathbf{Z}),\ H^i_{et}(X, \mathbf{Q}_\ell) = H^i_{et}(X, \mathbf{Z}_\ell) \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell$$

$b_i(X) = \dim_{\mathbf{Q}_\ell} H^i_{et}(X, \mathbf{Q}_\ell)$: Betti 数

• 正標数においては, $\mathbf{Q}$ 係数, $\mathbf{Q}_p$ 係数, $\mathbf{R}$ 係数の良いコホモロジー理論は存在しない (J.-P. Serre)

もし, そのような理論 $H^i(X, F)$ (F は $\mathbf{Q}$, $\mathbf{Q}_p$ 又は $\mathbf{R}$) が存在するとする.
E を supersingular elliptic curve とする.
End(E) $\otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ は $\mathbf{Q}$ 上の quaternion division algebra
p と ∞ で分岐する（行列環にならない）.
i.e. $\dim_{\mathbf{Q}} \mathrm{End}(E) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q} = 4$
2 次元ベクトル空間 $H^1(E, F)$ への表現をみれば

$$\mathrm{End}(E) \otimes_{\mathbf{Z}} F \cong M_2(F)$$

となって矛盾

そこで, Witt 環係数のコホモロジー群を考える.

$\Longrightarrow$ crystalline cohomology $H^*_{cris}(X/W)$ (p-進コホモロジー)

$$H^i_{cris}(X/W) := \varprojlim H^i_{cris}(X/W_m(k))$$

これは, de Rham cohomology の " 一般化"

$$H^i_{dR}(X/k) = H^i_{cris}(X/W_1(k)) \quad (\text{注意 } W_1(k) = k)$$

ポイント 1. $F : X \longrightarrow X$ (absolute Frobenius) が $H^i_{cris}(X/W)$ に作用する.

p-th power なので F の固有値は意味がないが, 固有値の p-進付値は意味がある

$\Longrightarrow$ slope

K を W の商体, I を $\mathbf{R}$ の区間として

slope が I に入る部分を $(H^i_{cris}(X/W) \otimes_W K)_I$ と書く.

- $(H^i_{cris}(X/W) \otimes_W K)_{[0,0]} \cong H^i_{et}(X, \mathbf{Q}_p) \otimes_{\mathbf{Q}_\ell} K$
- $(H^i_{cris}(X/W) \otimes_W K)_{[0,1)} \cong H^i(X, W(\mathcal{O}_X)) \otimes_W K$

ポイント 2. X が W 上の射影代数多様体 $\tilde{X}$ に持ち上がれば (i.e. $\tilde{X} \otimes_W k \cong X$)

$$H^i_{dR}(\tilde{X}/W) \cong H^i_{cris}(X/W)$$

ポイント 3 (universal coefficient formula).

$$0 \longrightarrow H^i_{cris}(X/W) \otimes_W k \longrightarrow H_{dR}(X/k) \longrightarrow Tor_1^W(H^{i+1}_{cris}(X/W), k) \longrightarrow 0$$

$W(k)/pW(k) \cong k$ だから,

とくに, $H^{i+1}_{cris}(X/W)$ が torsion free なら $H^i_{cris}(X/W)/pH^i_{cris}(X/W) \cong H^i_{dR}(X/k)$.

ポイント 4. $b_i(X) = \text{rank } H^i_{cris}(X/W)$

K3 曲面の不変量

X : K3 surface
$\iff \omega_X \cong \mathcal{O}_X$ かつ $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$

X : K3 surface とする.

定理 (topology)
$b_0(X) = b_4(X) = 1$, $b_1(X) = b_3(X) = 0$, $b_2(X) = 22$.
とくに, $c_2(X) = c_2(\Theta_X) = 24$.

$H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ は $Pic^0(X)$ の tangent space
故に, $Alb(X) = \text{dual of } (Pic^0(X))_{red} = 0$
故に $b_1(X) = 2\dim Alb(X) = 0$. Poincaré duality で $b_3(X) = 0$
Noether の公式 $2 = \chi(\mathcal{O}_X) = \{K_X^2 + c_2(X)\}/12$ より
$24 = c_2(X) = \sum_{i=0}^{4} b_i(X) = 2 + b_2(X)$
故に, $b_2(X) = 22$

定理 (Rudakov-Shafarevich, 1976) $H^0(X, \Theta_X) = 0$

定理 (Hodge diamond)

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & \dim H^0(\mathcal{O}_X) & & \\
 & \dim H^0(\Omega^1_X) & & \dim H^1(\mathcal{O}_X) & \\
\dim H^0(\Omega^2_X) & & \dim H^1(\Omega^1_X) & & \dim H^2(\mathcal{O}_X) \\
 & \dim H^1(\Omega^2_X) & & \dim H^2(\Omega^1_X) & \\
 & & \dim H^2(\Omega^2_X) & &
\end{array}
=
\begin{array}{ccccc}
 & & 1 & & \\
 & 0 & & 0 & \\
1 & & 20 & & 1 \\
 & 0 & & 0 & \\
 & & 1 & &
\end{array}
$$

$\Theta_X \cong \Omega^2_X \otimes \Theta_X \cong \Omega^1_X$ より

$$H^0(\Omega^1_X) \cong H^0(\Theta^1_X) = 0$$

$$H^2(\Omega^1_X) \cong H^0(\Theta^1_X) = 0 \quad \text{(Serre duality)}$$

Grothndieck-Hirzebruch の Riemann-Roch の定理から

$$\chi(\Omega^1_X) = (\mathrm{rank}\ \Omega^1_X) \cdot \chi(\mathcal{O}_X) + \frac{1}{2}\{c_1(\Omega^1_X) \cdot (c_1(\Omega^1_X) - \omega_X)\} - c_2(\Omega_X) = 4 + 0 - 24 = -20$$

だから, $\dim H^1(\Omega^1_X) = 20$.

定理 Hodge-to-de Rham spectral sequence

$$E_1^{i,j} = H^j(X, \Omega_X^i) \Longrightarrow H_{dR}^{i+j}(X)$$

は E_1-term で degenerate

$H^2(\Theta_X) \cong H^0(\omega_X \otimes \Omega_X^1) \cong H^0(\Theta_X) = 0$ より X の deformation は unobstructed
よって, X は formal に W に lift できる. とくに, $W_2(k)$ に lift できる.
Deligne-Illusie の結果より Hodge-to-de Rham spectral sequence は E_1-term で degenerate

系　$H_{cris}^i(X/W)$ は rank $b_i(X)$ の free W-module

定理から, $b_i(X) = \dim H_{dR}^i(X)$.
よって, ポイント 3, 4 から $H_{cris}^i(X/W)$ は torsion free.

標数 0 への持ち上げ問題

定義

商体が標数 0 の体 K で剰余体が k になるような離散付値環 O と,
$\mathrm{Spec}\, O$ 上の代数多様体 $\tilde{X}$ が存在して,
$\tilde{X} \otimes_O K$ は代数多様体かつ $\tilde{X} \otimes_O k \cong X$ となるとき,
X は標数 0 に**持ち上げ可能** (liftable) という.

obstruction は $H^2(X, \Theta_X)$ と $H^2(X, \mathcal{O}_X)$ にある.
$H^2(X, \Theta_X)$: formal scheme としても持ち上げ
$H^2(X, \mathcal{O}_X)$: ample line bundle の持ち上げ
両方 0 になれば標数 0 に持ち上がる.
(もちろん 0 にならなくても持ち上がることはある.)

$H^2(X, \Theta_X) = 0$, $H^1(X, \Theta_X) = 20$ より,
X の formal deformation space は 20 次元で smooth

$$\mathrm{Def}(X) = \mathrm{Spf}\ W[[t_1, t_2, \cdots, t_{20}]]$$

定理 (Deligne, Ogus) K3 曲面は W 上に lift できる.

形式群（Formal group）

$x_1, x_2, \cdots, x_n,\ y_1, y_2, \cdots, y_n$:変数

$f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_n)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$: 体 k 上の形式的べき級数

ベクトル記号を用いて $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ とおく.

$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ が

(i) $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x} + \mathbf{y} +$ 高次の項

(ii) $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{y}, \mathbf{z})) = \mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \mathbf{z})$

(iii) $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{f}(\mathbf{y}, \mathbf{x})$

をみたすとき, $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ を**可換形式群法則**, あるいは**可換形式群**,
あるいは**可換形式 Lie 群**と言う.
状況が明らかなときは単に形式群という.

n:**形式群の次元**という.

- 形式スキーム Spf $k[[x_1, x_2, \cdots, x_n]]$ の群構造を与えている.

- 代数群に対して, 零点の近傍においてその群演算を数式として捉えれば形式群を得る.

Spf $k[[x_1, x_2, \cdots, x_n]]$

$\mathbf{x} \star \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ とおく.
形式群の p 倍写像が

$$\psi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \star \mathbf{x} \star \cdots \star \mathbf{x} \quad (p\ \text{個})$$

で定義される.

$$\psi : k[[x_1, x_2, \cdots, x_n]] \longrightarrow k[[x_1, x_2, \cdots, x_n]]$$

$n = 1$ とする.
p 倍写像 $[p](x)$

$$[p](x) = 0, \text{または}\ [p](x) = ax^{p^h} + \text{高次の項} \quad (a \in k, a \neq 0)$$

$[p](x) = 0$ のとき形式群の**ハイト**は ∞ であるといい,
後者のときは形式群のハイトは h であるという.

1 次元形式群:
標数 0 の時, 加法群 $\mathbf{G}_a$ の群演算から得られる形式群 $\hat{\mathbf{G}}_a$ とすべて同型
標数 $p > 0$ の時, 1 次元形式群のハイトは自然数と ∞ の値を取り得,
1 次元形式群とハイトは 1 対 1 に対応する.

例

加法群 $\mathbf{G}_a$ の群演算から得られる形式群 $\hat{\mathbf{G}}_a$ は

$$f(x,y) = x + y$$

で与えられる．そのハイトは, $[p](x) = px = 0$ であるから, ∞ である．

乗法群 $\mathbf{G}_m$ の群演算から得られる形式群 $\hat{\mathbf{G}}_m$ は

$$f(x,y) = x + y + xy$$

で与えられる．そのハイト h は $[p](x) = x^p$ であるから $h = 1$ である．

後で述べる楕円曲線の場合：

- 通常楕円曲線ハイト $= 1$
- 超特異楕円曲線のハイト $= 2$

1 次元代数群から得られる形式群はここに挙げた 3 種類だけであり,
その他の 1 次元形式群には対応する代数群が存在しない．

Dieudonné ring

$$D(k) = \{x_0 + \sum_{i=1}^{\infty} x_i V^i + \sum_{i=0}^{<\infty} y_i F^i \mid x_i, y_i \in W(k)\}$$

ただし, $Fx = \sigma(x)F$, $V\sigma(x) = xV$, $FV = VF = p$

定義 $D(k)$ 上の module M が reduced $D(k)$-module とは

(i) V は injective

(ii) $M^{(n)} = V^n M$ を 0 の開近傍の基として, M は complete, Hausdorff.

すなわち, $M = \varprojlim M/M^{(n)}$.

(iii) M/VM は有限次元 k-vector space.

この $D(k)$-module M を Cartier-Dieudonné module という.

定理

$\mathcal{F}G$: k 上の commutative formal group の category

$\mathcal{C}D$: Cartier-Dieudonné module の category

Category の covariant functor

$$\mathcal{F}G \longrightarrow \mathcal{C}D$$

が存在し, category の equivalence を与える (Tapis de Cartier).

Artin-Mazur 形式群

X : 非特異射影多様体

Art : 体 k 上の局所 Artin 代数 R でその極大イデアルを m とするとき $R/m \cong k$ となるもののなす圏

Ab : Abel 群のなす圏

Art の対象 R に対し, 自然な入射

$$f_R : X \cong X \times_{\mathrm{Spec}\, k} \mathrm{Spec}\, k \hookrightarrow X \times_{\mathrm{Spec}\, k} R$$

を考えれば, この入射はエタールコホモロジーの写像

$$f_R^* : \mathrm{H}^i_{et}(X \times_{\mathrm{Spec}\, k} R, \mathbf{G_m}) \longrightarrow \mathrm{H}^i_{et}(X, \mathbf{G_m})$$

を引き起こす.

関手

$$\begin{array}{rccc} \Phi^i_X : & Art & \longrightarrow & Ab \\ & R & \longmapsto & \mathrm{Ker}\ f_R^* \end{array}$$

を考える.

定理 (Artin-Mazur)

X を非特異射影多様体とする.

$$\mathrm{H}^{i-1}(X, \mathcal{O}_X) = 0 \text{ かつ } \mathrm{H}^{i+1}(X, \mathcal{O}_X) = 0$$

ならば, Φ^i_X は形式群で前表現可能 (prorepresentable) であり,
その接空間は $\mathrm{H}^i(X, \mathcal{O}_X)$ に同型である.
その Cartier-Dieudinne module は $H^i(X, W(\mathcal{O}_X))$ で与えられる.

定義

　Φ^i_X が形式群で前表現可能のとき, その形式群を **Artin-Mazur 形式群**といい, 再び Φ^i_X と書く.

　とくに $i=2$ であるとき, この形式群を**形式的 Brauer 群**という.

Φ^n_X の height を $h(X)$ と書く.

Frobenius map は $\mathrm{H}^n(X, W(\mathcal{O}_X))$ の上に作用する.

　このとき,

$$h(X) = \dim \mathrm{H}^n(X, \mathcal{O}_X) + \dim \mathrm{H}^n(X, W(\mathcal{O}_X))/F\mathrm{H}^n(X, W(\mathcal{O}_X))$$

が成り立つ (M. Artin-B. Mazur, L. Illusie, G. van der Geer-T. Katsura).

X を K3 曲面とする.

$\mathrm{H}^3(X, \mathcal{O}_X) = 0$ かつ $\mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ であること,

また, $\dim \mathrm{H}^2(X, \mathcal{O}_X) = 1$ であるから,

X の形式的 Brauer 群 Φ^2_X は 1 次元 formal group で prorepresentable

$h(X) < \infty$ ならば $\rho(X) \leq b_2(X) - 2h(X)$ (L. Illusie)

K3 曲面の場合 $b_2(X) = 22$ より, $1 \leq h(X) \leq 10$ または $h(X) = \infty$ となる.

$h(X) = 1$ のとき, X を ordinary K3 surface,

$h(X) = \infty$ のとき,X を超特異 K3 曲面 (supersingular K3 surface) という.

$\rho(X) = 22$ となる K3 曲面を塩田の意味の超特異 (supersingular) であるという.

予想 (Artin) 超特異と塩田の意味の超特異は同値である.

(D. Maulik, F. Charles, K. M. Pera, Kim-M. Pera により解決)

Tate 予想を K3 曲面の時に考える.

予想 (Tate) X: 有限体 $\mathbf{F}_q$ 上の K3 曲面

NS(X): $\mathbf{F}_q$ 上の Neron-Severi 群, そのランク ρ

(1) 合同ゼータ関数 $Z(X/\mathbf{F}_q, T)$ の $T = q^{-1}$ における極の位数は ρ

(2) 自然な写像 $\mathbf{Q}_\ell \otimes \mathrm{NS} \longrightarrow \mathrm{H}^2_{et}(\bar{X}/\bar{\mathbf{F}}_q, \mathbf{Q}_\ell)^{Gal(\bar{\mathbf{F}}_q/\mathbf{F}_q)}$ は同型

(3) 自然な写像 $\mathbf{Q}_p \otimes \mathrm{NS} \longrightarrow \mathrm{H}^2_{cris}(X/W(\mathbf{F}_q))^{\phi=p} \otimes \mathbf{Q}$ は同型

(ϕ は crystalline cohomology の Frobenius map)

K3 crystal

K3 surface の crystalline cohomology は K3 surface の性質をよく捉えている.

定義

H : rank n の free W-module,

$\varphi : H \longrightarrow H$: injective σ-linear map

とするとき, pair (H, φ) を F-crystal という.

rank n の F-crystal(H, φ) に symmetric bilinear form

$$\langle\ ,\ \rangle : H \otimes_W H \longrightarrow W$$

が与えられていて, 次の４条件をみたす時, (H, φ) を rank n の K3 crystal という.

(i) $p^2 H \subset \mathrm{Im}(\varphi)$

(ii) $\varphi \otimes k$ は rank 1

(iii) pairing $\langle\ ,\ \rangle$ は perfect pairing

(iv) $\langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle = p^2 \sigma \langle x, y \rangle$

例 X : K3 surface,

$(H^2_{cris}(X/W), F)$ は rank 22 の K3 crystal

定理 (supersingular K3 の Torelli の定理)(A. Ogus)

$p > 3$ とする.

X, Y supersingular K3 surfaces

$X \cong Y \iff X$, Y の K3 crystals が同型

K3 曲面のモジュライ空間

$\mathcal{M} = \mathcal{M}_{2d}$: degree $2g$ の偏極をもつ K3 surface の moduli stack
($2g$ は p と互いに素とする)

$M^{(h)}$: height が h 以上の K3 surface の locus($1 \leq h \leq 10$)

M_σ: supersingular K3 で Artin invariant が σ 以下 locus ($1 \leq \sigma \leq 10$)

これらは代数的集合

$\dim M^{(h)} = 20 - h$, $\dim M_\sigma = \sigma - 1$

$$\mathcal{M} = M^{(1)} \supset M^{(2)} \supset \cdots \supset M^{(10)} \supset M_{10} \supset M_9 \supset \cdots \supset M_1$$

$\pi : \chi \longrightarrow \mathcal{M}$: polarized K3 surface の universal family

$\Omega^2_{\chi/\mathcal{M}}$: relative dualizing sheaf

$\mathrm{CH}^i_{\mathbf{Q}}(\mathcal{M})$: M の Chow group

$v = c_1(\pi_*(\Omega^2_{\chi/\mathcal{M}})) \in \mathrm{CH}^1_{\mathbf{Q}}(\mathcal{M})$: first Chern class

定理 (van der Geer - Katsura) $[M^{(h)}]$ の $\mathrm{CH}^{h-1}_{\mathbf{Q}}(\mathcal{M})$ での class は

$$[M^{(h)}] = (p-1)(p^2-1)\cdots(p^{h-1}-1)v^{h-1}$$

で与えられる.

証明には, h の次の特徴付けを使う.

補題. X を K3 曲面とする. X の h-数は Frobenius map F の $\mathrm{H}^2(X, W_i(\mathcal{O}_X))$ への作用が零写像にならない最小の i に等しい.

Remark (T. Ekedahl - G. van der Geer) M_σ の Chow group $\mathrm{CH}^{20-\sigma}_{\mathbf{Q}}(\mathcal{M})$ での class $[M_\sigma]$ は

$$[M_{10}] = \frac{1}{2}(p-1)(p^2-1)\cdots(p^{10}-1)v^{10}$$

$$[M_\sigma] = \frac{1}{2}\frac{(p^{2(11-\sigma)}-1)(p^{2(12-\sigma)}-1)\cdots(p^{20}-1)}{(p+1)\cdots(p^\sigma+1)}v^{20-\sigma} \quad (1 \le \sigma \le 9)$$

で与えられる.

3　単有理曲面

X: n 次元代数多様体,
$k(X)$: X の有理関数体
$k(x_1, \cdots, x_n)$: k 上の n 変数純超越拡大体

定義

$\bullet f : \mathbf{P}^n \longrightarrow X$ なる双有理写像があるとき, X を**有理多様体**という.
$\bullet f : \mathbf{P}^n \longrightarrow X$ なる支配的な有理写像があるとき, X を**単有理多様体**という.

X が有理多様体 $\Leftrightarrow k(X) \cong k(x_1, \cdots, x_n)$
X が単有理多様体 $\Leftrightarrow k(X) \subset k(x_1, \cdots, x_n)$

● 有理多様体 $\Rightarrow$ 単有理多様体
この逆が問題になる.

(1) $n = 1$ のとき
定理 (Lüroth の定理)
　k を体, θ を変数とする. このとき, $k(\theta) \supset L \supset k$, $L \neq k$ なる中間体 L に対し, θ の有理式 $\alpha(\theta)$ が存在して, $L = k(\alpha(\theta))$ となる.

単有理曲線 $\Leftrightarrow$ 有理曲線

(2) $n = 2$ のとき

定理 (Castelnuovo の有理性判定法)

非特異射影曲面 X が有理曲面になるための必要十分条件は

$$P_2(X) = 0 \text{ かつ } q(X) = 0.$$

である.

標数 0 の場合は O. Zariski, K. Kodaira, 正標数の場合は Kurke, W. Lang, N. Suwa などによる多くの証明が知られている.

定理

k を標数 0 の代数的閉体とする. このとき, 射影曲面 X が単有理曲面であることと有理曲面であることは同値である.

例 (O. Zariski)

$p \geq 3$ とし, 次の方程式で定義されるアフィン曲面の非特異射影モデル X を考える:

$$f(x, y, z) = z^p + x^{p+1} + y^{p+1} - (x^2 + y^2)/2 = 0.$$

$dy \wedge dz / \frac{\partial f}{\partial x}$ は X 上の正則 2-形式だから,
X は有理曲面ではない.
$k(\sqrt[p]{x}, \sqrt[p]{y}) \supset k(x, y, z) = k(X)$
X は単有理曲面である.
$p = 2$ のときも同様の例が Zariski の論文に与えられている.

(3) $n \geq 3$ のとき

標数が 0 の場合でも有理多様体ではない単有理多様体が存在する

(Clemens-Griffiths, Iskovskikh-Manin, Artin–Mumford)

定理 X を単有理曲面とする. 次が成り立つ.

(i) $q(X) = 0$.

(ii) $\rho(X) = b_2(X)$ となる (Shioda).

(iii) X のエタール被覆も単有理曲面, 代数的基本群 $\pi_1^{alg}(X)$ は有限群 (Serre).

(iv) $\pi_1^{alg}(X)$ の位数は p と素である (T.Katsura, R.Crew, N.Suwa, T.Ekedahl).

曲面の分類理論との関係

(Enriques-Castelnuovo-Kodaira-Mumford-Bombieri の分類理論)

$\kappa(X)$	特徴付け	曲面の名称	単有理曲面の存在
$-\infty$	$q(X) = 0$	有理曲面	+
	$q(X) \geq 1$	非有理線織面	-
0	$q(X) = 2$	Abel 曲面	-
	$q(X) = 1$	超楕円曲面, または	-
		準超楕円曲面 ($p = 2, 3$ のときのみ可能)	-
	$q(X) = 0,\ b_2(X) = 10$	Enriques 曲面	+
	$q(X) = 0,\ b_2(X) = 22$	K3 曲面	+
1		楕円曲面, または	+
		準楕円曲面 ($p = 2, 3$ のときのみ可能)	+
2		一般型曲面	+

分類理論における標数 0 と標数 $p>0$ の違い

ほとんど $p=2,3$ の場合の違いのみ

(i) quasi-elliptic surface の存在

X を代数曲面,

C を代数曲線,

$f: X \longrightarrow C$: 正則写像

標数 0 ならば, Sard の定理より general fiber は nonsingular

標数 p なら, これは成り立たない.

定理 (Tate)

C を一変数代数関数体 K 上の非特異代数曲線とし, その種数を g とする. $g<(p-1)/2$ ならば, C は K の代数的閉包 $\bar{K}$ 上も種数 g の非特異代数曲線である.

例 $p=3$

$y^2 = x^3 + t \quad t$ は $\mathbf{P}^1$ 上のパラメータ

$k(t)$ 上は nonsingular

$k(\sqrt[3]{t})$ 上は singular で $y^2 = x^3$ と同型

この定理から, genus 1 fibration ならば, C の一般点 P に対しファイバー $f^{-1}(P)$ が特異点を持ち得るのは標数 $p = 2, 3$ の場合に限ることがわかる.

このような曲面を**準楕円曲面** (quasi-elliptic surface) という.

$f : X \to C$ を準楕円曲面とすれば, 一般の点 $P \in C$ に対し, ファイバー $f^{-1}(P)$ は尖点と呼ばれる特異点を持つ.

その X 上の軌跡は非特異代数曲線となり C 上純非分離被覆でその次数は p になることが知られている (Bombieri-Mumford)

(ii) 標数 2 の Enriques 曲面

標数 0 ならば,

Enriques 曲面 X

$\Leftrightarrow$ 標準束 $\omega_X \not\cong \mathcal{O}_X$, $\omega_X^{\otimes 2} \cong \mathcal{O}_X$ かつ $q(X) = 0$

ω_X から作られる次数 2 の étale covering は K3 surface

標数 2 の場合は, 様相がかなり異なり 3 つの場合に分かれる.

i) $K_X \not\sim 0$, $K_X^{\otimes 2} \sim 0$, $\mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ (**古典的 Enriques 曲面**),

ii) $K_X \sim 0$, Frobenius 写像 F が $\mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}_X) \cong k$ に全単射に作用 (**特異 Enriques 曲面**),

iii) $K_X \sim 0$, Frobenius 写像 F が $\mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}_X) \cong k$ に零写像として作用 (**超特異 Enriques 曲面**).

Enriques 曲面 X の Betti 数は標数にかかわらず $b_1(X) = 0$, $b_2(X) = 10$ であり, Picard 数 $\rho(X) = 10$ である.

例

単有理曲面の特徴付けの例をいくつか挙げる.

(i) 標数 2 の Enriques 曲面 X に対して,

$$X \text{ が単有理曲面} \Longleftrightarrow X \text{ が古典的又は超特異 Enriques 曲面} \quad \text{(P.Blass)}.$$

(ii) 準楕円曲面 $f : X \to C$ に対して,

$$X \text{ が単有理曲面} \Longleftrightarrow C \cong \mathbf{P}^1 \quad \text{(M.Miyanishi)}.$$

(iii) Fermat 曲面 $X_m : X_0^m + X_1^m + X_2^m + X_3^m = 0 \subset \mathbf{P}^3$ $(m \geq 4, (p, m) = 1))$ に対して, 次のような同値が成り立つ:

X_m が単有理曲面 $\Longleftrightarrow p^\nu \equiv -1 \pmod{m}$ となる自然数 ν が存在する (Shioda - Katsura).

K3 曲面については後に述べる

NS(X): X の Néron-Severi group

有限生成アーベル群　そのランクを Picard 数といい, $\rho = \rho(X)$ と書く.

K3 曲面に対しては, $1 \le \rho(X) \le 20$ または $\rho(X) = 22$

$\rho(X) = 22$ のとき, その内積の discriminant は $-p^{2\sigma_0}$ の形.

σ_0 を Artin invariant という.

$1 \le \sigma_0 \le 10$ である.

$\sigma_0 = 1$ のとき, K3 surface を superspecial K3 surface という.

一般に, アーベル曲面 A を inversion ι で割った曲面 $A/<\iota>$ を resolution して得られた曲面 Km(A) を Kummer 曲面という.

Kummer 曲面は $p \neq 2$ ならば K3 曲面.

$p > 2$ のとき,

- X supersingular K3 曲面, $\sigma_0 \le 2 \Leftrightarrow X = \mathrm{Kum}(A)$, A 超特異アーベル曲面
- superspecial K3 曲面 $X \cong \mathrm{Kum}(E \times E)$ (E: supersingular elliptic curve)

  superspecial K3 曲面は unique

予想 (Artin-Shioda) K3 曲面 X に対して,

$$X \text{ が単有理曲面} \Longleftrightarrow \rho(X) = b_2(X).$$

$\Rightarrow$ はすでに述べたように成立する. $\Leftarrow$ は次の場合に示せている.

(a) $p = 2$ のときは成立 (Rudakov-Shafarevich)
$p = 3$ かつ $\sigma_0 \leq 6$ のときは成立 (Rudakov-Shafarevich)
$p = 5$ かつ $\sigma_0 \leq 3$ のときは成立 (Pho-Shimada)

(b) $p \geq 3$ とする.

A: Abel 曲面, ι を A の反転 ($\iota(x) = -x$, $x \in A$).

商曲面 A/ι の極小非特異モデル $\mathrm{Km}(A)$: Kummer 曲面 (K3)

次の 3 条件は同値である (Shioda).

(i) $\mathrm{Km}(A)$ は単有理曲面である.

(ii) $\rho(\mathrm{Km}(A)) = b_2(\mathrm{Km}(A))$.

(iii) A は超特異 Abel 曲面である.

(c) $p \geq 7$ とする.

G を Abel 曲面 A に忠実に作用する有限群,

A/G の極小非特異曲面が K3 曲面になるとする.

それを $\mathrm{Km}(A, G)$ と書き**一般化 Kummer 曲面**という.

次の 3 条件は同値である (Katsura).

(i) $\mathrm{Km}(A, G)$ は単有理曲面である.

(ii) $\rho(\mathrm{Km}(A, G)) = b_2(\mathrm{Km}(A, G))$.

(iii) A は超特異 Abel 曲面である.

注意. C. Liedtke の論文が 2015 年に Inventiones に出版されたが, 用いた命題「supersingular K3 の elliptic fibration には purely inseparable な multi-section がある」の反例を Bragg-Lieblich が見つけたので, 白紙に戻った.

問題 superspecial K3 surface は Zariski surface か?

つまり, $\mathbf{P}^2$ から purely inseparable degree p の dominant rational map があるか?

Partial Answer (Katsura-Schuett):

$p \not\equiv 1 \bmod 12$ なら Yes

$p = 13$ も Yes