位相空間の距離化可能定理
-公理的集合論の観点から-

薄葉 季路 (うすば としみち)

早稲田大学基幹理工学部

中央大学 Encounter with Mathematics
2025.1.11

距離化可能空間

Definition

位相空間 X が距離化可能であるとは, 距離関数 $d: X^2 \to [0,\infty)$ で, この距離関数により導かれる位相がもとの位相と一致するものが存在することである.

- 距離化可能空間は距離が入っていることにより, 様々なよい性質を持つ (比較的) 扱いやすい空間になる:
  - 点や集合間に距離が定まり, 遠近が直感的に把握できる.
  - よい分離公理を満たす.
  - 第一可算であり, 点列の収束などが非常に扱いやすくなる.
  - 可分性から第二可算が導けるなど, 強い性質が (比較的) 弱い性質から導ける.
  - パラコンパクトであり, 一の分割定理などが使える.
  - etc.

一般位相幾何における General Question

どのような位相空間が距離化可能か?

距離化可能定理

- 距離化可能性の (必要) 十分条件を与える定理を一般に距離化可能定理と呼ぶ.
- X が regular (正則, T_3) $\iff$ X はハウスドルフ, かつ任意の $x \in X$ と x を含まない閉集合 C に対し, x と C が開集合で分離可能.

Theorem (Urysohn)

位相空間が regular かつ第二可算ならば距離化可能.

Theorem (Nagata-Smirnov)

位相空間が距離化可能であることの必要十分条件は, regular かつ σ-locally finite な開基を持つことである.

- 位相空間 X の部分集合族 $\mathcal{F}$ が locally finite $\iff$ 任意の $x \in X$ に対して, 開近傍 O で $\{A \in \mathcal{F} \mid A \cap O \neq \varnothing\}$ が有限になるものが存在する.
- $\mathcal{G}$ が σ-locally finite $\iff$ $\mathcal{G}$ は可算個の locally finite family の和集合で表せる.

この講演では…

- その他, 様々な距離化可能定理が知られている.
- 距離化可能性の必要十分条件が与えられたからと言って, これで距離化可能性の問題が終わってしまったわけではない.
- 例えば, σ-locally finite な開基を持つかどうかの判定は非常に難しく, 一般的な空間に対してこの距離化可能定理を使うのは大概困難である.
- ある程度の制約を課した特定の空間のクラスに限定しても難しいことが多いが, 一般位相間論では「何が距離化可能と不可能の境目となるか」「何が距離の本質か?」を長年考察してきた.
- 本講演では, 位相多様体の距離化可能性と分離公理の関係を中心に, 距離化可能性が連続体仮説や強制法公理などと非常に強く関係することを紹介する.
- また, (時間があれば) 非可算基数 ω_1 $(=\aleph_1)$ がある種の境界になることを紹介する.
- 今後, 位相空間はハウスドルフ空間であることを常に仮定する.

多様体

Definition

位相空間がn 次元 (位相) 多様体であるとは, 各点が n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ と同相な開近傍を持つことである. (境界は考えない. アトラスなども基本的には考えない)

- 多様体の連結成分は閉かつ開な部分多様体になるので, 今後は何も言わなければ連結であることを仮定する.
- 多様体ではパラコンパクトや第二可算が仮定されることが多いが, それらは距離化可能性と同値になる.

Fact (多様体の距離化可能性)

n 次元多様体について次は同値:

1. 距離化可能
2. 第二可算
3. パラコンパクト (任意の開被覆は locally finite な refinement cover をもつ)
4. Lindelöf (開被覆は高々可算な部分被覆を持つ)
5. (その他, σ-コンパクトなど大量の同値命題が知られている)

一次元多様体

Fact

一次元多様体は (同相空間を同一視したとき) 次の 4 つのみである:

- 実数直線 $\mathbb{R}$.
- 円周 $\mathbb{S}^1$.
- 長い直線 (long line) $\mathbb{L}$.
- 長い半直線 (half long line, long ray) $\mathbb{L}_+$.

Definition (Hausdorff, Alexsandrov)

ω_1 と実数の区間 $[0,1)$ の直積集合 $\omega_1 \times [0,1)$ を $\mathbb{L}_{\geq 0}$ とし，そこに辞書式順序を入れる:

$$\langle \alpha, r\rangle < \langle \beta, s\rangle \iff \alpha \in \beta, \text{ or, } \alpha = \beta \text{ and } r < s$$

この順序は $\mathbb{L}_{\geq 0}$ 上の線形順序になる．$\mathbb{L}_{\geq 0}$ から最小元 $\langle 0,0\rangle$ を除いた順序集合を長い半直線と呼び $\mathbb{L}_+$ で表す．$\mathbb{L}_{\geq 0}$ の左側 (負の側) に $\mathbb{L}_+$ の逆順序を付け加えたものを長い直線と呼び $\mathbb{L}$ で表す．

長い直線

$\mathbb{L}$, $\mathbb{L}_+$ には, 開区間 (a,b), (a,∞), $(-\infty,b)$ (ここで $a,b\in\mathbb{L}$) を開基として位相 (順序位相) を定めることができる.

Fact

1. $a,b\in\mathbb{L}$ (or $\mathbb{L}_+$) に対して開区間 (a,b) は $\mathbb{R}$ と順序同型, 特に $\mathbb{R}$ と同相.
2. $\mathbb{L}$, $\mathbb{L}_+$ は自己稠密かつ完備順序集合, 特に連結空間である.
3. $\mathbb{L}$ と $\mathbb{L}_+$ は一次元多様体.
4. $\mathbb{L}$, $\mathbb{L}_+$ は距離化不可能 (詳しくは後述). 特に $\mathbb{R}$, $\mathbb{S}^1$ と同相でない.
5. $\mathbb{L}$ は点列コンパクトだが $\mathbb{L}_+$ はそうではない. 特に互いに同相ではない.

- (1) については, $\alpha<\omega_1$ に関する transfinite induction で区間 $(\langle 0,0\rangle,\langle\alpha,0\rangle)$ と $\mathbb{R}$ との順序同型写像を作ればよい.
- (5) の点列コンパクト性は, 次の ω_1 の正則性を使う:

(正則性) ω_1 の可算部分集合は ω_1 の中で有界になる

一次元多様体の分類定理

- 「距離化可能性」「点列コンパクト」の二つの位相的性質でもって一次元多様体は完全に分類可能.

Theorem (?)

X を一次元多様体とする.

1. X が距離化可能かつ点列コンパクトならば $X \simeq \mathbb{S}^1$.
2. X が距離化可能だが点列コンパクトでないならば $X \simeq \mathbb{R}$.
3. X が距離化不可能かつ点列コンパクトならば $X \simeq \mathbb{L}$.
4. X が距離化不可能かつ点列コンパクトでないならば $X \simeq \mathbb{L}_+$.

余談

長い直線のような距離化不可能な多様体は非常に複雑な構造を持ちえることが知られている:

Theorem (Nyikos)

1. 長い直線は滑らかな微分構造を持つ.
2. しかも微分同相でない 2^{ω_1} 個の微分構造を持つ.

Theorem (Dikshit-Gauld)

長い直線の積 $\mathbb{L}^2$ (長い平面) は二次元多様体であり, しかも滑らかな微分構造 D で exotic なものをもつ: D は $\mathbb{L}$ の微分構造の積から導かれない.

Perfectly normal

長い直線が距離化不可能であることは, ある種の分離公理を満たさないことから導かれる.

Definition

空間 X が normal (正規, T_4) $\iff$ X の互いに素な二つの閉集合は開集合で分離可能.
空間 X が perfectly normal $\iff$ X は normal, かつ任意の閉集合は G_δ-set (可算個の開集合の共通部分)
$\iff$ 閉集合 C に対して連続関数 $f : X \to \mathbb{R}$ で $f^{-1}(\{0\}) = C$ となるものが存在する.

Lemma

距離空間は perfectly normal である.

- (Normality は省略) d を距離空間 X 上の距離関数とする. C が閉集合ならば, $V_n = \{x \in X \mid \exists y \in C(d(x, y) < 1/n)\}$ は C を含む開集合であり, $C = \bigcap_n V_n$ となる.

長い直線と perfect normal 性

Theorem

長い半直線は normal だが perfectly normal ではない, 特に長い直線, 半直線は距離化可能ではない.

Fact (Fodor's lemma)

$f : \omega_1 \to \omega_1$ が $\forall \alpha \in \omega_1 (0 < \alpha \to f(\alpha) < \alpha)$ を満たすならば, ある $\beta < \omega_1$ で $f^{-1}(\{\beta\})$ が非可算 (非有界) になる.

Proof.

(Normality は省略)
$C = \{\langle \alpha, 0 \rangle \mid 0 < \alpha < \omega_1\}$ は閉集合. $V \supseteq C$ が開集合ならば, 0 でない順序数 $\alpha < \omega_1$ に対して $(\langle f(\alpha), r \rangle, \langle \alpha, 0 \rangle] \subseteq O$ となる $f(\alpha) < \alpha$ と r がある. Fordor's lemma より, ある $\beta < \omega_1$ で $f^{-1}(\{\beta)\}$ が非可算になるものがあるが, この時 $(\langle \beta, 0 \rangle, \infty) \subseteq O$ となる.
この事実と ω_1 の正則性を使うと, C を含む可算個の開集合の共通部分は必ず $(\langle \gamma, 0 \rangle, \infty)$ の形の集合を含むことが言えるので C とは一致しない. □

Alexsandrov-Wilder の問題

- したがって, 一次元多様体の距離化可能性は perfect normal 性と同値になる.
- このことは, 多様体のクラスでは分離公理という基本的な性質から距離化可能性が導ける事を期待させてくれる.

Question (Alexsandrov (1935), Wilder (1949))

$n > 1$ であっても perfectly normal な n 次元多様体は距離化可能か?

- 解決には 20 年以上の歳月と集合論のテクニックが必要となった.

Theorem (Rudin-Zenor (1976))

連続体仮説を仮定する. この時 perfectly normal かつ遺伝的可分 (任意の部分空間が可分) な二次元多様体で距離化不可能なものが存在する.

Rudin-Zenor の構成法のスケッチ

1. $D = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x < 1, 0 < y < 1\}$ とする．CH より $\mathrm{cl}(D) \setminus D$ の要素を $\{y_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}$ と並べることができる．(CH の使いどころ I)
2. $I_\alpha \subseteq \mathbb{R}^2$ $(\alpha < \omega_1)$ を区間 $[0, 1)$ のコピーとし，$X_\alpha = D \cup \bigcup_{\beta<\alpha} I_\beta$，$X = \bigcup_{\alpha<\omega_1} X_\alpha$ とする．$f : X \to \mathrm{cl}(D)$ を $f \restriction D$ が identity かつ $f(I_\alpha) = \{y_\alpha\}$ となるようにとっておく．
3. X の可算部分集合全体も $\{A_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}$ と並べておく．(CH の使いどころ II)
4. 各 X_α に対して，その位相 T_α を次を満たすように transfinite inducntion で定めていく．
    1. $(X_\alpha, T_\alpha) \simeq \mathbb{R}^2$ $(+\ f \restriction X_\alpha : X_\alpha \to \mathrm{cl}(D)$ は連続)
    2. $\alpha < \beta$ ならば X_α が X_β の open dense subspace となる．
    3. $\gamma \leq \beta < \alpha$ で x_β が $f(A_\gamma)$ の極限点ならば，I_β の点は A_γ の極限点になる．
5. α が後続型の時は，黒板参照．
6. α が極限順序数の時はならば，T_α は T_β $(\beta < \alpha)$ たちから自然に定まる位相とする．α は可算なので，次の Fact より $\mathbb{R}^2$ と同相になる (CH の使いどころ III)

Theorem (Brown)

開集合 O_m $(m \in \mathbb{N})$ について，各 O_m が $\mathbb{R}^n$ と同相で $O_0 \subseteq O_1 \subseteq \cdots \subseteq O_m \subseteq \cdots$ ならば $\bigcup_m O_m$ も $\mathbb{R}^n$ と同相．

Rudin-Zenor の構成法のスケッチ 2

7. $X = \bigcup_{\alpha<\omega_1} X_\alpha$ に $\bigcup_{\alpha<\omega_1} T_\alpha$ から生成された位相を入れる．これは一次元多様体であり，$\{X_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}$ は可算な部分被覆を持たない開被覆なので Lindelöf ではなく，距離化可能ではない．
8. A_α の取り方より，X は遺伝的可分になる: $H \subseteq X$ を取り，$f(H)$ の $\overline{D}$ での可算稠密集合 K を取り，$f(K') = K$ となる可算な $K' \subseteq X$ を取ると，$K' = A_\alpha$ となる $\alpha < \omega_1$ がある．この時，取り方より $H \setminus X_\alpha$ の各点は K' の limit point．後は $H \cap X_\alpha$ の可算稠密集合 K'' を取ると，$K' \cup K''$ は H の可算稠密集合．
9. Perfect normal 性については，H が閉集合ならば $H = \bigcap_n O_n = \bigcap_n \mathrm{cl}(O_n)$ となる開集合族 $\{V_n\}$ が存在すればよい．遺伝的可分性より H はある可算な稠密部分集合を持ち，それは A_α の形をしている事を使う．

Remark

1. 距離化可能な多様体は常に可分であり，一次元ではその逆も成り立つ．
2. Rudin-Zenor の空間は，可分だが距離化不可能な二次元多様体の例にもなっている．

強制法公理と距離化可能性

- 当然ならば, Rudin-Zenor の定理中の連続体仮説の仮定が外せるかどうかが問題になるが, Rudin は「外せない」ということを, 強制法公理を用いることで証明した:

Theorem (Rudin (1979))

MA_{ω_1} を仮定する．この時 perfectly normal な多様体は全て距離化可能である.

- したがって，「多様体において perfect normal 性が距離化可能と同値である」かどうかは ZFC から決定できないことが判明した.

Moore's metrization theorem

Rudin の距離化可能性定理のミソは Moore space と呼ばれる, 一般位相幾何学で研究されてきた空間のクラス:

Theorem (Moore (1930 年代))

X が距離化可能 $\iff$ X が regular かつ X の開被覆の族 $\{\mathcal{U}_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ で次を満たすものが存在する: 任意の $x \in X$ と x を含まない閉集合 C に対して, $n \in \mathbb{N}$ で

$$\bigcup\{O \in \mathcal{U}_n \mid O \cap C \neq \varnothing\} \cap \bigcup\{V \in \mathcal{U}_n \mid x \in V\} = \varnothing$$

となるものが存在する.

Proof.

X が距離化可能ならば, $\mathcal{U}_n = \{B(x; 1/n) \mid x \in X\}$ としたとき族 $\{\mathcal{U}_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ は上の条件を満たす: x と C が与えられたとき, 十分大きな m について $d(x, y) > 1/m$ $(\forall y \in C)$ となる. $n = 1/2m$ とすればよい. □

Moore space

Definition (Moore)

X の開被覆の族 $\{\mathcal{U}_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ がdevelopmentとは, 任意の $x \in X$ と x を含まない閉集合 C に対して, $n \in \mathbb{N}$ で

$$C \cap \bigcup\{V \in \mathcal{U}_n \mid x \in V\} = \varnothing$$

となるものが存在すること．development をもつ regular space をMoore spaceとよぶ.

Development は「半径 $1/n$ の開球全体」が持つべき性質を抽出したもの．Moore space はかなり距離空間に近いが, non-normal Moore space で距離化不可能なものが存在する．一方:

1. 局所コンパクト, 局所連結, normal な Moore space は距離化可能 (Reed–Zenor)
2. パラコンパクト (特に normal) な Moore space は距離化可能．(Bing)
3. $2^{\omega_0} < 2^{\omega_1}$ ならば可分な normal Moore space は全て距離化可能．(Jones)

Theorem (Rudin (1979))

強制法公理 MA_{ω_1} を仮定する．この時 perfectly normal な n 次元多様体は常に距離化可能である．

局所コンパクト, 局所連結, normal な Moore space は距離化可能 (Reed–Zenor)

なので X が Moore space になることを言えばよい．

1. transfinite induction で O_α $(\alpha < \omega_1)$ を次を満たすようにとる:
   1. O_α は開, 連結, separable かつ Lindelöf で距離化可能.
   2. $\mathrm{cl}(\bigcup_{\beta<\alpha} O_\beta) \subseteq O_\alpha$.

   (このような O_α が取れないときは距離化可能であることが知られている).
2. ω_1 の正則性と X が第一可算であることから, $\bigcup_{\alpha<\omega_1} O_\alpha$ は clopen set なる. よって連結性から X と等しくなる.
3. 各 O_α は locally compact, 可分かつ距離化可能なので development $\{\mathcal{U}_{\alpha,n} \mid n < \omega\}$ で, 各 $O \in \mathcal{U}_{\alpha,n}$ の閉包がコンパクトかつ $\mathcal{U}_{\alpha,n} \supseteq \mathcal{U}_{\alpha,n+1}$ となるものが取れる.
4. MA_{ω_1} を使って, これらをもとに X の development が取れる.

Normal Moore space Conjecture

- Normal+〇〇ならば Moore space は大体距離化可能になった.
  1. 局所コンパクト, 局所連結, normal な Moore space は距離化可能 (Reed–Zenor)
  2. パラコンパクト (特に normal) な Moore space は距離化可能. (Bing)
  3. $2^{\omega_0} < 2^{\omega_1}$ ならば可分な normal Moore space は全て距離化可能. (Jones)
- 距離化可能でない Moore space は Moore 自身が多く指摘しているが, すべて normal ではなかった.
- すると, Moore space において normal 性が距離化可能のカギになるように見える.

Normal Moore space Conjecture, Jones (1937)

全ての normal Moore space は距離化可能である.

Normal Moore space Conjecture が証明不可能であることは強制法公理を用いることで証明された.

Non-metrizable Moore space

Definition (Rothberger)

$\mathbb{R}$ の非可算部分集合 X で, 任意の X の部分集合が X の中で F_σ (可算個の閉集合の和集合) になるものをQ-setとよぶ.

Theorem (Bing (1951), Herth (1964))

次は同値:

1. Q-set が存在する.
2. 可分な normal Moore space で距離化不可能なものが存在する.

Theorem (Bing, Solovay, Silver (1960 年代))

強制法公理 $\mathrm{MA}_{\omega_1} + 2^{\omega_1} = \omega_2$ のもとで, Q-set が存在する. 特に可分な normal Moore space で距離化不可能なものが存在する.

Metrizable Normal Moore space

- その後の強制法の発展により, Normal Moore space Conjecture の肯定的な解も得られた.

Theorem (Kunen-Nyikos (1980))

(適当な巨大基数の仮定の下で) 命題「全ての normal Moore space は距離化可能である」は ZFC と無矛盾である.

ここ証明で使われるのが, normal 性を別の形に強めたものである:

Definition

X の部分集合族 $\mathcal{F}$ がdiscrete $\iff$ 任意の点 $x \in X$ に対して, x の開近傍 O で O が $\mathcal{F}$ に属する高々一つの集合と交わるものがある.
X がcollectionwise normal $\iff$ X の discrete な閉集合の族 $\{C_i \mid i \in I\}$ は, 互いに素な開集合の族 $\{O_i \mid i \in I\}$ で分離できる.

Remark

距離化可能空間は collectionwise normal.

Collectionwise normal 性と距離化可能性

Theorem (Bing)

Collectionwise normal な Moore space は距離化可能. 特に Moore space では collectionwise normal 性と距離化可能性は同値.

1. Collectionwise normal Moore ならば任意の開被覆は σ-disjoint (互いに素な family の可算和) な refinement cover を持つ.
2. Normal Moore ならば任意の σ-disjoint な開被覆は σ-locally finite refinement cover を持つ.
3. Moore space で任意の σ-disjoint な開被覆が σ-locally finite refinement cover を持つならば, σ-locally finite base をもつ.
4. あとは Nagata-Smirnov の距離化可能性定理より距離化可能.

- Normal Moore space が全て collectionwise normal であれば Normal Moore space conjecture が成り立つことが言える.

PMEA と Normal Moore space conjecture

- A を空でない集合とし, 2^A を二点離散空間 $\{0,1\}$ の A 個のコピーの積全体 (すなわち A から $\{0,1\}$ への写像全体) とし, そこにチコノフ積位相を入れる.
- 2^A のボレル集合全体に標準的な方法で測度を入れることができる.

Definition

Product Measure Extension Axiom (PMEA) を次の主張とする: 任意の集合 A と 2^A の標準的な測度は, 2^A の部分集合全体で定義される 2^ω-加法的な測度に拡張可能.

Theorem

- (Nyikos) PMEA を仮定すれば, 全ての第一可算な normal 空間は collectionwise normal である. よって normal Moore space は距離化可能である.
- (Kunen) (適当な巨大基数の仮定の下で) PMEA は無矛盾である.

遺伝的 normal 性

Perfect normal 性を弱められるかを考えてみる.

Definition

X が遺伝的 normal (hereditarily normal, completely normal, T_5) $\Longleftrightarrow$ X の任意の部分空間が normal.

Remark

1. regular 空間の任意の部分空間は regular だが, normal 空間の部分空間が normal になる保証はない.
2. 距離空間の部分空間は距離空間なので, 距離空間は遺伝的 normal.
3. また, perfectly normal 空間の部分空間は perfectly normal なので, 特に遺伝的 normal.

Fact

1. 長い直線, 半直線は遺伝的 normal. したがって, 一次元では遺伝的 normal だが距離化不可能な多様体が存在する.
2. 長い平面は遺伝的 normal ではなく, 距離化不可能.

Nyikos の問い

- Rudin-Zenor の定理より, 連続体仮説の下では二次元では perfectly normal (特に遺伝的 normal) だが距離化不可能なものが存在する.
- 遺伝的 normal だが距離化不可能なものは, 二次元以上で常に存在するか?

Question (Nyikos (1980 年くらい))

二次元以上の多様体で, 遺伝的 normal な多様体が距離化可能になることは無矛盾か?

- 肯定的ならば, Rudin の「perfectly normal ならば距離化可能」を二次元以上について改良できることになる.
- この問題については, 最近の強制法の技術と巨大基数理論の発展を必要とした.

Theorem (Dow-Tall (2019))

(適当な巨大基数の仮定の下) 次は無矛盾: $n \geq 2$ ならば遺伝的 normal な n 次元多様体が距離化可能.

- Dow-Tall の証明においては, 強制法公理の変形 $\mathrm{MM}(S)[S]$ が用いられている.

その他の距離化可能性:Katětov の問題

Theorem (Katětov (1948))

1. X, Y がコンパクト空間の時, $X \times Y$ が遺伝的 normal ならば X と Y は perfectly normal.
2. X がコンパクト空間で X^3 が遺伝的 normal ならば X は距離化可能.

Remark

1. X^2 がコンパクト, perfectly normal ならば X は距離化可能
2. コンパクト, perfectly normal だが距離化不可能な空間が存在する.

Question (Katětov)

コンパクト空間 X の積 X^2 が遺伝的 normal ならば X は距離化可能か?

- 連続体仮説, および通常の強制法公理の下では反例が構成できる.

Theorem (Larson-Todorcevic (2001))

(適当な巨大基数の仮定の下で) 次は無矛盾: X がコンパクト空間で X^2 が遺伝的 normal ならば X は距離化可能.

時間があれば, のおまけ

ω_1 とパラコンパクト

- 長い直線が距離化不可能なのは, ω_1 を閉部分空間として含んでしまっていたから.
- Rudin-Zenor の反例が距離化不可能であったのは, X が ω_1 個の開集合の和集合として表せたから.
- その他, 距離化 (不) 可能性などについて, ω_1 が絡む事が少なくない.
- 強制法公理は, 大体の場合 ω_1 の壁 を超えるために使われる.

(あいまいな) 問題

ω_1 の使用はどの程度本質的か?

- 特にパラコンパクト性との関連をいくつか紹介する.

ω_1 とパラコンパクト

Fact

regular なパラコンパクト空間は次を満たす:

1. normal.
2. 各点が距離化可能な開近傍を持てば, 全体も距離化可能.
3. (Strongly) ω_1-collectionwise-Hausdorff: 濃度が高々 ω_1 の閉離散部分集合は互いに素な (discrete な) 開集合の族で分離可能.
4. 可分な閉部分空間は Lindelöf.

Fact

ω_1 に順序位相を入れた空間は次を満たす:

1. 遺伝的 normal だが perfectly normal でなく, 特に距離化不可能.
2. 各点は距離化可能な開近傍を持つ.
3. 局所コンパクト, 可算コンパクト, 第一可算.
4. ω_1-collectionwise Hausdorff でなく, 特にパラコンパクトではない.

「可分な閉部分空間は Lindelöf」を除く, パラコンパクトから導かれる多くの性質を ω_1 は持たない.

NO ω_1

- ω_1 を閉部分空間として含むと, 絶対にパラコンパクトにはならない.

Theorem (Dow-Tall)

(適当な巨大基数の仮定の下で) 次は無矛盾: 局所コンパクト, 第一可算で normal な空間 X がパラコンパクトであることの必要十分条件は次の二つを満たすこと.

1. ω_1 を閉部分空間として含まない.
2. 可分な閉部分空間は Lindelöf になる.

Theorem (Larson-Tall)

(適当な巨大基数の仮定の下で) 次は無矛盾: 局所コンパクト, 遺伝的 normal 空間が遺伝的パラコンパクトである事の必要十分条件は, ω_1 を閉部分空間として含まないこと.

ω_1 さえ含まなければ, よい空間のクラスはパラコンパクトになる事が無矛盾. この意味で, パラコンパクトと ω_1 との間には密接なつながりがある.

Remark

上の条件が十分条件にならないことは無矛盾である.

本当におまけ

Nomal 空間

一般位相空間論において, nomal 性は重要で興味深く, そして非常に面倒くさい代物:

1. regular と異なり, normal は大域的性質である. 実際, normal 性は弱いパラコンパクト性とみなせる.
2. 一般に遺伝的でない.
3. 一般に積に関して保存されない.
4. X が normal でも $X \times [0,1]$ が normal でないことがある.
5. 何か空間を作る場合, normal の証明だけが面倒なことが多い.
6. etc.

今まで紹介した定理では normal であることは前提されていた.

Question

Normal の前提を外せるか?

Fact

次を満たす空間が存在する:

1. 局所コンパクト, 第一可算, regularである,
2. ω_1 と同相な閉部分空間を持たない,
3. 可分閉部分空間は高々可算, よって Lindelöf である,
4. ω_1-collectionwise Hausdorff でない, よってパラコンパクトでない.

Theorem (U.)

(適当な巨大基数の仮定の下で) 次は無矛盾: 任意の局所コンパクト, 第一可算 regular空間 X に対して, X がパラコンパクトであるための必要十分条件は

1. ω_1 と同相な部分空間を持たない,
2. 任意の可分閉部分空間は Lindelöf である,
3. X は strongly ω_1-collectionwise Hausdorff である.

上の三つの条件は互いに独立であり, どれか一つでも落とすとパラコンパクトと同値ではない.

まとめ

- 距離化可能性.
- 多様体のようなよいクラスについても, その距離化可能性は非常に難問.
- 種々の normal 性が距離化可能であるかどうかを分ける壁であることは指摘されてきた.
- 集合論的手法の発展により, その壁が本質的な壁であることが判明した.

- 問題になるのは ω_1 の壁.
- 何らかの意味での可算な空間はよい性質を持ち, 可算な操作はよい性質を保つことが多い.
- 連続体仮説があると, 「よい性質を保つ」可算な操作の極限として非可算な全体が得られる.
- 強制法公理は, 大雑把に「ω_1 が ω とよく似た性質を持つ」事を主張する公理. この公理のおかげで ω_1 の壁を越え, よい性質を保ったままその操作を続けられる (ことが多い).

参考文献 (代表的なもの)

1. D. Gauld, Non-metrisable Manifolds. Springer. 2014.
(距離化不可能多様体に関する text)
2. R. H. Bing, Metrization of topological spaces, Canadian J. Math., 3 (1951) 175–186.
3. F. B. Jones, Concerning normal and completely normal spaces, Bull. Amer. Math. Soc., 43 (1937) 671–677.
4. P. Larson, S. Todorcevic, Katětov's Problem. Trans. Amer. Math. Soc. 354 (2002), no. 5, 1783–1791.
5. M. E. Rudin, P. Zenor, A perfectly normal nonmetrizable manifold. Houst. J. Math. 2, 129–134 (1976)
6. M. E. Rudin,The undecidability of the existence of a perfectly normal nonmetrizable manifold. Houst. J. Math. 5, 249–252 (1979)
7. P. J. Nyikos, A provisional solution to the normal Moore space problem. Proc. Amer. Math. Sot. 78 (1980) 429–435.
8. P. Nyikos, Mary Ellen Rudin's contributions to the theory of nonmetrizable manifolds. The work of Mary Ellen Rudin (Madison, WI, 1991), 92–113. Ann. New York Acad. Sci., 705.
9. P. Nyikos, A history of the normal Moore space problem. Handbook of the History of General Topology, History of Topology 3 (2001), 1179–1212.
10. F. D. Tall, $\mathrm{PFA}(S)[S]$ for the masses, Top. Appl. 232 (2017) 13-21.