アインシュタイン方程式とペンローズ予想

山田澄生（学習院大）

March 13, 2025

1. アインシュタイン方程式
2. 波動方程式系としてのアインシュタイン方程式
3. 厳密解
4. コーシー初期値問題とリーマン幾何学
5. Penrose の特異点定理
6. Penrose 予想と終末期仮説

1. アインシュタイン方程式
2. 波動方程式系としてのアインシュタイン方程式
3. 厳密解
4. コーシー初期値問題とリーマン幾何学
5. Penrose の特異点定理
6. Penrose 予想と終末期仮説

アインシュタイン方程式

アインシュタイン時空：n 次元ローレンツ多様体 $(N^n, \mathbf{g})$ ローレンツ計量 $\mathbf{g}$(符号：$-+++$) はアインシュタイン方程式 (EE)

$$G_{ab} := R_{ab} - \frac{1}{2} R\,\mathbf{g}_{ab} = T_{ab}$$

をみたす.$R_{\mathbf{g}}$: $\mathbf{g}$ の（リッチ）スカラー曲率, R_{ab}: $\mathbf{g}$ のリッチ曲率
T_{ab}: エネルギー・運動量テンソル.
EE は Hilbert-Einstein 汎関数：

$$\mathcal{H}(\mathbf{g}) = \int_N \{R_{\mathbf{g}} + L\}\, d\mu_{\mathbf{g}}$$

のオイラー・ラグランジュ方程式．L: 非重力場のラグランジアン (真空のとき $L=0$、$T=0$).

ゼロ曲率テンソルの「剛性」：

$$R_{abcd} = 0 \Rightarrow \text{ 局所的に平坦; i.e. } \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n,1}$$

真空アインシュタイン方程式 ⇔ ゼロ・リッチ曲率

$$R_{ab} - \frac{1}{2} R\, \mathbf{g}_{ab} = 0 \Rightarrow R = 0 \Rightarrow R_{ab} = 0;$$

真空アインシュタイン方程式：

幾何学の**最も簡単な（非自明な）方程式**

1. アインシュタイン方程式
2. 波動方程式系としてのアインシュタイン方程式
3. 厳密解
4. コーシー初期値問題とリーマン幾何学
5. Penrose の特異点定理
6. Penrose 予想と終末期仮説

波動方程式系としてのアインシュタイン方程式

Einstein-Hilbert 汎関数（真空）

$$\mathcal{H}(\mathbf{g}) = \int_N R_{\mathbf{g}}\, d\mu_{\mathbf{g}}$$

の第 1 変分

$$\delta\mathcal{H}(\mathbf{g}, h) := \frac{d}{dt}\mathcal{H}(\mathbf{g}+h)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\int_N \{\mathbf{g}^{ij} R_{ij}\}\, d\mu_{\mathbf{g}}\Big|_{t=0}$$

が消えていることは、

$$\delta\mathcal{H}(\mathbf{g}, h) = -\int_N \langle \mathrm{Ric} - \frac{1}{2} R\mathbf{g}, h\rangle_{\mathbf{g}(x)} d\mu_{\mathbf{g}} = 0 \qquad \forall h$$

となり、（真空）アインシュタイン方程式が導かれる．

微分同相群のゲージ

一方で、任意の微分同相写像 $\phi : N \to N$ で $\mathbf{g}$ を引き戻すと

$$\mathcal{H}(\mathbf{g}) = \mathcal{H}(\phi^*\mathbf{g})$$

である．($\phi : (N, \phi^*\mathbf{g}) \to (N, \mathbf{g})$ は等長写像) よって $\mathbf{g}$ がアインシュタイン計量ならば、$\phi^*\mathbf{g}$ も解．
さらに、微分同相写像の一変数族 ϕ_t による引き戻し作用を、恒等写像において線形化する．

$$\frac{d}{dt}\phi^*\mathbf{g}\Big|_{t=0} = L_X\mathbf{g}$$

が $\mathbf{g}$ のリー微分 $L_X\mathbf{g}$ であることを用いると、任意の N 上のベクトル場 X に対して、$\mathcal{H}(\mathbf{g}) = \mathcal{H}(\phi_t^*\mathbf{g})$ から以下が従う：

$$\delta\mathcal{H}(\mathbf{g}, L_X\mathbf{g}) = -\int_N \langle \mathrm{Ric} - \frac{1}{2}R\mathbf{g}, L_X\mathbf{g}\rangle_{\mathbf{g}(x)} d\mu_{\mathbf{g}} = 0.$$

局所座標系のもと $L_X\mathbf{g} = X^a{}_{;b} + X^b{}_{;a}$．よって $L_X\mathbf{g} = -2\delta_g^* X$

$$\delta_G(\mathrm{Ric}_{\mathbf{g}} - \frac{1}{2}R_{\mathbf{g}}\mathbf{g}) = 0$$

がしたがう．これはビアンキの恒等式に他ならない．
同様にして、非真空アインシュタイン方程式の右辺に、

$$\delta_{\mathbf{g}} T_{ab} = 0$$

をも誘導する。また、微分同相写像からなるゲージ群の存在は、アインシュタイン方程式が、局所座標の変換 $\{x^a\} \to \{y^b\}$ に関して不変であることを意味する。

「アインシュタイン方程式は**幾何学的**」

アインシュタイン方程式を適当な座標系を用いて表記することで（非線形）**波動方程式系**として認知する．リッチ曲率の平坦性は、ローレンツ計量の偏微分を用いて表すと

$$R_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} g_{\mu\nu,\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (g_{\alpha\beta,\mu\nu} - g_{\mu\alpha,\beta\nu} - g_{\nu\alpha,\beta\mu}) + F_{\mu\nu}(g, \partial g) = 0$$

ここで $\triangle_{\mathbf{g}} x^{\mu} = 0$ をみたす調和座標を用いて、方程式を書き直す：

$$R^{H}_{\mu\nu} := -\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} g_{\mu\nu,\alpha\beta} + \tilde{F}_{\mu\nu}(g, \partial g) = 0$$

これは波動方程式系．この方程式を、適当な初期条件のもとに解くことでアインシュタイン時空を構成する．

漸近平坦な厳密解

- Minkowski 解（1908）
- Schwarzschild 解 (1916, 真空)
- Reissner-Nordström 解 (1916-21, E-M 方程式)
- Mujumbdhar-Papapetrou 解 (1947, E-M 方程式、非漸近平坦)
- Kerr 解 (1963, 真空)、Kerr-Newman 解（E-M 方程式)
- Tomimatsu-Sato 解 (真空 裸の特異点、1972,73)

静的解または定常解（時間対称性）

$$X = \frac{\partial}{\partial t}\text{がキリング・ベクトル場}: L_X \mathbf{g} = 0$$

Schwarzschild 解の Flamm モデル

$$\{t = \text{定数}\} = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \,|\, \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{w^2}{8m} + 2m\}$$

コーシー初期値問題

問題

- 適当な初期条件とは？
- 調和座標は時間発展のもとで必ず存在するか？

定理（部分多様体の基本定理 Bonnet）

$\mathbb{R}^3$ の部分多様体 Σ^2 の第 $1,2$ 基本形式はガウス・コダッチ方程式をみたす。逆に、ガウス・コダッチ方程式をみたす対称 $(0,2)$ テンソル h,k は、局所的に $\mathbb{R}^3$ の h,k を、それぞれ第 $1,2$ 基本形式としてもつ部分多様体として実現され、その埋め込み $\iota : \Sigma \to \mathbb{R}^3$ は一意的である.

部分多様体が外在する空間は、あらかじめ $\mathbb{R}^3$ と規定.
ガウス・コダッチ方程式：外在空間の曲率テンソルと内在空間の曲率テンソルの関係性を h,k で表現したもの

定理 (一般相対論における部分多様体の基本定理（Choquet-Bruhat 1952)

Σ^3 上で、ガウス・コダッチ方程式 *(Einstein Constraint Equations)*

$$R + (\mathrm{Tr}_h\, k)^2 - \|k\|^2 = 16\pi\mu, \quad \mathrm{div}_h\{k - (\mathrm{Tr}_h\, k)h\} = 8\pi J$$

をみたす対称 $(0,2)$ テンソル h, k は、ある 4 次元アインシュタイン時空 $(N, \mathbf{g})$ が一意的に存在して、局所的に N の h, k を第 $1, 2$ 基本形式としてもつ空間的部分多様体 Σ として実現され、その埋め込み $\iota : \Sigma \to N$ は一意的．

部分多様体が埋め込まれる空間のローレンツ計量 $\mathbf{g}$ が、コーシー問題の解．ガウス-コダッチ方程式は、それぞれ h に関してトレース (縮約) をとってある形になっているため、Bonnet の条件よりも弱い．

ここでは、**マックスウェル方程式を波動方程式系**として扱う Ansatz を思い出す.

$$F_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

を係数にもつ、ミンコフスキー時空 $(\mathbb{R}^4, \eta_{ab})$ 上で定義された微分形式

$$F(x^0, x^1, x^2, x^3) = \frac{1}{2} \sum_{a,b} F_{ab} dx^a \wedge dx^b$$

に対して、（真空）マックスウェル方程式は

$$dF = 0, \quad \delta F = 0 \qquad (\delta \text{は} \, d \, \text{の} \, L^2(\eta)\text{-共役作用素.})$$

マックスウェル方程式から、$\{x_0 = 0\} \subset \mathbb{R}^4$ で定義される

$$E = \frac{1}{2}\sum_{1\le i\le 3}(F_{0i} - F_{i0})dx^i, \quad *_{\mathbb{R}^3} B = \frac{1}{2}\sum_{1\le i\le 3} F_{ij}dx^1 \wedge dx^j$$

は $\mathrm{div}_{\mathbb{R}^3} E = \mathrm{div}_{\mathbb{R}^3} B = 0$ という Constraint Equations (CE) をみたす．
ポアンカレの補題から $\mathbb{R}^4$ 上に F のベクトル・ポテンシャル A (1形式)

$$F = dA$$

が存在して、ローレンツ・ゲージ条件 $\delta A = 0$ のもとで、この A が波動方程式（η に関するラプラス・ベルトラミ作用素で定義）

$$\Box A = 0$$

に関する初期値データ $A|_{\{x^0=0\}}$ のコーシーの問題として定式化される．なおローレンツ・ゲージ条件は $t = 0$ における CE のもとで時間的に伝播するため、コーシー問題は well-posed となる．

アインシュタイン方程式のコーシー問題においては、**適当な初期条件**はガウス・コダッチ方程式（Einstein Constraint Equations）である．これらの式は

$$G_{00} = 8\pi T_{00}, \quad G_{i0} = 8\pi T_{i0} \quad (i = 1, 2, 3)$$

に他ならない．アインシュタイン方程式系は 10 個の方程式からなるが、このコーシー問題の設定においては、そのうちの 4 つは初期データのみたすべき必要条件となっているため、残りの 6 つの方程式が真の自由度である。さらにアインシュタイン方程式を波動方程式として見なすためには、$\{x^0 = 0\}$ で設定される調和座標系 (**ゲージ条件**) が時間的に伝播されることが必要となるが、それは調和座標関数自身が、波動方程式の解として可解であることから導かれる．

Choquet-Bruhat のアイデア (1952) は、アインシュタイン方程式を、部分多様体論を介して、**マックスウェル方程式の非線形バージョン**として捉えることであった。(真空の場合) 対比としては

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2} R\,\mathbf{g}_{ab} = 0 \Leftrightarrow dF = \delta F = 0$$

$$-\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} g_{\mu\nu,\alpha\beta} + \tilde{F}_{\mu\nu}(g, \partial g) = 0 \Leftrightarrow \Box A = 0$$

$$G_{00} = G_{i0} = 0(\text{ガウス・コダッチ}) \Leftrightarrow \mathrm{div}_{\mathbb{R}^3} E = \mathrm{div}_{\mathbb{R}^3} B = 0$$

$$\text{調和座標系} \Leftrightarrow \text{ローレンツ・ゲージ}$$

定理（一般相対論における部分多様体の基本定理 Choquet-Bruhat 1952)

Σ^3 上で、ガウス・コダッチ方程式 *(Einstein Constraint Equations)*

$$R + (\mathrm{Tr}_h\, k)^2 - \|k\|^2 = 16\pi\mu$$

$$\mathrm{div}_h\{k - (\mathrm{Tr}_h\, k)h\} = 8\pi J$$

をみたす対称 $(0,2)$ テンソル h, k は、ある 4 次元アインシュタイン時空 $(N^4, \mathbf{g})$ が一意的に存在して、局所的に N の h, k を第 $1, 2$ 基本形式としてもつ空間的部分多様体 Σ として実現され、その埋め込みは一意的.

定義

コーシー初期条件とは、3 次元多様体 Σ^3 上に定義されたリーマン計量 h、対称 $(0,2)$ テンソル k からなる組 (Σ^3, h, k) で以下をみたすものをさす：

- ガウス・コダッチ方程式 (Einstein Constraint Equations)

$$R + (\mathrm{Tr}_h\, k)^2 - \|k\|^2 = 16\pi\mu$$

$$\mathrm{div}_h\{k - (\mathrm{Tr}_h\, k)h\} = 8\pi J$$

  をみたす.

- 優エネルギー条件

$$\rho \geq \|J\|_h$$

  をみたす.

定義 (大域的双曲型時空)

時間的向き付け可能な時空 N^4 の任意の点から任意の因果曲線を介して、ある空間的部分多様体 Σ^3 に到達することができ、その因果曲線は Σ と 1 回しか交わらないとき、N を大域的双曲型時空とよび、また Σ を N のコーシー曲面とよぶ.

定理 (Geroch)

コーシー初期条件 (Σ^3, h, k) が与えられたとき、以下をみたすアインシュタイン時空 $(N^4, \mathbf{g})$ が一意的に存在する：

- $(N, \mathbf{g})$ は、(Σ, h, k) を初期条件とするコーシー問題の解である.
- $(N, \mathbf{g})$ は、Σ をコーシー曲面とする大域的双曲型時空である.
- $(N', \mathbf{g}')$ が上のふたつの条件をみたしているとき、N' は N 内の開集合としての等長的埋め込みが存在する

1. アインシュタイン方程式
2. 波動方程式系としてのアインシュタイン方程式
3. 厳密解
4. コーシー初期値問題とリーマン幾何学
5. Penrose の特異点定理
6. Penrose 予想と終末期仮説

Penroseの特異点定理

定理

アインシュタイン時空 $(N^4, \mathbf{g})$ が以下をみたすとする

- 光的収束条件 $\mathrm{Ric}_{\mathbf{g}} \geq 0$
- 非コンパクトなコーシー曲面 $\Sigma^3 \subset N^4$ が存在する．(よって N は大域的双曲型)
- 捕捉された閉曲面 $S^2 \subset N^4$ が存在　（面積要素の log 微分 < 0）

このとき、$(N, \mathbf{g})$ は測地的に完備ではない．

証明：　Myer の定理: $\mathrm{Ric}_g > \kappa > 0 \Rightarrow \mathrm{diam} M \leq \frac{n-1}{\kappa^2}$ のローレンツ幾何学版（Raychaudhuri 方程式）($G_{00} = 0$ のみを用いる)　＋　コーシー曲面への射影に関する位相的議論

Penrose の特異点定理は、「光的測地線がそれ以上延長できない」という意味での特異点の存在の十分条件を与えている．その十分条件は generic なものであり、よって特異点の存在も（正のリッチ曲率の多様体上で共役点が必然的であることと類似して）generic であることをいう．ただし、この定理自体は特異点の位置、幾何学的、物理的性質等に関しては何も特定していないことに注意．
実際、上で紹介した（ミンコフスキー時空以外の）厳密解は、みな特異点をもつ．一方で現実の宇宙では裸 (naked) の特異点、すなわち我々に直接観測可能な影響を及ぼす時空の特異点は存在しない（であろう）、そして、もし時空の特異点が存在したならば、それは事象の地平線によって覆われている（dressed）のではないか, という主張が「**宇宙検閲官仮説**」である．

1. アインシュタイン方程式
2. 波動方程式系としてのアインシュタイン方程式
3. 厳密解
4. コーシー初期値問題とリーマン幾何学
5. Penrose の特異点定理
6. Penrose 予想と終末期仮説

Penrose 予想と終末期仮説

予想 (Weak 宇宙検閲官仮説)

漸近的平坦なコーシー初期条件 (Σ^3, h, k) の大域的双曲型時間発展で得られる最大 *(maximal)* の時空 $(N^4, \mathbf{g})$ は、漸近的に予測可能である。すなわち、未来の無限遠点集合 $\mathfrak{I}^+$ まで伸びる大域的双曲型部分集合 $\tilde{N} \subset N$ が存在し、

$$\tilde{N} = J^-(\mathfrak{I}^+)$$

つまり、$\tilde{N}$ は、$\mathfrak{I}^+$ の因果的過去集合に一致する.

この状況で、$\mathfrak{B} = N \setminus \tilde{N}$ をブラックホール領域、その境界 $\partial\mathfrak{B} = \partial(J^-(\mathfrak{I}^+))$ は事象の地平線である. ここで観測者は、$\mathfrak{I}^+$ にいるので、$\tilde{N}$ における過去の事象は観察でき、その補集合 $\mathfrak{B}$ における事象を観測することはできない。

Penrose 不等式

Penrose は、上の宇宙検閲官仮設の真偽を問うために以下の不等式の検証を提案した

予想 (Penrose 不等式)

漸近的平坦なコーシー初期条件 (Σ^3, h, k) の *ADM* 質量 m と、Σ の包含する事象の地平線の *(*断面の*)* 面積 A の間には、以下の不等式が成り立つ：

$$A(S) \le 16\pi m^2$$

この不等式を破るコーシー初期条件を構成することを Penrose は画策 (Naked Singularities 1973) したが、失敗した。この不等式は、以下の連想による.

終末期仮説（Final state conjecture）:「漸近的に平坦な時空において、時間の発展と共に引力によってブラックホールは合体を繰り返し、時間漸近的には、いくつかの Kerr 時空が等加速運動を持って互いから遠ざかっていく状況が Final State である」というものである．今は簡単のために最終的な Kerr 時空は、一つのみの状況を想定する．このとき、以下の定量的な現象が想定される：

$$A(S) \leq A(S_t) \nearrow A(S_\infty) = 8\pi[m_\infty^2 + \sqrt{m_\infty^4 - a^4}] \leq 16\pi m_\infty^2 \leq 16\pi m^2$$

ここで最初の不等式は、Hawking の**事象の地平線の面積の単調増加性**により、次の等式は、**Kerr 解の明示**的な情報、次の不等式は **ADM 角運動量** a がもつエネルギーを考慮したもの、最後の不等式は、ADM 質量の一部が、重力波、電磁波等によって**無限遠に放射**される可能性を考慮したものである。

定理 (Riemannian Penrose 不等式 G.Huisken–T.Ilmanen,H.Bray)

漸近的平坦、かつ時間対称性を持つコーシー初期条件 $(\Sigma^3, h, k \equiv 0)$ の *ADM* 質量 m と、Σ の包含する事象の地平線の *(*断面の*)* 面積 A の間には、以下の不等式が成り立つ：

$$A(S) \leq 16\pi m^2$$

なお、等式は、$(\Sigma^3, h, k \equiv 0)$ が *Schwarzschild* 時間一定面のときにかぎる.

cf. $m \geq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{A}{4\pi}}$

$R_h \geq 0$

定理 (Riemannian Penrose 不等式 (Einstein-Maxwell 方程式) M.Khuri–G.Weinstein–S.Yamada)

漸近的平坦、かつ時間対称性を持つコーシー初期条件 $(\Sigma^3, h, k \equiv 0)$ の *ADM* 質量 m と電荷 q、Σ の包含する事象の地平線の *(*断面の*)* 面積 A の間には、以下の不等式が成り立つ：

$$\sqrt{\frac{A}{4\pi}} \leq m + \sqrt{m^2 - q^2}$$

注意 $m \geq \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{A}{4\pi}} + \frac{q^2}{\sqrt{\frac{A}{4\pi}}}\right)$ は成立しない：Majundhar-Papapetrou 解を用いた反例 (Weinstein–Y.).

$R_h \geq 2(\|E\|^2 + \|B\|^2)$

$\mathsf{T}_{ab} = \frac{1}{4}\|F\|^2_{\mathbf{g}}\mathbf{g}_{ab} - (F \cdot F)_{ab}$