対称性をもつ4、5 次元アインシュタイン時空の構成法

山田澄生（学習院大）

March 14, 2025

1. アインシュタイン方程式と調和写像
2. ロッド構造とトリック多様体
3. 5 次元重力ソリトン
4. 重力インスタントン

1. アインシュタイン方程式と調和写像
2. ロッド構造とトリック多様体
3. 5 次元重力ソリトン
4. 重力インスタントン

アインシュタイン方程式

アインシュタイン時空：n 次元ローレンツ多様体 $(N^n, \mathbf{g}) \quad n = 4, 5$
ローレンツ計量 $\mathbf{g}$(符号：$- + \cdots +$) はアインシュタイン方程式 (EE)

$$G_{ab} := R_{ab} - \frac{1}{2} R\, \mathbf{g}_{ab} = T_{ab}$$

をみたす． $R_{\mathbf{g}}$: $\mathbf{g}$ の（リッチ）スカラー曲率, R_{ab}: $\mathbf{g}$ のリッチ曲率
T_{ab}: エネルギー・運動量テンソル.
EE は Hilbert-Einstein 汎関数ののオイラー・ラグランジュ方程式：

$$\mathcal{H}(\mathbf{g}) = \int_N \{R_{\mathbf{g}} + L\}\, d\mu_{\mathbf{g}}$$

真空アインシュタイン方程式 ⇔ ゼロ・リッチ曲率

$$R_{ab} - \frac{1}{2} R\, \mathbf{g}_{ab} = 0 \Rightarrow R = 0 \Rightarrow R_{ab} = 0;$$

$3+1$ アインシュタイン時空の Weyl 座標系

H. Weyl (1916) は　シュバルツシルト計量 (1915)

$$ds^2 = -(1 - \frac{m}{r})dt^2 + (1 - \frac{m}{r})^{-1}dr^2 + r^2 d\omega_{S^2}^2.$$

を以下のように表した：

$$ds^2 = -\frac{\rho^2}{e^u}dt^2 + e^u d\phi^2 + e^\alpha(d\rho^2 + dz^2).$$

ここで $u = u(\rho, z)$. 真空アインシュタイン方程式　$R_{ij} = 0$ は、

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

$$\alpha_\rho = \frac{\rho}{2}\rho(u_\rho^2 - u_z^2 - \frac{2}{\rho}u_z), \quad \alpha_z = \frac{\rho}{2}(2u_z u_\rho - \frac{2}{\rho}u_z)$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

は、円柱座標を介したラプラス方程式 $\triangle_{\mathbb{R}^3} u = 0$ にほかならず（u は ϕ に依らない）、これは

$$d\alpha = \frac{1}{2}\rho\left(\mathrm{Re}|\partial \mathrm{u}|^2\right)\mathrm{d}\xi \qquad (\xi = \rho + \mathrm{iz})$$

の可積分条件になる．
以下の漸近平坦性を境界条件として課す:

$$u \to 2\log\rho \text{ at } \infty$$

Schwarzschild 解が特定される．

Ernst還元法と$3+1$次元Kerr計量

時間対称性と 軸対称性$\mathbb{R}\times U(1)$; キリング・ベクトル場 $\frac{\partial}{\partial t}$ and $\frac{\partial}{\partial \phi}$.

$X := \|\eta\|_g^2$ ただし$\eta := \frac{\partial}{\partial \phi}$

Y は $dY = *(\eta \wedge d\eta)$ のポテンシャル

(X, Y)は、$\mathbb{R}\times U(1)$が作用している軌道に計量を与える.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{g} &= G_{ij}(\rho, z) dx^i \otimes dx^j + e^{\alpha(\rho,z)}(d\rho^2 + dz^2) \\
&= [-\tfrac{\rho^2}{X} dt^2 + X(d\phi + \omega dt)^2] + e^{\alpha}(d\rho^2 + dz^2).
\end{aligned}
$$

ここで、$x^0 = t, x^1 = \phi$、また$\rho = \sqrt{|\det G_{ij}|}$

$$
G_{ij} = \begin{pmatrix} -\rho^2/X + X\omega^2 & X\omega \\ X\omega & X \end{pmatrix}
$$

この設定において、$\mathbf{g}$ が VEE の解であることは

$$(\rho, z, \phi) \mapsto (X, Y)$$

$$[G] = \frac{1}{X}\begin{pmatrix} 1 & Y \\ Y & X^2 + Y^2 \end{pmatrix}$$

が調和写像 (B. Carter)、つまり

$$\mathbb{R}^3 \setminus \{\rho = 0\} \to SL(2, \mathbb{R})/SO(2)$$

のディリクレ・エネルギー

$$\int \left(\frac{|\nabla X|^2 + |\nabla Y|^2}{X^2} \right) d\mu_{\mathbb{R}^3}.$$

を最小化していることと等価である.

2 軸対称性をもつ $4+1$ 次元定常時空

5 次元アインシュタイン時空 $(N^5, \mathbf{g})$ 上で、3 つのキリング・ベクトル場

$$\frac{\partial}{\partial t}, \quad \frac{\partial}{\partial \phi_1}, \quad \frac{\partial}{\partial \phi_2}$$

がリー群 $\mathbb{R} \times U(1)^2$ を生成しているとき、$(N^5, \mathbf{g})$ が含む事象の地平線の各連結成分は，Yamabe 正な 3 次元多様体 Σ^3 に微分同相である [Galloway-Schoen] ことが知られている．ここでさらに 2 軸プラス時間対称性 $\mathbb{R} \times U(1)^2$ を課すと, ホライズンの各連結成分は、以下に微分同相 [Hollands-Yazadjiev] である：

$$S^3, S^1 \times S^2, \mathbb{R}P^3, L(p,1).$$

Hawking: $3+1$ 次元のホライズン $\cong S^2$

2軸対称性をもつ$4+1$次元定常時空の例

- $\mathbb{R}^{4,1}$
- Myers-Perry spacetime (S^3 horizon, 5D Kerr, VEE)
- Emperan-Reall ($S^2 \times S^1$ horizon, VEE)
- Kunduri-Lucietti ($\mathbb{R}P^3$ horizon, supersymmetry)
- Nozawa-Tomizawa ($L(p,1)$ horizon, supersymmetry)

Ernst 還元法と $4+1$ 次元アインシュタイン計量

N^{4+1} 上のアインシュタイン計量 $\mathbf{g}$ は、

$$[\mathbb{R} \times U(1)^2] \times \{(\rho, z) \mid \rho \in \mathbb{R}, \quad z > 0\}$$

という（大域）座標系で定義：

$$\mathbf{g} = G_{ij} dx^i \otimes dx^j + e^{2\nu}(d\rho^2 + dz^2)$$

ここで

$$\rho = \sqrt{|\det G_{ij}|}, \quad \nu = \nu(\rho, z), \quad G_{ij} = G_{ij}(\rho, z)$$

は $\mathbb{R}^5 \setminus \{\rho = 0\}$ 上で滑らか.

$\mathbf{g}$ が VEE をみたすことは、G_{ij} が、対称空間 $SL(3,\mathbb{R})/SO(3)$ への調和写像として表現されることと同値：

$$u : (\rho, z, \phi) \mapsto [G]$$

ここで $[G]$ は、G によって決定される $SL(3,\mathbb{R})/SO(3)$ の元；

$$G_{ij}dx^i dx^j = -\frac{\rho^2}{f}dt^2 + \sum_{1\leq i,j,\leq 2}^{2} f_{ij}(d\phi^i + \omega^i dt)(d\phi^j + \omega^j dt),$$

$[G]$ は明示的には以下で与えられる [D. Maison] ($f = \det f_{ij}$)

$$[G] = \frac{1}{f}\begin{pmatrix} 1 & -v_1 & -v_2 \\ -v_1 & ff_{11} + (v_1)^2 & ff_{12} + v_1v_2 \\ -v_2 & ff_{21} + v_2v_1 & ff_{22} + (v_2)^2 \end{pmatrix}$$

正定値、対称、$\det[G] = 1$ 行列.

$3+1$ 次元と同様に u はディリクレ・エネルギーを最小化：

$$\int \left(\frac{1}{4}\frac{df^2}{f^2} + \frac{1}{4} f^{ij} f^{kl} df_{ik} df_{jl} + \frac{1}{2} f^{ij} \frac{dv_i dv_j}{f} \right) d\mu_{\mathbb{R}^3}.$$

ここで v_i は、Ernst ポテンシャルとよばれ、$\frac{\partial}{\partial \phi^i}$ で生成される対称性の hypersurface orthogonality からの乖離を表す．（Y の高次元一般化）

以上をまとめると

- 商空間 $N^5/(\mathbb{R}\times U(1)^2)$ は ρz-右半平面 $(\rho>0)$ と同一視
- $G_{ij}dx^i dx^j$ は $\mathbb{R}\times(S^1)^2$ のファイバー上のローレンツ計量.
- $G(\rho,z)$ は、右半平面 ρz 上で定義された滑らか、かつ非退化な 3×3 対称行列
- $\rho := \sqrt{|\det G|}\to 0 \qquad \Rightarrow \qquad \dim\ker(G(0,z))\geq 1$、さらに $\{\dim\ker(G(0,z))\geq 2\}$ は $z=\{\rho=0\}$ 軸上で離散的：

$$-\infty = a_0 < a_1 < \cdots < a_N < a_{N+1} = \infty.$$

1. アインシュタイン方程式と調和写像
2. ロッド構造とトリック多様体
3. 5 次元重力ソリトン
4. 重力インスタントン

$G(0,z)$ のゼロ固有値を持つ固有ベクトル $V(z)$

$$G(0,z)V(z) = 0$$

は、互いに素な正の整数係数をもつ線型結合

$$V = \alpha\frac{\partial}{\partial t} + \beta\frac{\partial}{\partial \phi_1} + \gamma\frac{\partial}{\partial \phi_2}$$

$G(0,z)$ がランク 2 のとき、

- $V(z)$ が光的ベクトル $\Rightarrow$ 「ホライズンロッド」$(a_n, a_{n+1}) \ni z$ は、事象の地平線を表す. $\frac{\partial}{\partial\phi_1}$ と $\frac{\partial}{\partial\phi_2}$ の積分曲線で生成された T^2 の集合
- $V(z)$ が空間的ベクトル $\Rightarrow$ 「軸ロッド」$(a_m, a_{m+1}) \ni z$ は $U(1)^2$ 作用が free でない、つまり V の積分曲線が退化している状況.

定義

ロッド構造:

$$z\text{ 軸の分解} = \cup_{i=0}^{N}[a_i, a_{i+1}] \text{ と固有ベクトル } V_i.$$

調和写像の存在

定理

[Khuri-Weinstein-Y. 2018] ロッド構造、および各軸ロッドに角運動量があたええられたとき、それらを漸近的無限遠の境界条件とする調和写像

$$u : \mathbb{R} \to SL(3,\mathbb{R})/SO(3)$$

が一意的に存在する．その u は右半平面上に定義される 2 軸対称性を持つ定常アインシュタイン計量を定める．(*Stationary vacuum black holes in 5 dimensions.* Communications in PDE(2018).)

注意 z 軸上に、特異点（cone singularity）？ 有限次元のパラメーター空間を用いて除去可能? (cf. Weyl-Bach, Emperan-Reall)

最も簡単な $4+1$D VEE の解であるミンコフスキー計量は、

$$
\begin{aligned}
\mathbf{g} &= -dt^2 + dr^2 + r^2 d\omega_{S^3} \\
&= -dt^2 + dr^2 + r^2[d\theta^2 + \sin^2\theta(d\phi^1)^2 + \cos^2\theta(d\phi^2)^2)] \\
&= \{-dt^2 + r^2\sin^2\theta(d\phi^1)^2 + r^2\cos^2\theta(d\phi^2)^2)\} + dr^2 + r^2 d\theta^2 \\
&= G_{ij}dx^i dx^j + dr^2 + r^2 d\theta^2 \qquad (0 \le \theta \le \pi/2) \\
&= G_{ij}(\rho, z)dx^i dx^j + \frac{1}{\sqrt{\rho^2+z^2}}(d\rho^2 + dz^2)
\end{aligned}
$$

と表される．ここで最後の行の変数変換は、

$$
\rho = \frac{1}{2}r^2\sin 2\theta, \quad z = \frac{1}{2}r^2\cos 2\theta
$$

(リーマン写像: $z \mapsto z^2$ は $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^4)/(\mathbb{R}\times U(1)^2) = \mathbb{R}_{\ge 0}\times\mathbb{R}_{\ge 0}$ を ρz 半平面に共形変換)

調和写像 u を確認：

$$\begin{aligned} ds^2 &= G_{ij}(\rho, z)dx^i dx^j + \frac{1}{\sqrt{\rho^2+z^2}}(d\rho^2+dz^2) \\ &= -\frac{\rho^2}{e^{u_1+u_2}}dt^2 + e^{u_1}d\phi_1^2 + e^{u_2}d\phi_2^2 + e^{\alpha}(d\rho^2+dz^2) \\ &= -dt^2 + e^{u_1}d\phi_1^2 + e^{u_2}d\phi_2^2 + e^{\alpha}(d\rho^2+dz^2) \end{aligned}$$

に対して、$u_1 = \log(r+z)$ は、$(0,1)$ 軸ロッド $\{z \leq 0\}$ が極集合,
$u_2 = \log(r-z)$ は、$(1,0)$ 軸ロッド $\{z \geq 0\}$ が極集合． $r = \sqrt{\rho^2+z^2}$.

$$G_{ij} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{u_1} & 0 \\ 0 & 0 & e^{u_2} \end{pmatrix}, \quad [G] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r+z}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r-z}{\rho} \end{pmatrix}$$

次に、$3+1$ Schwarzschild 計量の調和性を確認：

$$ds^2 = -\frac{\rho^2}{e^u}dt^2 + e^u d\phi^2 + e^\alpha(d\rho^2 + dz^2)$$

ここではグリーン関数 $u = 2\log\rho - u_0$ は極集合 $\{z > m\}$ と $\{z < -m\}$ という軸ロッドをもつ. u_0 は電荷を帯びた $[-m, m]$ 軸のポテンシャル、u は電荷を帯びた z 軸 $\setminus[-m, m]$ のポテンシャル. 調和写像は

$$G_{ij} = \begin{pmatrix} -\frac{\rho^2}{e^u} & \\ 0 & e^u \end{pmatrix}, \quad [G] = \begin{pmatrix} e^{-u} & 0 \\ 0 & e^u \end{pmatrix}$$

であたえられる. u の像は、$\mathbb{H}^2$ の測地線.

軸ロッド Γ の正則性:

$$\frac{\text{Circumference}}{2\pi\text{Radius}} = \frac{2\pi e^{u/2}}{2\pi\int_0^\rho e^{\alpha/2}d\rho} \sim \frac{e^{u/2}}{\rho e^{\alpha/2}} \to 1$$

Weyl–Bach(1923) は重ね合わせの原理から、2 つの $3+1$ Schwarzschild 計量を並列

$$ds^2 = -\frac{\rho^2}{e^u}dt^2 + e^u d\phi^2 + e^\alpha(d\rho^2 + dz^2)$$

ここでは、$u = 2\log\rho - u_0$、u_0 は、帯電したロッド $[-3m, -m]$ と $[m, 3m]$ のポテンシャル.
有限軸ロッド $\Gamma_0 := [-m, m]$ 上では、
Cone Singularities of the rod Γ_0:

$$\frac{\text{Circumference}}{2\pi\text{Radius}} = \frac{2\pi e^{u/2}}{2\pi\int_0^\rho e^{\alpha/2}d\rho} \sim \frac{e^{u/2}}{\rho e^{\alpha/2}} \to 1 + \varepsilon > 1.$$

Myers (1987) と Korotkin-Nikolai (1994) は無限個の $3+1$ Schwarzschild 計量を重ね合わせ

$$ds^2 = -\frac{\rho^2}{e^u}dt^2 + e^u d\phi^2 + e^\alpha(d\rho^2 + dz^2)$$

ここでのグリーン関数は $u = 2\log\rho - u_0$

$$u_0 = \lim_{m\to\infty}\Bigl(\sum_{|j|\le m} u_j - c\log m\Bigr).$$

u_j は、j 版目のホライズン・ロッドのポテンシャル. 「繰り込み」が可能な理由：$u_j(\rho,z)\sim\frac{c}{n}$ for fixed (ρ,z).

Weyl-Bach の特異点は解消 無限個の穴からくる対称性（バランス）

非漸近平坦 エンドの構造は Kasner: $u - 2\log\rho \to \frac{2m}{2L}2\log\rho$.

1. アインシュタイン方程式と調和写像
2. ロッド構造とトリック多様体
3. 5 次元重力ソリトン
4. 重力インスタントン

重力ソリトン

定義：非自明な、静的、測地的完備なアインシュタイン計量、ただしブラックホールはなし．

- 4D asymptotically flat vacuum gravitational soliton $\Rightarrow$ the Minkowsky spacetime and its quotients (Lichnerowitz, Anderson)
- 4D spherically symmetric Einstein-$SO(2)$ Yang-Mills equation: Bartik-McKinnon (1988) McLeod-Smoller-Wasserman-Yau (1991)
- Higher dimensional vacuum solitons? ($\exists$ super-symmetric examples)

$4+1$次元重力ソリトン

定理

$4+1$次元真空アインシュタイン方程式のソリトン解が存在する.

Corollary: 4D 重力インスタントン: i.e. 4次元, 非特殊ホロノミー、第2ベッチ数 $= \infty$, リッチ平坦、完備なリーマン多様体　Kasner 型エンド構造.

$4+1$次元重力ソリトン

$4+1$次元時空で、$(1,0)$ 軸ロッドと $(0,1)$ 軸ロッドが z 軸に周期性をもって配置されたアインシュタイン計量

$$ds^2 = -\frac{\rho^2}{e^u}dt^2 + e^{u_1}d\phi_1^2 + e^{u_2}d\phi_2^2 + e^{\alpha}(d\rho^2 + dz^2)$$

ここで $u = u_1 + u_2, u_1, u_2$ は、全てグリーン関数、

$$u_1 = \lim_{m\to\infty}\Bigg(\sum_{|j|\le m} u_{[2j]} - c_1 \log m\Bigg), \quad u_2 = \lim_{m\to\infty}\Bigg(\sum_{|j|\le m} u_{[2j+1]} - c_2 \log m\Bigg).$$

は収束. $u_{[2j]}$ は $2j$ 番目 $(1,0)$ 型軸ロッドのポテンシャル $u_{[2j]+1}$ は $2j$ 番目 $(0,1)$ 型軸ロッドのポテンシャル、 α は、u_1 と u_2 が与えられれば、 $d\alpha = F(u_1, u_2\partial u_1, \partial u_2)$ の求積法で定まる.

コメント $\frac{\rho^2}{e^u} = 1$ キリング・ホライズンは存在しない；z 軸は全体に電荷を帯びている：

$$ds^2 = -dt^2 + e^{u_1} d\phi_1^2 + e^{u_2} d\phi_2^2 + e^{\alpha}(d\rho^2 + dz^2)$$

よって $u_1 + u_2 = 2\log\rho$ がしたがう.

円錐型特異点は除去可能 α, u_1, u_2 のそれぞれの定数を調整することで

$$\frac{\text{Circumference}}{2\pi\text{Radius}} =\sim \frac{e^{u_i/2}}{\rho e^{\alpha/2}} \to 1 \quad (i = 1, 2)$$

漸近平坦ではなく **Kasner**: $\rho \to \infty$ にしたがって, 以下の計量に漸近;

$$ds^2 = -dt^2 + \rho d\phi_1^2 + \rho d\phi_2^2 + \frac{1}{\sqrt{\rho}}(d\rho^2 + dz^2)$$

漸近平坦ではなく Kasner

$$\overline{u} = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} u dz \Rightarrow \overline{u} = a + b\log\rho$$

(2D-動径方向に変数を持つ) 調和関数.
$d\alpha = F(u_1, u_2, \partial u_1, \partial u_2)$ に求積法を用いて

$$e^{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\rho}}$$

よって

$$ds^2 = -dt^2 + \rho d\phi_1^2 + \rho d\phi_2^2 + \frac{1}{\sqrt{\rho}}(d\rho^2 + dz^2)$$

$\rho \to \infty$ のエンドは 3 次元トーラス $\mathbb{T}^3 = (S^1)^2 \times S^1 \ni (\phi_1, \phi_2, z)$.
$(S^1)^2$ は拡大し、S^1 は縮小.

ソリトン計量

$$ds^2 = -\frac{\rho^2}{e^u}dt^2 + e^{u_1}d\phi_1^2 + e^{u_2}d\phi_2^2 + e^\alpha(d\rho^2 + dz^2)$$

の 3 つのキリング・ベクトル $\partial_t, \partial_{\phi_1}, \partial_{\phi_2}$ に対応する計量,

$$G_{ij} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{u_1} & 0 \\ 0 & 0 & e^{u_2} \end{pmatrix}, \quad [G] = \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho^2} & 0 & 0 \\ 0 & e^{u_1} & 0 \\ 0 & 0 & e^{u_2} \end{pmatrix}$$

は調和写像 u を定めるが、その像は 5 次元対称空間 $SL(3)/SO(3)$ の 2 次元フラット ($\cong \mathbb{R}^2$) に含まれているため、非線形写像であるはずの u は、スカラー（グリーン）関数の組 (u_1, u_2) として表れている. (cf. Iwasawa 分解 $G = KAN$)

5次元ソリトン時空の位相タイプ

4 + 1次元のソリトン計量

$$\mathbf{g} = -dt^2 + e^{u_1}d\phi_1^2 + e^{u_2}d\phi_2^2 + e^{\alpha}(d\rho^2 + dz^2)$$

の時間一定面は

- 2 consecutive axis rods $(1,0),(0,1) \Rightarrow S^4 \setminus (T^2 \times B^2)$
- 4 consecutive axis rods $(1,0),(0,1),(1,0),(0,1) \Rightarrow (S^2 \times S^2) \setminus (T^2 \times B^2)$
- the whole spaceimte $\#^{\infty}(S^2 \times S^2)$ so that $\pi_2 = \infty$

空間的周期性をもつ5次元ブラックホール時空の構成

$4+1$次元のブラックホール計量

$$\mathbf{g} = -dt^2 + e^{u_1} d\phi_1^2 + e^{u_2} d\phi_2^2 + e^{\alpha}(d\rho^2 + dz^2)$$

は以下のホライズンをもつものをも構成できる.

- String of spheres (Schwarzschild-Tangherlini)
- String of double spheres
- String of Black Saturns

1. アインシュタイン方程式と調和写像
2. ロッド構造とトリック多様体
3. 5 次元重力ソリトン
4. 重力インスタントン

重力インスタントン

Myers-Korotkin-Nikolai $3+1$ 次元時空

$$ds^2 = -\frac{\rho^2}{e^u}dt^2 + e^u d\phi^2 + e^\alpha(d\rho^2 + dz^2)$$

に Wick 回転 $t \mapsto \sqrt{-1}t$ を施すと、4 次元リーマン計量が得られる．

$$\begin{aligned} ds^2 &= +\tfrac{\rho^2}{e^u}dt^2 + e^u d\phi^2 + e^\alpha(d\rho^2 + dz^2) \\ &= e^{u_1}d\phi_1^2 + e^{u_2}d\phi_2^2 + e^\alpha(d\rho^2 + dz^2) \end{aligned}$$

ここで $\frac{\rho^2}{e^u} =: u_1$ と $u =: u_2$ は、$u_1 + u_2 = 2\log\rho$ をみたす調和関数である．．　これは $4+1$ 次元重力ソリトンの時間一定面の計量

$$g := \mathbf{g}\Big|_{t=0} := e^{u_1}d\phi_1^2 + e^{u_2}d\phi_2^2 + e^\alpha(d\rho^2 + dz^2)$$

にほかならない．

この 4 次元リーマン計量 g は、 リッチ平坦、 Ambrose-Singer の定理を用いて， そのホロノミー群は generic、 i.e. **not hyper-Kähler**. (cf. Gibbons-Hawking ansatz)
位相的な分類：

- 2 consecutive axis rods $(1,0),(0,1) \Rightarrow S^4 \setminus (T^2 \times B^2)$
- 4 consecutive axis rods $(1,0),(0,1),(1,0),(0,1) \Rightarrow (S^2 \times S^2) \setminus (T^2 \times B^2)$
- the whole spaceimte $\#^\infty(S^2 \times S^2)$ so that 2nd Betti number $= \infty$

幾何学的な応用

Gromov: 断面曲率 K_g が非負なリーマン多様体 (M^n, g) のベッチ数に関して

$$\exists C_n \text{ such that } \sum_{i=0}^{n} b_i < C_n$$

Q. リッチ曲率 Ric_g が非負なリーマン多様体 (M^n, g)? (e.g. Sha–Yang examples of $b_* = \infty$ with $\mathrm{Ric}_g > 0$, JDG(1989))
A. そのような $C_n \quad (n \geq 4)$ は存在しない．上の重力インスタントンが反例：

$$b_2 = \infty \text{ for } \mathrm{Ric}_g = 0.$$

cf. *Gravitational solitons and complete Ricci flat Riemannian manifolds of infinite topological type*, Pure and Applied Mathematics Quarterly (2024).

まとめ

- Einstein equation with time symmetry $\leftrightarrow$ Harmonic maps to symmetric spaces
- Harmonic map as a solution of asymptotic Dirichlet problems, boundary condition: spatial axial symmetries cf. Toric varieties (work with Yukio Matsumoto:Plumbing Constructions and the Domain of Outer Communication for 5-Dimensional Stationary Black Holes)
- Static, space-periodic solutions: harmonic functions (Image $\subset$ flats of the symmetric space)
- New constructions of gravitational solitons, and gravitational instantons of various topologies.