

79th Encounter with Mathematics

アインシュタイン方程式 - 幾何学と物理学の邂逅

2015. 3.14.

一様宇宙解

と接触空間を用いた非一様化

(松野阜, 古崎広志, 古池達彦, 森澤理之との共同研究に基づく)

大阪公立大学 南部陽一郎物理学研究所

石原 秀樹

Einstein 方程式の厳密解

- 真空解 $R_{ab} = 0$ $R_{ab} = \Lambda g_{ab}$

- Minkowski 時空
- de Sitter 時空
- anti-de Sitter 時空
- Schwarzschild 解, Kerr 解,
富松 – 佐藤解
- 重力波
- ...

- 物質を源とした解 $R_{ab} = T_{ab} - \frac{1}{2}Tg_{ab} + \Lambda g_{ab},$

- 膨張宇宙
- Einstein の静的宇宙
- Tolmann-Bondi 解
- ...

“Exact Solutions to Einstein’s Equation”
Stephani, Kramer, MacCallum, Honselaers, Herlt
Cambridge Univ. Press

一般相対論のメイントピックス

- ブラックホール
- 重力波
- 膨張宇宙

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}$$

不定計量 (Lorentz 計量)

$$\text{sgn}(g) = (-1, 1, 1, 1)$$

での幾何 (4次元時空)

時空の因果構造
空間の時間発展

一般相対論

$$\delta(S_G + S_m) = 0$$

$$S_G = \frac{1}{16\pi G} \int \sqrt{-g} d^4x R + (\text{surface term})$$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

時間と空間を統一的に扱うが . . .

測地線方程式 変数 t, x, y, z $\delta \int \sqrt{-ds^2} = 0$

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad \mu, \nu \dots = 0, 1, 2, 3$$

$$u^\nu \nabla_\nu u^\mu = \frac{\dot{N}}{N} u^\mu \quad N := \sqrt{-g_{\dot{x}\dot{x}}}$$

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$$

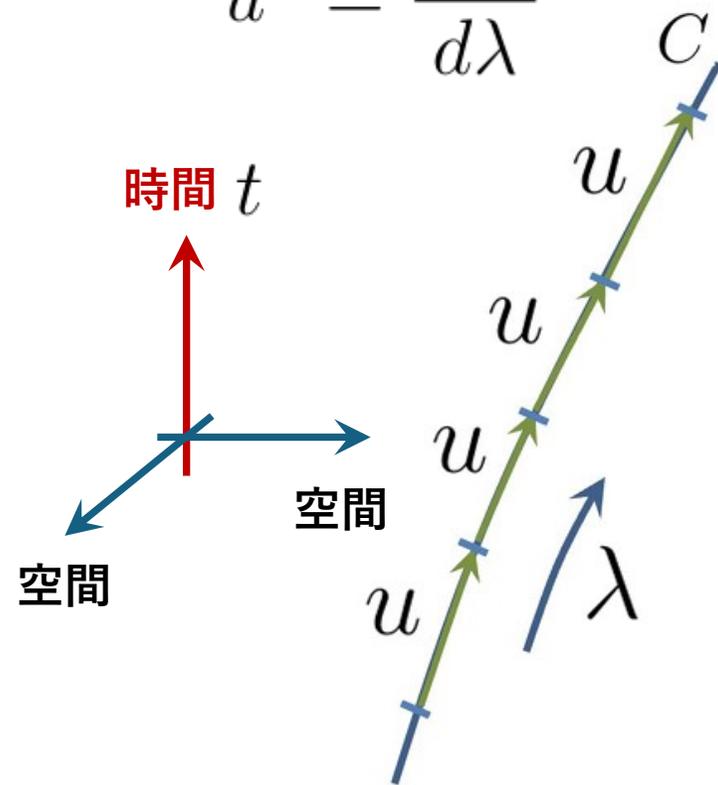
ゲージ条件

$$1. \quad \frac{ds^2}{d\lambda^2} = -1 \quad g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = -1$$

$$u^\nu \nabla_\nu u^\mu = 0$$

$$2. \quad \lambda = x^0 = t, \quad u^0 = 1$$

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\Gamma_{00}^i + (\text{慣性力})$$



測地線偏差方程式

$$\frac{D^2 z^\mu}{d\tau^2} = -R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} u^\nu z^\rho u^\sigma$$

$$B_{\mu\nu} = \nabla_\nu u_\mu$$

$$\theta = B^\mu{}_\mu = \nabla_\mu u^\mu, \quad (\text{Expansion})$$

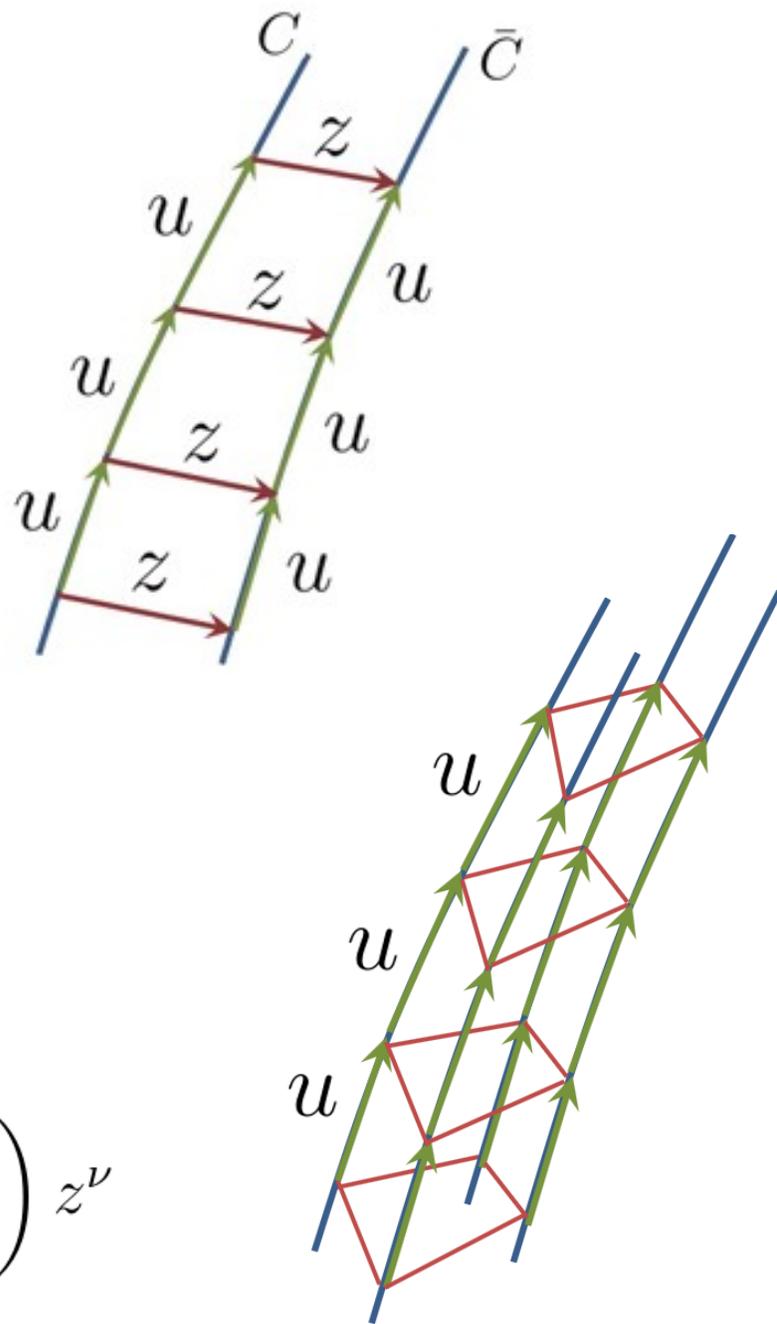
$$\sigma_{\mu\nu} = B_{\mu\nu} - \frac{1}{3}\theta h_{\mu\nu}, \quad (\text{Shear})$$

$$\omega_{\mu\nu} = B_{\mu\nu} - B_{\nu\mu}, \quad (\text{Rotation})$$

$$\frac{D^2 z^\mu}{d\tau^2} = - \left(\frac{1}{3}\theta^2 + \sigma_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta} - \omega_{\alpha\beta}\omega^{\alpha\beta} + R_{\mu\nu}u^\mu u^\nu \right) z^\nu$$

偏差ベクトル z

$$\mathcal{L}_u z = 0$$



対称性をもった時空

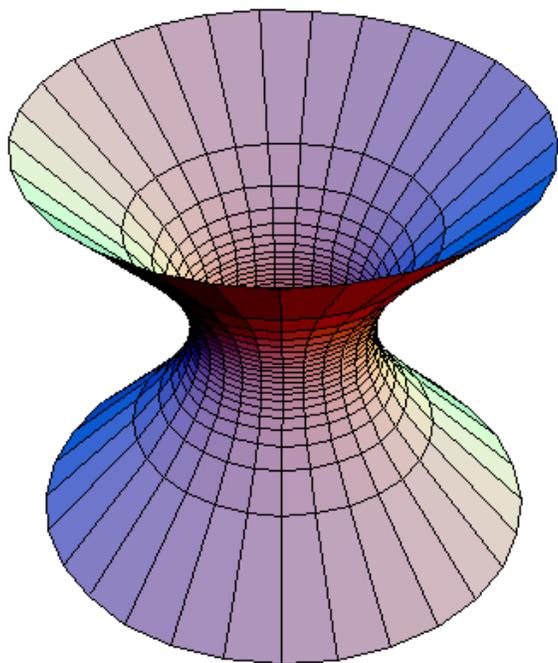
最大対称時空

n 次元空間で等長変換群が $n(n+1)/2$ 個の生成元をもつもの

$$R_{\mu\nu\lambda\rho} = \frac{\Lambda}{3}(g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho} - g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda})$$

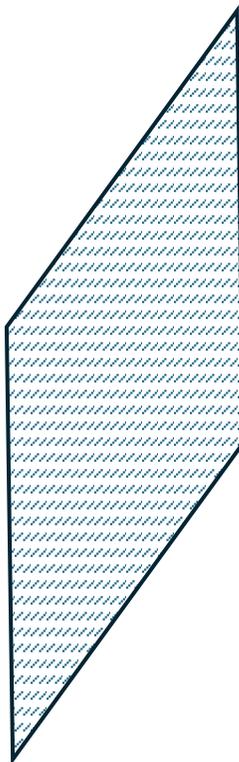
$$\Lambda > 0$$

de Sitter 時空



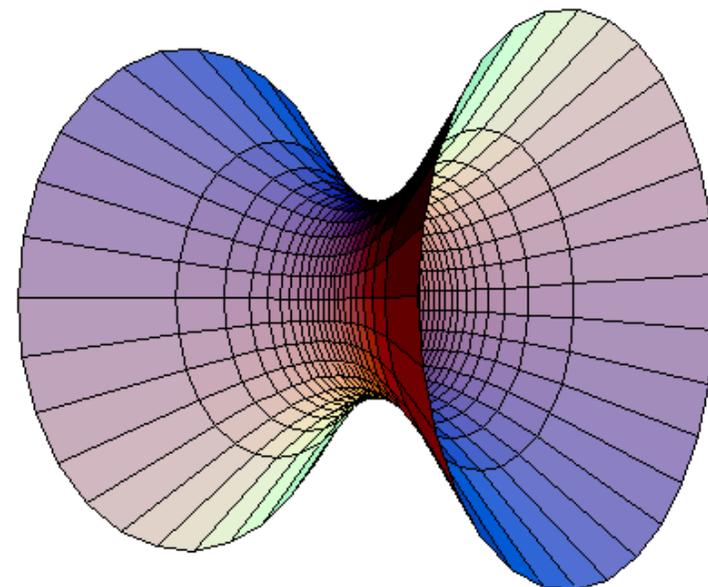
$$\Lambda = 0$$

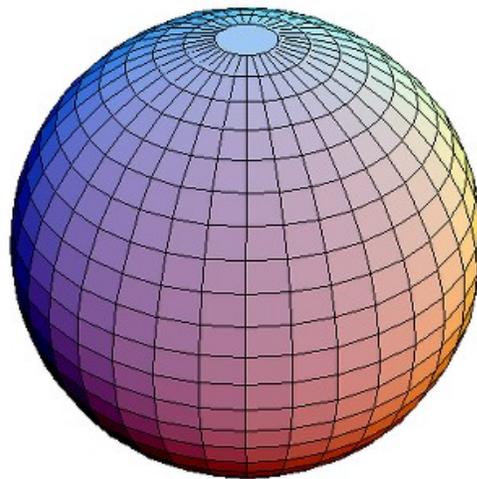
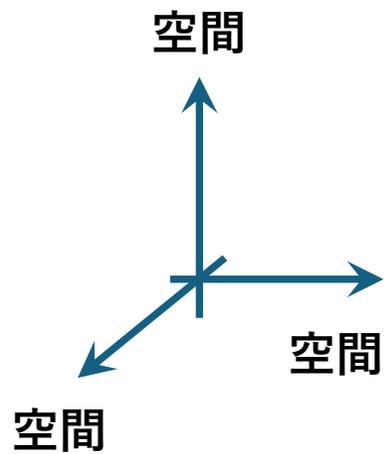
Minkowski 時空



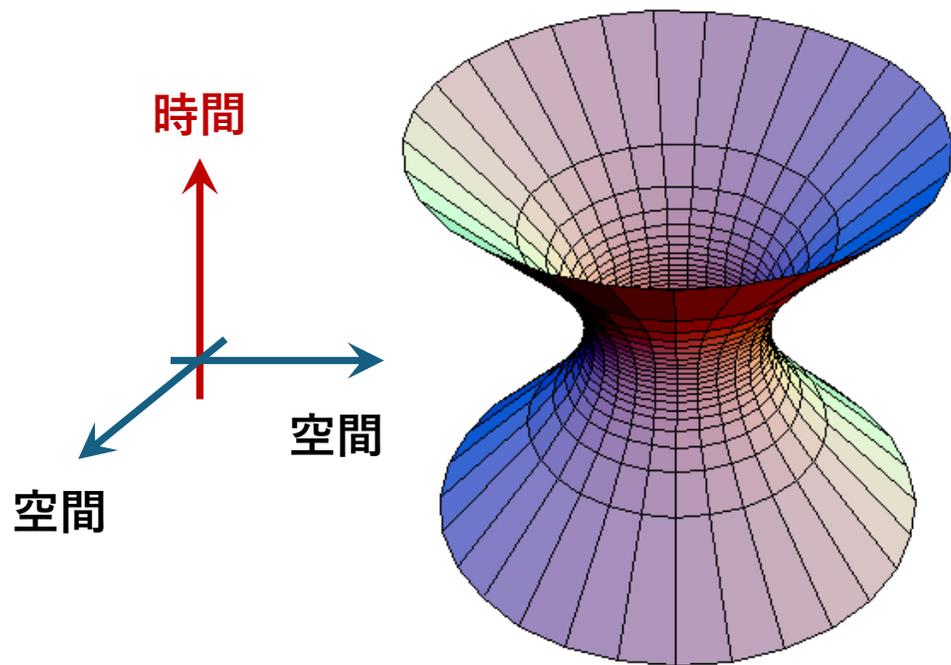
$$\Lambda < 0$$

Anti de Sitter 時空

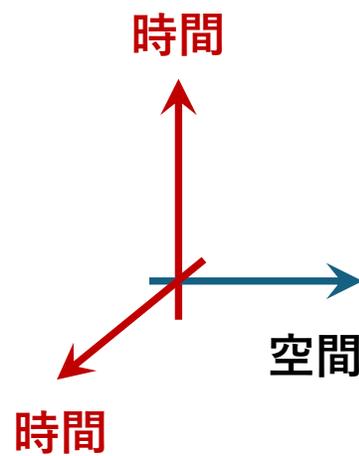




球面



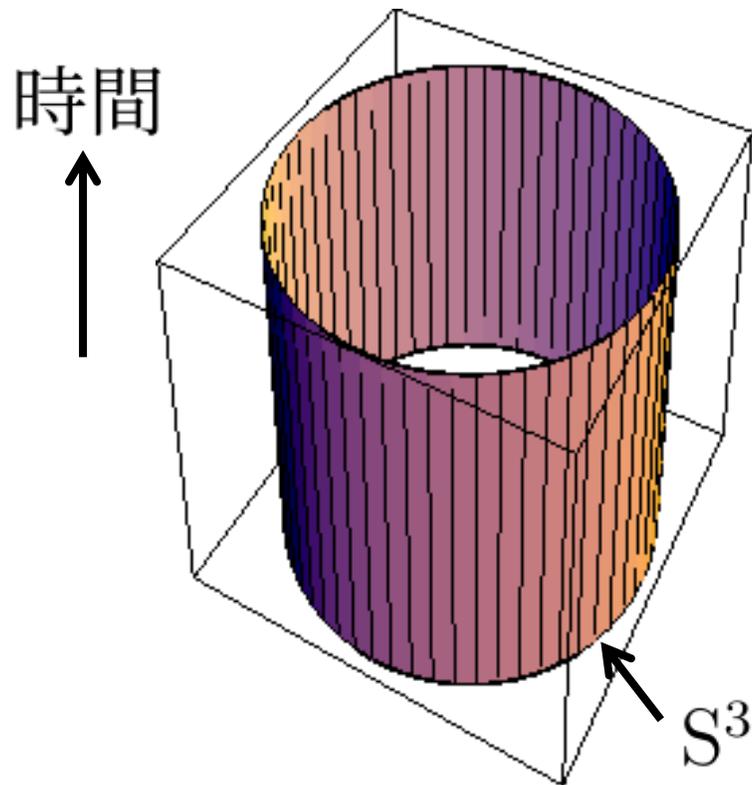
de Sitter 時空



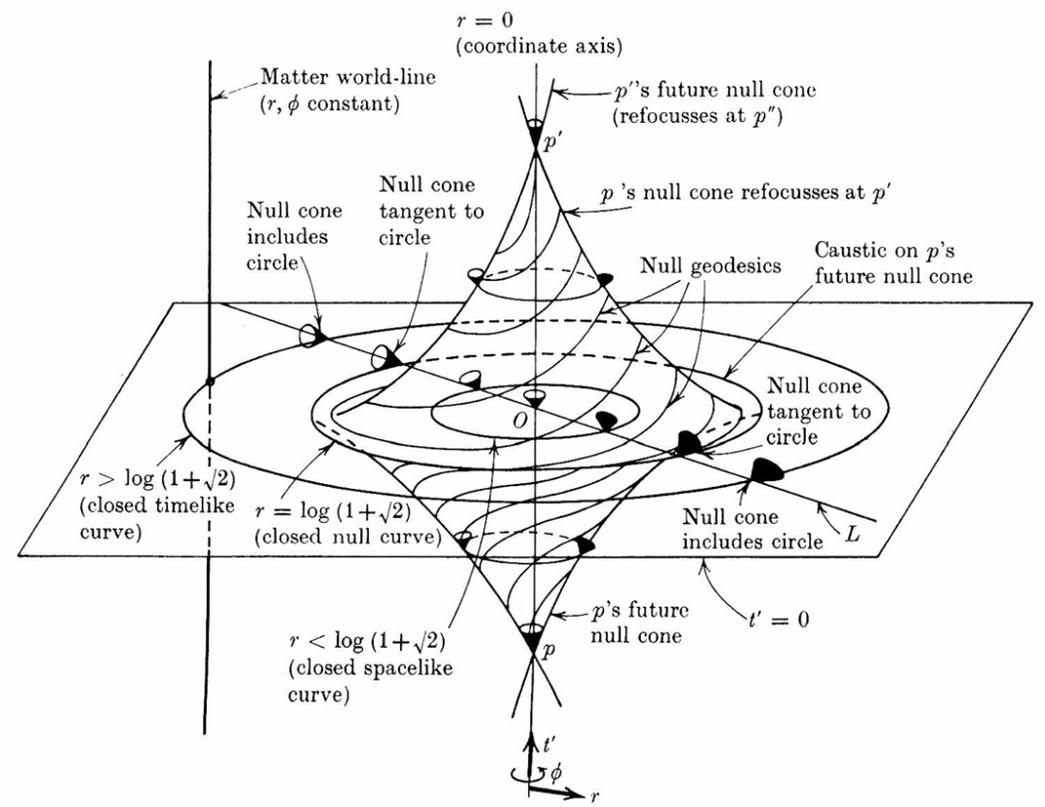
Anti de Sitter 時空

時間・空間的に一様な時空

$$R_{ab} = T_{ab} - \frac{1}{2}Tg_{ab} + \Lambda g_{ab},$$



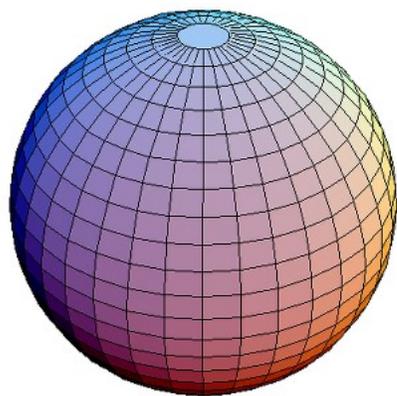
Einstein の静的宇宙



Gödel 宇宙

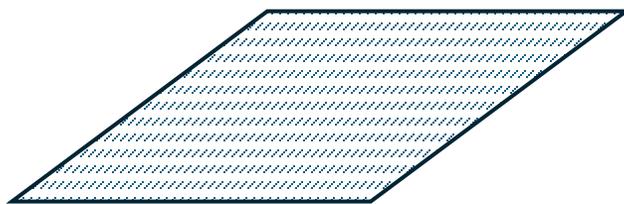
時間一定面（空間）が最大対称 （時間的に非一様）

一様等方宇宙モデル： Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker model



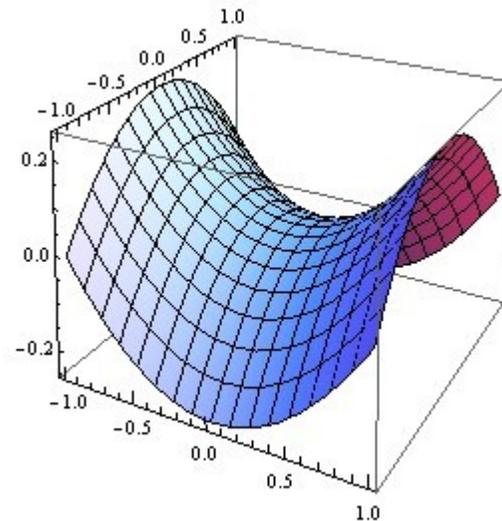
空間が正曲率

“閉じた”宇宙モデル



空間がゼロ曲率

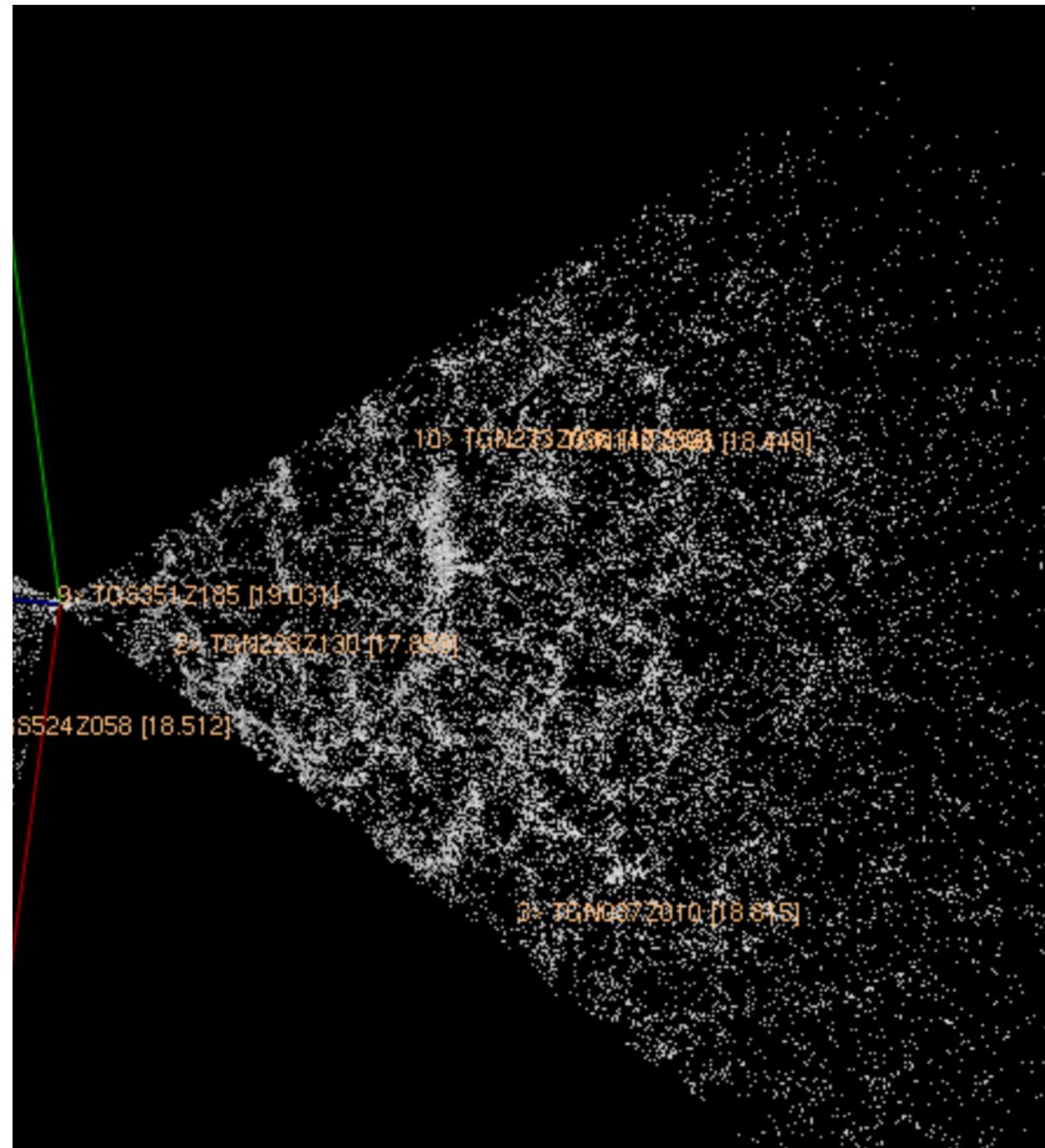
平坦な宇宙モデル



空間が負曲率

“開いた”宇宙モデル

宇宙の姿



計量の理想化

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \gamma_{ij} dx^i dx^j \quad i, j \cdots = 1, 2, 3$$

$\gamma_{ij} dx^i dx^j$: 3次元定曲率空間

Friedmann - Lemaître - Robertson-Walker 計量

物質分布の理想化

$$T^{ab} = \rho u^a u^b + p(g^{ab} + u^a u^b) \quad \text{完全流体の状態方程式 (barotropic)}$$

$$\rho = \rho(t), \quad p = p(t) \quad p = p(\rho)$$

$$u^a = (1, 0, 0, 0)$$

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \gamma_{ij} dx^i dx^j$$

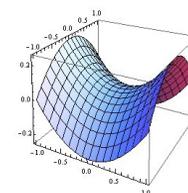
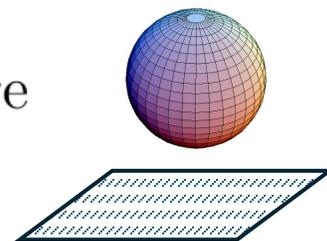
最大対称な空間

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p)$$

$$k = \begin{cases} +1 & \gamma \text{ positive curvature} \\ 0 & \gamma \text{ flat} \\ -1 & \gamma \text{ negative curvature} \end{cases}$$



状態方程式

$$p = p(\rho)$$

空間の一樣

エネルギー条件

弱いエネルギー条件 $\rho \geq 0, \quad \rho + p \geq 0$

任意の観測者が測定するエネルギー密度が負にならない

強いエネルギー条件 $\rho + 3p \geq 0$

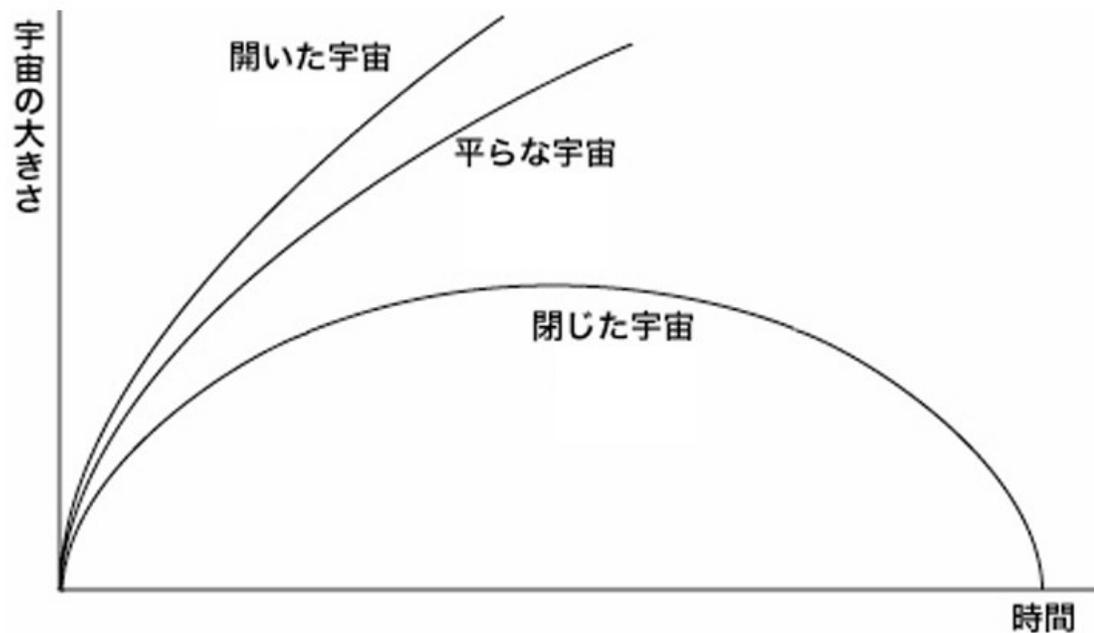
重力が「引力」として作用する

優勢エネルギー条件 $\rho \geq |p|$

エネルギーが光速を超えて伝播しない

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2}$$

$$k = \begin{cases} +1 & \gamma \text{ positive curvature} \\ 0 & \gamma \text{ flat} \\ -1 & \gamma \text{ negative curvature} \end{cases}$$



簡単な例

$$p = 0, \quad \text{dust fluid}$$

$$\rho = \rho_0 a^{-3}$$

$$t \rightarrow 0 \quad a(t) = a_0 t^{2/3}$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right) \propto t^{-2}, \quad \frac{k}{a^2} \propto t^{-4/3} \quad \left(\frac{\dot{a}}{a}\right) \gg \frac{k}{a^2}$$

宇宙初期では，空間微分は時間微分に比べて無視できる。

ダスト流体 理想単原子気体

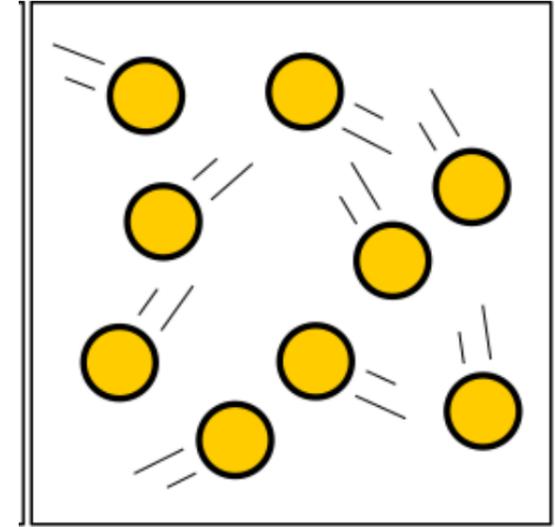
$$\rho = n \left(mc^2 + \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle \right)$$

$$\sim nmc^2$$

$$p \sim nm \langle v \cdot v \rangle$$

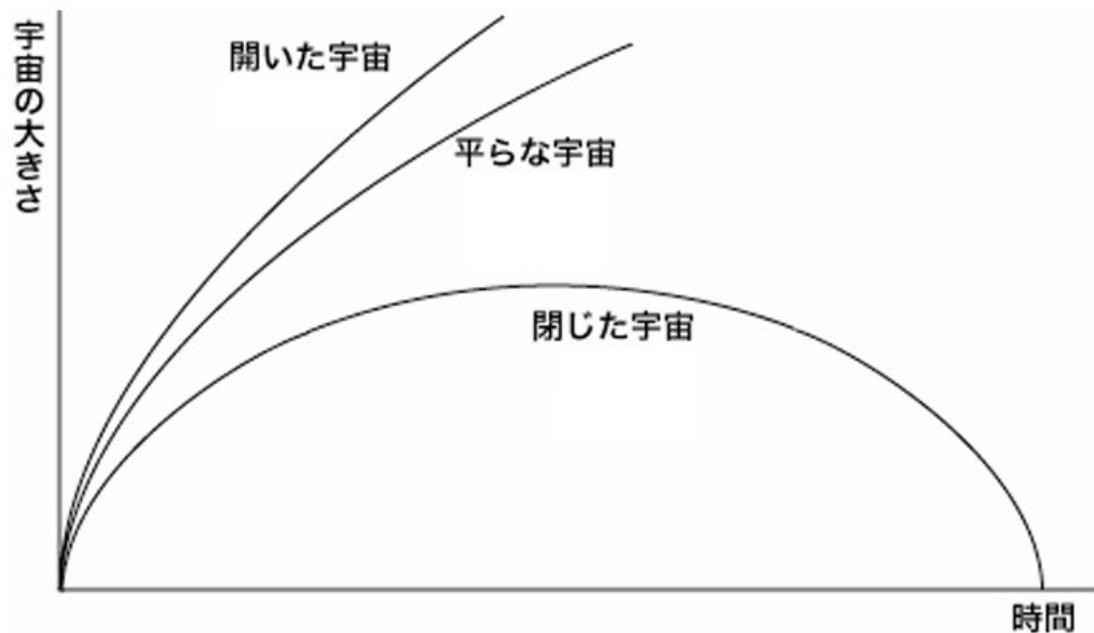
熱運動のエネルギーが質量エネルギーに比べて無視できる

$$\rho \gg p$$



$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2}$$

$$k = \begin{cases} +1 & \gamma \text{ positive curvature} \\ 0 & \gamma \text{ flat} \\ -1 & \gamma \text{ negative curvature} \end{cases}$$



簡単な例

$$p = 0, \quad \text{dust fluid}$$

$$\rho = \rho_0 a^{-3}$$

$$t \rightarrow 0 \quad a(t) = a_0 t^{2/3}$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right) \propto t^{-2}, \quad \frac{k}{a^2} \propto t^{-4/3} \quad \left(\frac{\dot{a}}{a}\right) \gg \frac{k}{a^2}$$

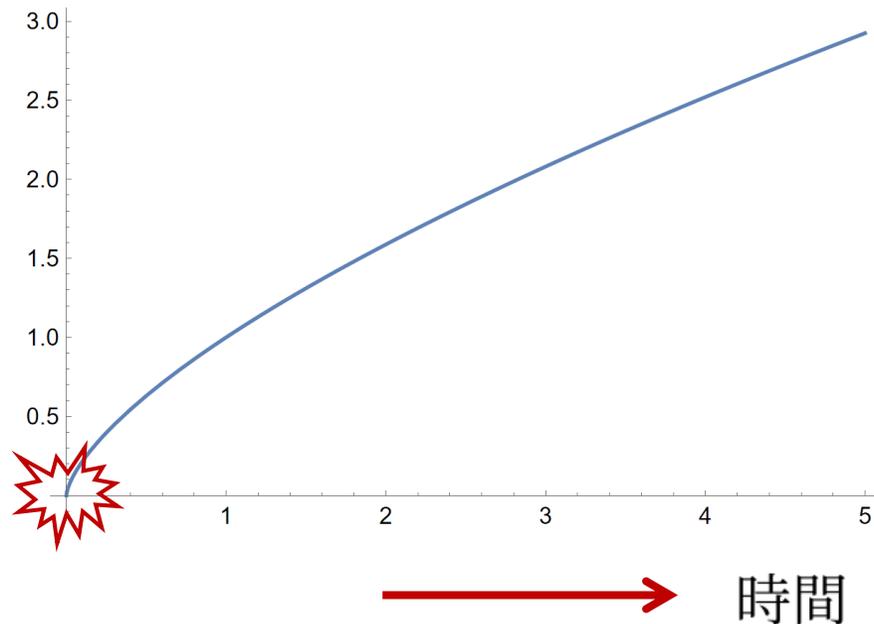
宇宙初期では，空間微分は時間微分に比べて無視できる。

エネルギー条件を満たす普通の流体に対しては

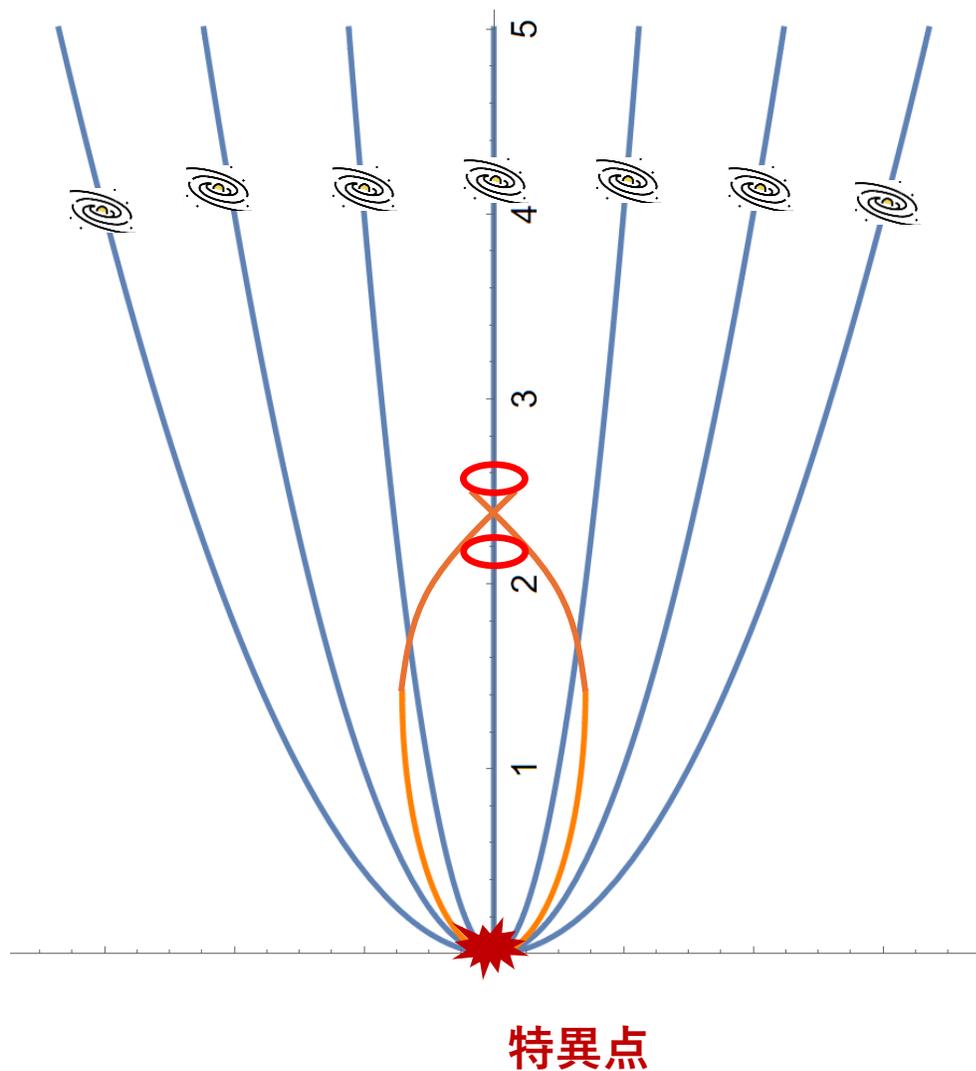
$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \gamma_{ij} dx^i dx^j$$

$$a(t) = t^q, \quad 0 < q < 1$$

宇宙は減速膨張 $t \rightarrow 0$ で曲率が発散 **初期特異点**

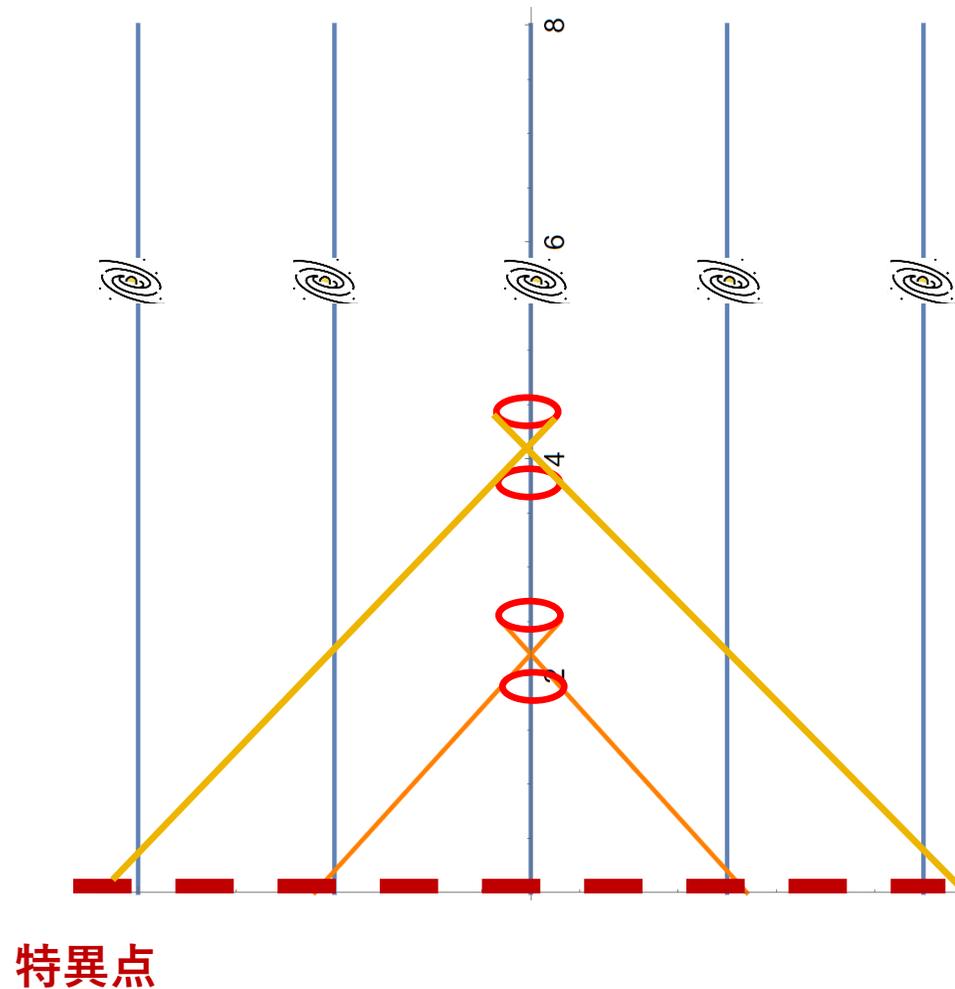


宇宙の粒子地平線



インフレーション宇宙の動機

時間
↑



宇宙に初期特異点が現れるのは
対称性（一様等方）の課しすぎか？

対称性を緩めた宇宙モデル
（一様・非等方宇宙モデル）の研究

HAWKING の特異点定理

「宇宙が膨張しているならば、過去にさかのぼると特異点に到達する」

前提条件

1. Einstein 方程式が成り立つ
2. 現在の宇宙は膨張している
3. エネルギー条件を満たす
4. 宇宙には時間的閉曲線 (Closed Timelike Curves) が存在しない

HAWKING の特異点定理

「宇宙が膨張しているならば、過去にさかのぼると特異点に到達する」

前提条件

1. Einstein 方程式が成り立つ
2. 現在の宇宙は膨張している
3. エネルギー条件を満たす
4. 宇宙には時間的閉曲線 (Closed Timelike Curves) が存在しない

宇宙の初期特異点は避けられなかったが、

一様非等方宇宙モデルは、初期特異点近傍の宇宙の一般的な振舞いを記述すると考えられる。

Belinsky-Khalatnikov-Lifshitz(BKL) 予想

初期特異点の近くでは、計量の空間的な変化よりも時間的な変化が支配的になり、空間各点の近傍ごとに一様宇宙としての振舞いをする。

特異点に近づくとつれて、空間の時間発展はカオス的な振動を示す。

V. A. Belinsky, I. M. Khalatnikov, and E. M. Lifshitz,

”Oscillatory approach to a singular point in the relativistic cosmology.”

Advances in Physics, 19(80), 525-573 (1970).

Black hole 内部は一様非等方宇宙

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

$$r < 2m$$

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left(\frac{2m}{r} - 1\right) dt^2 - \frac{dr^2}{\left(\frac{2m}{r} - 1\right)} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \\ &= -\frac{d\eta^2}{\left(\frac{2m}{\eta} - 1\right)} + \left(\frac{2m}{\eta} - 1\right) dx^2 + \eta^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \\ &= \boxed{-d\tau^2 + a(\tau)^2 dx^2 + b(\tau)^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)} \end{aligned}$$

3次元一様空間

等長変換群が3次元空間に推移的に作用し
その空間は等長変換群の Lie 代数で分類される

単純推移的に作用する場合： Bianchi タイプ E^3, S^3
単純推移的でない場合： Kantowski-Sachs タイプ $S^2 \times R^1$

Landau and Lifshitz, “The classical theory of fields”

R. Kantowski and R. K. Sachs,
“Some spatially homogeneous anisotropic relativistic cosmological models,”
J. Math. Phys. 7, 443–446 (1967).

Bianchi タイプ

等長変換群を生成するベクトル (Killing ベクトル) を ξ としたとき

$$[\xi_j, \xi_k] = C_{jk}^i \xi_i$$

代数構造の構造定数で分類

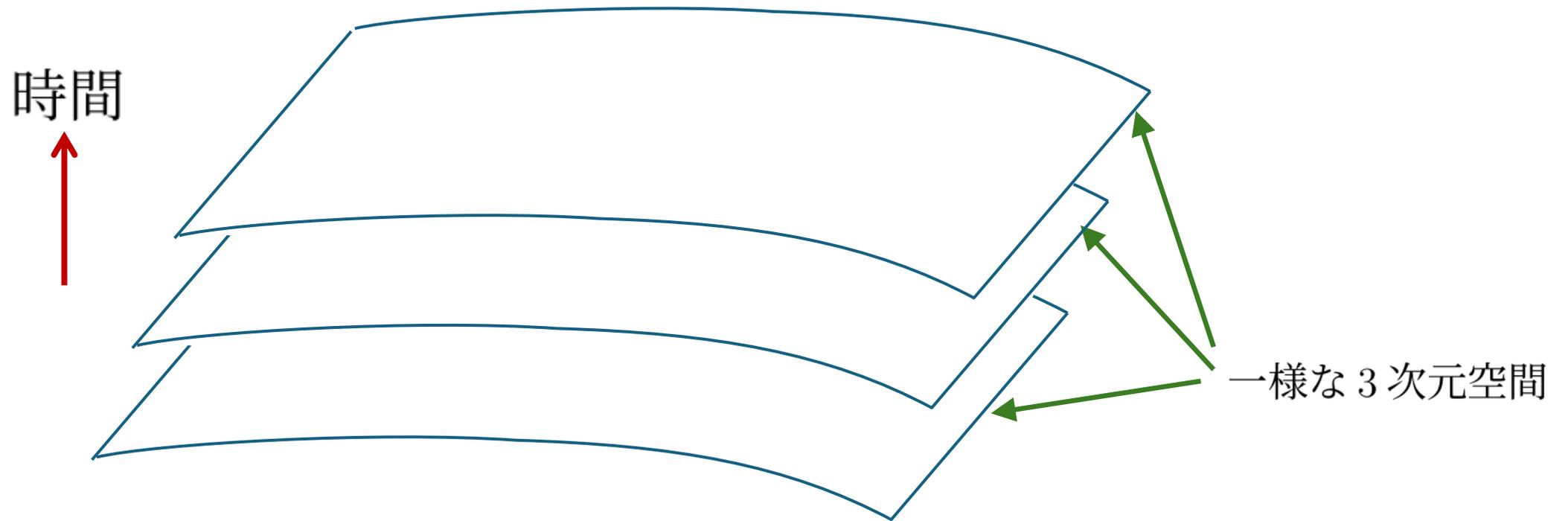
不変基底を用いた計量

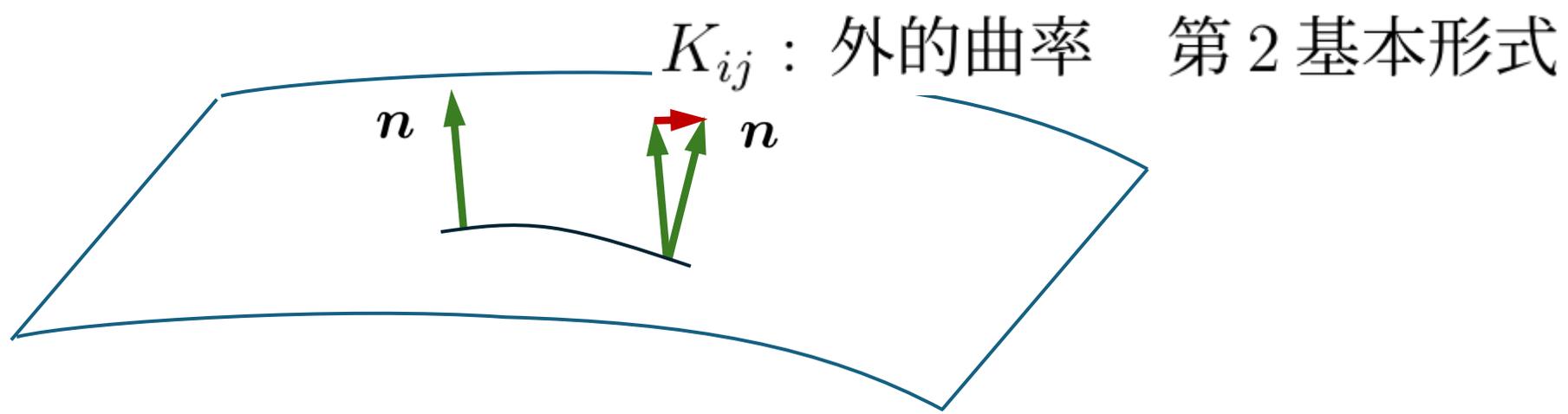
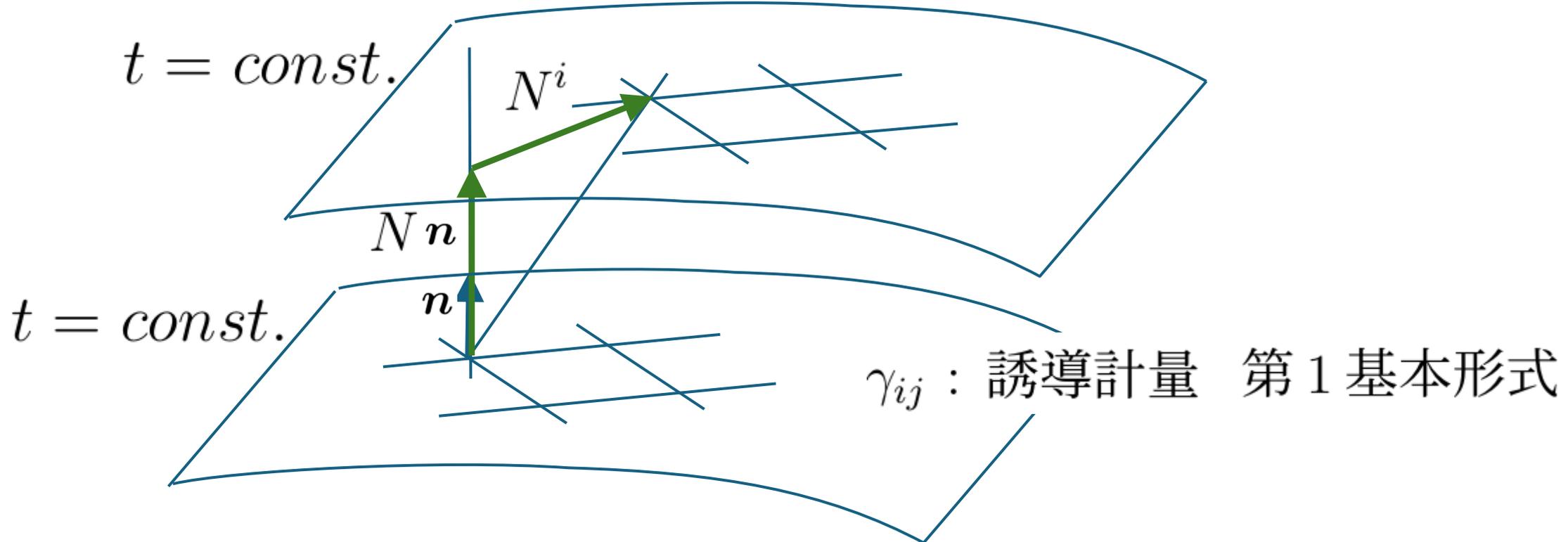
$$ds^2 = -N^2(t)dt^2 + \gamma_{ij}(t)(\sigma^i + N^i(t)dt)(\sigma^j + N^j(t)dt)$$

$$\mathcal{L}_\xi \sigma^i = 0 \quad d\sigma^i = \frac{1}{2} C^i_{jk} \sigma^j \wedge \sigma^k$$

Bianchi 型	非ゼロの構造定数 C_{bc}^a
I	$C_{bc}^a = 0$
II	$C_{23}^1 = 1$
III	$C_{23}^1 = 1, C_{31}^1 = -1$
IV	$C_{23}^1 = 1, C_{31}^1 = -q, C_{31}^2 = -1$
V	$C_{1b}^1 = \delta_1^b$
VI _h	$C_{12}^1 = 1, C_{13}^2 = -h$
VII _h	$C_{12}^1 = 1, C_{13}^2 = h, C_{23}^3 = h$
VIII	$C_{23}^1 = 1, C_{31}^2 = 1, C_{12}^3 = -1$
IX	$C_{23}^1 = 1, C_{31}^2 = 1, C_{12}^3 = 1$

4次元時空が一様な3次元空間による葉層構造





Bianchi 型	非ゼロの構造定数 C_{bc}^a
I	$C_{bc}^a = 0$
II	$C_{23}^1 = 1$
III	$C_{23}^1 = 1, C_{31}^1 = -1$
IV	$C_{23}^1 = 1, C_{31}^1 = -q, C_{31}^2 = -1$
V	$C_{1b}^1 = \delta_1^b$
VI_h	$C_{12}^1 = 1, C_{13}^2 = -h$
VII_h	$C_{12}^1 = 1, C_{13}^2 = h, C_{23}^3 = h$
VIII	$C_{23}^1 = 1, C_{31}^2 = 1, C_{12}^3 = -1$
IX	$C_{23}^1 = 1, C_{31}^2 = 1, C_{12}^3 = 1$

$$N = 1, N^i = 0$$

$$ds^2 = -dt^2 + \gamma_{ij}(t)\sigma^i\sigma^j$$

$$K_{ij} = \dot{\gamma}_{ij}$$

$$(3) R_{pq} = C^k_{li} C^l_{kj} \left(-\frac{1}{2} (\gamma_k^n \gamma_l^m + \gamma^{mn} \gamma_{kl}) \gamma_p^i \gamma_q^j \right. \\ \left. - \frac{1}{4} \gamma^{mn} \gamma^{ij} \gamma_{kp} \gamma_{lq} - \frac{1}{2} \gamma_k^m \gamma^{in} (\gamma_{lp} \gamma_q^j + \gamma_{lq} \gamma_p^j) \right)$$

Bianchi type I: $C_{jk}^i = 0$ $\sigma^i = dx^i$ ${}^{(3)}R_{ij} = 0$

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)dx^2 + b^2(t)dy^2 + c^2(t)dz^2.$$

$$-R_1^1 = \frac{(\dot{abc})}{abc} = 0, \quad -R_2^2 = \frac{(a\dot{b}c)}{abc} = 0, \quad -R_3^3 = \frac{(abc\dot{c})}{abc} = 0.$$

$$-R_0^0 = \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\ddot{c}}{c} = 0.$$

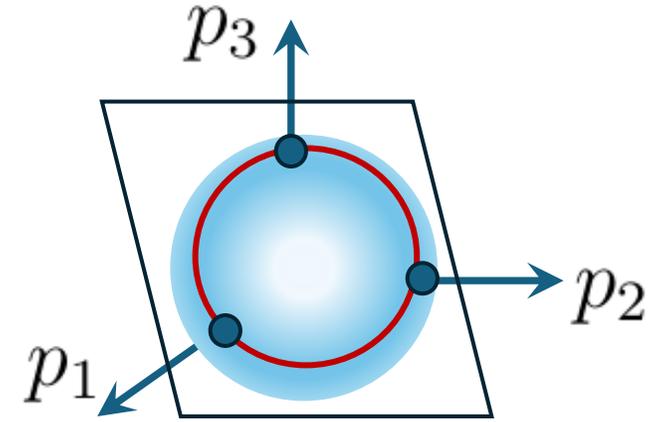
$$a^2(t) = t^{2p_1}, \quad b^2(t) = t^{2p_2}, \quad c^2(t) = t^{2p_3}.$$

$$p_1 + p_2 + p_3 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1. \quad \text{Kasner solution}$$

E. Kasner, "Geometrical Theorems on Einstein's Cosmological Equations," American Journal of Mathematics, vol. 43, no. 4, pp. 217-221, 1921.

Kasner solution $dl^2 = t^{2p_1} dx^2 + t^{2p_2} dy^2 + t^{2p_3} dz^2$

$$p_1 + p_2 + p_3 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1$$

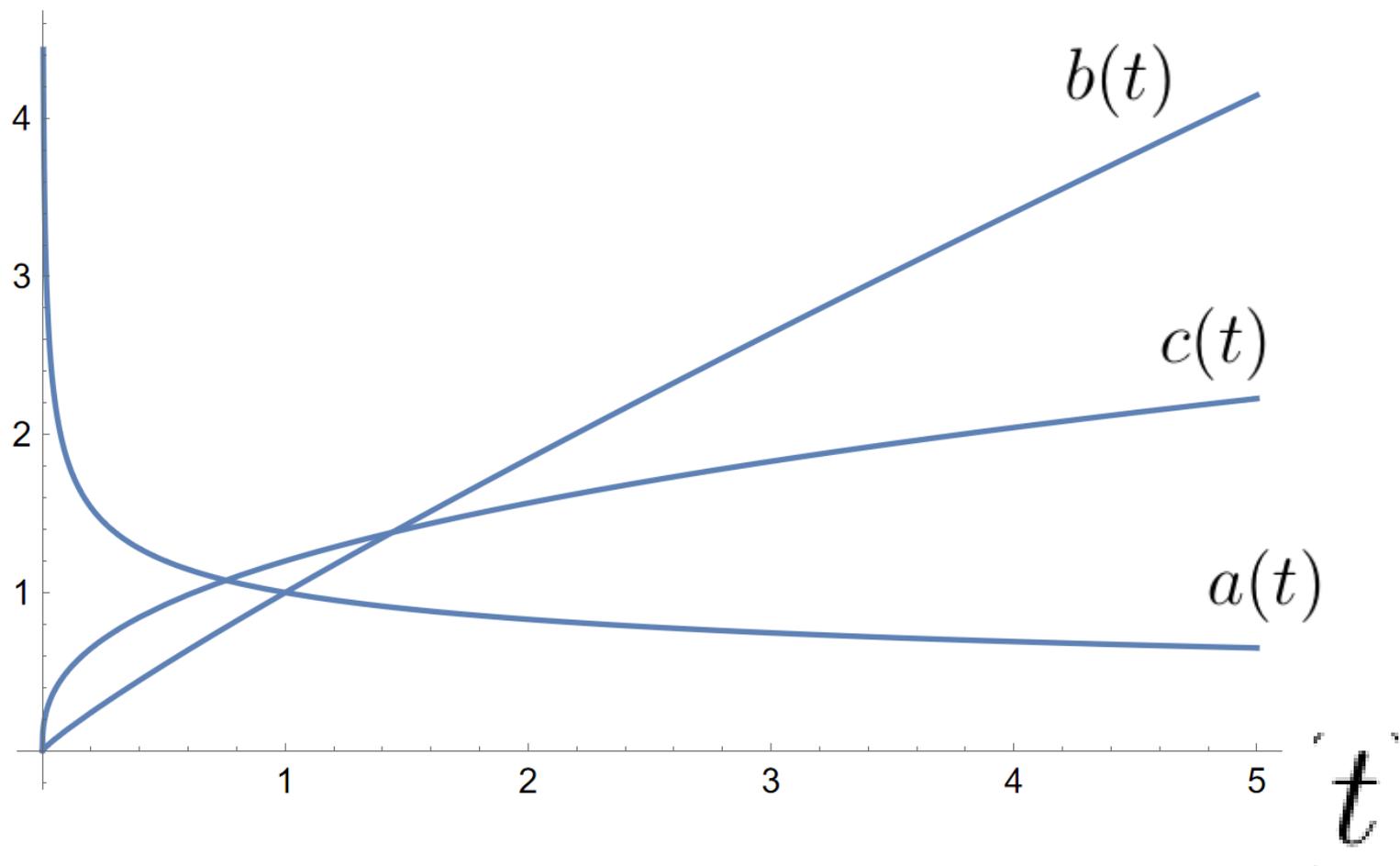


$$p_1(u) = \frac{-u}{1+u+u^2}, \quad p_2(u) = \frac{1+u}{1+u+u^2}, \quad p_3(u) = \frac{u(1+u)}{1+u+u^2}.$$

$$p_1\left(\frac{1}{u}\right) = p_1(u), \quad p_2\left(\frac{1}{u}\right) = p_3(u), \quad p_3\left(\frac{1}{u}\right) = p_2(u)$$

$$u > 1 \quad -\frac{1}{3} \leq p_1 \leq 0, \quad 0 \leq p_2 \leq \frac{2}{3}, \quad \frac{2}{3} \leq p_3 \leq 1$$

Kasner solution



Bianchi type I: $C_{jk}^i = 0$

γ_{ij} は最大対称 (flat)

K_{ij} は一様

時空として一様

空間的非一様性

$$t \rightarrow 0 \quad \frac{(\Delta l)^2}{(a\Delta x)^2} \propto t^{2p_3} < t^{-4/3}$$
$$\quad \quad \quad \hat{\wedge}$$
$$K^2 \sim \frac{\dot{a}^2}{a^2} \sim t^{-2}$$

初期特異点近傍では時間微分が支配的

Bianchi type IX: $C_{jk}^i = \epsilon_{ijk}$

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\sigma_1^2 + b^2(t)\sigma_2^2 + c^2(t)\sigma_3^2.$$

$$d\sigma^i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\sigma^j \wedge \sigma^k$$

$${}^{(3)}R_1^1 = \frac{1}{2a^2b^2c^2} [a^4 - (b^2 - c^2)^2],$$

$${}^{(3)}R_2^2 = \frac{1}{2a^2b^2c^2} [b^4 - (a^2 - c^2)^2],$$

$${}^{(3)}R_3^3 = \frac{1}{2a^2b^2c^2} [c^4 - (a^2 - b^2)^2].$$

Einstein 方程式

$$-R_1^1 = \frac{(\dot{abc})^\cdot}{abc} + \frac{1}{2a^2b^2c^2} [a^4 - (b^2 - c^2)^2] = 0,$$

$$-R_2^2 = \frac{(a\dot{bc})^\cdot}{abc} + \frac{1}{2a^2b^2c^2} [b^4 - (a^2 - c^2)^2] = 0,$$

$$-R_3^3 = \frac{(abc\dot{c})^\cdot}{abc} + \frac{1}{2a^2b^2c^2} [c^4 - (a^2 - b^2)^2] = 0.$$

$$-R_0^0 = \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\ddot{c}}{c} = 0.$$

Canonical theory of gravity

$$\delta(S_G + S_m) = 0$$

$$S_G = \frac{1}{16\pi G} \int \sqrt{-g} d^4x R + (\text{surface term})$$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

3 + 1 分解

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + \gamma_{ij}(dx^i + N^i dt)(dx^j + N^j dt)$$

$$S_G = \int \dot{\gamma}_{ij} \pi^{ij} - NH_0 - N^i H_i$$

$$\pi^{ij} := \frac{\delta S}{\delta \dot{\gamma}_{ij}} = \frac{\sqrt{\gamma}}{8\pi G} (K^{ij} - \gamma^{ij} K)$$

$$H_0 := \frac{16\pi G}{\sqrt{\gamma}} (\pi^{ij} \pi_{ij}) - \frac{\sqrt{\gamma}}{16\pi G} {}^{(3)}R \approx 0$$

$$H_i := -2\pi^j{}_i|_j \approx 0$$

Arnowitt, R., Deser, S., and Misner, C. W. (1960).

”Canonical variables for general relativity.”

Physical Review, 117(6), 1595.

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + \gamma_{ij}(t) \sigma^i \sigma^j$$

$$\gamma_{ij} = e^{2\alpha} \begin{pmatrix} 2\beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 2\beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 2\beta_3 \end{pmatrix} \quad \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 0$$

$$\beta_1 = \beta_+ + \sqrt{3}\beta_-, \quad \beta_2 = \beta_+ - \sqrt{3}\beta_-, \quad \beta_3 = -2\beta_+$$

$$S_G = \int dt (\dot{\alpha} p_\alpha + \dot{\beta}_+ p_+ + \dot{\beta}_- p_- - N H_0)$$

$$H_0 = \frac{1}{24e^{3\alpha}} (-p_\alpha^2 + p_+^2 + p_-^2) - e^{3\alpha} {}^{(3)}R$$

$$S_G = \int dt (\dot{\alpha} p_\alpha + \dot{\beta}_+ p_+ + \dot{\beta}_- p_- - N H_0)$$

$$H_0 = \frac{1}{24e^{3\alpha}} (-p_\alpha^2 + p_+^2 + p_-^2) - e^{3\alpha} \quad (3)R$$

$$\alpha = t \quad \dot{\alpha} = 1$$

$$S_G = \int (p_+ d\beta_+ + p_- d\beta_- - h d\alpha)$$

$$h = (p_+^2 + p_-^2 - 24e^{6\alpha} \quad (3)R)^{1/2}$$

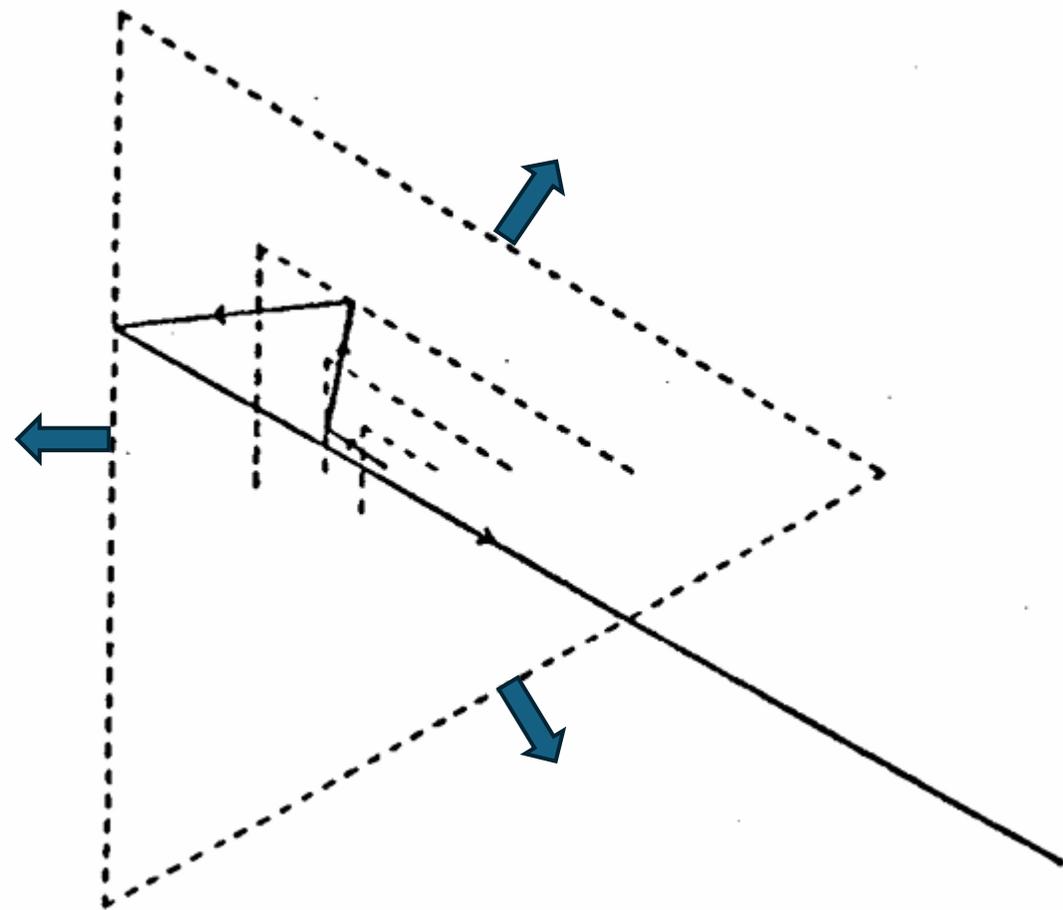
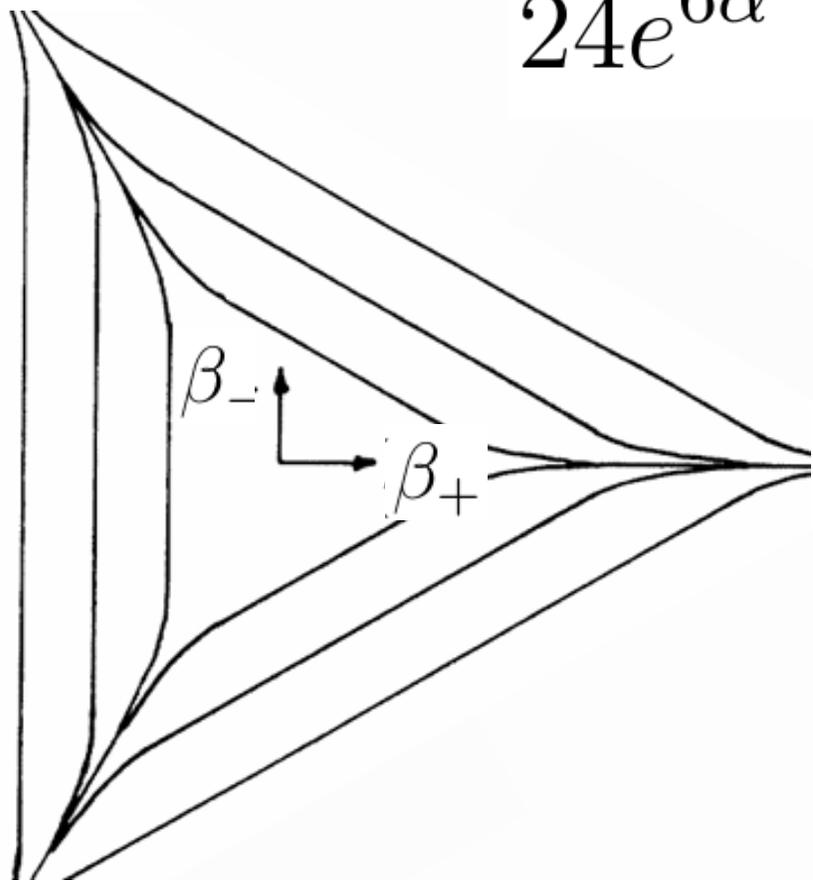
‘時間’ α を含んだポテンシャル

C. W. Misner, "Mixmaster Universe." Phys. Rev. Lett., 22 (1969), 1071.

M. P. Ryan, L. C. Shepley, Homogeneous Relativistic Cosmologies. Princeton Series in Physics (Princeton University Press, Princeton, 1975)

‘時間’ α を含んだポテンシャル

$$24e^{6\alpha} ({}^3R)$$



Kasner $(p_1, p_2, p_3) \rightarrow$ Kasner (p'_1, p'_2, p'_3)

$$-R_1^1 = \frac{(\dot{a}bc)^\cdot}{abc} + \frac{1}{2a^2b^2c^2} [a^4 - (b^2 - c^2)^2] = 0,$$

$$-R_2^2 = \frac{(a\dot{b}c)^\cdot}{abc} + \frac{1}{2a^2b^2c^2} [b^4 - (a^2 - c^2)^2] = 0,$$

$$-R_3^3 = \frac{(ab\dot{c})^\cdot}{abc} + \frac{1}{2a^2b^2c^2} [c^4 - (a^2 - b^2)^2] = 0.$$

$$-R_0^0 = \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\ddot{c}}{c} = 0.$$

$$a \sim t^{p_1}, \quad b \sim t^{p_2}, \quad c \sim t^{p_3} \quad \longrightarrow \quad a \sim t^{p'_1}, \quad b \sim t^{p'_m}, \quad c \sim t^{p'_n}.$$

$$p'_1 = \frac{|p_1|}{1 - 2|p_1|}, \quad p'_2 = -\frac{2|p_1| - p_2}{1 - 2|p_1|}, \quad p'_3 = \frac{p_3 - 2|p_1|}{1 - 2|p_1|}.$$

$$p_1(u) = \frac{-u}{1+u+u^2}, \quad p_2(u) = \frac{1+u}{1+u+u^2}, \quad p_3(u) = \frac{u(1+u)}{1+u+u^2}.$$

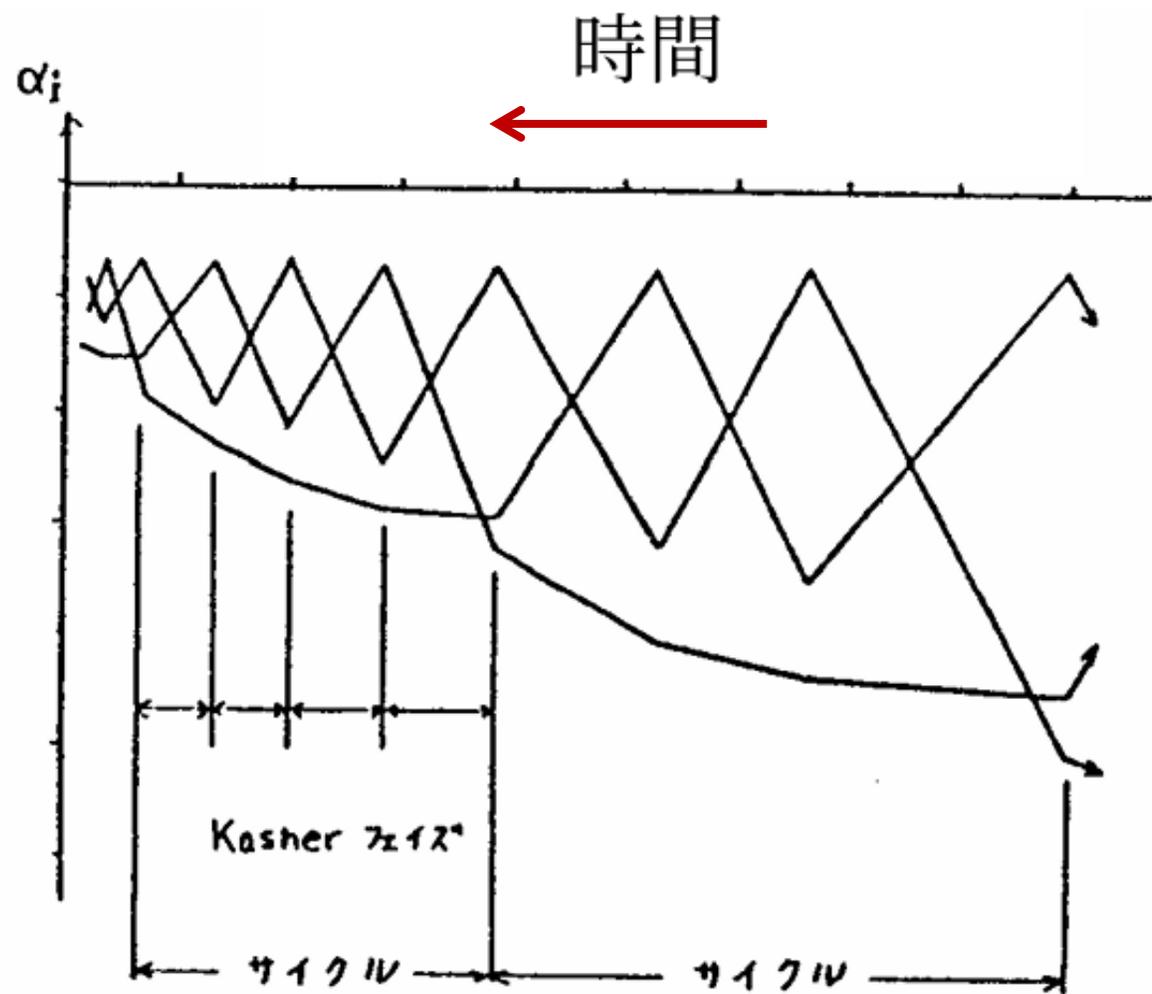
$$p_1\left(\frac{1}{u}\right) = p_1(u), \quad p_2\left(\frac{1}{u}\right) = p_3(u), \quad p_3\left(\frac{1}{u}\right) = p_2(u)$$

$$p_1 = p_1(u), \quad p_2 = p_2(u), \quad p_3 = p_3(u)$$

$$\Rightarrow p'_1 = p_2(u-1), \quad p'_2 = p_1(u-1), \quad p'_3 = p_3(u-1).$$

$$u_0^{(s)}, \quad u_1^{(s)} = u_0^{(s)} - 1, \quad u_2^{(s)} = u_0^{(s)} - 2 \cdots, \quad u_k^{(s)} = u_0^{(s)} - k = x^{(s)} < 1$$

$$u_0^{(s+1)} = \frac{1}{x^{(s)}} > 1$$



$$u_0^{(s+1)} = \frac{1}{u_0^{(s)} - [u_0^{(s)}]}$$

$$u_0^{(s)} = [u_0^{(s)}] + \frac{1}{[u_0^{(s+1)}] + \frac{1}{[u_0^{(s+2)}] + \dots}}$$

Einstein 方程式で記述される宇宙の初期特異点付近の振舞いが
カオス的な離散写像を誘導

V. A. Belinsky, I. M. Khalatnikov, and E. M. Lifshitz,

”Oscillatory approach to a singular point in the relativistic cosmology.”

Advances in Physics, 19(80), 525-573 (1970).

コンパクトな一様宇宙

- 宇宙が周期性をもつならば、どのように観測されるか？

銀河の相関, 宇宙背景放射, ...

- 宇宙の量子化

作用積分の有限化

観測的観点

L. Z. Fang and H. Sato,

“Is the periodicity in the distribution of quasar red shifts

an evidence of multiply connected universe?”,

Gen. Rel. Grav. 17, 1117-1120 (1985).

Kaiki Taro Inoue,  第 51 回 正 20 面体にまつわる数学-その 2 - 2009 年 10 月

“Computation of eigenmodes on a compact hyperbolic space”,

Class.Quant.Grav. 16 (1999) 3071-309.

Kaiki Taro Inoue, Kenji Tomita, Naoshi Sugiyama,

“Temperature correlations in a compact hyperbolic universe”,

Mon.Not.Roy.Astron.Soc. 314 (2000) L21.

Kaiki Taro Inoue,

“Geometric Gaussianity and nonGaussianity in the cosmic microwave background”,

Phys.Rev.D 62 (2000) 103001.

数理モデル

William P. Thurston,

“Three-dimensional geometry and topology”, Levy, Silvio (ed.),

Princeton Mathematical Series, vol.35 (1997),

Tatsuhiko Koike, Masayuki Tanimoto, Akio Hosoya

“Compact homogeneous universes”,

J.Math.Phys. 35 (1994) 4855-4888

Masayuki Tanimoto Tatsuhiko Koike Akio Hosoya

“Hamiltonian structures for compact homogeneous universes”,

J.Math.Phys. 38 (1997) 6560-6577

\widetilde{M} : 単連結な空間

G : \widetilde{M} に推移的に作用する最大の等長変換群

Γ : G の離散的部分群

$X = \widetilde{M}/\Gamma$: コンパクトな局所一様空間

Thurston's theorem

Any maximal, simply connected three-dimensional geometry which admits a compact quotient is equivalent to the geometry $(M, \text{Isom}M)$ where M is one of

$E^3, H^3, S^3, S^2 \times \mathbf{R}, H^2 \times \mathbf{R}, \widetilde{SL}(2, \mathbf{R}), Nil, \text{ and } Sol.$

コンパクトな一様宇宙モデルの分類

\widetilde{M} に作用する等長変換群が Thurston 分類の最大でないとき

コンパクト化できるか

Tatsuhiko Koike, Masayuki Tanimoto, Akio Hosoya

$$G \supset G' \supset \Gamma$$

“Compact homogeneous universes”,

J.Math.Phys. 35 (1994) 4855-4888

Bianchi Type IV, VI はコンパクト化できない

コンパクト化された Bianchi Type V 宇宙は等方膨張しかできない

Mostow の剛性定理

次元が 3 以上のコンパクト双曲多様体は, その基本群により

位相・計量ともに完全に決定される. 第 14 回 Lie 群の離散部分群の剛性理論 2000 年 2 月

コンパクト一様宇宙の力学

コンパクト化した局所一様宇宙は大域的な変形 (Teichmüller 変形) が可能

コンパクト一様宇宙の物理的自由度

一様宇宙 \widetilde{M} の自由度 + Teichmüller 変形の自由度

コンパクト一様宇宙の ADM 形式

Masayuki Tanimoto Tatsuhiko Koike Akio Hosoya

“Hamiltonian structures for compact homogeneous universes”,

J.Math.Phys. 38 (1997) 6560-6577

3次元接触空間を用いた 非一様時空の構成

(松野皐, 古崎広志, 古池達彦, 森澤理之との共同研究に基づく)

電磁気力と重力

電磁気力： Maxwell方程式（線形）

$$\partial_a F^{ab} = \sum e u^b$$
$$m \frac{d}{d\tau} u^a = e F^a_b u^b$$

電磁場と電流を同時に決定するのは難しい

重力： Einstein方程式（非線形）
重力場を曲がった時空としての幾何学的な記述

重力の基礎方程式

Einstein方程式

$$R_{ab} = T_{ab} - \frac{1}{2}Tg_{ab} + \Lambda g_{ab},$$

$$\nabla_a T^{ab} = 0$$

重力場と物質の運動を同時に決定するのは難しい

3次元接触空間の性質を用いた磁場と電荷の運動

Jun-ichi Inoguchi, Marian Ioan Munteanu, and Ana Irina Nistor

“Magnetic curves in quasi-Sasakian 3-manifolds”

Analysis and Mathematical Physics, Volume 9, pages 43-61, (2019)

⋮

3次元接触空間の性質を用いて

物質の運動と時空構造が同時に解ける (特解)

接触空間に関する言葉使い

Contact manifold

\mathcal{M} : $(2n + 1)$ -dimensional manifold

$\eta_a = \eta_i (dx^i)_a$: 1-form on \mathcal{M}

Contact 1-form η_a on \mathcal{M}

$$\eta \wedge \underbrace{d\eta \wedge \cdots \wedge d\eta}_{n \text{ -times}} \neq 0$$

Reeb vector ξ^a

$$\eta_a \xi^a = \eta(\xi) = 1, \quad d\eta_{ab} \xi^a = d\eta(\xi, \quad) = \iota_\xi d\eta = 0$$

Contact metric manifold

Introduce a (1,1) tensor $\phi : (\text{vector}) \rightarrow (\text{vector})$ satisfying

$$\phi^2(X) = -X + \xi \otimes \eta(X), \quad \text{for arbitrary } X.$$

If g and ϕ satisfy

$$g(\phi(X), \phi(Y)) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y), \quad \text{for arbitrary } X, Y,$$

g is called compatible metric.

Furthermore, if it holds that

$$g(X, \phi(Y)) = d\eta(X, Y),$$

$(\mathcal{M}, \phi, \xi, \eta, g)$ is called a contact metric manifold.

we have

$$\eta(X) = g(X, \xi),$$

$$g(\xi, \xi) = 1,$$

Reeb vector in 3 dim.

$$\eta \wedge d\eta \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\xi} \cdot \text{rot } \vec{\xi} \neq 0$$

$$(d\eta)_{ab} \xi^a = 0 \quad \Rightarrow \quad \xi^a \nabla_a \xi^b = 0$$

$$g_{ab} \xi^a \xi^b = 1$$

The Reeb vector is twisted, and a geodesic tangent.

3次元Sasaki空間

Contact metric manifold (M, ϕ, ξ, η, g) is a **Sasakian manifold** if

$$[\phi, \phi](X, Y) + d\eta(X, Y)\xi = 0 \quad \text{normal}$$

$$[\phi, \phi](X, Y) := \phi^2[X, Y] + [\phi(X), \phi(Y)] - \phi([\phi(X), Y]) - \phi([X, \phi(Y)])$$

Nijenhuis tensor

3-dim. Sasaki space is η -Einstein.

$$R_{ab}^{\mathcal{M}} = \beta g_{ab}^{\mathcal{M}} + \gamma \eta_a \eta_b,$$

β, γ で関数も良い

3次元Sasaki 空間 \Leftrightarrow

接触計量空間で Reeb vector が unit Killing vector

測地線偏差方程式

$$\eta \wedge d\eta \neq 0$$

$$\xi^b \nabla_b \xi^a = 0$$

$$\mathcal{L}_\xi g = 0$$

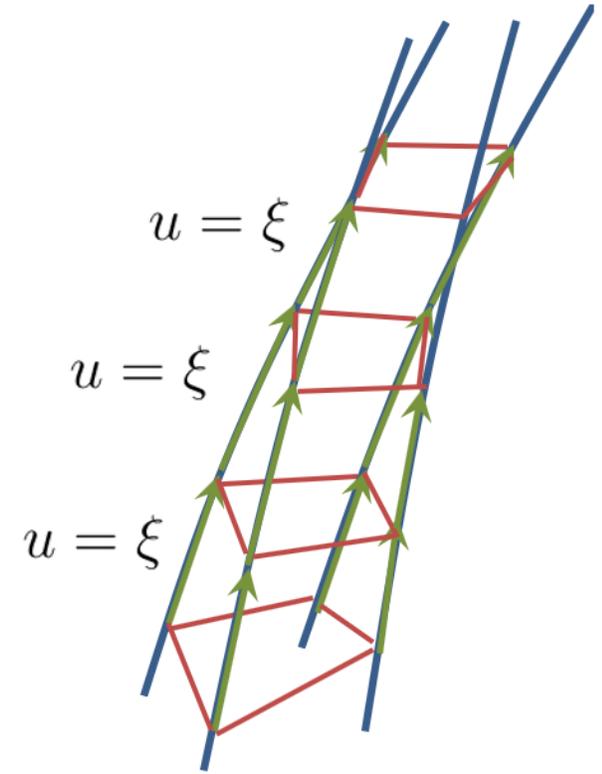
$$\frac{D^2 z^\mu}{d\tau^2} = -R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} u^\nu z^\rho u^\sigma$$

$$B_{\mu\nu} = \nabla_\nu u_\mu$$

$$\theta = B^\mu{}_\mu = \nabla_\mu u^\mu, \quad (\text{Expansion}) \quad = 0$$

$$\sigma_{\mu\nu} = B_{\mu\nu} - \frac{1}{3}\theta h_{\mu\nu}, \quad (\text{Shear}) \quad = 0$$

$$\omega_{\mu\nu} = B_{\mu\nu} - B_{\nu\mu}, \quad (\text{Rotation}) \quad \neq 0$$



$$\frac{D^2 z^\mu}{d\tau^2} = - \left(\frac{1}{3}\theta^2 + \sigma_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta} - \omega_{\alpha\beta}\omega^{\alpha\beta} + R_{\mu\nu}u^\mu u^\nu \right) z^\nu$$

非一樣靜的宇宙

アインシュタイン静的宇宙

$$g = -dt^2 + \underbrace{(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)}_{\text{底空間}} + \underbrace{(d\psi - \cos \theta d\phi)^2}_{\text{ファイバー}}$$

η
||
 S^3

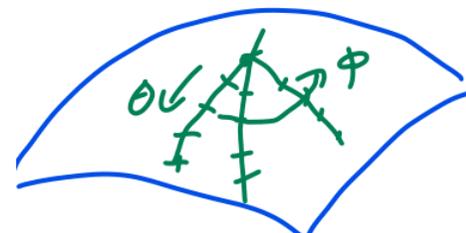
非一様アインシュタイン静的宇宙

$$g = -dt^2 + \underbrace{(d\theta^2 + h^2(\theta, \phi) d\phi^2)}_{\text{3次元接触計量空間}} + (d\psi - f(\theta, \phi) d\phi)^2$$

$$h(\theta, \phi) = \partial_\theta f(\theta, \phi)$$

3次元接触計量空間

計量



$$ds^2 = -dt^2 + ds_M^2,$$

$$ds_M^2 = a^2 (d\theta^2 + h(\theta, \phi)^2 d\phi^2) + b^2 (d\psi + f(\theta, \phi) d\phi)^2,$$

$$h(\theta, \phi) := \partial_\theta f(\theta, \phi).$$

$$\sigma^0 := dt, \quad \sigma^1 := d\theta, \quad \sigma^2 := h d\phi, \quad \sigma^3 := d\psi + f(\theta, \phi) d\phi,$$

$$d\sigma^3 = \sigma^1 \wedge \sigma^2. \quad \sigma^3 \wedge d\sigma^3 \neq 0,$$

contact form

$$\xi_{(t)} = \partial_t, \quad \xi_{(\psi)} = \partial_\psi,$$

Reeb vector \nexists Killing vector

Ricci 曲率

$$ds^2 = -dt^2 + ds_M^2,$$

$$ds_M^2 = \underline{a^2 (d\theta^2 + h(\theta, \phi)^2 d\phi^2)} + b^2 (d\psi + f(\theta, \phi) d\phi)^2,$$

N : base space

$$h(\theta, \phi) := \partial_\theta f(\theta, \phi).$$

Ricci curvature

$$R_{ab} = \left(\frac{1}{2} R_N - \frac{b^2}{2a^4} \right) (\sigma_a^1 \sigma_b^1 + \sigma_a^2 \sigma_b^2 + \sigma_a^3 \sigma_b^3) + \left(\frac{b^2}{a^4} - \frac{1}{2} R_N \right) \sigma_a^3 \sigma_b^3,$$

η -Einstein

$$R_N = -\frac{2}{a^2} \frac{\partial_\theta^2 h(\theta, \phi)}{h(\theta, \phi)}, \quad N \text{ } \mathcal{D} \text{ scalar curvature}$$

自由粒子の系

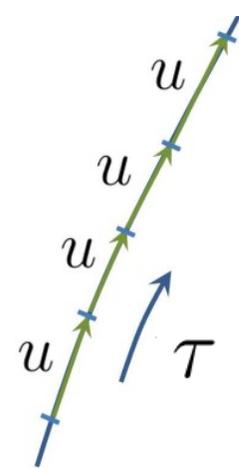
4-velocity

$$u^a = \frac{dx^\mu}{d\tau} \partial_\mu$$

$$u^t = \frac{cdt}{d\tau} = \frac{c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$g_{ab}u^a u^b = \frac{g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu}{d\tau^2} = -c^2$$

Lorentz factor



ダスト流体（測地粒子の束） $\xi_{(t)} = \partial_t$, $\xi_{(\psi)} = \frac{1}{b}\partial_\psi$

Counter flow \pm Reeb vector 方向に運動する粒子

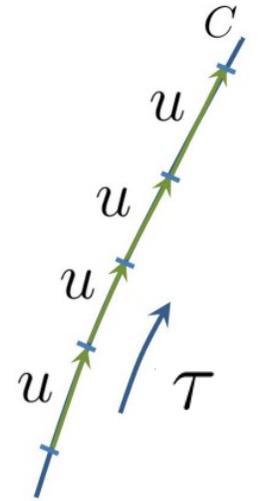
$$u_+^a = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \xi_{(t)}^a \oplus \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} \xi_{(\psi)}^a,$$

$$u_-^a = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \xi_{(t)}^a \ominus \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} \xi_{(\psi)}^a,$$

where v is a function on N .

$$u_\pm^a \nabla_a u_\pm^b = 0.$$

粒子の運動方程式が解けた



ダスト流体

$$\xi_{(t)} = \partial_t, \quad \xi_{(\psi)} = \frac{1}{b} \partial_\psi$$

Counter flow \pm Reeb vector 方向に運動する粒子

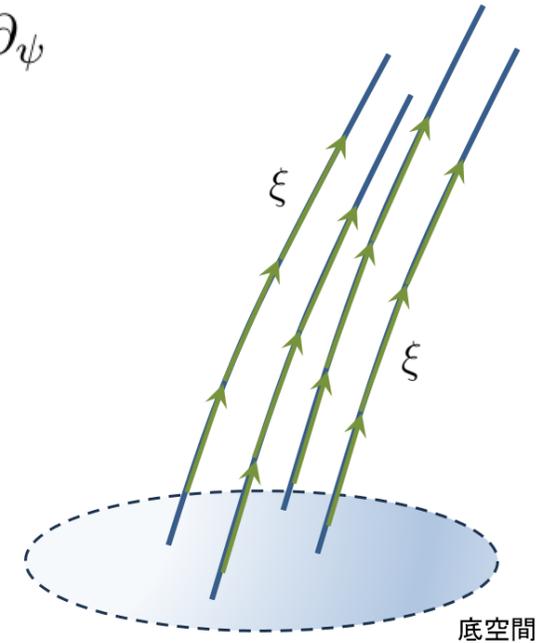
$$u_+^a = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \xi_{(t)}^a \oplus \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} \xi_{(\psi)}^a,$$

$$u_-^a = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \xi_{(t)}^a \ominus \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} \xi_{(\psi)}^a,$$

where v is a function on N .

$$u_\pm^a \nabla_a u_\pm^b = 0.$$

粒子の運動方程式が解けた



Energy-momentum tensor

$$T^{ab} = \frac{1}{2} mn (u_+^a \otimes u_+^b + u_-^a \otimes u_-^b) \quad n(\theta, \phi) : \text{number density}$$

$$= mn \left(\frac{1}{1-v^2} \xi_{(t)}^a \otimes \xi_{(t)}^b + \frac{v^2}{1-v^2} \xi_{(\psi)}^a \otimes \xi_{(\psi)}^b \right),$$

Einstein 方程式

$$R_{ab} = T_{ab} - \frac{1}{2}Tg_{ab} + \Lambda g_{ab},$$

$$R_{ab} = \left(-\frac{b^2}{2a^4} + \frac{1}{2}R_N \right) (\sigma_a^1 \otimes \sigma_b^1 + \sigma_a^2 \otimes \sigma_b^2) + \frac{b^2}{2a^4} \sigma_a^3 \otimes \sigma_b^3.$$

$$T_{ab} = mn \left(\frac{1}{1 - v^2/c^2} \sigma_a^0 \otimes \sigma_b^0 + \frac{v^2}{1 - v^2/c^2} \sigma_a^3 \otimes \sigma_b^3 \right)$$

$$- \frac{1}{2}Tg_{ab} + \Lambda g_{ab}$$

$$= (\Lambda - \frac{1}{2}T)(-\sigma_a^0 \otimes \sigma_b^0 + \sigma_a^1 \otimes \sigma_b^1 + \sigma_a^2 \otimes \sigma_b^2 + \sigma_a^3 \otimes \sigma_b^3)$$

Einstein 方程式

$$R_{ab} = T_{ab} - \frac{1}{2}Tg_{ab} + \Lambda g_{ab},$$

$$(0,0) \quad 0 = \frac{1}{2}mn(\theta, \phi) \left(\frac{1 + v(\theta, \phi)^2}{1 - v(\theta, \phi)^2} \right) - \Lambda,$$

$$(1,1) \quad (2,2) \quad -\frac{b^2}{2a^4} + \frac{1}{2}R_N = \frac{1}{2}mn(\theta, \phi) + \Lambda,$$

$$(3,3) \quad \frac{b^2}{2a^4} = \frac{1}{2}mn(\theta, \phi) \left(\frac{1 + v(\theta, \phi)^2}{1 - v(\theta, \phi)^2} \right) + \Lambda.$$

$$\Lambda = \frac{b^2}{4a^4} > 0$$

N 上のEinstein方程式

$$R_N(\theta, \phi) = mn(\theta, \phi) + 6\Lambda.$$

$$R_N = -\frac{2}{a^2} \frac{\partial_\theta^2 h(\theta, \phi)}{h(\theta, \phi)},$$

線形微分方程式

$$\partial_{\theta}^2 h(\theta, \phi) + a^2 w(\theta, \phi) h(\theta, \phi) = 0,$$

$$w(\theta, \phi) := \frac{1}{2} mn(\theta, \phi) + 3\Lambda.$$

$$ds_M^2 = a^2 (d\theta^2 + h(\theta, \phi)^2 d\phi^2) + b^2 (d\psi + f(\theta, \phi) d\phi)^2,$$

$$h(0, \phi) = 0,$$

$$h'(0, \phi) = 1.$$

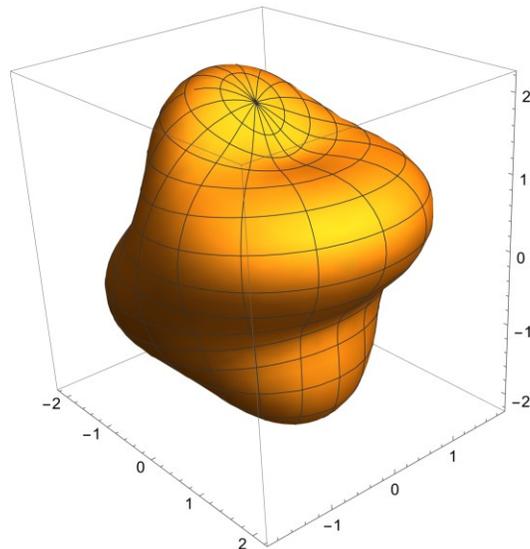
$$h(\theta, 0) = h(\theta, 2\pi)$$

Non-axisymmetric cases

$$f(\theta, \phi) = -\cos \theta + \beta \sin^5 \theta \cos \phi,$$

$$h(\theta, \phi) = \sin \theta + 5\beta \sin^4 \theta \cos \theta \cos \phi,$$

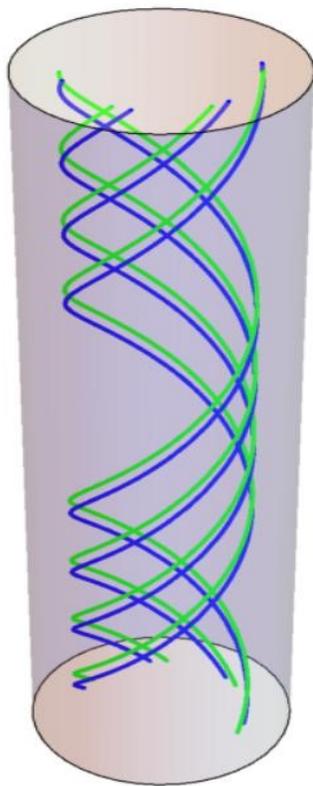
$$mn(\theta, \phi) = -6\Lambda + \frac{1}{a^2} \left(2 - \frac{30\beta \sin 4\theta \cos \phi}{1 + 5\beta \sin^3 \theta \cos \theta \cos \phi} \right),$$



静的解の存在

粒子の密度の濃いところは
万有引力でつぶれないか？

静的解の存在



粒子の密度の濃いところは
万有引力でつぶれないか？

Raychaudhuri 方程式 ($\sigma=0$)

$$\frac{D}{d\tau}\theta = -\frac{1}{3}\theta^2 + \omega_{\alpha\beta}\omega^{\alpha\beta} - R_{\alpha\beta}u^{\alpha}u^{\beta},$$

遠心力 曲率による引力

つりあう

$$\theta = 0$$

3次元接触計量空間を用いた非一様静的宇宙解

$$\eta \wedge d\eta \neq 0$$

$$\xi^b \nabla_b \xi^a = 0$$

$$\mathcal{L}_\xi g = 0$$

$$R_{ab}^{\mathcal{M}} = \beta g_{ab}^{\mathcal{M}} + \gamma \eta_a \eta_b,$$

β, γ で関数も良い

これらの性質より物質を源としたEinstein方程式の厳密解が作れた

計量が退化した接触空間を部分空間とする時空

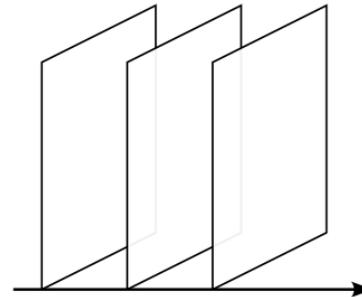
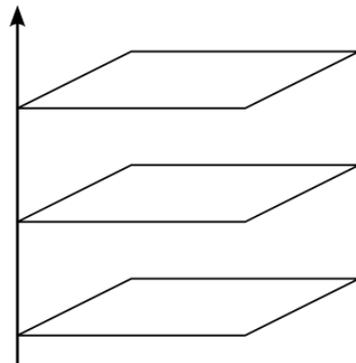
アインシュタイン静的宇宙

$$g = -dt^2 + \underbrace{\alpha(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)}_{\text{底空間}} + \underbrace{(d\psi - \cos \theta d\phi)^2}_{\text{ファイバー}}$$

ゲーデル型宇宙

Hopf fibration

$$g = \underbrace{-(dt + \sinh \theta d\phi)^2}_{\text{ファイバー}} + \underbrace{\alpha(d\theta^2 + \cosh \theta d\phi^2)}_{\text{底空間}} + dz^2$$



contact manifold

$$\eta \wedge \underbrace{d\eta \wedge \cdots \wedge d\eta}_{n \text{ factors}} \neq 0$$

$$\iota_{\xi} d\eta := d\eta(\xi, \cdot) = 0,$$

$$\iota_{\xi} \eta := \eta(\xi) = 1.$$

$$\varphi^2 = -1 + \xi \otimes \eta.$$

$$\varphi \xi := \varphi(\cdot, \xi) = 0,$$

$$\eta \circ \varphi := \varphi(\eta, \cdot) = 0.$$

compatible metric h

$$h(\varphi X, \varphi Y) = h(X, Y) - \varepsilon \eta(X)\eta(Y), \quad \varepsilon = \pm 1$$

$$h(X, \varphi Y) = d\eta(X, Y),$$

$$h(\xi, \cdot) = \varepsilon \eta. \quad h(\xi, \xi) = \varepsilon.$$

$$\varepsilon = 0,$$

$$h(\xi, \cdot) = \varepsilon\eta. \quad \longrightarrow \quad h(\xi, \cdot) = 0,$$

metric is degenerate,

3-dimensional metric on $\mathcal{M}_{(3)}$

$$\mathbf{h}_{(3)} = \mathbf{h}_{(2)} + \epsilon \boldsymbol{\eta} \otimes \boldsymbol{\eta}$$

the metric $\mathbf{h}_{(3)}$ is $\begin{cases} \text{Euclidean} & \text{for } \epsilon = 1 \\ \text{Lorentzian} & \text{for } \epsilon = -1 \\ \text{Null (degenerate)} & \text{for } \epsilon = 0 \end{cases}$

Compatible metric

$$\mathbf{h}_{(3)}(\boldsymbol{\varphi} \mathbf{X}, \boldsymbol{\varphi} \mathbf{Y}) = \mathbf{h}_{(3)}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) - \epsilon \boldsymbol{\eta}(\mathbf{X}) \otimes \boldsymbol{\eta}(\mathbf{Y})$$

$(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \mathbf{h}_{(3)})$ is an almost contact structure

$$\mathbf{h}_{(3)}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\varphi} \mathbf{Y}) = d\boldsymbol{\eta}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$$

$(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \mathbf{h}_{(3)})$ is a contact structure

$$d\eta(\xi, \cdot) = 0, \quad \eta(\xi) = 1$$

$$h_{(3)}(\varphi X, \varphi Y) = h_{(3)}(X, Y) - \varepsilon \eta(X) \otimes \eta(Y)$$

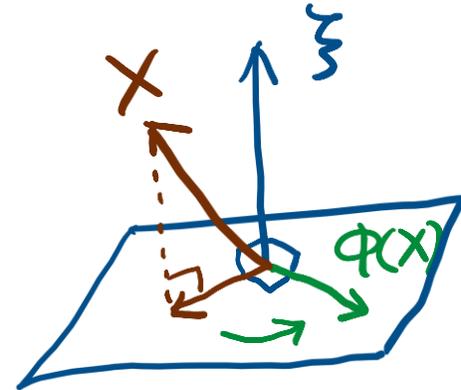
$$h_{(3)}(X, \varphi Y) = d\eta(X, Y)$$



$$\varphi(\xi) = 0$$

$$h_{(3)}(\varphi X, X) = 0$$

$$h_{(3)}(\xi, \xi) = \varepsilon$$



$$\text{for } \varepsilon \neq 0 \quad h_{(3)ab} \xi^b = \eta_a$$

ξ is metric dual to η .

Null case $\varepsilon = 0$,

the metric is degenerate along ξ :

$$h(\xi, \cdot) = h_{(3)}(\xi, \cdot) = 0$$

connection ∇ cannot be uniquely determined.

Ric cannot be uniquely determined.

Lift up to 4 dimensions

$$\begin{aligned} g &= h_{(3)} + b (\boldsymbol{\eta} \otimes du + du \otimes \boldsymbol{\eta}) + c du \otimes du \\ &= h_{(2)} + a \boldsymbol{\eta} \otimes \boldsymbol{\eta} + b (\boldsymbol{\eta} \otimes du + du \otimes \boldsymbol{\eta}) + c du \otimes du \end{aligned}$$

a	b	c
+ 1	0	- 1
- 1	0	+ 1
0	+ 1	0

H. Ishihara and S. Matsuno,
PTEP 2022, 023E01(2022)

PTEP 2022, 013E02(2022)

H. Kozaki, Hideki Ishihara, Tatsuhiko Koike, Yoshiyuki Morisawa
Phys.Rev.D 110 (2024)

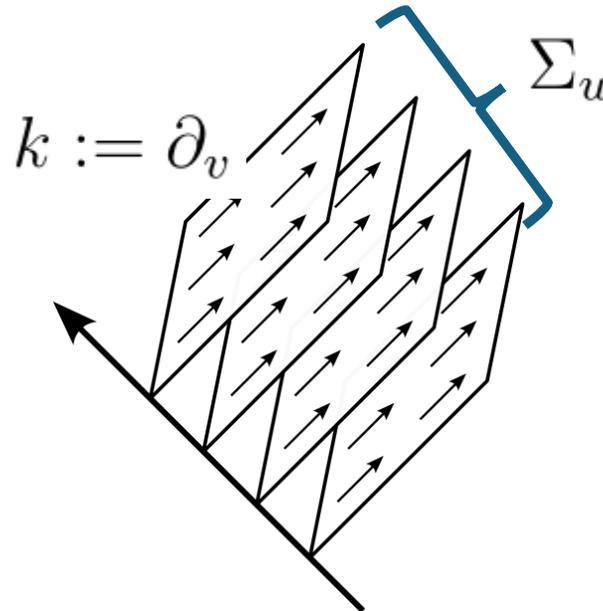
振じれたヌルファイバーをもつ時空

$$g = a^2(u)[-2(dv + \omega f dy)du + dx^2 + f_{,x}^2 dy^2].$$

2つの関数自由度： $a = a(u)$, $f = f(x, y)$.

光的キリングベクトル $\frac{\partial}{\partial v} =: \xi$

共型光的キリングベクトル $\frac{\partial}{\partial u} =: k$



誘導計量は退化 (degenerate)

$$h = a^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & h^2 \end{pmatrix}.$$

$$g = a^2(u)[-2(dv + \omega f dy)du + dx^2 + f_{,x}^2 dy^2].$$

$$\begin{array}{ll} \text{光的キリングベクトル} & \frac{\partial}{\partial v} =: \boldsymbol{\xi} \\ \text{共型光的キリングベクトル} & \frac{\partial}{\partial u} =: \boldsymbol{k} \end{array} \quad [\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{k}] = 0$$

$\boldsymbol{\xi}$ は光的測地線の接ベクトル

$\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{k}$ で張る 2次元面は極小曲面（ストリングの世界面）

Hiroshi Kozaki, Tatsuhiko Koike, Yoshiyuki Morisawa, Hideki Ishihara,
“Nambu-Goto strings with a null symmetry and contact structure”,
Phys.Rev.D 108 (2023) 8, 084069.

non-degenerate cases $\varepsilon = \pm 1$

$$g = -\varepsilon du^2 + \boldsymbol{\eta} \otimes \boldsymbol{\eta} + dx^2 + h^2 dy^2$$

$$\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\xi}) = 1$$

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{\xi}, \cdot) = \varepsilon \boldsymbol{\eta}. \quad \boldsymbol{g}(\boldsymbol{\xi}, \cdot) = \varepsilon \boldsymbol{\eta}$$

degenerate case $\varepsilon = 0$

$$g = \boldsymbol{\eta} \otimes du + du \otimes \boldsymbol{\eta} + dx^2 + h^2 dy^2$$

$$\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\xi}) = 1$$

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{\xi}, \cdot) = 0$$

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{\xi}, \cdot) = -du$$

$$\boldsymbol{g}(\partial_u, \cdot) = -\boldsymbol{\eta}$$

Ricci tensor

$$R^{ab} = \frac{R_{(2)}}{2a^4} h_{(2)}^{ab} + \left(\frac{1}{2a^4} - 2\frac{a''}{a} \right) \xi^a \xi^b$$

ξ is NOT metric dual to η .

$\epsilon \neq 0$ cases

$$\mathbf{Ric} = \beta \mathbf{h}_{(3)} + \gamma \eta \otimes \eta$$

η -Einstein

Einstein equation

$$\mathbf{G} = \kappa \mathbf{T}$$

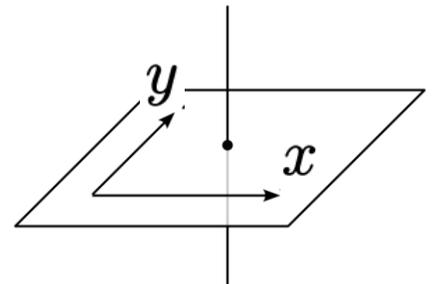
$$G^{ab} = \frac{R_{(2)}}{2a^2} (\xi^a k^b + k^a \xi^b) + \left(\frac{1}{2a^4} - 2 \frac{a''}{a} \right) \xi^a \xi^b$$

$$\xi = \frac{\partial}{\partial v}, \quad k = \frac{\partial}{\partial u}$$

$$\mathbf{G} = \kappa \left(\mathbf{T}_{\text{cosmic strings}} + \mathbf{T}_{\text{null dust}} \right)$$

$$\mathbf{T}_{\text{cosmic strings}} = \frac{n(x, y) \mu}{a^2} (\xi \otimes k + k \otimes \xi)$$

$$\mathbf{T}_{\text{null dust}} = \rho \xi \otimes \xi$$



Decoupled equations

$$\mathbf{G} = \kappa \left(\mathbf{T}_{\text{cosmic strings}} + \mathbf{T}_{\text{null dust}} \right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{R_{(2)}}{2} = \kappa \mu n(x, y) \\ \frac{1}{2a^4} - 2 \frac{a''}{a} = \kappa \rho(u) \end{array} \right. \quad \text{線形微分方程式}$$

共形因子 $a(u)$ はヌルダストのエネルギー密度 $\rho(u)$ で決まる

底空間の計量 $f_{,x}(x, y)$ は宇宙ひもの数密度 $n(x, y)$ で決まる

特殊な場合

宇宙ひもの数密度が一定の解

$$f_{,xxx} = -\kappa\mu n(x, y) f_{,x}. \quad n(x, y) = \text{const.}$$

$$x = \theta, \quad y = \varphi$$

$$g = a^2(u) \left[-2(dv + \omega \cos \theta) du + \underbrace{d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2}_{S^2} \right].$$

$$\frac{1}{a^4} \left[-2 \frac{a''}{a} + 4 \left(\frac{a'}{a} \right)^2 + \frac{\omega^2}{2} \right] = \kappa \rho(u)$$

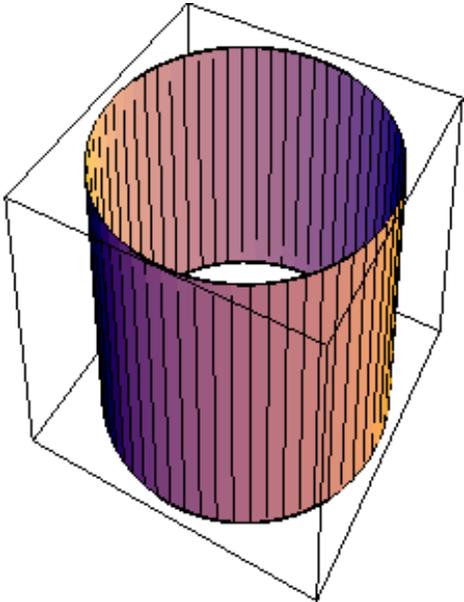
$a(u) = \text{const.}$ の解は 時空的に一様な解

時間・空間的に一様な時空

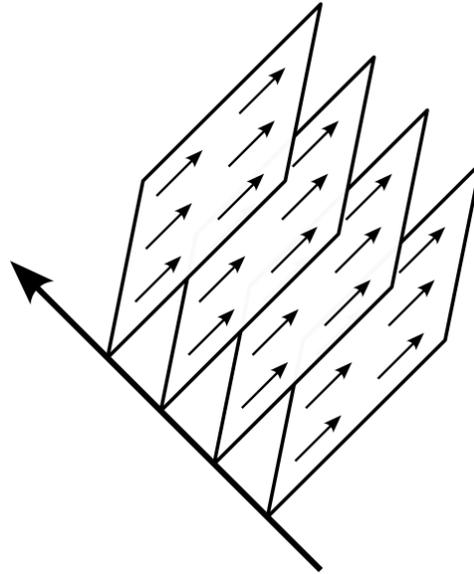


非一様化

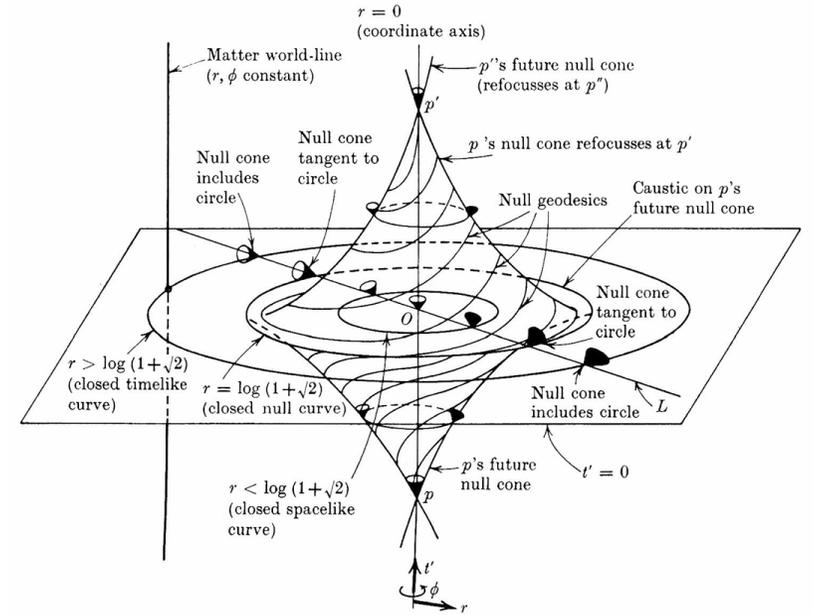
時間



Einstein の静的宇宙
 η : 空間的



η : 光的



Gödel 宇宙
 η : 時間的

まとめ

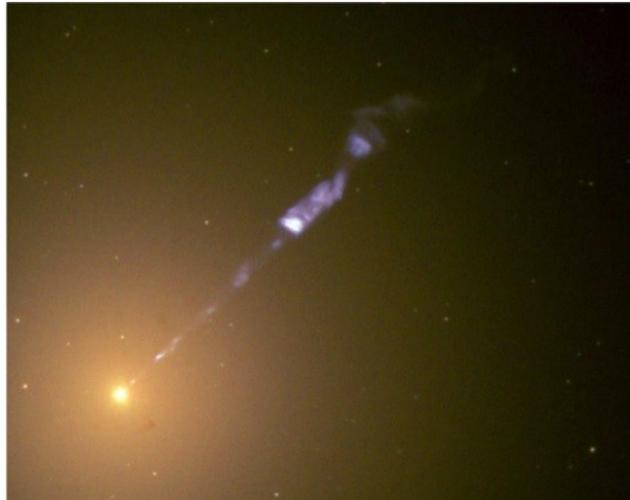
3次元接触計量空間を用いて非一様性をもった
Einstein方程式の解が構成できる

- 佐々木空間を用いた静的非一様時空
- 時間的な3次元擬佐々木空間を用いた時空
- 光的な3次元擬佐々木空間を用いた時空

全体のまとめ

一様非等方宇宙モデルは、重力場の自由度(計量と大域的変形)をもった最も簡単な力学系で、宇宙の初期特異点近傍の時空の一般的な振舞いを記述する。

3次元の接触構造をもつ空間を用いると、非一様性をもった Einstein 方程式の解を構成できる。



非一様性をもった膨張宇宙解 (contact universe model)
接触計量構造をどこまで緩められるか

宇宙ジェットに結び付けたいが
道は遠い!