ENCOUNTER with MATHEMATICS

第45回

McKay対応を巡って

2008年5月16日(金) 14:30 〜 5月17日(土)

於：東京都 文京区 春日 1-13-27　中央大学理工学部５号館

5月16日(金)

14:30〜16:00	プラトンの対称性とマッカイ対応	：松澤 淳一氏 (奈良女子大・理)
16:30〜18:00	McKay 対応と導来圏	：石井 亮氏 (広島大・理)

5月17日(土)

10:30〜12:00	McKay 対応と特異点解消	：伊藤 由佳理氏 (名大・多元数理)
14:00〜14:45	The "McKay correspondence"	：John McKay 氏 (Concordia 大/京大・数理研)
15:15〜16:45	ルート系とウェイト系—マッカイ対応のある一般化	：斎藤 恭司氏 (東大・IPMU)
17:00〜	ワインパーティー（懇親会）	

別紙の趣旨に沿った集会の第45回を以上のような予定で開催いたします．非専門家向けに入門的な講演をお願い致しました．多くの方々のご参加をお待ちしております．講演者による講演内容へのご案内を添付いたしますので御覧下さい．

連絡先：112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 中央大学理工学部数学教室 tel：03-3817-1745
ENCOUNTER with MATHEMATICS: homepage：http://www.math.chuo-u.ac.jp/ENCwMATH
三松 佳彦：yoshi@math.chuo-u.ac.jp

場所にご注意下さい！！

プラトンの対称性とマッカイ対応

松澤 淳一 (奈良女子大学理学部)

1979 年に McKay 氏よって発見された，いわゆる McKay 対応は，正多面体と Dynkin 図形とを，表現論を通じて対応させるものであった．発見当初から，この対応が大きな関心を持って注目された理由は，正多面体と Dynkin 図形の間には，それ以前から様々な角度からの興味深い関連が指摘されてきたからであった．

集会のプログラムの最初の講演に当たって，後に続く講演の理解のために，正多面体と Dynkin 図形をめぐる数学（斎藤恭司氏は，これをプラトンの対称性と呼んだ）の概略を紹介したい．具体的な内容は，正多面体と曲面の特異点，曲面の特異点と Dynkin 図形，Dynkin 図形に対応するリー環と特異点，リー環のルート系と McKay 対応などである．

松澤　淳一著　「特異点とルート系」すうがくの風景６、朝倉書店、２００２.

McKay 対応と導来圏

石井 亮 (広島大学大学院理学研究科)

McKay 対応は $SL(2,\mathbb{C})$ の有限部分群 G の非自明既約表現と，G による商特異点の最小特異点解消 Y の既約例外曲線を対応させるものです．当初の発見は，それぞれの作るグラフが同じ，という形で表現することができます．この対応をなるべく自然な形で与えようという努力がいろいろなされてきました．Gonzalez-Sprinberg と Verdier は，Y 上のベクトル束と G の表現とを自然に対応させることにより，Grothendieck 群の間の同型を導きました．その後，伊藤-中村による「G-軌道のヒルベルト・スキーム」 の登場を経て，(連接層の）導来圏の同値としての McKay 対応が確立され，いくつかの場合への一般化がなされました．一方，Gonzalez-Sprinberg と Verdier の構成したベクトル束の Artin-Verdier による特徴付けを用いると，(ヒルベルト・スキーム等は登場させないで）このような導来同値が説明できます．これは Van den Bergh によって,「３次元フロップによる導来同値」等を説明する際に拡張されて使われたアイデアで，McKay 対応のある種の一般化や，非可換クレパント解消といった概念と関係があります．この講演では Gonzalez-Sprinberg と Verdier による構成から始めて，McKay 対応の導来圏的解釈や，その代数幾何学的一般化等について説明したいと思います．

McKay 対応と特異点解消

伊藤 由佳理 (名古屋大学多元数理研究科)

2次元で発見されたMcKay対応は，1980年代に，$GL(2,\mathbf{C})$の有限部分群による2次元商特異点の場合への一般化が試みられた．さらに1985年ごろ、超弦理論で出てきたオービフォールドに関する指標は，$SL(3,\mathbf{C})$ の有限部分群による3次元商特異点に関する物理量であった．1990年代には，それがcrepant resolution　と呼ばれる特殊な特異点解消に関する不変量であることが数学的に証明され，3次元以上の高次元のMcKay対応に関する研究が発展していった．

2次元同様，高次元のMcKay対応を考える場合，特異点解消が必要になる．2次元では極小特異点解消が用いられたが，3次元以上ではcrepant resolutionが有効だと思われている．3次元ではいろいろな構成方法が得られているが，4次元以上ではその存在自体が明らかではない．

この講演では，McKay対応の一般化について紹介し，特異点解消の存在についての最近の結果についても触れる予定である．

Y. Ito, M. Reid, The McKay correspondence for finite subgroups of $SL(3,\mathbf{C})$, Higher Dimensional Complex Varieties, Proc. Internat. Conference, Trento (1996) 221-240.

The McKay correspondence

John McKay (Concordia University/京都大学数理解析研究所)

I shall give some history of the ”McKay correspondence” and some generalization and connections with monstrous moonshine and similar properties.

ルート系とウェイト系ーーーマッカイ対応のある一般化

斎藤 恭司 (東京大学数物連携宇宙研究機構)

マッカイ対応とは，正多面体群に対し，有限ルート系のディンキン図式を対応させるものである。一見異なると思われていた二つの数学的世界：一つは，ギリシャ時代以来良く知られてきた正多面体の分類，もう一つはキリング，カルタン等により約 100 年前に成し遂げられた単純リー環の分類，それらの分類リストの間に一対一の対応がつくということであるから，1980 年の発表以来反響を呼び，多くの数学者を鼓舞させてきた。

その頃，私は，楕円積分を一般化した理論を構築するという研究目標を持っていて，そのために単純リー環を一般化した新しいリー環の理論を作りたいと考えていた。マッカイ対応の仕組みをうまく読み直し，対応の出発点にある正多面体群のリストを何か別のリストに置き換えれば，単純リー環の一般化が得られるのではないかと考えた。

この問題意識から生まれたのが正規ウェイト系なるものである (その途中経過は別途説明する)。正規ウェイト系とは，一見，正多面体群とは全く似てないが、四つの正整数の組 $W := (a, b, c; h)$ であって，W から定まる T の有理式

$$\chi_W(T) = T^{-h}\frac{(T^h - T^a)(T^h - T^b)(T^h - T^c)}{(T^a - 1)(T^b - 1)(T^c - 1)}$$

が T の有限ローラン多項式に展開できるもののことである (ここで a, b, c, h は公約数をもたない)。その時 exponents と呼ばれる有限個の整数 $m_1, \cdots, m_\mu$ が存在し $\chi_W(T)$ はそれらの単項式の和で表わされる。

$$\chi_W(T) = T^{m_1} + \cdots + T^{m_\mu}$$

さて，正規ウェイト系のうち exponents が 全て 正になる場合は実は 5 種類しかない。これがちょうど，マッカイ対応に登場した五つの正多面体のリストと自然に 1 対 1 に対応している事が示せる (詳しくは講演で説明する)。そこで もっと一般に exponents が正とは限らない 正規ウェイト系も 何らかの新しいリー環に対応しているのではないかと問うのは期待しすぎであろうか。この講演では その問いに対する 20 年の紆余曲折の末の現時点での 答えを 述べてみたい。

Kyoji Saito, *Towards a categorical construction of Lie algebras,* Advanced Studies in Pure Mathematics **50**, 2008, Algebraic Geometry in East Asia – Hanoi 2005, pp. 101-175