ENCOUNTER with MATHEMATICS

第46回

幾何学的変分問題

−−神の選択・人間の方法−−

2008年9月18日(木) 14:30 〜 9月19日(金)

於：東京都 文京区 春日 1-13-27

中央大学理工学部５号館５階 ５５３４号室

9月18日(木)

14:30〜16:00	フィンスラー幾何学と調和写像 I	：西川 青季氏(東北大・理)
16:30〜18:00	条件付変分問題: Lagrange の未定乗数と勾配流・安定性 I	：長澤 壯之氏(埼玉大・理)

9月19日(金)

10:30〜12:00	相分離モデルにおける変分問題	：利根川 吉廣氏(北大・理)
14:00〜15:20	フィンスラー幾何学と調和写像 II	：西川 青季氏(東北大・理)
15:40〜17:00	条件付変分問題: Lagrange の未定乗数と勾配流・安定性 II	：長澤 壯之氏(埼玉大・理)
17:10〜	ワインパーティー（懇親会）	

別紙の趣旨に沿った集会の第46回を以上のような予定で開催いたします．非専門家向けに入門的な講演をお願い致しました．多くの方々のご参加をお待ちしております．講演者による講演内容へのご案内を添付いたしますので御覧下さい．尚, 今回は応用数理研究センターとの共催です.

連絡先：112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 中央大学理工学部数学教室・応用数理研究センター
tel：03-3817-1745

ENCOUNTER with MATHEMATICS: homepage：http://www.math.chuo-u.ac.jp/ENCwMATH
三松 佳彦：yoshiATmath.chuo-u.ac.jp (AT を@に変更)

曜日の変更にご注意下さい

フィンスラー幾何学と調和写像

西川青季（東北大学大学院理学研究科）

幾何学にあらわれる変分問題の中で最も古典的なものは，曲面あるいはより一般に多様体上の最短線（測地線）を求める問題であろう．

例えば，m 次元 C^∞ 級多様体 M 上の C^∞ 曲線 $c : [a,b] \to M$ の助変数表示を $t \mapsto (x^1(t), \ldots, x^m(t))$ とするとき，曲線 c の接ベクトルは M の接束 TM の点

$$(x(t)\,;\dot{x}(t)) = \left(x^1(t), \ldots, x^m(t)\,; \frac{dx^1}{dt}(t), \ldots, \frac{dx^m}{dt}(t)\right)$$

を定める．TM 上の実数値関数 $F : TM \to \boldsymbol{R}$ に対して，積分

$$I(c) = \int_a^b F\left(x^1(t), \ldots, x^m(t)\,; \frac{dx^1}{dt}(t), \ldots, \frac{dx^m}{dt}(t)\right) dt$$

を考えるとき，この値が曲線 c の助変数表示の選び方によらずにきまるためには，F は変数 $\dot{x}$ に関して 1 次の斉次関数

(1) $\quad F(x\,;\lambda\dot{x}) = \lambda F(x\,;\dot{x}), \quad \lambda > 0$ （Carathéodory の条件）

でなければならない．また，この値で曲線 c の長さを定義しようとするとき，関数 $F(x\,;\dot{x})$ が $\dot{x} \neq 0$ において C^∞ 級かつ

(2) $\quad F(x\,;\dot{x}) > 0, \quad \dot{x} \neq 0$ （正値性）

であることを要請するのも自然な条件である．さらに，積分 $I(c)$ を曲線 c に対する汎関数と考えるとき，$I(c)$ が最小値をもつためには，F^2 は正則性条件

(3) $\quad \displaystyle\sum_{i,j=1}^m \frac{\partial F^2}{\partial\dot{x}^i \partial\dot{x}^j}(x\,;\dot{x})\,\xi^i\xi^j > 0, \quad \xi = (\xi^i) \neq 0$ （Legendre の条件）

をみたさなければならないことが導かれる．

一般に，このような条件 (1), (2), (3) をみたす関数 F が接束上にあたえられたとき，M を**フィンスラー多様体**とよび，F を M の**フィンスラー計量**という．斉次性の条件 (1) と Euler の定理から，フィンスラー計量は

$$F^2(x\,;\dot{x}) = \sum_{i,j=1}^m g_{ij}(x\,;\dot{x})\,\dot{x}^i\dot{x}^j, \quad g_{ij}(x\,;\dot{x}) = \frac{1}{2}\frac{\partial F^2}{\partial\dot{x}^i\partial\dot{x}^j}(x\,;\dot{x})$$

とあらわされることがわかる．したがって，とくに F^2 が $\dot{x} = (\dot{x}^i)$ について 2 次式のとき，いいかえると基本テンソル $g_{ij}(x\,;\dot{x})$ が $\dot{x}$ に依存しないとき，F^2 は M の**リーマン計量**に他ならない．

さて，フィンスラー多様体上では，フィンスラー計量 F から，曲線の長さや距離，測地線に沿っての平行移動や曲率などの概念が，リーマン幾何学の一般化として定義される．また，リーマン多様体上で風などの外力が働く場合に最短航路を求める「ナビゲーション問題」や，複素多様体上の「正則ベクトル束の幾何学」を研究する際に,（実または複素）フィンスラー計量が自然にあらわれる．

この講演では，このようなフィンスラー幾何学の初歩について解説した後，測地線の拡張としてリーマン多様体間の写像に対して定義された**調和写像**の概念が，フィンスラー多様体間の写像に対してどのように一般化できるかを，幾何学的変分問題の立場から解説したい．

条件付変分問題:
Lagrangeの未定乗数と勾配流・安定性

長澤 壯之（埼玉大学大学院理工学研究科）

大学の学部の微分積分学のなかで、条件付極値問題を取り扱う。すなわち、条件 $\phi(x) = 0$ の下で、$f(x)$ の極値を求める問題である。そこで、Lagrange **の未定乗数法**なるものを学ぶ。

定理. ϕ, f を $\mathbb{R}^n$ 上の C^1 級関数とする。点 $a \in \mathbb{R}^n$ が、$\phi(x) = 0$ の下で、$f(x)$ の広義の極値を与える点とすると、次のいずれかが成り立つ。

(i) 点 a は ϕ の特異点である。

(ii) $\nabla f(a) + \lambda \nabla \phi(a) = 0$ となる定数 λ が存在する。

この定理に現れる λ が Lagrange の未定乗数である。「未定」という言葉から分るように、λ は未知数で、初めから与えれらたものではない。

この定理には、条件が複数であっても対応する結果があるばかりでなく、無限次元空間上の変分問題に対しても、同様の結果が知られる。

無限次元空間 X 上の汎関数 F の停留点、すなわち、

$$\delta F(x) = 0$$

を満たす $x \in X$ を求める事を考える。ここで、δ は、第一変分 (Gateâu 微分) である。この問題を解析する手段の一つとして、**勾配流の方法**と呼ばれるものがある。これは、X 上の点が停留点に近づくように F の勾配ベクトル場に沿って変化させるもので、形式的には

$$\partial_t x(t) = -\delta F(x(t))$$

と書き表される。t が変化のパラメータで、通常「時刻」と呼んでしまう。$t \to \infty$ のとき $x(t)$ が $x(\infty)$ に収束するならば、$\delta F(x(\infty)) = 0$ となるであろうと期待するのである。この方法を、条件付極値問題に適用したらどうなるだろうか？ 条件 $\Phi(x) = 0$ の下で F の変分問題を考えるとき、Lagrange の未定乗数方により、(x が特異点でなければ、)

$$\delta F(x) + \lambda \delta \Phi(x) = 0$$

を扱う事になる。対応する「条件付勾配流」は、

$$\partial_t x(t) = -\delta F(x(t)) - \lambda \delta \Phi(x(t)) \tag{1}$$

となるであろう。ここで、λ はどのように扱ったらよいのあろうか？ $t \to \infty$ のとき、$x(t)$ が $x(\infty)$ に収束し、更に、

$$\delta F(x(\infty)) + \lambda \delta \Phi(x(\infty)) = 0$$

となるように λ を選びたい。しかし、λ を先に与えなければ、$x(t)$ が満たすべき方程式が確定しない。λ を無作為に与えると、条件付勾配流には、収束先 $x(\infty)$ が存在しないばかりか、$t=\infty$ まで解が伸びない場合すら起こりうる。自然な考え方として、条件 $\Phi(x(t))=0$ が任意の t について成り立つように、λ を t の関数として与える事がよさそうである。すなわち、

$$\partial_t \Phi(x(t)) \equiv 0 \tag{2}$$

により、$\lambda=\lambda(t)$ を定めたい。上の式には λ が含まれていないため、これで λ を定まるかは、一見しただけでは自明ではないであろう。

講演では、より具体的な幾何学的変分問題について、λ の決定可能性を見たうえで、この考えの「自然さ」を実感して頂きたい。すなわち、この λ の定め方により、(1) は「(2) の下で最も効率よく $F(x(t))$ が減少するような変形」を表す方程式になるのである。

時間に余裕があれば、Lagrange の未定乗数法から得られる点の極値の判定について講演したい。未定乗数法は、点 a が条件付極値を与えるための必要条件を述べているだけで、十分性についての情報を与えてはくれない。条件付でない変分問題では、極値を与えるか否かは、F が C^2 級であれば、第二変分の符号を計算すればよい。条件付の場合は、第二変分はどのように計算されるのか、あるいは、第二変分の中に、Lagrange の未定乗数がどのように反映されるのかを考えたい。

相分離モデルにおける変分問題

利根川吉廣（北海道大学大学院理学研究院）

2 元合金やブロック共重合体など様々な微小構造を持つ物質は、温度などの熱力学的環境に依存して複雑な相分離をおこす。これは空間的に一様な状態で存在するよりも、2 種以上の異なる相に空間的に分離していたほうが自由エネルギーを低くできるからで、まさに変分法を地で行く話である。相分離が起こる長さスケールは nm から μm であり、そのため相分離面の**表面張力効果**が大きな役割を果たす。個別の構成物質によってその描写はカタログ的に複雑であり、2 元合金では工学的応用のためのデータベースも構築されているほどである。一方、個別性から離れた物理学的観点で、相分離のモデル問題設定によく用いられるもののひとつに **Ginzburg-Landau(GL) 理論**が挙げられる。相分離がおこる領域（強偏斥状態）では GL エネルギーは

$$E(u) = \int_\Omega \frac{|\nabla u|^2}{2} + \frac{(1-|u|^2)^2}{4}\,\mathrm{d}x$$

となる。ここで u は 2 つの相（例えば A 相、B 相）の正規化された体積比を表し、$\{u \approx 1\}$ は A 相領域、$\{u \approx -1\}$ は B 相領域を表す。ポテンシャル項については具体的な表式よりも、非凸である（2 つの最小点 $u = \pm 1$ をもつ）ことが大切である。1 次元問題のフォーマルな議論から、GL エネルギーは相分離界面の界面エネルギーを表す事が推測される。つまり適当なスケール変換の下、

$$E(u) \approx C \times \text{相分離界面 } \{u=0\} \text{ の面積}$$

ということである。よって GL エネルギーの変分問題は、古典的な界面面積の変分問題である**極小曲面理論**や**幾何学的測度論**と関係する。この類推をもって数学サイドで知られている様々な結果を対応させると、興味深い数学的な問題が提起される。ほんの一例を挙げれば、GL エネルギーの第一変分は曲面面積の第一変分である平均曲率に対応すること、つまり

$$\delta E(u) \approx C \times \text{相分離界面 } \{u=0\} \text{ の平均曲率}$$

が期待される。これら対応および極小曲面理論が形式的な議論より深いレベルでどのように GL エネルギーに係わるかについて解説し、また関連する時間発展問題である Allen-Cahn 方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + u(1-|u|^2)$$

や、Cahn-Hilliard 方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta(-\Delta u - u(1-|u|^2))$$

および広い意味で同じタイプの問題に属する超伝導モデル（この場合 u は複素値関数）についても触れる予定である。