# ENCOUNTER with MATHEMATICS

# 第48回

# 微分方程式に対する逆問題

## –既知と未知が逆転したときに何が視えるか？–

**2008年11月21日(金) 14:30 〜 11月22日(土)**

**於：東京都 文京区 春日 1-13-27　　中央大学理工学部 5号館**

**11月21日(金)**

| | | |
|---|---|---|
| 14:30〜15:30 | Sturm-Liouville 逆問題 | ：望月 清氏 (中大・理工) |
| 16:00〜18:00 | 逆問題における不連続性の抽出のための解析的方法–探針法10年– | ：池畠 優氏 (群馬大・工) |

**11月22日(土)**

| | | |
|---|---|---|
| 10:30〜12:00 | Gelfand-Levitan 理論, 境界制御法から逆散乱理論まで | ：磯崎 洋氏 (筑波大・数理) |
| 14:00〜15:00 | 平面上のポテンシャルの再構成について | ：渡辺 道之氏 (東京理科大・理工) |
| 15:30〜17:00 | 非破壊検査、画像復元の数理 | ：山本 昌宏氏 (東大・数理) |
| 17:10〜 | ワインパーティー（懇親会） | |

別紙の趣旨に沿った集会の第48回を以上のような予定で開催いたします．非専門家向けに入門的な講演をお願い致しました．多くの方々のご参加をお待ちしております．
講演者による講演内容へのご案内を添付いたしますので御覧下さい．

112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 中央大学理工学部数学教室，応用数理センター； 03-3817-1745
ENCOUNTER with MATHEMATICS: homepage : http://www.math.chuo-u.ac.jp/ENCwMATH
三松 佳彦 : yoshiATmath.chuo-u.ac.jp (ATを@に変更)

# Sturm-Liouville 逆問題

中央大学 理工学部　望月　清

質量 $m$ の物体を地表から高さ $h$ のところでそっと離す. 空気抵抗は無視できるとして, $t$ 秒後の物体の位置を $(0, 0, z(t))$ とすると, Newton の運動方程式

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = -mg, \quad z(0) = h, \quad \frac{dz}{dt}(0) = 0$$

($g = 9.80[\mathrm{m/sec}^2]$ は地表での重力加速度) が得られる. 方程式を積分すれば

$$\frac{dz}{dt} = -gt, \quad z = -\frac{1}{2}gt^2 + h$$

となる.

ここでは重力加速度 $g$ を既知としているが, 実はこの落下運動を観測することにより, 逆に $g$ の値を決定することができる. 地表に到達するのにかかる時間 $t_0$ がわかれば $g = 2h/t_0^2$ のように求まる. これはひとつの**逆問題**である. また, $g$ は既知として, 時間 $t_0$ で地表に到達した物体の, はじめの位置 $h$ を決定することもできる.

逆問題と対比させるとき, はじめの初期値問題は**順問題**と呼ばれる.

ここでは Sturm-Liouville 作用素のスペクトル逆問題を考える.

区間 $[0, 1]$ に張られた弦の微少振動は波動方程式によって記述されるが, 変数分離法により, これは境界条件をともなった微分作用素

$$Lu = -\frac{d^2u}{dx^2} + q(x)u, \quad x \in (0, 1)$$

の固有値問題に帰着される. ここで $q(x)$ は弦の線密度から導かれるポテンシャルである.「振動を観測してポテンシャル $q(x)$ を決定することは可能であろうか.」これが我々の逆問題である. 振動を観察するとは作用素 $L$ のスペクトル（固有値列）や固有関数列のなんらかの性質を知ることであり, その意味でこれを**スペクトル逆問題**という.

以下ではこの問題の解の**一意性**と**再構成**について, お話したいと思う.

# 逆問題における不連続性の抽出のための解析的方法-探針法10年-

池畠優
群馬大学大学院工学研究科
http://www.tech.gunma-u.ac.jp/gakka/ikehata/Index.html

平成20 年10 月9 日

**概 要**

本講演では偏微分方程式に対する逆問題を扱う．ここで逆問題とは, さまざまな物理量からなる観測データから未知の対象に関する情報をいかに抽出するかという問題である．多くの重要な逆問題は偏微分方程式に対する逆問題として定式化され, 観測データはその解を使って記述され, 数学サイドからもさまざまな研究がなされている [45, 52, 56, 65]．特に, 生体あるいは材料などの非侵襲的あるいは非破壊的な検査などに由来する媒質中の空洞, 介在物, 亀裂, 障害物などの不連続性を抽出する逆問題における直接的解法を見出す方向の研究で, ほぼ 10 年前, 講演者は探針法 [21] および囲い込み法 [25] を発見した．不思議なことにその時期を前後して他の方法として (1) Colton-Kirsch の線形サンプリング法 [12] (2) Kirsch の因数分解法 [54, 55](3) Potthast の特異源泉法 [61] などもあらわれている．現在でもそれら自身の研究と同時に, そのさまざまな変形や他の逆問題への適用範囲の拡大の試みがなされている．しかし残念ながら日本ではこの方向の研究は函数方程式のなかでもいまだに十分認識されているとは言いがたい現状である．そこで本講演ではあらためて探針法および囲い込み法のアイデアを, Laplace 方程式, Helmholtz 方程式および熱方程式に対するいくつかの原型的逆問題を例にして紹介するとともに, 研究の現状と今後の課題についても論じる[1]．

## 参考文献

[1] Astala, K. and Päivärinta, L., Calderón's inverse conductivity problem in the plane, Ann. of Math., **163**(2006), 265-299.

[2] Astala, K. and Päivärinta, L., A boundary integral equation for Calderón's inverse conductivity problem, Collect. Math., 2006, Vol. Extra, 127-139.

[3] Bateman, H., Higher Transcendental Functions, Volume III, Bateman Manuscript Project, ed. Erdélyi, A., McGRAW-HILL, New York, 1955.

[1] 聴衆の便宜のために, 本講演に関係する主な論文で, 概要で言及していない論文まで込めたリストをつけておく．

[4] Borcea, L., Electrical impedance tomography, Inverse Problems, **18**(2002), R99-R136.

[5] Borcea, L., Addendum to "Electrical impedance tomography", Inverse Problems, **19**(2003), 997-998.

[6] Bryan, K. and Caudill, F. Jr., Uniqueness for a boundary identification problem in thermal imaging, Differential Equations and Computational Simulations III, Electric Journal of Differential Equations, Conference 01, 1997, 23-39.

[7] Bukhgeim, A. L., Recovering a potential from Cauchy data in the two-dimensional case, J. Inv. Ill-Posed Problems, 16(2008), 19-33.

[8] Calderón, A. P., On an inverse boundary value problem, Seminar on Numerical Analysis and its Applications to Continuum Physics, eds. Meyer, W. H. and Raupp, M. A., , Brazilian Math. Society, Rio de Janeiro, 1980, pp. 65-73.

[9] Carleman, T., Les Fonctions Quasi Analytiques, Paris, Gauthier-Villars, 3-6, 1926.

[10] Cheng, J., Liu, J. J. and Nakaumra, G., Recovery of the shape of an obstacle and the boundary impedance from the far-field pattern, J. Math. Kyoto Univ., **43** (2003), 165-186.

[11] Cheng, J., Liu, J. J. and Nakamura, G., The numerical realization of the probe method for the inverse scattering problems from the near field data, Inverse Problems, **21**(2005), 839-855.

[12] Colton, D. and Kirsch, A., A simple method for solving inverse scattering problems in the resonance region, Inverse Problems, **12**(1996), 383-393.

[13] Colton, D. and Kress, R., On the denseness of Herglotz wave functions and electromagnetic Herglotz pairs in Sobolev spaces, Math. Mech. Appl. Sci., **24**(2001), 1289-1303.

[14] Daido, Y., Kang, H. and Nakamura, G., A probe method for the inverse boundary value problem of non-stationary heat equations, Inverse Problems, **23**(2007), 1787-1800.

[15] Elayyan, A. and Isakov, V., On uniqueness of recovery of the discontinuous conductivity coefficient of a parabolic equation, SIAM J. Math. Anal., **28**(1997), 49-59.

[16] Erhard, K. and Potthast, R., A numerical study of the probe method, SIAM J. Scientific Computing, **28**(2006), 1597-1612.

[17] Friedman, A. and Isakov, V., On the uniqueness in the inverse conductivity problem with one measurement, Indiana Univ. Math. J., **38**(1989), 563-579.

[18] Grisvard, P., Elliptic problems in nonsmooth domains, Pitman, Boston, 1985.

[19] Ide, T., Isozaki, H., Nakata, S., Siltanen, S. and Uhlmann, G., Probing for electrical inclusions with complex spherical waves, Communications on Pure and Applied Mathematics, **60**(2007), 1415-1442.

[20] Ikehata, M., Size estimation of inclusion, J. Inverse Ill-Posed Probl., **6**(1998), 127-140.

[21] Ikehata, M., Reconstruction of the shape of the inclusion by boundary measurements, Comm. PDE., **23**(1998), 1459-1474.

[22] Ikehata, M., Reconstruction of an obstacle from the scattering amplitude at a fixed frequency, Inverse Problems, **14**(1998), 949-954.

[23] Ikehata, M., Reconstruction of obstacle from boundary measurements, Wave Motion, **30** (1999), 205-223.

[24] Ikehata, M., Enclosing a polygonal cavity in a two-dimensional bounded domain from Cauchy data Inverse Problems, **15**(1999), 1231-1241.

[25] Ikehata, M., Reconstruction of the support function for inclusion from boundary measurements, J. Inv. Ill-Posed Probl., **8** (2000), 367-378.

[26] Ikehata, M., On reconstruction in the inverse conductivity problem with one measurement, Inverse Problems, **16** (2000), 785-793.

[27] Ikehata, M., Inverse conductivity problem in the infinite slab, Inverse Problems, **17** (2001), 437-454.

[28] Ikehata, M., Reconstruction of inclusion from boundary measurements, J. Inv. Ill-Posed Probl., **10**(2002), 37-65.

[29] Ikehata, M., Complex geometrical optics solutions and inverse crack problems, Inverse Problems, **19**(2003), 1385-1405.

[30] Ikehata, M., Inverse scattering problems and the enclosure method, Inverse Problems, **20** (2004), 533-551.

[31] Ikehata, M., Mittag Leffler's function and extracting from Cauchy data, Inverse problems and spectral theory, ed. Isozaki, H., Contemporary Math., vol. 348, 2004, pp. 41-52.

[32] Ikehata, M., The Herglotz wave function, the Vekua transform and the enclosure method, Hiroshima Math. J., **35** (2005), 485-506.

[33] Ikehata, M., A new formulation of the probe method and related problems, Inverse Problems, **21** (2005), 413-426.

[34] Ikehata, M., Two sides of probe method and obstacle with impedance boundary condition, Hokkaido Math. J., **35**(2006), 659-681.

[35] Ikehata, M., Inverse crack problem and probe method, Cubo, **8**(2006), No.1, 29-40.

[36] Ikehata, M., Virtual signal in the heat equation and the enclosure method, Inverse Problems in Applied Sciences-towards breakthrough-, Journal of Physics: Conference Series **73**(2007)012010.

[37] Ikehata, M., An inverse source problem for the heat equation and the enclosure method, Inverse Problems, **23**(2007), 183-202.

[38] Ikehata, M., Extracting discontinuity in a heat conductive body. One-space dimensional case, Appl. Anal., **86**(2007), 963-1005.

[39] Ikehata, M., Probe method and a Carleman function, Inverse Problems, **23**(2007), 1871-1894.

[40] Ikehata, M., A remark on the enclosure method for a body with an unknown homogeneous background conductivity, Cubo, **10**(2008), No. 02, 31-45.

[41] Ikehata, M. and Kawashita, M., An inverse problem for a three-dimensional heat equation in thermal imaging and the enclosure method, submitted.

[42] Ikehata, M. and Itou, H., Reconstruction of a linear crack in an isotropic elastic body from a single set of measured data, Inverse Problems, **23**(2007), 589-607.

[43] Ikehata, M. and Itou, H., An inverse problem for a linear crack in an anisotropic elastic body and the enclosure method, Inverse Problems, **24**(2008)025005(21pp).

[44] Ikehata, M. and Nakamura, G., Reconstruction formula for identifying cracks, J. Elasticity, **70**(2003), 59-72.

[45] 池畠　優, 中村　玄, 境界値逆問題...Calderón からの 15 年, 数学, 岩波書店, 第 **48** 巻, 第 3 号, 259-281(1996)

[46] Ikehata, M. and Ohe, T., Numerical method for finding the convex hull of polygonal cavities using enclosure method, Inverse Problems, **18**(2002), 111-124.

[47] Ikehata, M. and Ohe, T., A Numerical Method for Finding the Convex Hull of Inclusions using the Enclosure Method, Electromagnetic Nondestructive Evaluation (VI), ed. Kojima, F. et al., Studies in Applied Electromagnetics and Mechanics Vol 23, IOS Press, Amsterdam, 2002, pp 21-28.

[48] Ikehata, M. and Ohe, T., The enclosure method for an inverse crack problem and the Mittag-Leffler function, Inverse Problems, **24**(2008)015006(27pp).

[49] Ikehata, M. and Siltanen, S., Numerical method for finding the convex hull of an inclusion in conductivity from boundary measurements, Inverse Problems, **16** (2000), 1043-1052.

[50] Ikehata, M. and Siltanen, S., Electrical impedance tomography and Mittag-Leffler's function, Inverse Problems, **20** (2004), 1325-1348.

[51] Isakov, V., On uniqueness of recovery of a discontinuous conductivity coefficient Comm. Pure. Appl. Math., **41**(1988), 865-877.

[52] Isakov, V., Inverse Problems for Partial Differential Equations, Second Edition, Springer, New York, 2006.

[53] Kang, H., Seo, J. K. and Sheen, D., The inverse conductivity problem with one measurement: Stability and estimation of size, SIAM. J. Math. Anal., **28**(1997), 1389-1405.

[54] Kirsch, A., Characterization of the shape of a scattering obstacle using the spectral data of the far field operator, Inverse Problems, **14**(1998), 1489-1512.

[55] Kirsch, A., New characterizations of solutions in inverse scattering theory, Appl. Anal., **76**(2000), 319-350.

[56] Kirsch, A. and Grinberg, N., The factorization method for inverse problems, Oxford University Press, Oxford, 2008.

[57] Muskhelishvili, N. I., Some basic problems of the mathematical theory of elasticity, Noordhoff, Groningen, 1963.

[58] Nachman, A., Reconstructions from boundary measurements, Ann. of Math., **128**(1988), 531-577.

[59] Nachman, A., Global uniqueness for a two-dimensional inverse boundary value problem, Ann. of Math., **143**(1996), 71-96.

[60] Novikov, R., Multidimensional inverse spectral problem for the equation $\triangle\Psi + (v(x) \quad Eu(x))\Psi = 0$, Transl. Funct. Anal. Appl., **22**(1989), 263-272.

[61] Potthast, R., Stability estimates and reconstructions in inverse scattering using singular sources, J. Comp. Appl. Math., **114**(2000), 247-274.

[62] Sylvester, J. and Uhlmann, G., A global uniqueness theorem for an inverse boundary value problem, Ann. of Math., **125**, 153-169.

[63] Vekua, I. N., Solutions of the Equation $\triangle u + \ ^2 u = 0$, Soobshcheniga Akademii Nauk Gruz. SSR, **3**(1942), (4) 307-314.

[64] Vekua, I. N., Inversion of an Integral Transformation and Some Applications, Soobshcheniga Akademii Nauk Gruz. SSR, **6**(1945), (3), 177-183.

[65] Vessella, S., Quantitative estimates of unique continuation for parabolic equations, determination of unknown time-varying boundaries and optimal stability estimates, Topical Review, Inverse Problems, **24**(2008)023001(81pp).

[66] Yarmukhamedov, Sh., Integral representations of harmonic functions in multidimensions, in Russian, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **204**(1972), 799-802.

[67] Yarmukhamedov, Sh., On the Cauchy problem for the Laplace equation, in Russian, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **235** (1977), 281-283.

[68] Yarmukhamedov, Sh., A Carleman function and the Cauchy problem for the Laplace equation, Siberian Math. J., **45**(2004), (3), 580-595.

e-mail address
ikehata@math.sci.gunma-u.ac.jp

# Gelfand-Levitan 理論, 境界制御法から逆散乱理論まで

筑波大学大学院数理物質科学研究科　　磯崎　洋

ラプラシアンあるいはそれを摂動した作用素のスペクトルと固有函数の情報から作用素の係数を再構成する問題をスペクトル逆問題と呼ぼう．１次元のスペクトル逆問題の歴史は Strum-Liouville の時代にまで遡るのかもしれないが, 数学として形を整えたのは 1929 年の Ambartsumyan による有限区間での Neumann 問題の逆問題の一意性の定理がその始めであろう．Heisenberg による S 行列理論は量子力学におけるポテンシャル散乱の逆問題への関心を呼び起こした．また Borg（1945）は固有値問題の逆問題の一意性をさらに一般化し, 係数の再構成にまで進んだ．ロシアでは微分作用素のスペクトル理論の研究が成長しつつあったが, 1951 年の Gelfand-Levitan の論文は Volterra 型積分方程式を解くことによりスペクトル函数からポテンシャルを再構成する手法を確立した．さらに Marchenko（1955）は１次元 Schrödinger 作用素の S 行列からポテンシャルを再構成する手段を与え, １次元の散乱の逆問題は完全な解決をみた．また固有値問題における逆問題も解決された.

1957 年の Amsterdam の国際会議において Gelfand は多次元におけるスペクトルデータからの逆問題を提唱した．M. Kac の論文 ”Can one hear the shape of a drum?” (1966) は等スペクトル多様体に関する興味深い一連の研究を導いたが, 以下では固有値のみならず固有函数の情報も用いて元の作用素を再構成する Gelfand 流の逆問題に焦点を絞る．1965 年から 10 年ほどの間に Faddeev は多次元における Schrödinger 作用素の逆散乱理論の重要な基礎を築いた．一方 1950 年代初めに M.G.Krein も逆問題に重要な貢献をしている．Krein のアイディアは波動方程式を基礎とするものであったが, それはスペクトル的な概念に覆い隠されていたようである．Krein の仕事の中の波動としての側面, 特に有限伝播性の逆問題における重要性を見抜いたのが Blagovestchenskii（1971）である．これが多次元につながる道であった．波動現象の時間依存性に依拠することにより, 境界制御法と呼ばれる多次元逆問題解決への路を与えたのが Belishev（1986）である．さらに Kurylev と共にリーマン計量の決定に関する Gelfand のスペクトル逆問題が肯定的に解決された（1992）．その際, Tataru（1995）による境界値問題の解の一意性の定理（これは Holmgren (1901) 以来の偏微分方程式論の課題であった）が重要な役割を果たすことは特筆されるべきであろう．Belishv-Kurylev の 1992 年の論文ではこのことを仮定していた．境界制御法は現在のところリーマン計量を決定できるほぼ唯一の手法である．非コンパクト多様体上の逆散乱理論への応用も現在進行中である．このようなスペクトル逆問題の研究の歴史と現状, ならびに基本的な考え方を解説したい.

# 平面上のポテンシャルの再構成について

渡辺道之　（東京理科大学・理工学部）

直接見たり触れたりするのが困難な物の正体（または性質）を知るにはどうしたらよいか？1 つの方法は，未知の対象物に何らかの刺激を与え，その反応を観測する．この実験を繰り返し得られた観測データから対象の正体を予想することである．この事を理論的に説明し，解明しようというのが偏微分方程式の逆問題である．

物理現象を偏微分方程式で記述する際，物理的現象を特徴づける物理係数はしばしば偏微分方程式の係数に現れる．偏微分方程式の通常の理論では，方程式の係数，初期条件，境界条件，初期値及び境界値は既知量であり，時刻と場所 における方程式の解が求めるべき未知量である．既知量に適当な条件を課すことで，解の一意存在がわかり，その解の漸近挙動などのいろいろな性質を調べることが出来る．このような問題は**順問題**と呼ばれている．

一方で，現実の問題では順問題で既知量と考えているものは，いくつかが未知量である場合が多い．たとえば，方程式に現れる係数は考えている系の物理的特性を現すものであるが，これら全てが既知である場合は少なくない．このような場合，順問題とは逆に解についての何らかの情報からこれらの未知量を推定することを**逆問題**と呼んでいる．

ここでは，単純で基本的な方程式

$$\begin{cases} -\Delta u + Vu = 0, & \text{in } \Omega, \\ u = f, & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

の逆問題を考える．$\Omega \subset \mathbf{R}^2$ は滑らかな境界を持つ有界領域とし，$V \in L^p(\Omega)$ $(p > 2)$ で複素数値関数とする．適当な条件の下，$f$ を与えるとそれに応じて解 $u$ が唯 1 つ定まる．$f$ と解 $u$ の法線方向微分の境界での値 $\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial\Omega}$ が与えられた境界上のデータとする．すなわち，Dirichlet-Neumann 写像（DN 写像）$\Lambda_V$

$$\Lambda_V f =: \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial\Omega}$$

と呼ばれるものが与えられているとする．**境界値逆問題**とは，DN 写像 $\Lambda_V$ から $V(x)$ を求めよ，という問題である．とくに，$\Lambda_V$ から $V(x)$ を一意的に決定できるか？これを**一意性の問題**と呼ぶ．もし一意的に求まるのであれば，$V(x)$ を $\Lambda_V$ を用いて計算せよ，これを**再構成の問題**と呼ぶ．

多次元逆問題に関しては，DN 写像から $V(x)$ を一意的に決定でき，さらに再構成の手続きも与えられている（例えば，Nachmann '88）．空間 2 次元の場合，最近一意性が Bukhgeim '08 によって証明された．

本講演では，空間 2 次元の再構成の問題，すなわち，どのような手順で $\Lambda_V$ から複素数値関数 $V(x)$ を構成するか，について紹介する．

# 非破壊検査、画像復元の数理

山本昌宏

東京大学大学院・数理科学研究科
153-8914 東京都目黒区駒場 3-8-1
myama@ms.u-tokyo.ac.jp

## 要旨

逆問題の本質は、考えている現象において平滑化や分散などで平均化されたデータから、もとの原因などを決定することにある。この場合、現象を引き起こした原因は、例えば媒質における非均質性などがあるが、空間的に離れた場所でしかも時間が経過した後でしかデータを取れないことが普通であり、その結果ももともとの非均質性などのプロファイルの輪郭がぼけた形でしかデータに反映されない。したがって、このようなことから逆問題特有の不安定性が生じ、数学解析にも数値計算にも工夫が必要になる。

さらに、製造プロセスの適切なモニターリングや制御などのために、逆問題の解法は多くの産業場面でも強く要求される現実的にも重要な問題であり、逆問題の数理に基づいた数値計算手法の開発が強く望まれている。

ここではそのような逆問題の特質と不安定性とそれに伴う数学解析ならびに数値計算手法の一端について、次の３つの話題に基づいて解説し、逆問題では何が問題となり、そしてどのように課題が解決されていくのかを紹介することを目的とする。

（１）チホノフ正則化を用いた数値微分と画像復元

（２）チホノフ正則化解を用いた界面の再構成

（３）非定常サーモグラフィーによる薄板内の疵検知の数理と数値計算

（１）の数値微分とは、区間の有限個の点のみで近似的に与えられた関数の値からもとの関数の微分係数を再構成するという、最も単純な逆問題であるが、画像復元におけるエッジ検知や option-pricing に関連する逆問題などにおける基礎となるものである。チホノフ正則化解の空間局所的な滑らかさが逆問題の解の特異点（不連続点など）の近くで落ちることを利用して、もとの特異点の位置を決定することが基本的なアイデアであり、理論面の結果と焦点のぼけた写真からもとの写真を再構成した数値例を紹介する。画像復元は、医学診断をはじめとして、例えば自動車などの自動操縦のためにコンピューターによる路上の対象物の自動認識などとも関連して、実に多様な場面で重要になっている典型的な逆問題の１つである。

（２）は（１）を発展させたアイデアで、重力場における逆問題などに関する数値的な試みを紹介する。

（３）は製造プロセスにおける非破壊検査と関連した１つの逆問題であり、安定性に関する成果を数値例とともに紹介する。