ENCOUNTER with MATHEMATICS

第49回

流体の基礎方程式

--色々な視点から見た流体方程式--

2009年2月27日(金)14:30~2月28(土)

於：東京都 文京区 春日 1-13-27 中央大学理工学部5号館5階5534

2月27日(金)

14:30~16:00 領域の位相不変量と定常ナビエ・ストークス方程式の可解性について1 ：小薗 英雄 氏 (東北大・理)

16:30~18:00 半空間上での圧縮性粘性流体の漸近挙動について ：西畑 伸也 氏 (東工大・情報理工)

2月28日(土)

10:30~12:00 非圧縮性粘性流の非定常問題について ：清水 扇丈 氏 (静岡大・理)

14:00~15:30 乱流は保存系散逸的弱解の夢を見るか？ ：松本 剛 氏 (京大・理・物)

15:50~17:00 領域の位相不変量と定常ナビエ・ストークス方程式の可解性について2 ：小薗 英雄 氏 (東北大・理)

17:10~ ワインパーティー（懇親会）

別紙の趣旨に沿った集会の第49回を以上のような予定で開催いたします.
非専門家向けに入門的な講演をお願い致しました. 多くの方々のご参加をお待ちしております.
講演者による講演内容へのご案内を添付いたしますので御覧下さい.

112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 中央大学理工学部数学教室；03-3817-1745
ENCOUNTER with MATHEMATICS: homepage : http://www.math.chuo-u.ac.jp/ENCwMATH
三松 佳彦 : yoshiATmath.chuo-u.ac.jp (AT を@に変更)

背景図:「2つの渦管のつなぎかえ」松本 剛 氏提供

これまでに行われた ENCOUNTER with MATHEMATICS (講演者敬称略)

第 1 回 **岩澤理論と FERMAT 予想** 1996 年 11 月, 加藤 和也 (東工大・理), 百瀬 文之 (中大・理工), 藤原 一宏 (名大・多元数理)
第 2 回 **幾何学者は物理学から何を学んだか** 1997 年 2 月, 深谷 賢治 (京大・理), 古田 幹雄 (京大・数理研)
第 3 回 **粘性解理論への招待** 5 月, 石井 仁司 (都立大・理), 儀我 美一 (北大・理), 小池 茂昭 (埼玉大・理), 長井 英生 (阪大・基礎工)
第 4 回 **Mordell-Weil 格子** 9 月, 塩田 徹治 (立教大・理), 寺杣 友秀 (東大・数理), 斎藤 毅 (東大・数理)
第 5 回 **WEB 幾何学** 11 月, 中居 功 (北大・理), 佐藤 肇 (名大・多元数理)
第 6 回 **トロイダル・コンパクト化** 1998 年 2 月, 佐武 一郎 (中大・理工), 石井 志保子 (東工大・理), 藤原一宏 (名大・多元数理)
第 7 回 **天体力学** 4 月, 伊藤 秀一 (東工大・理), 小野 薫 (お茶大・理), 吉田 春夫 (国立天文台)
第 8 回 **TORIC 幾何** 6 月, 小田 忠雄 (東北大・理), 桝田 幹也 (阪市大・理) , 諏訪 紀幸 (中大・理工), 佐藤 拓 (東北大・理)
第 9 回 **実 1 次元力学系** 10 月, 坪井 俊 (東大・数理), 松元 重則 (日大・理工), 皆川 宏之 (北大・理)
第 10 回 **応用特異点論** 1999 年 2 月, 泉屋 周一 (北大・理), 石川　剛郎 (北大・理) , 佐伯 修 (広島大・理)
第 11 回 **曲面の写像類群** 4 月, 森田 茂之 (東大・数理), 河澄 響矢 (東大・数理), 阿原 一志 (明大・理工), 中村 博昭 (都立大・理)
第 12 回 **微分トポロジーと代数的トポロジー** 6 月,
服部 晶夫 (明大・理工), 佐藤 肇 (名大・多元数理), 吉田 朋好 (東工大・理), 土屋 昭博 (名大・多元数理)
第 13 回 **超平面配置の数学** 10 月, 寺尾 宏明 (都立大・理), 吉田 正章 (九大・数理), 寺杣 友秀 (東大・数理), 斎藤 恭司 (京大・数理研)
第 14 回 **Lie 群の離散部分群の剛性理論** 2000 年 2 月, 金井 雅彦 (名大・多元数理), 納谷 信 (名大・多元数理), 井関 裕靖 (東北大・理)
第 15 回 **岩澤数学への招待** 4 月,
栗原 将人 (都立大・理), 佐武 一郎 (東北大/UC Berkeley), 尾崎 学 (島根大・総合理工), 市村 文男 (横浜市大・理), 加藤 和也 (東大・数理)
第 16 回 **Painlevé 方程式** 6,7 月, 岡本 和夫 (東大・数理), 梅村 浩 (名大・多元数理), 坂井 秀隆 (東大・数理), 山田 泰彦 (神戸大・理)
第 17 回 **流体力学** 12 月, 木村 芳文 (名大・多元数理), 今井　功, 宮川 鉄朗 (神戸大・理), 吉田 善章 (東大・新領域創成科学)
第 18 回 **Poincaré 予想と３次元トポロジー** 2001 年 2 月,
小島 定吉 (東工大・情報理工), 加藤 十吉 (九大・理), 松本 幸夫 (東大・数理), 大槻 知忠 (東工大・情報理工), 吉田 朋好 (東工大・理)
第 19 回 **Invitation to Diophantine Geometry** 4 月, 平田 典子 (日大・理工), 宍倉 光広 (京大・理), 小林 亮一 (名大・多元数理)
第 20 回 **不変式論のルネサンス** 9 月, 梅田 亨 (京大・理), 向井 茂 (京大・数理研), 寺西 鎮男 (名大・多元数理)
第 21 回 **実解析への誘い** 10 月, 新井 仁之 (東大・数理), 宮地 晶彦 (東京女子大・文理), 小澤 徹 (北大・理), 木上 淳 (京大・情報)
第 22 回 **「離散」の世界** 2002 年 2 月, 砂田利一 (東北大・理), 小谷元子 (東北大・理), 藤原耕二 (東北大・理), 井関裕靖 (東北大・理)
第 23 回 **複素力学系** 6 月, 宍倉光広 (京大・理), 松崎克彦 (お茶大・理), 辻井 正人 (北大・理)
第 24 回 **双曲幾何** 10 月, 小島 定吉 (東工大・情報理工), 大鹿 健一 (阪大・理), 藤原 耕二 (東北大・理), 藤原 一宏 (名大・多元数理)
第 25 回 **Weil 予想** 12 月, 堀田 良之 (岡山理大・理), 藤原 一宏 (名大・多元数理), 斎藤 毅 (東大・数理), 宇澤 達 (名大・多元数理)
第 26 回 **極小曲面論入門** 2003 年 3 月, 山田 光太郎 (九大・数理), 小磯 深幸 (京教大・教育), 梅原 雅顕 (広大・理), 宮岡 礼子 (上智大・理工)
第 27 回 **分岐被覆と基本群**　4 月, 難波 誠 (阪大・理), 岡 睦雄 (都立大・理), 島田 伊知朗 (北大・理), 徳永 浩雄 (都立大・理)
第 28 回 **リーマン面の退化と再生** 11 月, 足利 正 (東北学院大・工), 今吉 洋一 (阪市大・理), 松本 幸夫 (東大・数理), 高村 茂 (京大・理)
第 29 回 **確率解析** 12 月, 楠岡 成雄 (東大・数理), 重川 一郎 (京大・理), 谷口 説男 (九大・数理)
第 30 回 **Symplectic 幾何と対称性** 2004 年 3 月,
小野 薫 (北大・理), 森吉 仁志 (慶応大・理工), 高倉　樹 (中大・理工), 古田 幹雄 (東大・数理), 太田 啓史 (名大・多元)
第 31 回 **スペクトル・散乱理論**　2004 年 12 月,
池部 晃生, 峯 拓矢 (京大・理), 谷島 賢二 (学習院大・理), 久保 英夫 (阪大・理), 山田 修宣 (立命館大・理工), 田村 英男 (岡山大・理)
第 32 回 **山辺の問題** 2005 年 1 月, 小林　治 (熊本大・理), 芥川 和雄 (東京理大・理工), 井関 裕靖 (東北大・理)
第 33 回 **双曲力学系-安定性と混沌-** 2005 年 2 月, 国府 寛司 (京大・理), 林 修平 (東大・数理), 浅岡 正幸 (京大・理), 三波 篤郎 (北見工大)
第 34 回 **非線型の特殊函数論〜Painlevë 方程式の応用** 2005 年 7 月, 大山 陽介 (阪大・情報), 村瀬 元彦 (UC Davis), 筧 三郎 (立教大・理)
第 35 回 **山辺不変量 -共形幾何学の広がり-** 2005 年 12 月, 小林 治 (熊本大・理), 石田 政司 (上智大・理工), 芥川 和雄 (東京理科大・理工)
第 36 回 **正 20 面体にまつわる数学** 2006 年 3 月, 増田 一男 (東工大・理), 加藤 文元 (京大・理), 橋本 義武 (阪市大・理)
第 37 回 **数学者のための分子生物学入門－新しい数学を造ろう－** 2006 年 6 月,
加藤 毅 (京大・理), 阿久津 達也 (京大化学研究所), 岡本 祐幸 (名大・理), 斉藤 成也 (国立遺伝学研究所), 田中 博 (東京医科歯科大)
第 38 回 **幾何学と表現論 - Kostant–関口対応をめぐって -** 2006 年 12 月,
関口 次郎 (東京農工大・工), 中島 啓 (京大・理), 落合 啓之 (名大・多元数理), 竹内 潔 (筑波大・数学系)
第 39 回 **Lusternik-Schnirelmann カテゴリ** 2007 年 3 月,
岩瀬 則夫 (九大・数理), Elmar VOGT (東大・数理/ベルリン自由大), 松元 重則 (日大・理工), 田中 和永 (早大・理工)
第 40 回 **力学系のゼータ関数 – 古典力学と量子力学のカオス –** 2007 年 5 月,
首藤 啓 (首都大・理工), 盛田 健彦 (広大・理), 辻井 正人 (九大・数理)
第 41 回 **Euler 生誕３００年 – Euler 数と Euler 類を巡って** 2007 年 9 月,
佐藤 肇, 秋田 利之 (北大・理), Danny Calegari (Caltech/東工大・情報理工), 松本 幸夫 (学習院大・理), 森田 茂之 (東大・数理)
第 42 回 **Euler 生誕３００年 – Euler からゼータの世界へ–** 2007 年 11 月,
黒川 信重 (東工大・理工), 落合 啓之 (名大・多元数理), 平野 幹 (成蹊大・理工), 権 寧魯 (九大・数理)
第 43 回 **Euler ３００歳記念 流体力学・変分学編－始祖の業績と現在・未来への展開－** 2008 年 2 月,
岡本 久 (京大・数理研), 鈴木 貴 (阪大・基礎工), 木村 芳文 (名大・多元数理)
第 44 回 **環境数理におけるモデリングとシミュレーション〜数学は環境問題に貢献できるか〜** 2008 年 3 月,
水藤 寛 (岡山大・環境), 太田 欽幸 (中央大・理工), 伊藤 昭彦 (国立環境研究所), 柳野 健 (気象庁・気象研究所), 渡辺 雅二 (岡山大・環境)
第 45 回 **McKay 対応を巡って** 2008 年 5 月,
松澤 淳一 (奈良女子大・理), 石井 亮 (広大・理), 伊藤 由佳理 (名大・多元数理), John McKay(Concordia 大／京大・数理研), 植田 一石 (阪大・理)
第 46 回 **幾何学的変分問題 – 神の選択・人間の方法** – 2008 年 9 月, 西川 青季 (東北大・理), 長澤 壯之 (埼玉大・理), 利根川 吉廣 (北大・理)
第 47 回 **アクセサリー・パラメーターとモノドロミー – 微分方程式の未開の領域を目指して** – 2008 年 10 月,
原岡 喜重 (熊本大), 横山 利章 (千葉工業大), 加藤 満生 (琉球大), 大島 利雄 (東大・数理)
第 48 回 **微分方程式に対する逆問題 –既知と未知が逆転したときに何が視えるか？** – 2008 年 11 月,
望月 清 (中大・理工), 池畠 優 (群馬大・工), 磯崎 洋 (筑波大・数理), 渡辺 道之 (東京理科大・理工), 山本 昌宏 (東大・数理)

お問い合わせ 又は ご意見等：
112 東京都文京区春日 1-13-27 中央大学大学院理工学研究科数学教室 tel：03-3817-1745
e-mail：yoshiATmath.chuo-u.ac.jp 三松 佳彦 / takakuraATmath.chuo-u.ac.jp 高倉 樹 (AT を@に変更)
ホームページ：http://www.math.chuo-u.ac.jp/ENCwMATH

背景：”Claude-Louis Navier” Wikipédia より

領域の位相不変量と定常ナビエ・ストークス方程式の可解性について

小薗英雄
（東北大学大学院理学研究科）

本講演の内容は柳澤卓氏（奈良女子大・理）との共同研究に基づいている．

境界が有限個の滑らかな連結成分からなる3次元空間内の有界領域において，非斉次境界値を与えた場合の定常ナビエ・ストークス方程式の可解性について考察する．非圧縮性条件から，与えられた境界上の関数は，各連結成分の ”流量の総和 ”が零であることが必要条件であることが従う．この必要条件下での同方程式の定常問題の可解性は，長年の未解決問題である．これまでのところ，境界上の関数の各連結成分における流量が零という制限された条件においては可解性が得られている．本講演では，まず一般的な3次元有界領域における L^r-ベクトル場に対する Hodge-Kodaira 型分解定理を導入する．その応用として，非斉次境界条件下における定常ナビエ・ストークス方程式の可解性について得られた新たな知見を紹介する．特に，分解定理における調和ベクトル場の境界条件の選び方に注意が必要であることを強調したい．さらに，与えられた境界上の非斉次関数に付随して決まる，低階の摂動項をもつ線形ストークス作用素について考察する．実際，非線形であるナビエ・ストークス方程式の可解性は，摂動ストークス作用素の正値性と密接な関係にあるが，その証明に重要な役割を演じる Leray の不等式は，実は極く限られた多重連結領域についてのみ成立することを示す．

半空間上での圧縮性粘性流体の漸近挙動について

西畑 伸也　(東工大・情報理工)

流体力学の基礎方程式として知られている圧縮性 Navier-Stokes 方程式に対し，流出境界条件を課した半空間上での時間大域解の存在，及びその漸近挙動について論じる．

まず，等エントロピー圧縮性 Navier-Stokes 方程式

$$\rho_t + \operatorname{div}(\rho u) = 0, \tag{1a}$$

$$\rho\{u_t + (u\cdot\nabla)u\} = \mu_1 \Delta u + (\mu_1+\mu_2)\nabla(\operatorname{div} u) - \nabla p(\rho) \tag{1b}$$

の半空間 $\mathbb{R}^n_+ := \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{n-1}$ ($n = 1, 2, 3,\ \mathbb{R}_+ := (0, \infty)$) 上での解の挙動について考察する．ここで，$x = (x', x_n) := (x_1, \dots, x_n)$ は空間変数，ρ, $u = (u_1, \dots, u_n)$ はそれぞれ流体密度及び流速を表す未知関数であり，関数 $p(\rho) = K\rho^\gamma$ $(K > 0,\ \gamma \geq 1)$ は圧力を意味する．また，μ_1, μ_2 は粘性係数と呼ばれる正定数であり，$\mu_1 > 0$, $2\mu_1 + n\mu_2 \geq 0$ である．方程式 (1) に対する初期条件 $(\rho, u)(0, x) = (\rho_0, u_0)(x)$ は

$$\lim_{x_1\to\infty} \rho_0(x) = \rho_+,\ \inf_{x\in\mathbb{R}^n_+} \rho_0(x) > 0,\ \lim_{x_1\to\infty} u_0(x) = (u_+, 0, \dots, 0),\ (\rho_+ > 0,\ u_+ : \text{定数}) \tag{2}$$

を満たすとし，流出境界条件

$$u(t, 0, x') = (u_{\mathrm{b}}, 0, \dots, 0), \quad (u_{\mathrm{b}} < 0 : \text{定数}) \tag{3}$$

を課す．平面定常波 $(\tilde\rho, \tilde u)$ とは，$\tilde u = (\tilde u_1, 0, \dots, 0)$ となる x_1 のみに依存する (1), (2), (3) の解とする．従って，

$$(\tilde\rho \tilde u_1)_{x_1} = 0, \tag{4a}$$

$$(\tilde\rho \tilde u_1^2 + p(\tilde\rho))_{x_1} = \mu \tilde u_{1x_1x_1}, \quad \mu := 2\mu_1 + \mu_2 \tag{4b}$$

$$\tilde u_1(0) = u_{\mathrm{b}}, \quad \lim_{x_1\to\infty} (\tilde\rho(x_1), \tilde u_1(x_1)) = (\rho_+, u_+), \quad \inf_{x_1\in\mathbb{R}_+} \tilde\rho(x_1) > 0. \tag{5}$$

講演では，平面定常波の一意存在について論じた後，境界強度 $\delta := |u_{\mathrm{b}} - u_+|$ と初期摂動 $(\rho_0 - \tilde\rho, u_0 - \tilde u)$ が十分小さいならば，定常波は漸近安定となることを示す．さらに，初期摂動に対し法線方向 $x_1 \to \infty$ での減衰のレートを仮定すれば，$t \to \infty$ のとき解 (ρ, u) が同じレートで平面定常波 $(\tilde\rho, \tilde u)$ へ収束することを示す．

以上は等エントロピーモデルに対する結果であるが，一次元半空間上の熱伝導モデルに対する同様の結果も併せて紹介する．

Acknowledgement 本講演で紹介する諸結果は，川島秀一教授，Peicheng Zhu 教授，中村徹助教との共同研究による．

非圧縮性粘性流の非定常問題について

清水扇丈（静岡大学理学部）

非圧縮性粘性流は半線形な非線形偏微分方程式である Navier-Stokes 方程式によって表される．時間発展をもつ非定常な Navier-Stokes 方程式をスケーリング不変な関数空間で解くことを考える．吉田耕作を創始とする日本の伝統的手法である, 藤田ー加藤による解析的半群の方法で解を構成する．線形部分に対して解析的半群（Stokes 半群）を生成し, 非線形項を方程式の右辺に回し, Duhamel の原理により非線形方程式の解を積分方程式で表す．解析的半群による解は, 時間についての情報を表している空間 L_q-L_r 評価をもつ．この評価を用いて, 縮小写像の原理により適切な関数空間における解の一意存在を示す．

一方, 自由境界問題を考えると, 自由境界を固定境界に直す変換により, Navier-Stokes 方程式は準線形な非線形方程式となる．半線形の場合には, 解の空間 1 階微分までの評価が必要であるが, 準線形の場合には, 解の空間 2 階微分の評価も必要となる．解の空間 2 階微分の評価を, 解析的半群に対する L_q-L_r 評価により得ようとすると, 原点の近傍で時間について t^{-1} の特異性をもち閉じた評価が得られない．そのための解決方法の一つとして, 線形化方程式に対する最大正則性評価を用いて, 縮小写像の原理により適切な関数空間における解の一意存在を示す．線形化方程式に対する最大正則性評価を作用素値 Fourier-multiplier の定理に基づき導出する．

尚, 本講演内容は, 早稲田大学柴田良弘教授との共同研究に基づく．

乱流は保存系散逸的弱解の夢をみるか？

松本剛
(京大院 理学研究科 物理学教室 流体物理学研究室)

流体が示す非常に乱れた状態「乱流」は物理学における未解決問題の一つとして知られている [1]。この乱流をどのように特徴づければその振舞いを理解したことになるだろうか？あるいは、適切な理解につながる特徴づけはそもそもあるのだろうか？

物理学や工学の立場では、乱流の実験室実験、大気海洋乱流の観測や乱流の数値シミュレーションなどによって、「乱流とは○○の性質を持つもの」という同意のようなものが得られていることは確かである。こうした同意を、乱流の支配方程式であるナビエ・ストークス方程式から導くことが乱流物理の目指すものである。

「乱流とは○○の性質を持つもの」といった性質のなかで乱流物理が特に重視するものがある。A.N. Kolmogorov が 1941 年に発表した 4/5 則と呼ばれるもので、乱流物理の基礎となっている。この 4/5 則は、幾つかの仮定をもとにしてナビエ・ストークス方程式から物理的に導出することができる。他方、ナビエ・ストークス方程式からエネルギー散逸の効果を除いたオイラー方程式の弱解のなかに 4/5 則を満たすものがあることが 2000 年前後に示された。これは乱流物理にとっての Encounter with mathematics と言って良い。本講演では、この弱解 (オイラー方程式の解であるがエネルギー散逸があるので散逸的弱解と呼ばれる) をとりまく驚きや興奮を乱流物理の立場から文献 [2]、[3] にならって述べる予定である。

参考文献

[1] “Unresolved problems in Physics”, Wikipedia, `http://en.wikipedia.org/wiki/Unsolved_problems_in_physics`

[2] G.L. Eyink and K.R. Sreenivasan, “Onsager and the theory of hydrodynamic turbulence”, Reviews of Modern Physics **78** 87–135 (2006).

[3] G.L. Eyink, “Dissipative anomalies in singular Euler flows”, presentation file in the conference “Euler Equations: 250 years on” held at Aussois, France (2007) `http://www.oca.eu/etc7/EE250/presentations/Eyink.pdf`