ENCOUNTER with MATHEMATICS

第50回

ラドン変換

−積分が拓く新しい世界−

2009年5月29日(金) 14:30 〜 5月30日(土)

於：東京都 文京区 春日 1-13-27

中央大学理工学部５号館

5月29日(金)

14:30〜15:20	ラドン変換 -概説- 1	：筧 知之 氏(筑波大・数理)
15:50〜17:30	超幾何関数とラドン変換の関わり	：木村 弘信 氏(熊大・自然)

5月30日(土)

10:30〜11:20	ラドン変換 -概説- 2	：筧 知之 氏(筑波大・数理)
11:40〜12:30	多様体上のフーリエ変換、ラドン変換と波動方程式 1	：磯崎 洋 氏(筑波大・数理)
14:10〜15:00	多様体上のフーリエ変換、ラドン変換と波動方程式 2	：磯崎 洋 氏(筑波大・数理)
15:20〜17:00	旗多様体を規定する微分方程式	：大島 利雄 氏(東大・数理)
17:10〜	ワインパーティー（懇親会）	

別紙の趣旨に沿った集会の第50回を以上のような予定で開催いたします.
非専門家向けに入門的な講演をお願い致しました．多くの方々のご参加をお待ちしております.
講演者による講演内容へのご案内を添付いたしますので御覧下さい.

112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 中央大学理工学部数学教室；03-3817-1745
ENCOUNTER with MATHEMATICS: homepage：http://www.math.chuo-u.ac.jp/ENCwMATH
三松 佳彦：yoshiATmath.chuo-u.ac.jp ／ 高倉 樹：takakuraATmath.chuo-u.ac.jp (ATを@に変更)

背景：Johann Karl August Radon (December 16, 1887 – May 25, 1956; Austria) about 1920.
According to German Urheberrechtsgesetz, the picture is free 10 years after the death of the person.
The original file is taken from Wikipedia.

ラドン変換 -概説-

筑波大学数理物質科学研究科　筧　知之

　本講演では、非専門家向けにラドン変換に関する入門的な解説を行うことにする。通常の意味でのラドン変換とは、$\mathbb{R}^n$ 上の関数を k 次元平面上で積分するという積分変換のことである。この積分変換により、$\mathbb{R}^n$ 上の関数はアファイングラスマン多様体上の関数に移される。まず、簡単な例として、$\mathbb{R}^3$ 上の関数を直線上で積分するというラドン変換（X 線変換と呼ばれる）R を考えよう。$\mathbb{R}^3$ の直線 ℓ を 4 つのパラメータ $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$ を用いて

$$\ell : x_1 = \alpha_1 t + \beta_1,\ x_2 = \alpha_2 t + \beta_2, x_3 = t, \qquad (t \in \mathbb{R})$$

と表すことにする。このとき、R は以下のように与えられる。

$$Rf(\ell) := \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha_1 t + \beta_1, \alpha_2 t + \beta_2, t)\, dt, \qquad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3).$$

このラドン変換は、3 変数の関数を 4 変数の関数に移している。従って全射性は期待できない。実際、$Rf(\ell)$ は次の微分方程式を満たす。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha_1\partial\beta_2} - \frac{\partial^2}{\partial\alpha_2\partial\beta_1} \right) Rf(\ell) = 0.$$

Fritz John は、さらに強く上記の微分方程式が十分条件を与えることを示した。即ち、ラドン変換 R の像は微分方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha_1\partial\beta_2} - \frac{\partial^2}{\partial\alpha_2\partial\beta_1} \right) u = 0.$$

の解空間として特徴付けられるのである。Fritz John によるこの結果は、その後の積分幾何の発展に大きな影響を与えた。

　本講演では、上記で述べたラドン変換の像の特徴付けの問題に加えて、ラドン変換の原像をどのように再構成するか、という反転公式を求める問題、の 2 つの問題を中心に解説する。更に、時間があればラドン変換に関する他の話題についても紹介することにしたい。

　ラドン変換の理論は、他の様々な分野と密接に関連しながら発展してきた。今回の Encounter With Mathematics 「ラドン変換 -積分が拓く新しい世界-」では、表現論の視点から大島利雄先生に、散乱理論と逆問題の視点から磯崎洋先生に、超幾何微分方程式の視点から木村弘信先生に、それぞれ講演して頂く予定である。

超幾何関数とラドン変換の関わり

木村弘信 （熊大・自然）

ガウスの超幾何関数は，数学に止まらず様々な分野に現れる大切な関数です．また，この関数の仲間で合流型関数というものがあります．たとえば，Kummer の合流型超幾何関数，ベッセル関数，エルミート・ウエーバー関数などがそうです．これらは応用の面でも重要なもので，ご存じの方も多いと思います．このような関数の仲間をもっと増やしたいと思った人が昔からいるのはごく自然なことです．これらの関数は様々な側面から定義（特徴付け）ができていて，巾級数表示，微分方程式，隣接関係式とよばれる微分差分方程式，積分表示などがその重要なものです．どの側面に注目するかによって，様々な拡張の仕方がありますが，ここでは上記の古典的な関数達の積分表示に注目することにします．

ガウスの超幾何関数を積分表示の視点で多変数関数に一般化しようとしたものとしては，1978 年から始まる青本和彦氏の一連の仕事があります．それは超幾何関数とは積分変数の一次式の複素数巾をいくつか掛けたものの積分であるというものです．ここでは超幾何関数はこの一次式達の係数を変数とする関数となります．これらの仕事に触発されて，1986 年には I.M.Gelfand が Radon 変換の立場から定式化し直しています．実はもっと以前に，F. Klein も一般化を与えています．

この講演では，このような視点でガウスの超幾何関数の仲間たちの積分表示を詳しく眺めることによって，これらの関数を統御している群論的な側面が見えて来ること，そしてその一般化を定義できることを，できるだけ素朴に説明したいと思います．時間はないでしょうが，もし可能ならばこのような視点から Painlevé 方程式などの非線型微分方程式も理解が可能であることをお話ししたいと思います．

多様体上のフーリエ変換、ラドン変換と波動方程式

筑波大学大学院数理物質科学研究科　　磯崎　洋

３次元ユークリッド空間上の波動方程式の解の公式として Kirchhoff による球面平均を用いるものと, フーリエ変換を用いるものとが知られている。この両者が一致するかどうかは今日では簡単な演習問題であるが、発表された当時は議論になったらしい。実はこのことの背後には興味ある事実が潜んでいる。

ラドン変換は、通常は良い対称性を持った多様体の部分多様体上の積分として導入される。ユークリッド空間の場合には Fourier slice theorem によってフーリエ変換と関係づけられる。また波動方程式の解の無限遠での表示を見ることによって導入することもできる。これらはラドン変換とラプラシアンの関係を示唆している。

一般のリーマン多様体上でのラドン変換はどのように定義されるべきであろうか？部分多様体上の積分として定義した場合には反転公式の成立が期待できない。一方、性質のよい非コンパクト多様体上でフーリエ変換を構成することはしばしば可能であり、Fourier slice theorem を参考にラドン変換を定義することができる。この場合に、部分多様体上の積分とはどのように関係づけられるのであろうか？

この講義では漸近的ユークリッド計量と漸近的双曲計量の２つの場合に上に述べた問題の解説を行う。内容は次のようなものである。

(1) ラプラシアンのレゾルベントの無限遠での漸近展開からフーリエ変換を構成する。
(2) ヘルムホルツ型方程式の解空間をフーリエ変換によって特徴付け、S 行列を導入する。
(3) フーリエ変換からラドン変換を構成する。
(4) ラドン変換の特異性は古典的な場合と同様に部分多様体上の積分として書く。
(5) 波動方程式の解の無限遠方における漸近形はラドン変換で書く。
(6) 波動方程式の解の特異性は特性曲面に沿って進むことをラドン変換によって説明する。

双曲計量（摂動のないもの）の場合には、上半空間モデルを用い変形ベッセル函数によってフーリエ変換を導入する。副産物として、波動方程式の基本解とラドン変換の変形ベッセル函数による新しい表示と、変形ベッセル函数の次数に関するフーリエ変換の新しい公式が得られる。さらにラドン変換のサポート定理と逆問題への応用等、最近の研究動向にも触れたい。

旗多様体を規定する微分方程式

東京大学大学院数理科学研究科　大島利雄

J. Radon は $\mathbb{R}^2$ 上の関数 f に対し，$\mathbb{R}^2$ 内の直線上での f の積分の値の情報から元の f を復元する方法を考えた（1917 年）．$\mathbb{R}^2$ に含まれる直線の全体は 2 次元の多様体になるので，この場合は 2 変数の関数の空間から 2 変数の関数の空間への積分変換の逆変換を求める問題となる．一方，P. Funct は球面上の関数に対し，球面の大円上の積分値から元の関数を復元する問題を考えた（1916 年，Math. Ann.）．これらが**ラドン変換**，あるいは**積分幾何学**の始まりと考えられる．

後者は，球面でなくて射影空間を考えるべきことが容易に分かり，より一般には**グラスマン多様体**（たとえば n 次元線形空間の中における k 次元の線形部分空間全体のなす空間）や**一般旗多様体**におけるラドン変換に拡張される．今回は**半単純リー群の表現論**と関係の深い後者について考察したい．

有限集合に自然に作用する群は**対称群**であり，有限次元線形空間に作用する群は**一般線形群**（可逆な行列のなす群）である．グラスマン多様体や一般旗多様体は自然に**リーマン多様体**となり，**等長変換群**が推移的に作用しているが，さらに大きな一般線形群が作用している．ラドン変換は一般線形群の表現空間（**退化系列表現**の空間）における準同型写像となり，表現空間を一般線形群上（可逆な行列の空間上）の関数の空間の部分空間と同一視することにより，表現空間を規定する自然な微分方程式系が得られる．方程式はジョルダン標準型を代表元とする正方行列の**共役類**の量子化と見なせ，線形代数における**最小多項式や単因子の概念の「量子化」**によって具体的に得られることを解説したい．

これらの一般化されたラドン変換の像を記述する微分方程式系は，グラスマン多様体の場合は，等長変換群の作用を考えれば足りるが，一般旗多様体の場合には一般線形群の表現から構成される上記の方程式系を考える必要がある．この方程式系は，一般化されたポアソン変換やペンローズ変換などの積分変換の場合にもユニバーサルに現れる基本的なもので，ゲルファントの超幾何では最重要な行列式型の 2 階の方程式にあたる．

多くの**未開拓の問題**が残っており，それは「有限集合上のラドン変換」にも当てはまる．