

ENCOUNTER with MATHEMATICS

第66回

幾何学と特異点の出会い

swallowtail

cuspidal edge

2016年3月12日(土) 11:30 ~ 3月13日(日)

於：東京都 文京区 春日 1-13-27 中央大学理工学部5号館

3月12日(土)

11:30~13:00 特異点論の地図

14:30~16:00 特異点とガウス・ボンネの定理 I

16:30~18:00 誰にでもできる特異点の判定法

：石川 剛郎氏 (北大・理)

：梅原 雅顕氏 (東工大・情報)

：佐治 健太郎氏 (神戸大・理)

3月13日(日)

10:00~11:30 特異点とガウス・ボンネの定理 II

12:00~13:30 3次元時空の極大曲面と特異点

13:40~ ワインパーティー (懇親会)

：梅原 雅顕氏 (東工大・情報)

：山田 光太郎氏 (東工大・理)

別紙の趣旨に沿った集会の第66回を以上のような予定で開催いたします。非専門家向けに入門的な講演をお願い致しました。多くの方々のご参加をお待ちしております。講演者による講演内容へのご案内を添付いたしますので御覧下さい。

尚、この集会は、科学研究費補助金 基盤研究 (S)「ホモロジー的ミラー対称性の証明」課題番号：23224002 代表：深谷賢治 (京大・理)、科学研究費補助金 基盤研究 (A)「Floer 理論の深化と symplectic 構造の研究」課題番号：2624700 代表：小野薫 (京大・数理研)、科学研究費補助金 基盤研究 (B)「幾何学的特異点論の展開と応用」課題番号：15H03615 代表：石川剛郎 (北大・理)、科学研究費補助金 基盤研究 (B)「3次元多様体の幾何構造と組合せ構造」課題番号：15H03620 代表：作間誠 (広大・理)、科学研究費補助金 基盤研究 (B)「リー双代数によるリーマン面の位相幾何学的研究」課題番号 15H03617 代表者：河澄響矢 (東大・数理) からの支援を受けています。

連絡先：112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 中央大学理工学部数学教室: 03-3817-1745

ENCOUNTER with MATHEMATICS: homepage : <http://www.math.chuo-u.ac.jp/ENCwMATH>

三松 佳彦 : yoshi@math.chuo-u.ac.jp / 高倉 樹 : takakura@math.chuo-u.ac.jp

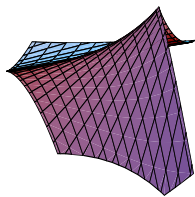
特異点の地図は描けなくても、特異点論の地図なら描けるかもしれない。

そもそも特異点とは何か？どんな理論にせよ、適用できる対象・状況には限界がある。理論の境界点がある。境界を超えると、その理論は適用できなくなる。そこには必然的に特異点が現れる。適切に理論を修正し、枠組みを一新することで克服し、適用される範囲を拡げていくことで理論が発展していく。そのための理論が必要だ。特異点論はいつどこで生まれたのだろうか？

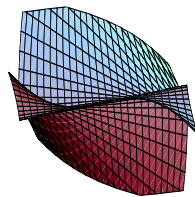
幾何学において、空間概念・幾何的モデルの拡大に伴い、そして扱う図形・対象の拡張に伴い、必然的にわれわれは特異点と遭遇することになる。かのポアンカレが「科学と方法」で書いているように、まず調べるべき対象は、しばしば現れる対象、すなわちジェネリックな対象である。

たとえば、曲線論や曲面論において、特異点はどう研究されてきたのだろうか？微分方程式を幾何学的に扱うために微分式系を考えたとき、その「幾何学的解」として曲線や曲面を捉えたと、それらは、特異点をもつ曲線や曲面である「フロント」あるいは「フロンタル」として理解するのが自然である。いろいろな幾何学でジェネリックなフロント・フロンタルの局所・大域的研究が現在行われている。幾何学における特異点、いわば幾何学的特異点に注目したとき、それぞれの幾何の問題に応じて様々なジェネリック特異点が現れる。ジェネリックな特異点がそれぞれの幾何学、幾何の問題を体現しているとも言えるのではないか。

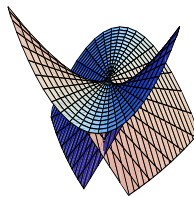
本講演では、私見ながらも特異点論の地図を披露する。特に、曲線や曲面の微分幾何学において、特異点はどう現れ、どう扱われてきたかを概観する。幾何学と特異点のこれまでの数々の出会い・巡り会いを振り返って、いわば時空に地図を描き、幾何学における特異点（論）の意義を具体例を示しながら説明する。それを通して、佐治さん梅原さん山田さんの講演の前説としてナビゲートしたい。できれば、Saji-Umehara-Yamada（たとえば [1][2]）の仕事の一部も（後の講演内容とかぶらぬ程度に）紹介できれば紹介して、最近出版された泉屋さんたちの本 [4] の内容も紹介できれば紹介して、私自身の話も最後にちょっとだけ入れて、という感じの話にしたい。ちなみに下図は、射影接触幾何やリー球面幾何などに関連して現れる特異点である [5]（高橋雅朋さん作画）。



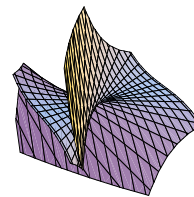
cuspidal edge



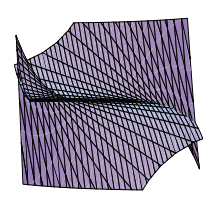
Mond surface



swallowtail



generic folded pleat

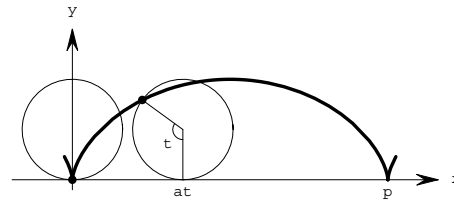


Shcherbak surface

参考文献

- [1] Kentaro Saji, Masaaki Umehara, Kotaro Yamada, *The geometry of fronts*, Annals of Math., **169-2** (2009), 491–529. DOI: 10.4007/annals.2009.169.491
- [2] Kentaro Saji, Masaaki Umehara, Kotaro Yamada, *Coherent tangent bundles and Gauss-Bonnet formulas for wave fronts*, J. Geom. Anal., **22** (2012), 383–409. DOI: 10.1007/s12220-010-9193-5
- [3] 梅原雅顕「特異点を持つ曲線と曲面の幾何学」慶応義塾大学 Seminar on Mathematical Sciences **38**, (2009).
- [4] Shyuichi Izumiya, Maria del Carmen Romero Fuster, Maria Aparecida Soares Ruas, Farid Tari, *Differential Geometry from a Singularity Theory Viewpoint*, World Scientific Publishing Co. (2015). ISBN: 978-981-4590-44-0
- [5] Goo Ishikawa, Yoshinori Machida, Masatomo Takahashi, *Asymmetry in singularities of tangent surfaces in contact-cone Legendre-null duality*, Journal of Singularities, **3** (2011), 126–143.

平面曲線に現れる特異点で、もっとも身近なものの一つにサイクロイドがある。



サイクロイド

この曲線の尖った部分が「カusp」とよばれる特異点である。通常、正則平面曲線の曲率とは、「その点で曲線をもっともよく近似する円の半径の逆数」と解釈されるが、平面曲線のカuspにおける「カusp的曲率」を

• 与えられたカuspをもっともよく近似するサイクロイドに対応する円の半径の逆数の平方根と定義することで、特異点の尖りぐあいを表す不変量が定義される。同様に、曲面に現れる特異点を考えよう。

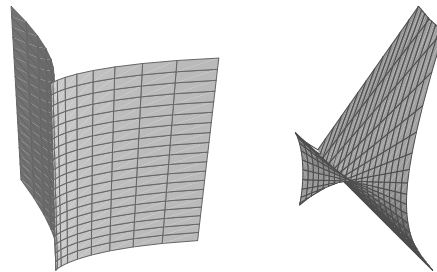


図 1. カusp辺 と ツバメの尾

上記の2つの特異点は「波面」というカテゴリで考えると、頻繁に現れる特異点である。ここでは、特にカusp辺について、「特異曲率」という特異点に沿って定義される特別な曲率関数の性質を紹介する。これは、後で紹介する特異点をもつ曲面のガウス・ボンネ型の定理において重要な役割を果たす。また、カusp辺やツバメの尾付近でのガウス曲率の振る舞いについても触れる。曲面に現れる特異点として、他に重要な特異点として下図の交叉帽子とカusp状交叉帽子がある。ここでは、交叉帽子の微分幾何も紹介する（山田氏の講演では、カusp状交叉帽子は重要な役割を演ずる）。

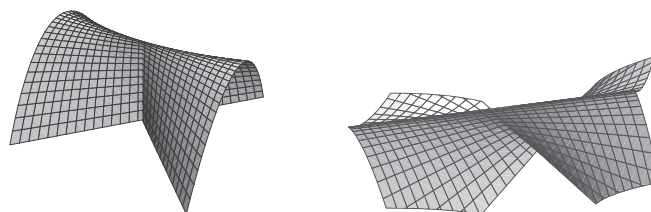


図 2. 交叉帽子とカusp状交叉帽子

$\mathbf{R}^3$ の正則閉曲面 Σ^2 について、ガウス・ボンネの定理として知られる有名な定理は

$$(2\deg(\nu) =) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma^2} K dA = \chi(\Sigma)$$

である。ここで $\chi(\Sigma^2)$ は曲面のオイラー数であり、 $\deg(\nu)$ は、曲面のガウス写像の写像度である。また K は曲面の正則点におけるガウス曲率である。

ここでは、上述の古典的なガウス・ボンネの定理の一般化を紹介する。もしも、 $\mathbf{R}^3$ の（向きづけられた）閉曲面が大域的に定義された滑らかな単位法線ベクトル場をもち、正則点以外に、カusp辺とツバメの尾のみを許容したとすると、以下の2つのガウス・ボンネ型の定理が成り立つ。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma^2 \setminus S(f)} K dA + 2 \int_{S(f)} \kappa_s ds &= \chi(\Sigma^2), \\ 2\deg(\nu) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma^2 \setminus S(f)} K d\hat{A} &= \chi(\Sigma_+^2) - \chi(\Sigma_-^2) + \#SW_+ - \#SW_-. \end{aligned}$$

まず、最初の式で dA は曲面の（符号なし）面積要素、 κ_s は、第1部で紹介した特異曲率である。また $S(f)$ は f の特異点集合である。一方、第二式で $\deg(\nu)$ は波面 f の Gauss 写像 $\nu: \Sigma^2 \rightarrow S^2$ の写像度を表す。ここで SW_+ (SW_-) は正（負）のツバメの尾の数である。また Σ_+^2 (Σ_-^2) は、曲面の向きと、単位法線ベクトルから定まる向きが同調（異なる）点の集合を表す。

ところで、特異点をもつ曲面のガウス写像 ν は、曲面から球面への写像であるが、これを $\mathbf{R}^3$ への写像であると解釈すると、 f の代わりに ν に関しても、上記の2つのガウス・ボンネ型の定理に相当するものを（独立に2つ）導くことができる。

$$(0.1) \quad \int_{\Sigma^2} |K| dA + 2 \int_{S(\nu)} \kappa_{\#} ds = 2\pi\chi(\Sigma^2),$$

$$(0.2) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma^2 \setminus S(\nu)} K d\hat{A} = \chi(\Sigma_{\nu}^+) - \chi(\Sigma_{\nu}^-) + \#C^+ - \#C^-.$$

ここで $\#C^+$ ($\#C^-$) は、写像 ν の正の（負の）カuspの数を表す、また $\kappa_{\#}$ は写像 ν の特異曲線に沿う特異曲率である。また Σ_{ν}^+ (Σ_{ν}^-) は ν の面積要素と符号付き面積要素が同符号（異符号）となる点の集合を表す。 $S(\nu)$ は ν の特異点集合である。以上より、3次元 Euclid 空間の曲面には、合計4個の Gauss-Bonnet 型の公式が存在することになる。これらを用いた応用をいくつか紹介する。

曲面が必ずしも、閉じていないときの完備性や弱完備性にも触れたい。古典的なガウス・ボンネの定理は、外の空間を払拭して2次元リーマン多様体の定理として、定式化できるが、特異点をもつ場合の上記のガウス・ボンネ型の定理についても2次元リーマン多様体の定理としての定式化が可能である。これについても紹介したい。

誰にでもできる特異点の判定法

佐治健太郎

二つの写像芽が与えられた時, それらが定義域と終域の座標変換によってうつり合うとき, 両者は右左同値 (または A -同値) という. この同値関係は写像の「形」を研究するという立場からはたいへん自然な同値関係である. よく現れる特異点に対して, 与えられた写像芽がその特異点に右左同値であるかどうかをなるべく容易に判定できると様々な場面で役にたつ. ある特異点に対して, 与えられた写像芽がその特異点に右左同値であるための必要十分条件で, チェックがしやすいものをその特異点の判定法と呼ぶ.

本講演では, 多様体間の可微分写像と波面によく現れる特異点に対してそれらの判定法を紹介する. 扱うのは, よく現れる方から, カस्प辺, ツバメの尾, 唇 (リップス), 嘴 (ビークス), 蝶 (バタフライ), D_4^+ 特異点 (図参照) と呼ばれる特異点である. カस्प辺, ツバメの尾はジェネリックな波面にあらわれ, 他の5つは波面のジェネリックな変形にあらわれる.

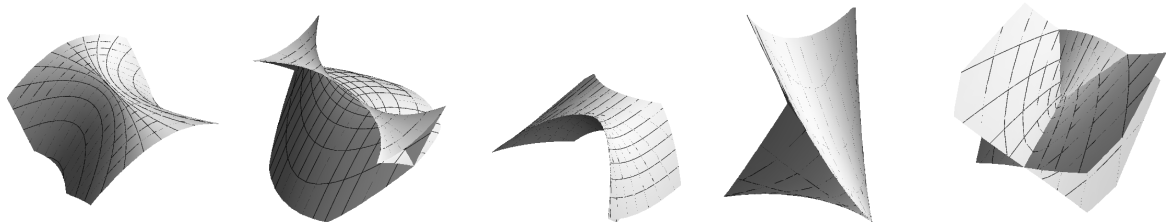


図 1: 左からリップス, ビークス, バタフライ, D_4^+ 特異点, D_4^- 特異点

そのような判定法で鍵となるのは, 座標不変量の抽出である. 可微分写像と波面の場合はヤコビ行列式に相当する関数 λ と写像の微分の核を生成するベクトル場 η が鍵となる. 判定法は λ と η の情報で述べられる. これらは与えられた写像の定義式から容易に構成することができるため, この判定法を使えば具体的に与えられた写像の特異点を判定できる. さらに, 具体的な表示がなくても, 特異点を調べることもできる. このような効用は梅原氏・山田氏の講演で重要な役割を演ずる. 本講演では, 応用の一つとして, 終域の等距離変換のみを用いたカस्प辺の標準形を紹介する. カस्प辺を, 定義域の座標変換と終域の等長変換により, なるべく簡単な形にすると, 終域は等長変換しか使わないためにその形にはパラメーターが残る. 作り方からそれらは全て微分幾何的不変量となり, その中には, 特異曲率や極限法曲率といった知られていた不変量もあるが, 知られていなかったものもある. それらの不変量の幾何学的意味を述べる.

■ 3次元時空の極大曲面と特異点

山田光太郎

3次元ユークリッド空間の面積汎関数に対するオイラー・ラグランジュ方程式から、面積汎関数の停留点となる曲面は極小曲面（平均曲率が恒等的に消える曲面）となる。その由来から、変分法は極小曲面の研究の重要な手法のひとつである。一方、リーマン面上の複素解析的なデータで極小曲面を書ききる「ワイエルストラス表現公式」は、複素解析を武器として曲面の大域的研究のための重要なツールであった。

符号 $(-, +, +)$ の計量をもつ3次元ローレンツ・ミンコフスキー時空の空間的曲面についても、同様に面積汎関数の停留点として極大曲面（平均曲率が恒等的に零となる空間的曲面）がえられるが、このような曲面に対してもワイエルストラス表現公式の類似が成り立ち、複素解析が研究の道具となりうる。一方、Calabi の定理「完備な極大曲面は平面に限る」から、大域的性質を考察するには特異点を許す曲面を考えるのが自然である。実際、ワイエルストラス型表現公式を用いて、特異点をもつ極大曲面の、数多くの興味深い例が現在までに得られている。また、ユークリッド空間の極小曲面の単なるアナロジーではない特徴的な性質が知られてきている。

本講演では、特異点を許すある種の極大曲面（極大面とよぶ）のクラスの性質、とくに (0) 大域的な性質— 完備性と弱完備性 (1) ジェネリックな特異点の分類 (2) それらの特異点の双対性 (3) ジェネリックでない特異点としての円錐的特異点と折り目特異点の解説を軸に、さまざまな例を紹介したい。

