

# ENCOUNTER with MATHEMATICS

## 第69回

### 自由因子に特異点をもつ微分方程式 — 斎藤理論の広がりに —

2017年6月23日(金) 14:40 ~ 6月24日(土)

於：東京都 文京区 春日 1-13-27 中央大学理工学部5号館

6月23日(金)

14:40~16:10 不変式環上の平坦構造 (Flat structure on invariant ring)

：斎藤 恭司氏 (東大・IPMU)

16:40~18:10 平坦構造の一般化と大久保型方程式のモノドロミ保存変形

：眞野 智行氏 (琉球大・理)

6月24日(土)

10:30~12:00 複素鏡映群の平坦不変式

：加藤 満生氏 (琉球大・教育)

13:40~15:10 パンルヴェ方程式とウェイト系

：千葉 逸人氏 (九州大・IMI)

15:40~17:10 斎藤構造の概双対性と複素鏡映群

：三鍋 聡司氏 (東京電機大・工)

17:20~ ワインパーティー (懇親会)

別紙の趣旨に沿った集会の第69回を以上のような予定で開催いたします。非専門家向けに入門的な講演をお願い致しました。多くの方々のご参加をお待ちしております。講演者による講演内容へのご案内を添付いたしますので御覧下さい。

尚、この集会は、JSPS 受託学術動向調査研究 (代表：小島定吉 (東工大・情報)) および 科学研究費補助金 基盤研究 (A) 「Floer 理論の深化と symplectic 構造の研究」 (課題番号：2624700 代表：小野 薫 (京大・数理研)) からの支援を受けています。

連絡先：112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 中央大学理工学部数学教室: 03-3817-1745

ENCOUNTER with MATHEMATICS: homepage : <http://www.math.chuo-u.ac.jp/ENCwMATH>

三松 佳彦 : [yoshi@math.chuo-u.ac.jp](mailto:yoshi@math.chuo-u.ac.jp) / 高倉 樹 : [takakura@math.chuo-u.ac.jp](mailto:takakura@math.chuo-u.ac.jp)

# 対数的に自由な因子と平坦構造 － 原始型式への道 －

数物連携宇宙研究機構      斎藤恭司

対数的に自由な因子と平坦構造、そして原始型式は私の研究の出発点の時期 (1970 年代) に考えた主テーマであり、その後の研究の発展に大きな影響があった (勿論それ以外のことも考えていたが)。私がそれ等の数学とどの様に出逢ったのか、記憶する範囲で復元してみたい (いろいろなアイデアが複合して同時進行していたので、その順がどうであったかは確かではないが)。

1. 学生時代：私が大学院生活を過ごした 1967-69 年東京大学は紛争の真っ只中に有った。講義やセミナーはなくなり、種々の集会やデモに明け暮れる毎日だった。それは数学教室として例外ではなかった。その様な中で私は自分で自分の数学の方向を探し求めて、数学教室内にある各種の文献を、あるいは集会の合間に、あるいはデモに移動する都電の中で、読みまくった。その中で、私の心を捉えたものは二つあった。一つは C.L. Siegel による楕円積分に関する講義ノート、もう一つは E.Artin による類体論の講義ノートであった。それは三角関数や指数関数を超える最初の周期の理論であり、その様な周期が数体や関数体の拡大構成と繋がる最初のステップを記述していた。それ等のノートは、紛争のさなかにあった私には百年の彼方から差し込んでくる光芒のように思われた。その当時自覚はなかったが、その後私の研究はそれ等で学んだことを高次元化することをひたすらめざして歩んでいるように思う。

2. Milnor の定理：1970 年 2 月私はドイツに渡り二ヶ月の語学研修の後 4 月より Göttingen 大学に行った。そこでは Grauert と Brieskorn が共同で出版されたばかりの Milnor による  $C^n$  の原点の近傍における超曲面の孤立特異点の定義方程式  $f(\mathbf{x}) = 0$  (但し  $f$  は変数  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  の原点近傍で定義された正則関数) を変形  $f(\mathbf{x}) + t = 0$  すると、充分小さい  $t$  に対する超曲面に  $\mu = \dim \mathcal{O}_{C^n,0}/(\partial f)$ -個の一次独立な中間 (=n-1) 次元のホモロジー類 (消滅サイクルと呼ばれる) が生じることを示した文献を読んでいた。この仕事はいろいろな意味で私の注意を引きつけた：

i) 理論の一番簡単な場合の Morse 特異点、即ち  $A_1$ -サイクルの時が円周であり、そのつぎの  $A_2$ -サイクルの時が楕円曲線のサイクルになっている。Milnor の定理はその一般化を与えている (→指数関数や楕円関数の一般化?)。

ii) Brieskorn はそのサイクルを相対微分形式で積分した周期の満たす微分方程式系 (Gauss-Manin connection) を研究している (→ Oda-Katz の研究)。

iii) 上記の i), ii) を組み合わせれば、消滅サイクル上の積分 (=周期) をパラメータ空間上の関数と見なしてその満たす微分方程式系が得られ、その解 (またはその逆写像) として新たな多変数超越関数が得られる期待がある。しかしその為には、もう一つ視点が必要だった。即ちその時点では未だパラメータは  $t$  のみで 1 次元だが、もっと一般に  $f(\mathbf{x})$  を  $\mu$ -個のパラメータ  $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_\mu)$  で変形した関数族  $F(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = f(\mathbf{x}) + t_1 \varphi_1(\mathbf{x}) + \dots + t_\mu \varphi_\mu(\mathbf{x})$  (但し  $\varphi_1 = 1, \dots, \varphi_\mu$  は  $\mathcal{O}_{C^n,0}/(\partial f)$  の基底の代表系) を考えないと楕円積分の時に生じた二次元のパラメータ空間をさえ復元できない。当時、変形に関しては代数幾何の影響で孤立特異点の半普遍変形という考えが主流であったが、私は寧ろ R.Thom による "unfolding" という概念の方がより本質的であると思った。その方が、 $\mu$ -次元のパラメータ空間  $S = \{\mathbf{t} \in C^\mu\}$  内に入る Discriminant loci を

$$D := \{\mathbf{t} \in S \mid \text{超曲面 } F(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = 0 \text{ は特異点を持つ}\} \quad (1)$$

と定義したとき (それは  $S$  の中で余次元 1 の因子になっている)、それを更なる関数値  $t$  方向に (正確にはベクトル場  $\partial/\partial t_1$  の方向、原始方向とも unit 方向とも呼ばれる) に射影するときの discriminant loci (=bifurcation set または caustics) を考察できる (R.Thom の幾何学的直感には驚くべきものがある)。

3. 対数ベクトル場 (=対数場) と対数極と対数接続：上記の 2. に導かれて、1970-73 私は孤立特異点の普遍 unfolding  $F(\mathbf{x}, \mathbf{t})$  に対する Gauss-Manin connection  $\nabla : \mathcal{H}_F \rightarrow \mathcal{H}_F \otimes \Omega_S^1(*D)$  (ここで  $\mathcal{H}_F$  は  $F$  の消滅

サイクルに対する De Rham cohomology  $\mathcal{O}_S$ -module で  $\nabla$  は共変微分と呼ばれるパラメータ空間  $S$ -上の接続であって discriminant  $D \subset S$  に極を持つ) を研究した。この時に今日一般的に使われるいろいろな概念が生まれた (例えば Euler ベクトル場 或いは Euler operator, quasi-homogeneous 特異点、等々) が、その一つが対数極 (logarithmic pole) や対数場 (logarithmic vector field) である。ここで  $D = \{h = 0\}$  として、用語を用意する：

$$\begin{aligned}\Omega_S^1(\log(D)) &:= \{\omega \in \Omega_S^1(*D) \mid h\omega \in \Omega_S^1, h d\omega \in \Omega_S^2\} \\ \text{Der}_S(-\log(D)) &:= \{v \in \text{Der}_S(\text{hol.vec.field}) \mid v(h) \in (h) \subset \mathcal{O}_S\}.\end{aligned}\quad (2)$$

それぞれ、対数極を持つ 1 形式及び対数ベクトル場のなす加群と呼ばれ互いに  $\mathcal{O}_S$ -dual modules になる。すると、普遍変形族  $F(\mathbf{x}, \mathbf{t})$  に対し次が成立する。

- i) Gauss-Manin connection は対数極を持つ  $\nabla : \mathcal{H}_F \rightarrow \mathcal{H}_F \otimes \Omega_S^1(\log(D))$ 。
- ii)  $\Omega_S^1(\log(D))$  及び  $\text{Der}_S(-\log(D))$  は互いに dual な  $\mathcal{O}_S$ -free module。

ここで i) は、普遍変形族  $F(\mathbf{x}, \mathbf{t})$  の特異点は generic には Morse 特異点 (特に quasi-homogeneous) なので Gauss-Manin connection の極は generic には対数極と成ることから示せる。ii) の事実 (証明には族  $F(\mathbf{x}, \mathbf{t})$  の critical set の分析を要するので略) は次の 4. と重なる事実だがどちらを先に発見したか記憶はない。この性質を持つ因子  $D$  を (対数的に) 自由因子と呼ぶことにする。これ等の事は log-module の基底を用いることにより、微分方程式系を具体的に書き下せる。それ以上に幾何的に対数場ベクトル束が定義されることにより、いろいろなことが明快になる。この事が後に、6. で述べる一般の対数接続そして 7. で述べる原始型式の研究へと繋がっていく。

4. 有限鏡映群の場合：これより先に、Brieskorn は既に単純特異点の universal unfolding を Lie 環の言葉で記述していた。特にその変形パラメータ空間  $S$  はカルタン代数  $V$  (有限次元複素ベクトル空間) の Weyl 群 (有限鏡映群) による商空間  $V/W$  で与えられた。Chevalley の定理により 不変式環  $S(V^*)^W = \{S \text{ 上の多項式関数であって } W\text{-不変なもの全体}\}$  は多項式環  $\mathbb{C}[P_1, \dots, P_l]$  に同型と成る (ここで斉次生成系  $P_1, \dots, P_l$  を基本不変式とも言う。それ等は商空間  $S = V/W$  の座標系を与えるが、それ等の取り方は唯一ではなく座標変換の自由度がある)。 $W$ -反不変式のなす加群の基底を  $\Delta$  (定数倍を除いて唯一) とすると  $\Delta^2 \in S(V^*)^W$  がディסקリミネント  $D$  の定義方程式となる。その場合の対数場加群の基底は、以下のように驚くほど簡単に求まる：

$$\text{Der}_S(-\log(\Delta^2)) = \{I^*(dP_i, \cdot)\}_{i=1}^{\mu} \text{ で生成される } \mathcal{O}_S \text{ 自由加群} \quad (3)$$

ここで  $I^*$  は  $V$  の  $W$ -不変内積 (up to constant で unique, Killing form) の dual 内積を  $V$  の cotangent bundle  $T^*(V)$  の fiber 毎に定義したもので、 $I^*(dP_i, \cdot)$  は  $\cdot$  に 1-form を代入すると関数を返すので、ベクトル場と見なせる。

ここで少し寄り道であるが、超平面配置について述べる。有限鏡映群による商写像  $V \rightarrow S$  により、ディスクリミネント  $D$  を  $V$  に引き戻した集合は丁度  $W$  にある鏡映変換  $s$  達の鏡映面  $H_s$  の合併  $\cup_s H_s$  になっている。すると面白いことに  $\text{Der}_V(-\log(\cup_s H_s))$  も  $\{I^*(dP_i, \cdot)\}_{i=1}^{\mu}$  を基底を持つ  $\mathcal{O}_V$  自由加群になる (その様な超平面配置を自由配置とも呼ぶ)。この時基底の次数達 (exponent と呼ぶ) は超平面配置  $\cup_s H_s$  の重要な不変量となる。寺尾宏明氏は私の最初の博士の学生であったが (1973-77)、この様な自由配置の研究を課題として、多くの成果を上げられたが詳細は同氏と Orlik の共著に譲り、ここでは立ち入らない。

他方、当時 Deligne により示された定理：「simplicial arrangement の補集合は  $K(\pi, 1)$ -空間となる」に触発されて私は「free arrangement (より一般に free divisor) の補集合は  $K(\pi, 1)$ -空間となるであろうか」と問うたが残念ながら簡単な反例がある。にもかかわらず、free divisor の補集合でありかつ  $K(\pi, 1)$ -空間となる興味深い事例が数多くあることから、両者の相互関係をより精密に記述する理論があると思われる。その解明は将来の課題である。

5. 平坦構造：戻って、有限鏡映群の商空間  $S = V/W$  の座標系は不変式環の生成系  $P_1, \dots, P_{\mu}$  で与えられるが、ここで、一つ問題があった。即ち：

**問題 1.** 将来、周期写像を  $S \setminus D$  上の多価写像と定義してその値域 (即ち周期領域) からの逆写像の座標成分として保型形式を定義する<sup>1</sup> には  $S$  に”自然な”座標系が入っていて欲しい (さもないと数体や関数体の拡大に意味が付かない)。即ち、平たく言って、不変式環  $S(V^*)^W = \mathbb{C}[P_1, \dots, P_l]$  に “自然” な生成系はないのか? 例えば、対称群の不変式環である対称多項式環は基本対称式で生成されるが、それ等は “理論的に自然なもの” であろうか?

この問いは答えが一通りではない余り数学的に意味のない問いであるが、この問題に答えるべく登場したのが平坦構造である。即ち「 $S$  に自然に平坦なメトリックが入り、その為に  $S$  はアフィン空間と見なせ、従って up to graded linear transformation で自然な線形座標系が入る」と言うのが主張である。

ではどうして、その様な構造に思い至ったのかスケッチしてみる。それは、4. (3) で記述した 対数場の集合の記述に由来する。その記述に導かれて、 $S$  の二つの余接ベクトル  $dP_i, dP_j \in T^*(S)$  間の内積を

$$I^*(dP_i, dP_j) \quad (4)$$

定義しようと思うのは自然な成り行きであろう。しかるにそのインデックス  $i, j$  を動かして得られる  $\mu \times \mu$  行列 (それは対数ベクトル場  $I^*(dP_i, \cdot)$  を偏微分  $\partial/\partial P_j$  ( $j = 1, \dots, \mu$ ) で展開した係数行列とも思える) の行列式はディスクリiminant 方程式  $\Delta^2$  になってしまう (その事は、直接計算からも、対数場の一般論からも分かる)。つまり、この内積 (4) はディスクリiminant  $D$  で退化していることになる。それでは非退化の内積は定義できないのか? どの時点か忘れたが、その答えの鍵になる次の事実を見つけた:

**補題 1.** 基本不変式  $P_1, \dots, P_l$  の内一番高い次数 (=Coxeter 数= $h$ ) のものを  $P_l$  とすると  $\Delta^2$  は  $P_l$  に関して次数が  $\mu$  の monic polynomial に成る。

この事が言えると、次数の勘定から「(4) は  $P_l$  に関して高々 1 次式でその係数だけを取り出し、そのインデックス  $i, j$  を動かして得られる行列は反対角下三角行列となり非退化である」事が言える (読者自ら考えよ。ヒント ::  $\Delta^2$  の  $P_l$  に関する次数と行列 (4) のサイズが一致している)。別の言い方をすると

$$J(dP_i, dP_j) := \frac{\partial}{\partial P_l} I^*(dP_i, dP_j) \quad (5)$$

を内積とすれば非退化内積になるというわけである。ここで、注意するのは 基本不変式の中で  $P_l$  の次数が最大と言う事は  $\partial/\partial P_l$  は次数最小のベクトル場と言う事で定数倍をのぞいて基本不変式系の取り方によらずユニークに決まる (これが 2. の最後に述べた原始方向または unit 方向と成る) という事実である。即ち空間  $S$  の余接空間  $T^*(S)$  の上に非退化な内積  $J$  が intrinsic に定義されたのである。この内積を  $A_3$  型の例で具体計算していて奇妙な事に気付いた。

即ち、i) 基本不変式をうまく選ぶと (5) の内積表は定数係数の反対角行列となる、ii) その様な基本反不変式系は up to constant factor で唯一しかない。

これこそ、探していた空間  $S$  の平坦座標系ではないのか! そう直感した私は、当時 ('75 年頃?) 私は佐藤スクール周辺の人々とコンタクトがあったが、どういう経過だったかその中でも一番若かった矢野環氏と関口次郎氏を駒場の第一研究室 (旧駒場寮の一部、現在は存在しない) に招いてこの事実を説明し「同様なことが任意の有限鏡映群で生じていると思う。それ等の平坦座標系を片っ端から計算しよう」と提案した。その提案はすぐには信じて貰えなかった様だが、しばらくして彼らより「 $H_3$  型の場合をパソコンで計算して正しいこと (平坦座標系が存在すること) が分かった」と、興奮しながらの連絡を貰った。それで、本格的に乗り出したが、その仕事は任意の鏡映群の不変式環を具体的書き下すことから始まるかなりの膨大な計算 (それは矢野-関口氏等の計算力に完全に頼った) でその完成まで数年かかり 1979 に論文が出来た。これが今日、平坦構造 (そ

<sup>1</sup> 古典的 Weierstrass 型の楕円積分論では楕円曲線族  $F = y^2 - (4x^3 - g_2x - g_3)$  に対して、第一種微分  $\zeta$  を二つの (消滅) サイクルの基底  $\gamma_1, \gamma_2$  上積分することにより多価周期写像  $(g_2, g_3) \in S \setminus D \mapsto (\oint_{\gamma_1(\mathbf{g})} \zeta, \oint_{\gamma_2(\mathbf{g})} \zeta) \in \mathbb{C}^2$  が定まる (ここでサイクル  $\gamma$  という言葉でサイクルの水平族  $\gamma(\mathbf{g})$  ( $\mathbf{g} \in S \setminus D$ ) を現しているが誤解はないであろう)。サイクル  $\gamma_1, \gamma_2$  の交叉数の符号を適当に取ってやると、周期写像の値域は  $\hat{\mathbf{H}} := \{(\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{C}^2 \mid \Im(\omega_1/\omega_2) > 0\}$  となり、逆写像  $\hat{\mathbf{H}} \rightarrow S \setminus D$  が Eisenstein 級数  $g_2 = 60 \sum_{m,n \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} 1/(m\omega_1 + n\omega_2)^4$ ,  $g_4 = 140 \sum_{m,n \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} 1/(m\omega_1 + n\omega_2)^6$  により与えられる。

の命名は成木勇夫氏による、後にはフロベニウス多様体構造と呼ばれる構造に関する最初の論文で、その具体式まで完全に記述した唯一のものとして、未だに基本文献となっている。

ここで、同時に進行した平坦構造の理論的考察にも触れておく。上記の平坦座標系の存在とその一意性の証明は計量  $J$  が非退化かつ平坦であること、即ち  $J$  に対応する Levi-Civita connection が integrable であることを言えば良いが、それは元々の Killing form  $I$  が平坦であること（即ち、 $V$  上では定数係数の内積であること）に還元できる。その還元の為には技術的に対数加群 4.(2) に  $(\partial/\partial P_i)^{-1}$  の作用により定まる半無限の filtration を入れる議論が必要で、後に原始型式を導入する際必要だった filter 付き De Rham cohomology の理論（それは半無限 Hodge 構造、非可換 Hodge 構造、または Saito 構造と呼ばれる）の原型になるのだが、技術的な話なのでここでは割愛する。他方、鍵補題 1. はカナダ人数学者 Coleman により示された次の補題から導かれる。

**補題 2 (Coleman).** Weyl 群の基本鏡映  $s_1, \dots, s_\mu$  の積である Coxeter 変換  $c$  の位数を  $h$  とする。すると 1 の原始  $h$  乗根は  $c$  の固有値となり、それに属する固有ベクトルはいかなる鏡映面にも含まれない (固有ベクトルの regularity)。

補題 2.  $\rightarrow$  補題 1. の証明概略: 1 の原始  $h$  乗根固有値に対する  $c$  の固有ベクトルを  $\xi$  とする。  $i = 1, \dots, \mu - 1$  に対し  $\deg(P_i) < h$  なので、  $P_i(\xi) = 0$ 。他方  $\xi$  は鏡映面に入らないので  $\Delta^2(\xi) \neq 0$ 。もともと  $\Delta^2$  は  $P_1, \dots, P_\mu$  の多項式であったのだから、この事は  $\Delta^2$  は  $P_\mu$  の巾だけから成る monomial を含んでいる。了

**Remark.** 上記の証明概略で分かるように Coxeter 変換の原始根固有ベクトル  $\xi$  は商空間  $S = V/W$  の中に射影すると原始方向（つまり  $P_1(\xi) = \dots = P_{\mu-1}(\xi) = 0$  かつ  $P_\mu(\xi) \neq 0$ ）と成り、更にそれはディスクリミナント  $D$  に transversal となる。この事は単に上記の平坦構造の構成に必要であったのみならず、後に何度も使う非常に基本的な事実である。

**6. Torsion free connection:** ここで 3. で議論した、消滅サイクルに対する Gauss-Manin 接続に戻る。当時私はある課題（後に原始性と呼ばれる）を抱えていた。既に脚注 1 で見たように、古典的 Weierstrass 型の楕円積分論の周期写像では、第一種微分  $\zeta$  唯一個を積分するので定義域  $S$  の次元  $\mu$  と値域  $\tilde{H}$  の次元  $\mu$  とが一致する。更にその周期写像は maximal rank である事が示せ局所同相写像となるので、逆写像を考える事は意味が有り (Jacobi の逆問題)、結果として大域的な逆写像を与える Eisenstein series が登場することになる。

**問題 2.** では消滅サイクルに対する De Rham コホモロジー群  $\mathcal{H}_F$  の中で  $\zeta$  に相当する特別な微分形式を取り出す方法はあるだろうか。楕円積分のときは楕円曲線をコンパクトな多様体と思ったときに大域的に正則微分形式は一次元しか無い（即ち楕円曲線はカラビ-ヤウ多様体となる）が、いま考えている消滅サイクルに対する Gauss-Manin connection では  $F(\mathbf{x}, \mathbf{t})$  で定まる超局面はコンパクトでない。其の様な開多様体（の族）に対し特定の微分形式 ( cohomology class) を選別する方法は有るのだろうか。

この問いに対する一つの答えは後に原始形式で与えられるのだが、そこに至るには、2 ステップがある。先ず試みに、何も考えずに、すべてのコホモロジー類を平等に扱うためにコホモロジー群  $\mathcal{H}_F$  の  $\mathcal{O}_S$ -free basis  $\zeta_1, \dots, \zeta_\mu$  及び消滅サイクル加群の  $\mathbf{Z}$ -基底  $\gamma_1, \dots, \gamma_\mu$  を選べば、“周期写像”は  $S \setminus D \mapsto \left( \oint_{\gamma_i(\mathbf{t})} \zeta_j \right)_{ij} \in \mathbf{C}^{\mu^2}$  と定義できるであろう（もっと intrinsic な言い方も可能だが略）。すると勿論この値域の次元  $\mu^2$  は定義域の次元  $\mu$  より ( $A_1$  の場合を除いて) 大きくなり、 $\mu^2$  次元の値域の中で  $\mu$  次元の像と成る部分多様体を決定せよという問題が生じる (Schottky problem の類似)。

しかし直ちにこのアプローチは単純すぎる事がわかる。まず、 $\mathcal{H}_F$  を単に  $\mathcal{O}_S$ -加群と見なしているときはその元の間の差別化は出来なかったが、 $\mathcal{D}_S$ -加群と見なすと別の視点 (従属関係) が見えてくる（これが第一ステップ）。次には  $\mathcal{H}_F$  にはある種の内積構造（後に高次剰余構造として定式化する）が入り、それによって元の間に強い相互関係が生じる（これが第二ステップ）。

まず第一ステップから見ていく。5. の平坦構造の話にもどる。そこでは、平坦構造とは (5) で与えられた内積  $J$  に対する Levi-Civita connection  $\nabla/$  が可積分であることを示す必要があった。そしてその事は、(4) で与えられた内積  $I$  に対する Levi-Civita connection  $\nabla$  が可積分であることに帰着した。ところでこの  $I$  は Killing form として知られているが、それは定数倍を除いて対応するリー環の root lattice 内積となる。一方 Brieskorn は 4. で述べたように単純特異点の universal unfolding を対応するリー環の言葉で記述していた

が、特にリー環の root lattice と単純特異点の消滅サイクルのなす加群は同一視され、更にそれ等の加群上定義された Killing form と消滅サイクルの交叉型式とは同一視される。従って、内積 (4) に対する Levi-Civita connection  $\nabla$  と Gauss-Manin connection  $\nabla$  とは同一視される！つまり、De Rham 加群  $\mathcal{H}_F$  と対数的接バンドル  $Der_S(\log(\Delta^2))$  とが同一視され、従って特に、Gauss-Manin connection の共変微分  $\nabla$  は対数的アフィン接続、即ち対数的接バンドルの上に定義された接続とみなせてそのトーションテンソル  $\text{Tor}(\nabla)$  は消えている。即ち、 $S$  上の二つのベクトル場  $v_1, v_2 \in Der_S(\log(\Delta^2))$  に対し

$$\text{Tor}(\nabla)(v_1, v_2) := \nabla_{v_1} v_2 - \nabla_{v_2} v_1 = 0 \quad (6)$$

と成る。これは周期の間の微分関係、もっと強く可積分条件  $v_1 \oint_{\gamma(\mathbf{t})} v_2 = v_2 \oint_{\gamma(\mathbf{t})} v_1$ , を意味している。従って、任意の消滅サイクルの水平族  $\gamma(\mathbf{t})$  ( $t \in (S \setminus D)^\sim = S \setminus D$  の普遍被覆空間) に対し ( $t$  に関して局所的に) ある原始関数  $\omega_\gamma(\mathbf{t})$  が存在し、 $v\omega_\gamma(\mathbf{t}) = \oint_{\gamma(\mathbf{t})} v$  ( $\forall v \in Der_S(\log(\Delta^2))$ ) となる。したがってそれ等を  $(S \setminus D)^\sim$  上大域的にはりあわせて、多価周期写像を

$$\mathbf{t} \in (S \setminus D)^\sim \mapsto (\omega_{\gamma_i}(\mathbf{t}))_{i=1}^\mu \in \mathbf{C}^\mu \quad (7)$$

と定義すれば定義域と値域の次元が等しい局所同相な写像が得られる。まだスペクトル次元 (=connection matrix の対角成分  $d\Delta^2/\Delta^2$  の係数) をどう取るかという課題は残っているが、一先ず楕円積分による周期写像の一般化が行われたとみなす (スペクトル次元が偶数=2 のとき周期写像はディスクリミナント  $D$  の generic points まで接続され、そこでは逆写像は有限分岐被覆と成っている。即ちディスクリミナント  $D$  の像は周期領域の中で鏡映面の配置集合となる。奇数=1 の時には、周期領域の境界にパラボリック固定点が現れる)。ここで一旦、元来の消滅サイクルに対する対数的周期写像の視点を離れて話を可積分の接続に関する問題に一般化すると次の問題提起が出来る。

**問題 3.** 与えられた一般の (ディスクリミナントとは限らない) 対数的に自由な因子  $D$  に対し、対数的アフィン可積分接続

$$\nabla : Der_S(-\log(D)) \times Der_S(-\log(D)) \rightarrow Der_S(-\log(D))$$

を考えよ。それ等はどの位あるのか。次にその良いスペクトル次元の時の “周期写像 (7)” およびその逆写像を考察 (記述) せよ (Jacobi の逆問題)。

この課題について私自身も幾つかの簡単な事例を調べたが、関口次郎氏はこの課題について広範に研究されて、多くの興味ある事例を発見されている。他にも A.Alexandrov 氏、等の研究もある。

**7. 原始型式と高次剰余理論.** ここで問題 2. に対する原始型式による解答に戻ろう。我々は第一ステップの途中であったが、それはまだ完了していない。本節では、その解答を概説する (記号の煩雑さを避けるためにしばしば、 $S$  上の層とその原始方向 ( $\partial/\partial t_1$  方向) の global sections の加群とを混同する。)

上記 (7) の周期写像に関する議論では、単純特異点の場合に可積分条件 (6) は積分関数達  $\oint_{\gamma}(\mathbf{t})v$  に対する原始関数の存在を示すのに用いたが、その議論を完成させるためには、任意の孤立特異点の消滅サイクルに対して 関数のレベルではなく De Rham コホモロジー群  $\mathcal{H}_F$  のレベルで  $\mathcal{O}_S$ -加群の同型:

$$Der_S \simeq \mathcal{H}_F, \quad v \mapsto \nabla_v(\nabla_{\partial/\partial t_1})^{-1}\zeta, \quad (8)$$

を与えるような “原始性” をもつ  $\zeta$  の存在 (つまり、 $\mathcal{H}_F$  は  $\mathcal{D}_S$ -加群として “一階単独生成” と成ること) を言うべきである。但し、ここで  $\partial/\partial t_1$  はパラメータ空間  $S$  の原始方向であり、単純特異点の時には  $\partial/\partial P_i$  であったことを思いだそう。実際この同型を遂行するには、すでに 5. の最後に述べたように減少フィルトレーション:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_F &= \mathcal{H}_F^{(0)} \supset \mathcal{H}_F^{(-1)} \supset \mathcal{H}_F^{(-2)} \supset \dots \\ \mathcal{H}_F^{(-k)} &:= (\nabla_{\partial/\partial t_1})^{-k} \mathcal{H}_F \quad (k \in \mathbf{Z}_{\geq 0}) \end{aligned} \quad (9)$$

の議論が必要となり、本稿の枠を越えてしまう。興味ある読者は私の原論文または私と高橋篤史氏との共著の解説論文を見ることを勧める。

それでは (8) の同型を与える  $\zeta$  はどの位あるだろうか。実は殆ど全ての volume form (即ち top degree の微分形式で係数が零値を取らないもののコホモロジー類) は (すくなくとも  $S$  の原点の近傍では) (8) の同型を与える。即ち原始性の条件 (8) だけではある特定のクラスを選別することは出来ない。にもかかわらず原始性を持つ  $\zeta$  が果たす重要な役割を以下に指摘しておこう (多少技術的で面倒な話なので急ぐ読者はこの項を飛ばしてもかまわない)。

まず少し戻って、消滅サイクルに対する Hodge 構造について述べる。当時 (70 年代半ば) 既に Deligne による Hodge 理論が現れていたとは言え、代数幾何では Griffiths 流の Hodge 理論がメジャーであった。そこでは Hodge filtration は De Rham cohomology 群を有理関数係数まで拡張してやると、その極の位数で Hodge filtration を入れると言う考え方である。我々の消滅サイクルに対する De Rham cohomology group である  $\mathcal{O}_S$ -free module  $\mathcal{H}_F$  についてその方針を採ると、まずは  $S$  上ディスクリミナント  $D$  に極を持つような有理型関数環をテンソルして  $\mathcal{H}_F(*D)$  を考え、次にその中で極 (または零点の) 位数を不等式で指定した部分加群  $\mathcal{H}_F(kD)$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) の増大列を考えよと言うものである。私も当初その様に考えていて、1976 年 Varchenko 氏に Bonn で初めて会ったときはそのアイデアを同氏に解説した記憶がある。しかしその後すぐにその考えでは、消滅サイクルのように非コンパクト多様体の Hodge 理論を考えるとときには整数の exponent が有るときには破綻することに気が付いた。つまり、フィルトレーションが退化してしまう。それに代わって採択すべきなのが (9) で採用したような “pseudo-differential operator” を用いて filtration を定義することが適切である事はすぐに分かった。この考えはすぐには Brieskorn ら特異点研究者には支持されなかったが、Malgrange や 柏原氏と話して彼らも僕の考えが良いと同意してくれ助かった記憶がある (後に彼らが  $D$ -module で Hodge 理論を記述する時も当然ながら微分の位数で filtration を定めている)。数年して Varchenko に何らかの研究会で会ったときに彼が未だ極の位数を使って Hodge filtration を定義しており「それではうまくいかない」とぼやくのを聞いた。それは上に述べたように整数値 exponent が有るときにその定義では退化してしまうのが問題だったのである。

さて、原始性を持つクラス  $\zeta$  の役割についての議論に戻ろう。古典的な射影多様体やコンパクトケーラー多様体の時に有限次元のコホモロジー群に Hodge filtration はイントリンシックに定まっている (Griffiths, Deligne) がコホモロジー群をその graded piece の直和と同一視する (つまり filtration を split する) には多様体に (ケーラー) 計量の一つ選んで、コホモロジー群を それに関する harmonic form の張るベクトル空間 達によって直和分解する方法があったことを思いだそう。それでは、(9) を Hodge filtration と見なしたときに、その graded pieces の直和 (の何らかの完備化) と元の加群  $\mathcal{H}_F$  との同一視 (つまり filtration (9) の splitting) はどうしたら得られるであろうか。不思議なことに原始性を持つ  $\zeta$  の選択がその役割を果たすのである。その事を説明する為には  $S$  上の正則ベクトル場のなす加群  $Der_S$  の次の直和分解を用いる。

$$Der_S = Der_S(-\log(D)) \oplus \mathcal{G}. \quad (10)$$

但し ここで  $\mathcal{G} := \{v \in Der_S \mid [\partial/\partial P_i, v] = 0\}$ . すると、 $\zeta$  が原始性を持つとき  $\zeta^{(-k)} := (\partial/\partial t_1)$  とおくと、 $\mathcal{O}_S$ -isomorphism:  $Der_S \simeq \mathcal{H}^{(-k)}$ ,  $v \mapsto \nabla_v \zeta^{(-k-1)}$  は次の短完全列の間の同型を引き起こす。

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & Der_S(-\log(D)) & \rightarrow & Der_S & \rightarrow & \mathcal{G} \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & \mathcal{H}_F^{(-k-1)} & \rightarrow & \mathcal{H}_F^{(-k)} & \rightarrow & \mathcal{H}_F^{(-k)}/\mathcal{H}_F^{(-k-1)} \rightarrow 0 \end{array} \quad (11)$$

ここで、(9) と (10) を組み合わせれば  $\mathcal{H}_F$  は完備無限直和

$$\hat{\bigoplus}_{k=0}^{\infty} \mathcal{G} \cdot \zeta^{(-k-1)} \quad (12)$$

に埋め込める (ここで  $\mathcal{G}$  の作用の共変微分  $\nabla$  は略記した)。

1979 年 4 月私は数理解析研究所に移り、特定の原始型式を選別する課題に取り組んでいた。その時考えていたのは (12) で与えられた直和分解を、古典 Hodge 理論同様に直交分解と理解したいと言う事だった。その為に (5) で与えられる内積  $J$  は  $\mathcal{H}_F$  側では次のような古典的な residue 理論でかけるという事実があった。即ち  $\zeta_1 = [\phi(\mathbf{x}, \mathbf{t})d\mathbf{x}]$ ,  $\zeta_2 = [\psi(\mathbf{x}, \mathbf{t})d\mathbf{x}] \in \mathcal{H}_F$  とすると、その内積  $J$  は古典的剰余理論

$$K^{(0)}(\zeta_1, \zeta_2) := \text{Res} \left[ \frac{\phi(\mathbf{x}, \mathbf{t})\psi(\mathbf{x}, \mathbf{t})d\mathbf{x}}{\frac{\partial F}{\partial x_1} \dots \frac{\partial F}{\partial x_n}} \right] \in \mathcal{O}_{S'}$$

を用いて定義できる (但し  $\mathcal{O}_{S'} = \ker(\partial/\partial t_1 : \mathcal{O}_S \rightarrow \mathcal{O}_S)$ )。しかし、この内積は実質は  $\mathcal{H}_F^{(0)}/\mathcal{H}_F^{(-1)}$  つまり直和分解の第一項の非退化内積の引き戻しと成っており、 $\mathcal{H}_F^{(-1)}$  の元を検出する事は出来ない。その夏東京に置いてきた学生達 (野海氏ほか) が数研を尋ねてきた際、どの様な経過であったか次のような反対称内積があるという話をした：

$$K^{(-1)}(\zeta_1, \zeta_2) := \sum_{i=1}^n \text{Res} \left[ \frac{\frac{\partial \phi(\mathbf{x}, \mathbf{t})}{\partial x_i} \psi(\mathbf{x}, \mathbf{t}) - \phi(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \frac{\partial \psi(\mathbf{x}, \mathbf{t})}{\partial x_i} d\mathbf{x}}{\frac{\partial F}{\partial x_1} \cdots \left( \frac{\partial F}{\partial x_i} \right)^2 \cdots \frac{\partial F}{\partial x_n}} \right] \in \mathcal{O}_{S'}.$$

この内積は  $\mathcal{H}_F^{(0)}$  と  $\mathcal{H}_F^{(-1)}$  との“初項”の関係を検出できるがその先は出来ない。程なくして私は  $K^{(-2)}$  と呼ぶ対称内積を発見した。もはやこの様な内積の無限系列がある事は疑う余地なかったが、具体公式は既に煩雑でそのまま一般化するわけにはいかなかった。その年の9月から私は廣中平祐氏の招聘で Harvard 大学で過ごした。そこで私は  $F$  の critical point set にサポートを持つ相対コホモロジー群を用いることにより内積の無限系列

$$K^{(-k)} : \mathcal{H}_F \times \mathcal{H}_F \rightarrow \mathcal{O}_{S'} \quad k \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$$

であって「(i)  $K^{(-k)}$  は  $k$  の偶奇に応じて symmetric または skew-symmetric, (ii)  $K^{(k+1)}(\zeta_1, \zeta_2) = K^{(k)}(\nabla_{\partial/\partial t_1} \zeta_1, \zeta_2)$ , (iii)  $vK^{(k)}(\zeta_1, \zeta_2) = K^{(k)}(\nabla_v \zeta_1, \zeta_2) + K^{(k)}(\zeta_1, \nabla_v \zeta_2)$ , (iv)  $K^{(k)}(t_1 \zeta_1, \zeta_2) - K^{(k)}(\zeta_1, t_1 \zeta_2) = (n+k)K^{(k-1)}(\zeta_1, \zeta_2)$ , (v)  $K^{(0)}$  は古典剰余理論で与えられたものと一致する。」を満たすものが作れた。この無限系列の内積を higher residue pairings とよぶ。

この構成ではそれまで単純に  $\mathcal{H}_F$  を  $F = 0$  から定まる超平面の族に対する相対 DeRham cohomology group と見なししていた (もともとの Brieskorn による視点) のではなくて、de Rham 微分作用素  $d$  と  $F$  の微分  $dF$  の外積作用の一次結合  $\delta_1^{-1} d - dF \wedge$  に関するコホモロジー理論の方が適切である事に気付いた (但し  $\delta_1$  関数  $F$  の定数パラメーター  $t_1$  の Fourier dual 変数を表している ( $\partial/\partial t_1$  のシンボル)。今日ではその様な一次結合を考えることは普通に行われているが、私の記憶では当時その様なことを書いた文献は見当たらず、私はその様な一次結合を考えた最初 (の一人) であると思う。<sup>2</sup>

さて、頁数も予定を超してしまったので、最後に原始型式の定義を天下一的に与えて本稿を終えることにする。

**定義.**  $\mathcal{H}_F$  の元  $\zeta$  が原始型式であるとは以下の五条件を満たすことである。

- (i) 原始性：  $\zeta$  は (8) の意味での原始性をもつ。
- (ii) 直交性：  $k > 0$  に対して  $K^{(k)}(\nabla_v \zeta^{(-1)}, \nabla_{v'} \nabla^{(-1)}) = 0$  .
- (iii) 斉次性： 定数  $r \in \mathbf{C}$  があって  $\nabla_E \zeta^{(0)} = (r-1)\zeta^{(0)}$  .
- (iv) 微分条件：  $k \geq 2$  に対して  $K^{(k)}(\nabla_v \nabla_{v'} \zeta^{(-2)}, \nabla_{v''} \nabla^{(-1)}) = 0$  .
- (v) 関数条件：  $k \geq 2$  に対して  $K^{(k)}(t_1 \nabla_v \zeta^{(-1)}, \nabla_{v'} \nabla^{(-1)}) = 0$  .

条件 (ii) 一つ一つの条件について、その意味を解説したいが、それは別の機会に譲る。この様な原始型式を与えると、空間  $S$  の上に平坦構造を定義できることは、ほぼ自明な帰結となる。

**終わりに.** 当稿では Siegel や Artin 等の数学に導かれて、平坦構造、対数的アフィン可積分接続、そして原始型式に導かれた経緯をスケッチしてみた。

しかし、短時間に熟考する間もなく一気に書き下したもので、今読み返してみても、説明不足であったり、逆にずらずらとメリハリがなく書いたり、最後は駆け足になってしまった。変数  $t_1$  の取り扱いも、原論文の古いスタイルと斎藤-高橋による新スタイルとが混線している可能性がある。今回は書き直す時間はないが、機会あればもう少し読めるきちんとしたものを書き直したい。

本稿では一切立ち入ることが出来なかったが続いて'80年代、'90年代に研究した、一般化されたルート系やリー環 (楕円リー環、カスピダルリー環、e-ハイパボリックリー環など) や一般化した weight 系からのアプロー

<sup>2</sup>後知恵であるが、このオペレーター  $\delta_1^{-1} d - dF \wedge$  は oscillatory integral 型の微分形式  $e^{\delta_1 \cdot F(\mathbf{x}, \mathbf{t})} \omega$  (ここで  $\omega$  は変数  $\mathbf{x}, \mathbf{t}$  に関する関数を係数にもつ 変数  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  に関する微分形式) に対する複体における微分と見なすのが自然である。そう見ると、原始型式がその後物理と深く関わる様になったことが了解できる。しかし高次剰余理論と oscillatory integral の直接的な関係は余り論じられていない様にみえる。今後の課題なのであろう。



チや、高エネルギー物理 (String Theory, Landau-Ginzburg model や Super conformal field theory, Mirror Symmetry 等) との関連についても、機会あれば書いてみたい。

謝辞. 本稿を書く機会を頂いた三松佳彦氏及び関口次郎氏に、そして、つたない稿にお付き合い願った読者諸氏に心からの感謝を申し上げます。

## 参考文献

- [1] Egbert Brieskorn, *Die Monodromie der isolierten Singularitäten von Hyperflächen*, Manuscripta Math. **2** (1970), 103–161.
- [2] Egbert Brieskorn, *Singular elements of semi-simple algebraic groups*, Actes du Congrès International des Mathématiciens (Nice, 1970), Tome 2, pp. 279–284. Gauthier-Villars, Paris, 1971.
- [3] Pierre Deligne, *Theorie de Hodge*
- [4] Phillip Griffiths and Joseph Harris, *Principles of algebraic geometry*, Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York, 1978. Pure and Applied Mathematics.
- [5] Kyoji Saito, *Quasihomogene isolierte Singularitäten von Hyperflächen*, Invent. Math. **14** (1971), 123–142.
- [6] Kyoji Saito, *On the periods of primitive integrals*, Lectures in Harvard University, 1980; unpublished.
- [7] Kyoji Saito, *The higher residue pairings  $K_F^{(k)}$  for a family of hypersurface singular points*, Singularities, Part 2 (Arcata, Calif., 1981), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 40, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1983, pp. 441–463.
- [8] Kyoji Saito, *Period mapping associated to a primitive form*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **19** (1983), no. 3, 1231–1264.
- [9] Kyoji Saito, *On a linear Structure of the Quotient Variety by a finite Reflection Group*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **29** (1993), 535–579.
- [10] Kyoji Saito, *Duality for Regular Systems of Weights*, Asian. J. Math. **2** (1998) no.4, 983–1048.
- [11] Kyoji Saito, *Uniformization of the orbifold of a finite reflection group*, in Frobenius Manifolds, C. Hertling, M. Marcolli (eds.), Aspect Math. **E36** (2004), 265–320.
- [12] Kyoji Saito, *Primitive Automorphic Forms*, Mathematics Unlimited - 2001 and Beyond, edited by Engquist & Schmidt, Springer Verlag, (2001) 1003–1018.
- [13] Kyoji Saito, Atsushi Takahashi, *From primitive forms to Frobenius manifolds*, From Hodge theory to integrability and TQFT  $tt^*$ -geometry, 31–48, Proc. Sympos. Pure Math., 78, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008.
- [14] Kyoji Saito, Tamaki Yano and Jiro Sekiguchi, *On a certain generator system of the ring of invariants of a finite reflection group*, Comm. algebra **8** (1980), 373–408.
- [15] Jiro Sekiguchi

# 平坦構造の一般化と大久保型方程式のモノドロミ保存変形

眞野 智行 (琉球大学)

概要: 1970 年代終わりに, 斎藤恭司氏は孤立特異点の普遍回折のパラメータ空間上に平坦構造の概念を導入した. この構造は 1990 年代に, 位相的場の理論における WDVV 方程式の幾何学的理解を動機として B. Dubrovin により再発見され, Frobenius 多様体の理論として知られている. 現在では Frobenius 多様体の一般化として, Hertling-Manin による F-manifold や C. Sabbah による Saito structure (without metric) などいくつかの概念が知られている.

一方, 複素領域上の線形微分方程式は非常に古典的な対象であるが, N. Katz による middle convolution の導入を一つの契機として近年非常に大きな進展があった ([Ma1] などを参照). 大久保型方程式は, そこで中心的な役割を果たす線形微分方程式のクラスであり, ガウスの超幾何方程式の一つの自然な一般化になっている.

[Ma2] において, 平坦構造の一般化として C. Sabbah による Saito structure (without metric) が用いられた. 定義により Saito structure (without metric) には積分可能な対数接続が付随することが示せるが, ここに現れる対数接続は一般のものではなく実は大久保型方程式の普遍可積分変形 (特にモノドロミ保存変形) になっていることが分かる. この逆も正しく, (大雑把に言うと) 次の対応が証明された:

正則半単純な Saito structure (without metric)

$\iff$  正則半単純な大久保型方程式の普遍可積分変形

この対応は [Ma3] において不確定特異点を含む場合 (正則だが半単純でない場合) に拡張された. この対応からいくつかの結果が得られる:

- (well-generated な) 複素鏡映群の軌道空間上の平坦座標の導入
- 第 2-6 パンルヴェ方程式と拡張された WDVV 方程式の同値性
- 第 6 パンルヴェ方程式の代数解に対するポテンシャルベクトル場の明示的記述

講演ではこれらの内容についてお話ししたい.

## REFERENCES

[Ma1] 原岡喜重: 複素領域における線形微分方程式, 数学書房, 2015.

[Ma2] M. Kato, T. Mano and J. Sekiguchi: Flat structure on the space of isomonodromic deformations. arXiv:1511.01608

[Ma3] H. Kawakami and T. Mano: Regular flat structure and generalized Okubo system. arXiv:1702.03074

# 複素鏡映群の平坦不変式

加藤満生 (琉球大学)

概要: 対角化可能行列  $T$  と, 対角行列  $B_\infty$  により定義される大久保型常微分方程式

$$(1) \quad dY = -(zI_n - T)^{-1} B_\infty dz Y$$

を多変数に拡張した, 多変数大久保型微分方程式

$$(2) \quad dY = -(x_n I_n - T_0(x'))^{-1} \left( I_n dx_n + \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{B}^{(i)}(x') dx_i \right) B_\infty Y$$

を考える. ここで,  $x = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = (x', x_n)$  と記した.

本講演では多変数大久保型微分方程式の構造、可積分条件について述べ、そこから平坦座標と呼ばれる特別な座標関数  $t_i = t_i(x)$ ,  $1 \leq i \leq n$  を定義し、平坦座標で表示された大久保型微分方程式の構造も示す。

次に、 $n$  次元ベクトル空間  $U_n = \{(u_1, \dots, u_n)\}$  に作用する有限既約複素鏡映群  $G$  に対し、 $G$  の orbit space  $X = U_n/G$  の上で定義され、 $G$  をモノドロミー群にもつ大久保型微分方程式 ( $G$ -quotient system) の存在を、その構成法を与えることにより示す。 $X$  の座標関数  $x_i$ ,  $1 \leq i \leq n$  は  $U_n$  上の  $G$ -不変多項式であり、また  $G$ -quotient system に対する平坦座標  $t_i(x)$ ,  $1 \leq i \leq n$  は  $x$  の多項式となるので、これを  $G$  の平坦不変式と呼ぶ。本講演では、 $G$  の不変多項式  $x_i = F_i(u)$ ,  $1 \leq i \leq n$  が与えられた時、それを使って  $G$ -quotient system を構成し、平坦不変式  $t_i(x)$ ,  $1 \leq i \leq n$  を求めるまでのアルゴリズムを述べ、またいくつかの例を示す。

## REFERENCES

- [K1] D. Bessis: Finite complex reflection arrangements are  $K(\pi, 1)$ . Ann. of Math. **181** (2015), 809-904.  
 [K2] G. C. Shephard and A. J. Todd: Finite unitary reflection groups. Canad. J. Math., **6** (1954), 274-304.

## パンルヴェ方程式とウェイト系

千葉逸人 (九大 IMI)

概要: 複素領域で定義された 2 階の常微分方程式のうち、「初期値に依存する解の特異点はただか極のみである」という性質を持つ方程式はパンルヴェ方程式と呼ばれ、1900 年ごろに発見されて以来、現在でも活発に研究されている。本講演では、微分方程式の不変量であるウェイト系を導入し、パンルヴェ方程式をウェイト系に付随する重み付き射影空間上の力学系とみなした解析法を紹介する。特に岡本初期値空間を最小回数のブローアップで構成し、それを自然数のデータ (ウェイトとコワレフスカヤ指数) のみで特徴づける。また、ウェイトと特異点論の関係についても述べる。

### Reference

- H. Chiba, The first, second and fourth Painleve equations on weighted projective spaces, J. Diff. Equ. 260, no. 2, 1263-1313, (2015)  
 H. Chiba, The third, fifth and sixth Painleve equations on weighted projective spaces, SIGMA 12, 019 (2016)  
 H. Chiba, Kovalevskaya exponents and the space of initial conditions of a quasi-homogeneous vector field, J. Diff. Equ. 259, no. 12, 7681-7716, (2015)  
 H. Chiba, Painleve equations and weights (preprint), <http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~chiba/paper/weight.pdf>

## 齋藤構造の概双対性と複素鏡映群

三鍋聡司 (東京電機大学工学部)

概要: 有限実鏡映群 (= 有限 Coxeter 群) の軌道空間上に、ある種の自然な平坦構造が存在することは、齋藤 [Mi8]、齋藤・矢野・関口 [Mi7] による基本的な結果である。この平坦構造とは、複素多様体の正則接束上に、平坦計量、可換で結合的な積構造、その積に関する単位元、オイラー・ベクトル場、という 4 つ組が与えられ、

それらが様々な可積分条件と整合性条件を満たすというものである。後に Dubrovin [Mi1] は、この構造を Frobenius 多様体という名で公理化した。齋藤らの構成の背景には、特異点の変形理論がある。群が ADE 型の場合は、軌道空間と、対応する単純特異点の半普遍変形の底空間は、周期写像を通して同型となる。この対応を介して、軌道空間上の平坦構造は、特異点側の消失サイクルの交差形式から決まる<sup>1</sup>。Dubrovin [Mi2] は、この構成について、Frobenius 多様体の概双対性<sup>2</sup> という解釈を与えている。

擬鏡映で生成される  $GL(n, \mathbf{C})$  の有限部分群を有限複素鏡映群と呼ぶ (分類は Shephard–Todd [Mi9])。実鏡映群の場合の平坦構造を、複素鏡映群に拡張することは、自然な問題であろう。本講演の主題は、有限複素鏡映群の軌道空間上の“計量なしの平坦構造”である。これは、平坦計量を出発点とするのではなく、平坦で振れない接続 (計量がある場合の Levi–Civita 接続に当たるもの) を出発点とする平坦構造で、一言で言えば Frobenius 多様体から計量に関する情報を忘れたものである。Sabbah [Mi6] に従い、以下ではこれを (計量なしの) 齋藤構造と呼ぶ。有限複素鏡映群の中に、duality groups<sup>3</sup> と呼ばれるクラスがある。これは、ある意味で良い性質を持つ複素鏡映群で、有限 Coxeter 群もこの中に含まれる。最近、加藤・眞野・関口 [Mi3] は、duality group  $G$  の軌道空間上に齋藤構造が存在すること、そしてそれは  $G$  をモノドロミー群に持つ多変数の大久保型方程式から決まることを示した。この構成は、有限 Coxeter 群の場合と同様に、齋藤構造の概双対性として理解できる [Mi4]。この見方では、上記の大久保型方程式は、軌道空間上の齋藤構造の概双対の平坦接続に他ならない。

講演では、齋藤構造とその概双対性の定式化を説明し、その視点から加藤・眞野・関口の構成がいかに捉えられるかを説明する。時間が許せば、duality group ではない有限複素鏡映群の場合の齋藤構造の存在問題に関しても、得られている結果を紹介したい。小西由紀子 (京大)、白石勇貴 (京大) との論文 [Mi4] に基づく。

## REFERENCES

- [Mi1] Dubrovin, B.: *Geometry of 2D topological field theories*, in Integrable systems and quantum groups (Montecatini Terme, 1993), 120–348, Lecture Notes in Math. 1620, Springer, Berlin, 1996.
- [Mi2] Dubrovin, B.: *On almost duality for Frobenius manifolds*, in Geometry, topology, and mathematical physics, 75–132, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 212, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.
- [Mi3] Kato, M., Mano, T. and Sekiguchi, J.: *Flat structure on the space of isomonodromic deformations*, arXiv:1511.01608 [math.CA].
- [Mi4] Konishi, Y., Minabe, S. and Shiraishi, Y.: *Almost duality for Saito structure and complex reflection groups*, arXiv:1612.03643 [math.AG].
- [Mi5] Orlik, P. and Terao, H.: *Arrangements of hyperplanes*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 300. Springer-Verlag, Berlin, 1992. xviii+325 pp.
- [Mi6] Sabbah, C.: *Déformations isomonodromiques et variétés de Frobenius*, EDP Sciences, Les Ulis; CNRS Éditions, Paris, 2002. xvi+289 pp.
- [Mi7] Saito, K., Yano, T. and Sekiguchi, J.: *On a certain generator system of the ring of invariants of a finite reflection group*, Comm. Algebra **8** (1980), no. 4, 373–408.
- [Mi8] Saito, K.: *On a linear structure of the quotient variety by a finite reflexion group*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **29** (1993), no. 4, 535–579. (Preprint version: RIMS-288, Kyoto Univ., Kyoto, 1979.)
- [Mi9] Shephard, G. C. and Todd, J. A.: *Finite unitary reflection groups*, Canadian J. Math. **6** (1954). 274–304.

<sup>1</sup> 正確には、鏡映群の不変式環の情報も必要である。

<sup>2</sup> Frobenius 多様体と、概 Frobenius 多様体というものの間の双対性。

<sup>3</sup> この名称は Orlik–寺尾 [Mi5] によるが、文献によっては well-generated groups と呼ばれることもある。

# ENCOUNTER with MATHEMATICS

(数学との遭遇, d'après Rencontres Mathématiques) へのご案内

中央大学 理工学部 数学教室

当研究科では France・Lyon の Ecole Normale Supérieure de Lyon で行われている RENCONTRES MATHÉMATIQUES の形式を踏襲した集会 "ENCOUNTER with MATHEMATICS" (数学との遭遇) を年 4 回ほどのペースで開催しております。

France では、2 か月に一度の Rencontres Mathématiques と、皆様よくご存知の年に 4 回の Séminaire Bourbaki という、二つの特徴ある研究集会が行われています。これらの集会では、多くの数学者が理解したいと思ってるテーマ、又は、より多くの数学者に理解させるべきであると思われるテーマについて、その方面の (その研究を直接行った本人とは限らない) 専門家がかなり良い準備をし、大変すばらしい解説をしています。

勿論、このような集会は、France に限らず、日本や世界中で行われており、Surveys in Geometry 等は、その好例と言えるでしょう。そのなかで Rencontres Mathématiques は分野・テーマを限定せずに、定期的に集会を開催しているという点で、特徴のある集会として、評価されていると思います。

Séminaire Bourbaki は、各講演 1 時間、1 回読み切りで、講演内容の level は、講究録で良く分かるとおりです。一方、Rencontres Mathématiques は、毎回テーマを一つに決め、二日間で計 5 講演、そのうち 3 つは、柱となる連続講演で、level は、Séminaire Bourbaki に比べ、より一般向きに、やさしくなっていますが、逆に、講演の準備は、大変かもしれません。

実際に ENS-Lyon で Rencontres Mathématiques がどのように運営されているかということについては、雑誌“数学”1992 年 1 月号の坪井俊氏の紹介記事を以下に抜粋させていただきますので御覧ください。

---

ここ ENS. Lyon の特色として、ほとんど毎月行われているランコントロール・マテマティークがあります。これは 1988 年秋から行われているそうですが、金曜、土曜に 1 つのテーマの下に 5 つの講演を行っています。その 1, 3, 5 番目の 3 つは同一講演者によるもので、残りの 2 つは一応それをサポートするものという形をとっています。1 つの分野のトピックを理解しようとするとき にはなかなか良い形式だと思いました。

私が興味をもって参加したものでは、1 月には‘3 次元のトポロジー’ (金曜に Turaev, De la Harpe, Turaev, 土曜に Boileau, Turaev), 3 月には‘複素力学系’ (金曜に Douady, Kenyon, Douady, 土曜に Tan Lei, Douady), 5 月には‘1 次元の幾何学’ (金曜に Sullivan, Tsuboi, Sullivan, 土曜に Zeghib, Sullivan) がありました。これまでのテーマでは、‘天体力学’, ‘複素解析’, ‘ブラウン運動’, ‘数論’, ‘ラムダカルキュラス’ など数学全般にわたっています。

ほとんどの参加者は外部から来るのですが、ENS.-Lyon には建物の内部に付属のアパートがあって、40~50 人のリヨン市外からの参加者はそこに宿泊できるようになっています。ランコントロール・マテマティークは自由参加ですが、参加する場合は、宿泊費、建物内のレストランで食べ放題の昼食代は ENS. Lyon の負担ですから、とても参加しやすい研究集会です。ランコントロール・マテマティークのテーマ、内容や講演者を考え、実際の運営にあっている ENS. Lyon のスタッフの努力で、フランスの新しい重要なセミナーとして評価されていると思います。

---

実際、Rencontres Mathématiques は多くの数学者に対して根深い数学文化を身につけるための良い機会として重要な役割を果たしているのみならず、若い大学院生たちに数学のより深い研究への動機付けを与える大切な場面を提供しています。

ENCOUNTER with MATHEMATICS もこれらのことを目標としたいと考えていますので、大学院生をはじめ多くの数学者の参加をお待ちしております。

このような主旨のもとに、

- 特定の分野へのテーマの集中は避ける
- up to date なテーマも良いが、古典的なテーマも取りあげる

といった点を特に注意して進めていきたいと考えています。

取りあげるテーマ等、この企画に関する皆様のご意見をお寄せ下さい。

## これまでに行われた ENCOUNTER with MATHEMATICS (講演者敬称略)

- 第1回 岩澤理論と FERMAT 予想 1996 年 11 月, 加藤 和也 (東工大・理), 百瀬 文之 (中大・理工), 藤原 一宏 (名大・多元)
- 第2回 幾何学者は物理学から何を学んだか 1997 年 2 月, 深谷 賢治 (京大・理), 古田 幹雄 (京大・数理研)
- 第3回 粘性解理論への招待 5 月, 石井 仁司 (都立大・理), 儀我 美一 (北大・理), 小池 茂昭 (埼玉大・理), 長井 英生 (阪大・基礎工)
- 第4回 Mordell-Weil 格子 9 月, 塩田 徹治 (立教大・理), 寺杣 友秀 (東大・数理), 斎藤 毅 (東大・数理)
- 第5回 WEB 幾何学 11 月, 中居 功 (北大・理), 佐藤 肇 (名大・多元)
- 第6回 トロイダル・コンパクト化 1998 年 2 月, 佐武 一郎 (中大・理工), 石井 志保子 (東工大・理), 藤原 一宏 (名大・多元)
- 第7回 天体力学 4 月, 伊藤 秀一 (東工大・理), 小野 薫 (お茶大・理), 吉田 春夫 (国立天文台)
- 第8回 TORIC 幾何 6 月, 小田 忠雄 (東北大・理), 梶田 幹也 (阪市大・理), 諏訪 紀幸 (中大・理工), 佐藤 拓 (東北大・理)
- 第9回 実 1 次元力学系 10 月, 坪井 俊 (東大・数理), 松元 重則 (日大・理工), 皆川 宏之 (北大・理)
- 第10回 応用特異点論 1999 年 2 月, 泉屋 周一 (北大・理), 石川 剛郎 (北大・理), 佐伯 修 (広島大・理)
- 第11回 曲面の写像類群 4 月, 森田 茂之 (東大・数理), 河澄 響矢 (東大・数理), 阿原 一志 (明大・理工), 中村 博昭 (都立大・理)
- 第12回 微分トポロジと代数的トポロジ 6 月,  
服部 晶夫 (明大・理工), 佐藤 肇 (名大・多元), 吉田 朋好 (東工大・理), 土屋 昭博 (名大・多元)
- 第13回 超平面配置の数学 10 月, 寺尾 宏明 (都立大・理), 吉田 正章 (九大・数理), 寺杣 友秀 (東大・数理), 斎藤 恭司 (京大・数理研)
- 第14回 Lie 群の離散部分群の剛性理論 2000 年 2 月, 金井 雅彦 (名大・多元), 納谷 信 (名大・多元), 井関 裕靖 (東北大・理)
- 第15回 岩澤数学への招待 4 月, 栗原 将人 (都立大・理), 佐武 一郎 (東北大/UC Berkeley), 尾崎 学 (島根大・総合理工),  
市村 文男 (横浜市大・理), 加藤 和也 (東大・数理)
- 第16回 Painlevé 方程式 6,7 月, 岡本 和夫 (東大・数理), 梅村 浩 (名大・多元), 坂井 秀隆 (東大・数理), 山田 泰彦 (神戸大・理)
- 第17回 流体力学 12 月, 木村 芳文 (名大・多元), 今井 功, 宮川 鉄郎 (神戸大・理), 吉田 善章 (東大・新領域創成科学)
- 第18回 Poincaré 予想と 3 次元トポロジ 2001 年 2 月, 小島 定吉 (東工大・情報理工), 加藤 十吉 (九大・理), 松本 幸夫 (東大・数理),  
大槻 知忠 (東工大・情報理工), 吉田 朋好 (東工大・理)
- 第19回 Invitation to Diophantine Geometry 4 月, 平田 典子 (日大・理工), 穴倉 光広 (京大・理), 小林 亮一 (名大・多元数理)
- 第20回 不変式論のルネサンス 9 月, 梅田 亨 (京大・理), 向井 茂 (京大・数理研), 寺西 鎮男 (名大・多元数理)
- 第21回 実解析への誘い 10 月, 新井 仁之 (東大・数理), 宮地 晶彦 (東京女子大・文理), 小澤 徹 (北大・理), 木上 淳 (京大・情報)
- 第22回 「離散」の世界 2002 年 2 月, 砂田 利一 (東北大・理), 小谷 元子 (東北大・理), 藤原 耕二 (東北大・理), 井関 裕靖 (東北大・理)
- 第23回 複素力学系 6 月, 穴倉 光広 (京大・理), 松崎 克彦 (お茶大・理), 辻井 正人 (北大・理)
- 第24回 双曲幾何 10 月, 小島 定吉 (東工大・情報理工), 大鹿 健一 (阪大・理), 藤原 耕二 (東北大・理), 藤原 一宏 (名大・多元)
- 第25回 Weil 予想 12 月, 堀田 良之 (岡山理大・理), 藤原 一宏 (名大・多元), 斎藤 毅 (東大・数理), 宇澤 達 (名大・多元)
- 第26回 極小曲面論入門 2003 年 3 月,  
山田 光太郎 (九大・数理), 小磯 深幸 (京教大・教育), 梅原 雅顕 (広大・理), 宮岡 礼子 (上智大・理工)
- 第27回 分岐被覆と基本群 4 月, 難波 誠 (阪大・理), 岡 睦雄 (都立大・理), 島田 伊知朗 (北大・理), 徳永 浩雄 (都立大・理)
- 第28回 リーマン面の退化と再生 11 月, 足利 正 (東北学院大・工), 今吉 洋一 (阪市大・理), 松本 幸夫 (東大・数理), 高村 茂 (京大・理)
- 第29回 確率解析 12 月, 楠岡 成雄 (東大・数理), 重川 一郎 (京大・理), 谷口 説男 (九大・数理)
- 第30回 Symplectic 幾何と対称性 2004 年 3 月,  
小野 薫 (北大・理), 森吉 仁志 (慶応大・理工), 高倉 樹 (中大・理工), 古田 幹雄 (東大・数理), 太田 啓史 (名大・多元)
- 第31回 スペクトル・散乱理論 2004 年 12 月, 池部 晃生, 峯 拓矢 (京大・理), 谷島 賢二 (学習院大・理), 久保 英夫 (阪大・理),  
山田 修宣 (立命館大・理工), 田村 英男 (岡山大・理)
- 第32回 山辺の問題 2005 年 1 月, 小林 治 (熊本大・理), 芥川 和雄 (東京理大・理工), 井関 裕靖 (東北大・理)
- 第33回 双曲力学系-安定性と混沌- 2005 年 2 月, 国府 寛司 (京大・理), 林 修平 (東大・数理), 浅岡 正幸 (京大・理), 三波 篤郎 (北見工大)
- 第34回 非線型の特異点論～Painlevé 方程式の応用 2005 年 7 月,  
大山 陽介 (阪大・情報), 村瀬 元彦 (UC Davis), 笈 三郎 (立教大・理)
- 第35回 山辺不変量 -共形幾何学の広がり- 2005 年 12 月, 小林 治 (熊本大・理), 石田 政司 (上智大・理工), 芥川 和雄 (東京理大・理工)
- 第36回 正 20 面体まつわる数学 2006 年 3 月, 増田 一男 (東工大・理), 加藤 文元 (京大・理), 橋本 義武 (阪市大・理)
- 第37回 数学者のための分子生物学入門ー新しい数学を造ろうー 2006 年 6 月, 加藤 毅 (京大・理), 阿久津 達也 (京大化学研究所),  
岡本 祐幸 (名大・理), 斎藤 成也 (国立遺伝学研究所), 田中 博 (東京医科歯科大)
- 第38回 幾何学と表現論 - Kostant-関口対応をめぐる - 2006 年 12 月,  
関口 次郎 (東京農工大・工), 中島 啓 (京大・理), 落合 啓之 (名大・多元), 竹内 潔 (筑波大・数学系)
- 第39回 Lusternik-Schnirelmann カテゴリ 2007 年 3 月,  
岩瀬 則夫 (九大・数理), Elmar VOGT (東大・数理/ベルリン自由大), 松元 重則 (日大・理工), 田中 和永 (早大・理工)
- 第40回 力学系のゼータ関数 - 古典力学と量子力学のカオス - 2007 年 5 月,  
首藤 啓 (首都大・理工), 盛田 健彦 (広大・理), 辻井 正人 (九大・数理)
- 第41回 Euler 生誕 300 年 - Euler 数と Euler 類を巡って 2007 年 9 月,  
佐藤 肇, 秋田 利之 (北大・理), Danny Calegari (Caltech/東工大・情報理工), 松本 幸夫 (学習院大・理), 森田 茂之 (東大・数理)
- 第42回 Euler 生誕 300 年 - Euler からゼータの世界へ - 2007 年 11 月,  
黒川 信重 (東工大・理工), 落合 啓之 (名大・多元), 平野 幹 (成蹊大・理工), 権 寧魯 (九大・数理)

- 第 43 回 **Euler 300 歳記念 流体力学・変分学編—始祖の業績と現在・未来への展開—** 2008 年 2 月,  
岡本 久 (京大・数理研), 鈴木 貴 (阪大・基礎工), 木村 芳文 (名大・多元)
- 第 44 回 **環境数理におけるモデリングとシミュレーション—数学は環境問題に貢献できるか—**2008 年 3 月,  
水藤 寛 (岡山大・環境), 太田 欽幸 (中大・理工), 伊藤 昭彦 (国立環境研究所), 柳野 健 (気象庁・気象研究所),  
渡辺 雅二 (岡山大・環境)
- 第 45 回 **McKay 対応を巡って** 2008 年 5 月, 松澤 淳一 (奈良女子大・理), 石井 亮 (広大・理), 伊藤 由佳理 (名大・多元),  
John McKay (Concordia 大/京大・数理研), 植田 一石 (阪大・理)
- 第 46 回 **幾何学的変分問題—神の選択・人間の方法—** 2008 年 9 月,  
西川 青季 (東北大・理), 長澤 壯之 (埼玉大・理), 利根川 吉廣 (北大・理)
- 第 47 回 **アクセサリー・パラメーターとモノドロミー—微分方程式の未開の領域を目指して—** 2008 年 10 月,  
原岡 喜重 (熊本大), 横山 利章 (千葉工業大), 加藤 満生 (琉球大), 大島 利雄 (東大・数理)
- 第 48 回 **微分方程式に対する逆問題—既知と未知が逆転したときに何が視えるか?—** 2008 年 11 月,  
望月 清 (中大・理工), 池島 優 (群馬大・工), 磯崎 洋 (筑波大・数理), 渡辺 道之 (東京理科大・理工), 山本 昌宏 (東大・数理)
- 第 49 回 **流体の基礎方程式—色々な視点から見た流体方程式—** 2009 年 2 月,  
小藪 英雄 (東北大・理), 西畑 伸也 (東工大・情報理工), 清水 扇丈 (静岡大・理), 松本 剛 (京大・理・物)
- 第 50 回 **ラドン変換—積分が拓く新しい世界—** 2009 年 5 月,  
寛 知之 (筑波大・数理), 木村 弘信 (熊大・自然), 磯崎 洋 (筑波大・数理), 大島 利雄 (東大・数理)
- 第 51 回 **正 20 面体にまつわる数学—その 2—** 2009 年 10 月, 作間 誠 (広島大・理), 関口 次郎 (東京農工大・工), 井上 開輝 (近畿大・理工)
- 第 52 回 **経路積分の数学的基礎—いつまでも新しい Feynman の発明—** 2010 年 1 月,  
一瀬 孝 (金沢大・理), 藤原 大輔 (学習院大・理), 加藤 晃史 (東大・数理), 熊ノ郷 直人 (工学院大・工)
- 第 53 回 **シュレーベルトカルキュラス—様々な数学の交流点—** 2010 年 3 月,  
池田 岳 (岡山理科大・理), 前野 俊昭 (京大・工), 原田 芽ぐみ (McMaster Univ.)
- 第 54 回 **頂点作用素代数入門** 2010 年 10 月, 原田 耕一郎 (オハイオ州立大), 山内 博 (東京女子大), 宗政 昭弘 (東北大), 宮本 雅彦 (筑波大)
- 第 55 回 **多変数複素解析 岡の原理—誕生から最近の発展まで—** 2011 年 2 月,  
大沢 健夫 (名大・多元), 平地 健吾 (東大・数理), 伊師 英之 (名大・多元)
- 第 56 回 **計算の複雑さの理論とランダムネス** 2011 年 5 月, 渡辺 治 (東工大・情報理工), 河内 亮周 (東工大・情報理工)
- 第 57 回 **偏微分方程式の接触幾何** 2011 年 10 月, 佐藤 肇 (名大・多元), 垣江 邦夫, 山口 佳三 (北大・理)
- 第 58 回 **モジュラー曲線の数論と幾何—その魅力と百瀬さんの足跡と** 2012 年 9 月, 斎藤 毅 (東大・数理), 玉川 安騎男 (京大・数理研),  
橋本 喜一郎 (早大・理工), 新井 啓介 (東京電機大・工), 加藤 和也 (Chicago 大)
- 第 59 回 **複素多様体上の岡・グ라우エルト理論—存在定理は空の上に—** 2012 年 10 月,  
大沢 健夫 (名大・多元), 松村 慎一 (東大・数理), 足利 正 (東北学院大・工)
- 第 60 回 **結び目理論とその不変量をめぐって** 2013 年 5 月,  
村杉 邦男 (トロント大), 作間 誠 (広大・理), 森藤 孝之 (慶大・経), 合田 洋 (東京農工大・工), 森下 昌紀 (九大・数理)
- 第 61 回 **代数曲面とその位相不変量をめぐって—代数曲面の地誌学—** 2014 年 6 月,  
宮岡 洋一 (東大・数理), 今野 一宏 (阪大・理), 村上 雅亮 (鹿児島大・理)
- 第 62 回 **波動方程式—古典物理から相対論まで—** 2014 年 9 月,  
小澤 徹 (早大・理工), 山口 勝 (東海大・理), 松山 登喜夫 (中大・理工), 中村 誠 (山形大・理)
- 第 63 回 **最適輸送理論とリッチ曲率—物を運ぶと曲率が分かる—** 2015 年 2 月,  
桑江 一洋 (熊本大・自然科学), 塩谷 隆 (東北大・理), 太田 慎一 (京大・理), 高津 飛鳥 (名大・多元数理), 田 和正 (東工大・理)
- 第 64 回 **複素解析と特異点—留数が解き明かす特異点の魅力—** 2016 年 2 月,  
諏訪 立雄 (北大・理), 田島 慎一 (筑波大・数理物質), 鍋島 克輔 (徳島大・総合科学), 伊澤 毅 (北科大・工)
- 第 65 回 **結び目の体積予想—量子不変量から見える幾何構造—** 2016 年 3 月,  
村上 順 (早大・理工), 横田 佳之 (首都大・都市教養)
- 第 66 回 **幾何学と特異点の出会い** 2016 年 3 月,  
石川 剛郎 (北大・理), 梅原 雅顕 (東工大・情報), 佐治 健太郎 (神戸大・理), 山田 光太郎 (東工大・理)
- 第 67 回 **AGT 対応の物理と数理** 2016 年 10 月,  
立川 裕二 (東大・IPMU), 中島 啓 (京大・数理研), 名古屋 創 (金沢大・理工), 柳田 伸太郎 (名大・多元数理), 松尾 泰 (東大・理)
- 第 68 回 **エルゴード理論と可微分力学系—一様双曲世界の向う側—** 2016 年 3 月,  
鷲見 直哉 (熊本大・先端科学), 鄭 容武 (広島大・工), 高橋 博樹 (慶應大・理工)

お問い合わせ 又は ご意見等

112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 中央大学理工学部数学教室 tel : 03-3817-1745

e-mail : yoshiATmath.chuo-u.ac.jp 三松 佳彦 / takakuraATmath.chuo-u.ac.jp 高倉 樹 (AT を@に変更)

ホームページ : <http://www.math.chuo-u.ac.jp/ENCwMATH>