ENCOUNTER with MATHEMATICS

第72回

完全 WKB 解析

－発散の向こう側に見えるもの－

2019年1月11日(金) 14:40 ～ 1月12日(土)

於：東京都 文京区 春日 1-13-27　中央大学理工学部5号館

1月11日(金)

14:40～16:10	完全 WKB 解析入門	：岩木 耕平氏 (名大・多元数理)
16:40～18:10	完全 WKB 解析と Stokes 現象	：竹井 義次氏 (同志社大・理工)

1月12日(土)

10:30～12:00	WKB 解，ストークス曲線，ヴォロス係数	：青木 貴史氏 (近畿大・理工)
13:30～15:00	位相的弦理論の量子ミラー曲線	：高崎 金久氏 (近畿大・理工)
15:30～17:00	完全 WKB 解析とクラスター代数	：岩木 耕平氏 (名大・多元数理)
17:15～	ワインパーティー（懇親会）	

別紙の趣旨に沿った集会の第 72 回を以上のような予定で開催いたします．非専門家向けに入門的な講演をお願い致しました．多くの方々のご参加をお待ちしております．講演者による講演内容へのご案内を添付いたしますので御覧下さい．

尚、この集会は、JSPS 受託学術動向調査研究 代表：小島 定吉 (早稲田大・理工学術院)、科学研究費補助金 基盤研究 (A)「Floer 理論の深化と symplectic 構造の研究」課題番号：2624700 代表：小野 薫 (京大・数理研)、科学研究費補助金 基盤研究 (B)「結び目理論とその諸科学への応用の研究」課題番号：16H03928 代表：下川 航也 (埼玉大・理工)、および科学研究費補助金 基盤研究 (B)「3・4・5次元上の葉層・接触・シンプレクティック構造の研究」課題番号：17H02845 代表：三松 佳彦 (中央大・理工)、科学研究費補助金 基盤研究 (B) 「シンプレクティック微分リー代数の構造とモジュライ空間の特性類」課題番号：15H03618 代表：逆井 卓也 (東大・数理) からの支援を受けています．

連絡先：112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 中央大学理工学部数学教室: 03-3817-1745
ENCOUNTER with MATHEMATICS: homepage : http://www.math.chuo-u.ac.jp/ENCwMATH
三松 佳彦：yoshi@math.chuo-u.ac.jp / 高倉 樹：takakura@math.chuo-u.ac.jp

Stokes graphs

完全 WKB 解析入門

岩木耕平 (名古屋大学多元数理科学研究科)
iwaki@math.nagoya-u.ac.jp

WKB 法とは, 1 次元の定常的 Schrödinger 方程式

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - \eta^2 Q(x)\right)\psi(x,\eta) = 0 \tag{1}$$

(ただし, $\eta = 1/\hbar$ は Planck 定数の逆数に相当する大きなパラメータ) の $\eta \to \infty$ での近似解法の一つである. 呼び名は開発者である三人の物理学者 Wentzel, Kramers, Brillouin の名前にちなむ. 数学的には, 最高階の導関数に摂動パラメータが乗じられた特異摂動問題を扱う手法の一つである. 本稿では, 係数 $Q(x)$ は有理関数であるとし, 方程式 (1) は複素領域上で考えるものとする.

ある領域上 $U \subset \mathbb{C}$ 上で正則な函数の列 $\{S_m(x)\}_{m\geq -1}$ を係数とする η^{-1} の形式級数 $S(x,\eta) = \sum_{m=-1}^{\infty} \eta^{-m} S_m(x)$, および基点 $x_0 \in U$ を用いて

$$\psi(x,\eta) = \exp\left(\int_{x_0}^{x} S(x,\eta)dx\right) \tag{2}$$

なる形に表される (1) の形式級数解を **WKB 解**と呼ぶ. (展開の最初の数項で打ち切ったものが WKB 近似解である.) この級数解は一般に発散することが知られている. 表題に掲げた**完全 WKB 解析 (exact WKB analysis)** とは, この WKB 解に対して Borel 総和法に基づく数学的基礎付けを与えたものであり, 1983 年に Voros により創始された ([15]). Borel 総和法は発散級数のとある総和法であり, WKB 解の Borel 和は (well-defined であれば) 方程式 (1) の解析的な解を定め, WKB 解をその $\eta \to \infty$ における漸近展開にもつ. 最初の講演の目的は, (河合-竹井による [16] にならって) 完全 WKB 解析に現れるこれらの諸概念を紹介しつつ, 理論全体の概要を非専門家に向けて解説することである.

Voros は, WKB 解の Borel 和が定まる領域を, 方程式 (1) の係数 $Q(x)$ の情報から定まる **Stokes 曲線**を用いて決定し[*1], さらに「Stokes グラフが非退化である」という仮定の下, 1 位の変わり点から生じる Stokes 曲線上での解の接続公式を論じた. これは「発散級数と, それに漸近展開される解析函数とが 1 対 1 に対応しない」という, いわゆる **Stokes 現象**を捉えたものである. Voros の接続公式は, η^{-1} に関する発散級数である WKB 解に起こる Stokes 現象を明示的に記述しており, 完全 WKB 解析における最も基本的な結果の一つである.

Voros の仕事以降, 完全 WKB 解析は主に 2 つの研究グループの貢献により発展してきた. 1 つは Pham, Delabaere らを中心とするフランスのグループであり, Borel 総和法を精密化した Écalle の resurgent analysis を通じて Schrödinger 方程式の固有値問題への応用が与えられている (例えば [4, 5, 6]). もう 1 つが, 青木, 河合, 竹井, 佐藤らを中心とする日本のグループである. 1990 年代の初期の結果として, 彼らは変わり点における WKB 解析的変換論を構築し, Voros の接続公式を超局所解析を通じて捉えるための枠組みを見出した ([1]). さらに, Voros の接続公式が量子力学や固有値問題などの物理の問題という枠組みを越えて, より一般に複素領域上の微分方程式のモノドロミー群や Stokes 構造の研究という問題に対して非常に有効であることを見抜き, (Stokes グラフが非退化であり, かつ変わり点が全て単純であるという一般的な仮定の下で) Stokes 曲線の組み合わせ論的な情報から Fuchs 型方程式のモノドロミー行列の計算レシピを与えることに成功した ([17], [16, 第 3 章]). それによると, モノドロミー行列は, 方程式 (1) の古典極限として定まる Riemann 面 (つまり, $y^2 = Q(x)$ により定まる Riemann 面) 上で

[*1] 今回の ENCOUNTERwithMATHEMATICS のポスターに描かれたアメーバのような物体は Stokes グラフのいくつかの例である.

の $S(x,\hbar)$ の周期積分を用いて組み合わせ論的に記述される．このようなモノドロミーの記述に関する結果，および (モノドロミー保存変形の理論を通じた) Painlevé 方程式への応用については，理論の発展に大きく貢献してこられた竹井義次氏に紹介して頂く予定である．また，上記の周期積分は [4] によって **Voros 係数**と呼ばれ，完全 WKB 解析における非常に重要な概念である．Voros 係数自身も η^{-1} の発散級数であり，興味深い Stokes 構造を有する．この Voros 係数の様々な側面について，竹井氏と共に完全 WKB 解析の研究に長く携わってこられた青木貴史氏に解説をお願いしている．

一方で，ここ 10 年ほどで急速に発展したスペクトル曲線の量子化の理論 (例えば [7, 12])，および Gaiotto-Moore-Neitzke によるスペクトル・ネットワークの理論 (例えば [10, 11]) などにおいて WKB 解析は重要な役割を果たしており，関連する分野の数学・物理学の研究者から完全 WKB 解析が非常に注目を集めているように感じている．

前者は WKB 解の展開係数に関する話題であり，例えば Gromov-Witten 不変量のような数え上げ不変量の母函数が，とある微分方程式の WKB 解となることが主張 (予想) されている．これらの理論は，WKB 解の展開係数にある幾何学的な意味があることを示唆しており，非常に興味深い進展であると言えよう．さらに，上記の母函数は戸田方程式など可積分系の τ-函数とも密接に関わっている．これらの理論の最近の進展について，当該分野の専門家である高崎金久氏にお話し頂く予定である．

後者の Gaiotto らによるスペクトル・ネットワークは，Riemann 面上に描かれるグラフであり，理論物理における “BPS 指数の壁越え公式”を記述するために 2012 年に導入された ([11])．興味深いことに，この概念は，完全 WKB 解析の文脈において既に [3] や [2] によって考察されていた「高階方程式の Stokes グラフ」と (ほぼ) 一致しているのである．Gaiotto らの研究は，数学的には Donaldson-Thomas 不変量に起こる壁越え現象を記述するものであり，Fomin-Zelevinsky の**クラスター代数** ([9]) とも繋がりを持つ．最後の講演では，Gaiotto らの研究に触発されて中西知樹氏と共に取り組んだ「完全 WKB 解析とクラスター代数の間の辞書の作成」に関する結果 [13, 14] について述べる予定である．ただし，[13, 14] は (1) のような 2 階の微分方程式に関する結果であり，[2] により考察されたような 3 階以上の高階方程式における完全 WKB 解析とクラスター代数の間の関係は未整備であり，興味深い問題の一つとして残されていることを注意しておく．(時間が許せば，スペクトル曲線の量子化に関する別の話題として，Eynard-Orantin の**位相的漸化式** ([8]) との関わりについてもお話ししたい.)

今回の一連の講演を通じて，完全 WKB 解析の理論の豊かさや広がり，そして今後のさらなる理論発展の可能性を感じ取って頂けたなら幸いである．

参考文献

[1] Aoki, T., Kawai, T. and Takei, Y., The Bender-Wu analysis and the Voros theory, in *Special Functions*, Springer, 1991, pp. 1–29.

[2] Aoki, T., Kawai, T. and Takei, Y., New turning points in the exact WKB analysis for higher order ordinary differential equations. in *Analyse algébrique des perturbations singuliéres*, I; Méthodes résurgentes, Hermann, 1994, pp. 69–84.

[3] Berk, H., Nevins, W. M. and Roberts, K., New Stokes' line in WKB theory. *Journal of Mathematical Physics*, **23** (1982), 988–1002.

[4] Delabaere, E., Dillinger, H. and Pham, F., Résurgence de Voros et périodes des courves hyperelliptique, *Annales de l'Institut Fourier*, **43** (1993), 163–199.

[5] Delabaere, E., Dillinger, H. and Pham, F., Exact semiclassical expansions for one-dimensional quantum oscillators *Journal of Mathematical Physics*, **38** (1997), 6126.

[6] Delabaere, E., Pham, F., Resurgent methods in semi-classical asymptotics, *Ann. inst. Henri Poincaré*, **71** (1999), 1–94.

[7] Dumitrescu, O. and Mulase, M., Lectures on the topological recursion for Higgs bundles and quantum curves, in *Lecture Notes Series, Institute for Mathematical Sciences, National University of Singapore*,

2018, pp. 103–198; arXiv:1509.09007.

[8] Eynard, B. and Orantin, N., Invariants of algebraic curves and topological expansion, *Communications in Number Theory and Physics*, **1** (2007), pp. 347–452; arXiv:math-ph/0702045.

[9] Fomin, S. and Zelevinsky, A., Cluster algebras. I. Foundations., *J. Amer. Math. Soc.*, **15** (2002): 497–529 (electronic).

[10] Gaiotto, D., Moore, G.W. and Neitzke, A., Wall-crossing, Hitchin systems, and the WKB approximation, *Adv. in Math.* **234** (2013), 239–403; arXiv:0907.3987 [hep-th].

[11] Gaiotto, D., Moore, G.W. and Neitzke, A., Spectral networks, *Ann. Henri Poincaré*, **14** (2013), 1643–1731; arXiv:1204.4824 [hep-th].

[12] Grassi, A., Hatsuda, Y. and Marino, M., Topological Strings from Quantum Mechanics, *Ann. Henri Poincaré*, **17** (2016), 3177–3235; arXiv:1410.3382.

[13] Iwaki, K. and Nakanishi. T., Exact WKB analysis and cluster algebras, *J. Phys. A: Math. Theor.* **47** (2014), 474009; arXiv:1401.7094 [math.CA].

[14] Iwaki, K. and Nakanishi. T., Exact WKB analysis and cluster algebras II: simple poles, orbifold points, and generalized cluster algebras, *Int. Math. Res. Not.*, **14** (2016), 4375–4417; arXiv:1409.4641 [math.CA].

[15] Voros, A., The return of the quartic oscillator – The complex WKB method, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, **39** (1983), pp. 211–338.

[16] 河合隆裕, 竹井義次., 特異摂動の代数解析学, 岩波書店, 1998.
(English version: Kawai, T. and Takei. Y., *Algebraic Analysis of Singular Perturbation Theory*, American Mathematical Society, Translations of Mathematical Monographs, vol. 227. 2005.)

[17] 佐藤幹夫, 青木貴史, 河合隆裕, 竹井義次, 特異摂動の代数解析, 数理研講究録 **750**. 1991, PP. 43–51 (金子晃記).

完全 WKB 解析と Stokes 現象

竹井 義次（同志社大学理工学部）
ytakei@mail.doshisha.ac.jp

完全 WKB 解析は，量子力学で従来用いられてきた Schrödinger 方程式の WKB 解に Borel 総和法により解析的な意味付けを与えようとした Voros の仕事 ([1]) に始まり，Ecalle の提唱した resurgent functions ([2]) の枠組を用いて理論構成を図った Pham 達の努力 (e.g., [3]) により，大きく発展した．その中で，当初は量子力学が主な研究対象だったものが，より一般に複素領域の微分方程式の解の接続問題へと応用範囲が拡がってきた．実際，発散する形式解である WKB 解の Borel 和を考える完全 WKB 解析は，微分方程式の解の Stokes 現象や接続問題を論じるのに非常に適した方法である．本講演では，完全 WKB 解析の基礎を解説した岩木耕平氏の最初の講演を受けて，特に完全 WKB 解析と微分方程式の解の Stokes 現象や接続問題との関わりについて，昔話も交えながら理論が実際に発展してきた時間的流れに沿って説明したい．

完全 WKB 解析に関する我々の研究は，フランスで聞いた Pham の講演に触発されて，1980 年代の終わりに佐藤幹夫先生が河合隆裕氏らに呼び掛けて始められた京都大学数理解析研究所での定期的なセミナーに端を発する．このセミナーは，まず Voros や Bender-Wu の古典的な仕事 ([4]) を我々なりに理解することから始まったが，その中で佐藤先生が，この Voros 等の結果はより一般に複素領域の常微分方程式の大域解析を扱っていると理解すべきであることを看破された．そして，佐藤先生の指摘に基づき Voros の接続公式を確定特異点型の線型常微分方程式に応用することを試みる中から，完全 WKB 解析を用いた 2 階の Fuchs 型方程式のモノドロミー群の具体的な計算法が得られた．この頃の状況や計算法の詳細については，[5], [6] 等を参照されたい.（最近の進展等も含めては，例えば [7] を参照.）実際のモノドロミーの計算は，Voros の接続公式と Stokes 曲線の幾何を組み合わせることでなされる．一言でいうと，このモノドロミーの計算法は Voros の接続公式と（Stokes 幾何に基づく）留数解析の組み合わせである．講演でも，具体例を用いて完全 WKB 解析によるモノドロミーの計算を説明する予定である．

良く知られたように，2 階 Fuchs 型方程式のモノドロミー群は，モノドロミー保存変形を通じて非線型 2 階常微分方程式である Painlevé 方程式と密接に関係する．この関係を踏まえ，この分野をリードしてきた神保道夫氏達に勧められて，我々は次に Painlevé 方程式への完全 WKB 解析の拡張を試みた．上述の線形常微分方程

式の場合，完全 WKB 解析による微分方程式の大域解析の主役は，従来の特異点ではなく変わり点である．そして Voros の接続公式は，一般の方程式の単純変わり点における解析が有名な Airy の方程式の解析に帰着されることを主張する．河合氏や青木貴史氏との一連の共著論文 ([8]- [10]) では，線形方程式の場合と似た構造定理が Painlevé 方程式の場合にも（少なくとも形式的な意味では）成り立つことを示した．すなわち，(i) Painlevé 方程式に対しても変わり点や Stokes 曲線が定義されることを示し，(ii) いわゆる多重スケール解析を用いることにより線型方程式の WKB 解に相当する Painlevé 方程式のインスタントン解を構成し，(iii) さらに I 型の Painlevé 方程式が単純変わり点における標準形であることを示した．言い換えれば，Painlevé 方程式の場合，線型方程式の場合の Airy 方程式の役割を果たすのは I 型の Painlevé 方程式である．そして，モノドロミー保存変形を利用して I 型 Painlevé 方程式の接続公式の具体形を [11] で求めた後，それと Stokes 曲線の幾何を組み合わせることにより，II 型 Painlevé 方程式に対する有名な Ablowitz-Segur の接続公式 ([12]) を導出することに成功した ([13])．講演では，この Ablowitz-Segur の接続公式の導出についても簡単に説明したい．

上記の結果は，Painlevé 特殊函数の大域解析にも完全 WKB 解析が有効であることを強く示唆する．しかし，インスタントン解の解析的な意味付けには大きな困難が存在し，この導出の数学的に厳密な証明は残念ながら未だ得られていない．この困難の克服については，以前に得られている Birkhoff 標準形を用いたインスタントン解の構成法 ([14]) に基づいて，最近新しいアイデアが得られた．時間が許せば，この新しいアイデアについても触れたい．

参考文献

[1] A. Voros, The return of the quartic oscillator. The complex WKB method, *Ann. Inst. H. Poincaré*, **39**(1983), 211–338.

[2] J. Ecalle, Les fonctions résurgentes, Tome I, II, III, *Publ. Math. d'Orsay*, Univ. Paris-Sud, 1981 (Tome I, II), 1985 (Tome III).

[3] E. Delabaere and F. Pham, Resurgent methods in semi-classical asymptotics, *Ann. Inst. H. Poincaré*, **71**(1999), 1–94.

[4] C.M. Bender and T.T. Wu, Anharmonic oscillator, *Phys. Rev.*, **184**(1969), 1231–1260.

[5] M. Sato, T. Aoki, T. Kawai and Y. Takei, 特異摂動の代数解析, 数理解析研究所講究録, No. 750, 1991, pp. 43–51.

[6] 河合隆裕, 竹井義次, 特異摂動の代数解析学, 岩波書店, 2008.

[7] Y. Takei, WKB analysis and Stokes geometry of differential equations, *Analytic, Algebraic and Geometric Aspects of Differential Equations*, Birkhäuser/Springer, 2017, pp. 263–304.

[8] T. Kawai and Y. Takei, WKB analysis of Painlevé transcendents with a large parameter. I, *Adv. Math.*, **118**(1996), 1–33.

[9] T. Aoki, T. Kawai and Y. Takei, WKB analysis of Painlevé transcendents with a large parameter. II, *Structure of Solutions of Differential Equations*, World Scientific, 1996, pp. 1–49.

[10] T. Kawai and Y. Takei, WKB analysis of Painlevé transcendents with a large parameter. III, *Adv. Math.*, **134**(1998), 178–218.

[11] Y. Takei, An explicit description of the connection formula for the first Painlevé equation, *Toward the Exact WKB Analysis of Differential Equations, Linear or Non-Linear*, Kyoto Univ. Press, 2000, pp. 271–296.

[12] H. Segur and M.J. Ablowitz, Asymptotic solutions of nonlinear evolution equations and a Painlevé transcendent, *Physica D*, **3**(1981), 165–184.

[13] Y. Takei, On an exact WKB approach to Ablowitz-Segur's connection problem for the second Painlevé equation, *ANZIAM J.*, **44**(2002), 111–119.

[14] Y. Takei, Singular-perturbative reduction to Birkhoff normal form and instanton-type formal solutions of Hamiltonian systems, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, **34**(1998), 601–627.

WKB 解，ストークス曲線，ヴォロス係数

青木貴史（近畿大学理工学部）

WKB 解は量子力学の黎明期に 1 次元定常的シュレディンガー方程式の近似解として導入され，固有値問題の解析に用いられた．テイラー展開を用いた近似であれば近似の次数を上げてゆくと，良い近似解が得られ，無限に上げると解析的な解に収束する．一方，WKB 解は，大雑把に述べるとプランク定数のべき級数で近似され，近似の次数を無限大まで取ると発散級数になる．この発散級数も WKB 解と呼ばれ，これが今回のトピックの主役である．

初期の量子力学以後，物理学や化学では近似解としての WKB 解は準古典近似とも呼ばれ，さまざまな形で一般化され応用されてきた．しかし，数学的な側面が研究され始めたのは比較的最近である．WKB 解はボレル和（発散級数の総和法の一つ）を取ると解析的な解と結びつく．1980 年代初めにヴォロス（A. Voros）は，このことを活用して 4 次のポテンシャルを持つシュレディンガー方程式の解の接続問題を考察した．この研究が基礎となり，量子力学の一手法であった WKB 解析は「完全 WKB 解析」という大きな理論に発展してきた．対象も 2 階線型常微分方程式に限らず，高階微分方程式，非線型微分方程式，さらには偏微分方程式や差分方程式にも広がり，従来の解析では掴みきれなかった様々な構造が明らかにされている．

ボレル和による WKB 解と解析的な解の対応は，ストークス曲線と呼ばれる曲線で仕切られる領域ごとに異なる．ストークス曲線を越える際の対応関係の変化は簡潔に記述できる．解析的な解の大域的な接続は，ストークス曲線の形状に加えてヴォロス係数と呼ばれる量で記述される．

近年，ガイオット (Gaiotto) たちにより導入された spectral network やフォミン (Fomin) たちの cluster algebra が完全 WKB 解析と類似した概念を用いていることから，完全 WKB 解析はこれらの分野の研究者の興味を引いている．より深い結びつきが明らかになることを期待したい．

完全 WKB 解析における 3 つの基本概念である WKB 解，ストークス曲線，ヴォロス係数を軸に，これまでの研究の流れと現状について報告する．

位相的弦理論の量子ミラー曲線

高崎金久（近畿大学理工学部）

完全 WKB 解析の対象は微分方程式や差分方程式ですが，（独立変数が 1 個の場合に）そのような微分方程式や差分方程式を曲線の量子化とみなす，というのが量子曲線の概念です．たとえば，量子力学の準古典近似では，1 自由度の定常シュレディンガー方程式

$$\hat{H}(x, -i\hbar\frac{d}{dx})\Psi = E\Psi$$

からハミルトン・ヤコビ方程式 $H(x, dS/dx) = E$ を介して等エネルギー曲線

$$H(x, p) = E$$

が得られます．もとのシュレディンガー方程式をこの曲線の量子化とみなして「量子曲線」と呼ぶわけです．そこに現れる微分作用素 $\hat{x} = x$, $\hat{p} = -i\hbar d/dx$ は正準交換関係 $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ を満たす「非可換座標」ということになります．

近年の数理物理ではさまざまな場面で（からくりは 1 自由度の量子力学よりもはるかに複雑ですが）量子曲線が登場します．本講演で取り上げるのは位相的弦理論 [1] の「量子ミラー曲線」です．位相的弦理論には A モデルと B モデルがあり，それらがミラー対称性によって結ばれます．A モデルは複素 3 次元のカラビ・ヤウ多様体 X を標的空間とするグロモフ・ウィッテン理論の一種です．そのミラー理論である B モデル側には別のカラビ・ヤウ多様体 $\hat{X}$（X のミラー多様体）があります．X が「局所トーリックカラビ・ヤウ多様体」という特殊なカラビ・ヤウ多様体であるとき，ミラー多様体 $\hat{X}$ の定義方程式は適当な座標 (x, y, u, v) を用いて

$$uv + W(x, y) = 0$$

という形に表せます．それに付随して $W(x, y) = 0$ という曲線が定まりますが，これが「ミラー曲線」です．それを「量子化」した量子ミラー曲線は $W(x, y)$ の可換な座標 (x, y) を非可換な作用素対 $(\hat{x}, \hat{y}) = (x, q^{xd/dx})$ に置き換えた形の作用素 $\hat{W}(\hat{x}, \hat{y})$ （$\hat{y}$ はシフト演算子 $\hat{y}f(x) = f(qx)$ です）によって

$$\hat{W}(\hat{x}, \hat{y})Z = 0$$

という q-差分方程式として定式化されます．本講演では量子ミラー曲線と可積分系の関係 [2] やスペクトル理論の観点からの研究 [3] を紹介します．そこから位相的漸化式や完全 WKB 解析との関連性を感じ取っていただければ幸いです．

[1] M. Mariño, Chern-Simons theory, matrix models, and topological strings, Oxford University Press, 2005.

[2] 高崎金久，可積分系とカラビ・ヤウ多様体，数理科学 2018 年 10 月号特集『カラビ・ヤウ多様体，pp. 61–66.

[3] M. Mariño, Spectral theory and mirror symmetry, Proc. Symp. Pure Math. **98** (2018), 259–294, arXiv:1506.07757 [math-ph].

完全 WKB 解析とクラスター代数

岩木耕平 (名古屋大学多元数理科学研究科)
iwaki@math.nagoya-u.ac.jp

クラスター代数 (cluster algebra) とは, Fomin-Zelevinsky が (表現論に由来して) 導入した組み合わせ論的に定義される代数である ([3]). 定義は省略するが, 最初に与えられた箙の各頂点に初期クラスター変数を付随させ, **変異 (mutation)**(またはクラスター変換) という双有理変換を繰り返して機能的に構成されるクラスター変数を生成元に持つのがクラスター代数である. 導入後, 双曲幾何, Teichmüller 理論, 可積分系, また Donaldson-Thomas 理論などの様々な分野との関わりが明らかになり, 現代数学に現れる基礎的な代数的構造と認識されつつある. 日本語で読める解説記事として, 数理科学の雑誌 [8] を挙げておく.

今から約 10 年前に, 物理学者の Gaiotto, Moore, Neitzke により, WKB 解析や Stokes グラフの組み合わせ論的情報からクラスター代数を構成する方法が提示された ([4]). 詳細は講演の際に説明するが, 例えば Stokes グラフから (曲面の三角分割を経由して) 箙を構成する手続きは下の図に示される. [4] では Hitchin 系に付随する平坦接続に対する WKB 解析を通じて, 箙の各頂点にクラスター変数 (平坦接続のモジュライ空間の Fock-Goncharov の $\mathcal{X}$-座標) を付随させているが, それは我々の言葉ではスペクトル曲線上の閉路 γ に対する Voros シンボル (Voros 係数の指数)

$$\exp\left(V_\gamma(\eta)\right) = \exp\left(\oint_\gamma S(x,\eta)dx\right) \tag{1}$$

(の Borel 和) に他ならないことに気付き[*1], [5] では中西知樹氏 (名古屋) との共同研究で完全 WKB 解析とクラスター代数の間の辞書を作成した. クラスター代数の生成元を定める変異は, 我々の立場からは Stokes 現象に他ならないことなどが明らかになった. ちなみに, Gaiotto らが構成したクラスター変数や我々の Voros シンボル $\exp\left(V_\gamma\right)$ は, [3] の意味でのクラスター y-変数であるが, [5] では加えて相対ホモロジーに付随する別の種類の Voros シンボルがもう一種類のクラスター x-変数を実現することなども明らかにした. この辞書 (表の内容) について解説することが講演の目的である.

Gaiotto らの目標はクラスター代数を構成することではなく, Kontsevich-Soibelman の**壁越え公式** ([7]) を Stokes グラフの組み合わせ的情報から系統的に導くことであった. 彼らは Stokes グラフの変異を追跡することで様々な壁越え公式が得られることを発見した. 例えば, クラスター代数における**五角関係式**

$$\mathfrak{S}_{\gamma_1}\mathfrak{S}_{\gamma_2} = \mathfrak{S}_{\gamma_2}\mathfrak{S}_{\gamma_1+\gamma_2}\mathfrak{S}_{\gamma_1} \tag{2}$$

は, $Q(x) = x^3 + ax + b$ という 3 次の多項式を係数とする Schrödinger 方程式の Stokes グラフから導かれる. ここで, $\mathfrak{S}_\gamma$ は **Stokes 自己同型**と呼ばれる作用素であり, Voros シンボルに対しては

$$\mathfrak{S}_\gamma : e^{V_\mu} \mapsto e^{V_\mu}(1+e^{V_\gamma})^{\langle\gamma,\mu\rangle} \tag{3}$$

のように作用する ([1]). 上の 5 角関係式は WKB 解析の文脈では [1] が 1993 年に既に発見していた. ちなみに, [4] において作用素 $\mathfrak{S}_\gamma$ に相当するものは Kontsevich-Soibelman 変換と呼ばれている. 時間が許せば, これらの壁越え公式がどのように導かれるのかも紹介したい.

[*1] ただし, Hitchin 系に付随する平坦接続と我々が考察している Schrödinger 方程式は異なる方程式である. 後者は前者のとある極限で得られることが [2] で示されている.

完全 WKB 解析	クラスター代数
Stokes グラフとその変異	箙とその変異
Voros シンボル $\exp(W_\beta)$	クラスター x-変数
Voros シンボル $\exp(V_\gamma)$	クラスター y-変数
Voros シンボルにおこる Stokes 現象	クラスター変換

表 1　完全 WKB 解析とクラスター代数の間の辞書.

非退化な Stokes グラフ (太線)　　三角形分割と箙

図 1　$Q(x)$ がある 4 次多項式の場合には 6 角形の三角形分割が得られる.

参考文献

[1] Delabaere, E., Dillinger, H. and Pham, F., Résurgence de Voros et périodes des courves hyperelliptique, *Annales de l'Institut Fourier*, **43** (1993), 163–199.

[2] Dumitrescu, O., Fredrickson, L., Kydonakis, G., Mazzeo, R., Mulase, M., and Neitzke, A., Opers versus nonabelian Hodge, arXiv:1607.02172.

[3] Fomin, S. and Zelevinsky, A., Cluster algebras. I. Foundations., *J. Amer. Math. Soc.*, **15** (2002): 497–529 (electronic).

[4] Gaiotto, D., Moore, G.W. and Neitzke, A., Wall-crossing, Hitchin systems, and the WKB approximation, *Adv. in Math.* **234** (2013), 239–403; arXiv:0907.3987 [hep-th].

[5] Iwaki, K. and Nakanishi. T., Exact WKB analysis and cluster algebras, *J. Phys. A: Math. Theor.* **47** (2014), 474009; arXiv:1401.7094 [math.CA].

[6] Iwaki, K. and Nakanishi. T., Exact WKB analysis and cluster algebras II: simple poles, orbifold points, and generalized cluster algebras, *Int. Math. Res. Not.*, **14** (2016), 4375–4417; arXiv:1409.4641 [math.CA].

[7] Kontsevich, M. and Soibelman, Y., Stability structures, motivic Donaldson-Thomas invariants and cluster transformations, arXiv:0811.2435.

[8] 数理科学 2015 年 3 月号, 特集：「団代数をめぐって」– 新たな共通構造の認識 –, サイエンス社, 2015.

ENCOUNTER with MATHEMATICS

(数学との遭遇, d'après Rencontres Mathématiques) へのご案内

中央大学 理工学部 数学教室

当研究科では France・Lyon の Ecole Normale Supérieure de Lyon で行われている RENCONTRES MATHEMATIQUES の形式を踏襲した集会 "ENCOUNTER with MATHEMATICS" (数学との遭遇) を年 4 回ほどのペースで開催しております。

France では、2 か月に一度の Rencontres Mathématiques と、皆様よくご存知の年に 4 回の Seminaire Bourbaki という、二つの特徴ある研究集会が行われています。これらの集会では、多くの数学者が理解したいと思ってるテーマ、又は、より多くの数学者に理解させるべきであると思われるテーマについて、その方面の (その研究を直接行った本人とは限らない) 専門家がかなり良い準備をし、大変すばらしい解説をしています。

勿論、このような集会は、France に限らず、日本や世界中で行われており、Surveys in Geometry 等は、その好例と言えるでしょう。そのなかで Rencontres Mathématiques は分野・テーマを限定せずに、定期的に集会を開催しているという点で、特徴のある集会として、評価されていると思います。

Seminaire Bourbaki は、各講演 1 時間、1 回読み切りで、講演内容の level は、講究録で良く分かるとおりです。一方、Rencontres Mathématiques は、毎回テーマを一つに決め、二日間で計 5 講演、そのうち 3 つは、柱となる連続講演で、level は、Seminaire Bourbaki に比べ、より一般向きに、やさしくなっていますが、逆に、講演の準備は、大変かもしれません。

実際に ENS-Lyon で Rencontres Mathématiques がどのように運営されているかということについては、雑誌 "数学" 1992 年 1 月号の坪井俊氏の紹介記事を以下に抜粋させて頂きますので御覧ください。

ここ ENS. Lyon の特色として，ほとんど毎月行われているランコントル・マテマティークがあります．これは 1988 年秋から行われているそうですが，金曜，土曜に 1 つのテーマの下に 5 つの講演を行っています．その 1, 3, 5 番目の 3 つは同一講演者によるもので，残りの 2 つは一応それをサポートするも のという形をとっています．1 つの分野のトピックを理解しようとするとき にはなかなか良い形式だと思いました．

私が興味をもって参加したものでは，1 月には '3 次元のトポロジー' (金曜に Turaev, De la Harpe, Turaev, 土曜に Boileau,Turaev)，3 月には ' 複素力学系 ' (金曜に Douady, Kenyon, Douady, 土曜に Tan Lei, Douady)，5 月には ' 1 次元の幾何学 ' (金曜に Sullivan, Tsuboi, Sullivan, 土曜に Zeghib, Sullivan) がありました．これまでのテーマでは，' 天体力学 ', ' 複素解析 ', ' ブラウン運動 ', ' 数論 ', ' ラムダカルキュラス ' など数学全般にわたっています．

ほとんどの参加者は外部から来るのですが，ENS.-Lyon には建物の内部に付属のアパートがあって，40〜50 人のリヨン市外からの参加者はそこに宿泊できるようになっています．ランコントル・マテマティークは自由参加ですが，参加する場合は，宿泊費，建物内のレストランで食べ放題の昼食代は ENS. Lyon の負担ですから，とても参加しやすい研究集会です．ランコントル・マテマティークのテーマ，内容や講演者を考え，実際の運営にあたっている ENS. Lyon のスタッフの努力で，フランスの新しい重要なセミナーとして評価されていると思います．

実際、 Rencontres Mathématiques は多くの数学者に対して根深い数学文化を身につけるための良い機会として重要な役割を果しているのみならず、若い大学院生たちに数学のより深い研究への動機付けを与える大切な場面を提供しています。

ENCOUNTER with MATHEMATICS もこれらのことを目標としたいと考えていますので、大学院生をはじめ多くの数学者の参加をお待ちしております。

このような主旨のもとに、

- 特定の分野へのテーマの集中は避ける
- up to date なテーマも良いが、古典的なテーマも取りあげる

といった点を特に注意して進めていきたいと考えています。

取りあげるテーマ等、この企画に関する皆様のご意見をお寄せ下さい。

これまでに行われた **ENCOUNTER with MATHEMATICS** (講演者敬称略)

第 1 回 岩澤理論と **FERMAT** 予想 1996 年 11 月, 加藤 和也 (東工大・理), 百瀬 文之 (中大・理工), 藤原 一宏 (名大・多元)

第 2 回 幾何学者は物理学から何を学んだか 1997 年 2 月, 深谷 賢治 (京大・理), 古田 幹雄 (京大・数理研)

第 3 回 粘性解理論への招待 5 月, 石井 仁司 (都立大・理), 儀我 美一 (北大・理), 小池 茂昭 (埼玉大・理), 長井 英生 (阪大・基礎工)

第 4 回 **Mordell-Weil** 格子 9 月, 塩田 徹治 (立教大・理), 寺杣 友秀 (東大・数理), 斎藤 毅 (東大・数理)

第 5 回 **WEB** 幾何学 11 月, 中居 功 (北大・理), 佐藤 肇 (名大・多元)

第 6 回 トロイダル・コンパクト化 1998 年 2 月, 佐武 一郎 (中大・理工), 石井 志保子 (東工大・理), 藤原 一宏 (名大・多元)

第 7 回 天体力学 4 月, 伊藤 秀一 (東工大・理), 小野 薫 (お茶大・理), 吉田 春夫 (国立天文台)

第 8 回 **TORIC** 幾何 6 月, 小田 忠雄 (東北大・理), 桝田 幹也 (阪市大・理), 諏訪 紀幸 (中大・理工), 佐藤 拓 (東北大・理)

第 9 回 実 **1** 次元力学系 10 月, 坪井 俊 (東大・数理), 松元 重則 (日大・理工), 皆川 宏之 (北大・理)

第 10 回 応用特異点論 1999 年 2 月, 泉屋 周一 (北大・理), 石川 剛郎 (北大・理), 佐伯 修 (広島大・理)

第 11 回 曲面の写像類群 4 月, 森田 茂之 (東大・数理), 河澄 響矢 (東大・数理), 阿原 一志 (明大・理工), 中村 博昭 (都立大・理)

第 12 回 微分トポロジーと代数的トポロジー 6 月,
服部 晶夫 (明大・理工), 佐藤 肇 (名大・多元), 吉田 朋好 (東工大・理), 土屋 昭博 (名大・多元)

第 13 回 超平面配置の数学 10 月, 寺尾 宏明 (都立大・理), 吉田 正章 (九大・数理), 寺杣 友秀 (東大・数理), 斎藤 恭司 (京大・数理研)

第 14 回 **Lie** 群の離散部分群の剛性理論 2000 年 2 月, 金井 雅彦 (名大・多元), 納谷 信 (名大・多元), 井関 裕靖 (東北大・理)

第 15 回 岩澤数学への招待 4 月, 栗原 将人 (都立大・理), 佐武 一郎 (東北大/UC Berkeley), 尾崎 学 (島根大・総合理工),
市村 文男 (横浜市大・理), 加藤 和也 (東大・数理)

第 16 回 **Painlevé** 方程式 6,7 月, 岡本 和夫 (東大・数理), 梅村 浩 (名大・多元), 坂井 秀隆 (東大・数理), 山田 泰彦 (神戸大・理)

第 17 回 流体力学 12 月, 木村 芳文 (名大・多元), 今井　功, 宮川 鉄郎 (神戸大・理), 吉田 善章 (東大・新領域創成科学)

第 18 回 **Poincaré** 予想と３次元トポロジー 2001 年 2 月, 小島 定吉 (東工大・情報理工), 加藤 十吉 (九大・理), 松本 幸夫 (東大・数理),
大槻 知忠 (東工大・情報理工), 吉田 朋好 (東工大・理)

第 19 回 **Invitation to Diophantine Geometry** 4 月, 平田 典子 (日大・理工), 宍倉 光広 (京大・理), 小林 亮一 (名大・多元数理)

第 20 回 不変式論のルネサンス 9 月, 梅田 亨 (京大・理), 向井 茂 (京大・数理研), 寺西 鎮男 (名大・多元数理)

第 21 回 実解析への誘い 10 月, 新井 仁之 (東大・数理), 宮地 晶彦 (東京女子大・文理), 小澤 徹 (北大・理), 木上 淳 (京大・情報)

第 22 回 「離散」の世界 2002 年 2 月, 砂田 利一 (東北大・理), 小谷 元子 (東北大・理), 藤原 耕二 (東北大・理), 井関 裕靖 (東北大・理)

第 23 回 複素力学系 6 月, 宍倉 光広 (京大・理), 松崎 克彦 (お茶大・理), 辻井 正人 (北大・理)

第 24 回 双曲幾何 10 月, 小島 定吉 (東工大・情報理工), 大鹿 健一 (阪大・理), 藤原 耕二 (東北大・理), 藤原 一宏 (名大・多元)

第 25 回 **Weil** 予想 12 月, 堀田 良之 (岡山理大・理), 藤原 一宏 (名大・多元), 斎藤 毅 (東大・数理), 宇澤 達 (名大・多元)

第 26 回 極小曲面論入門 2003 年 3 月,
山田 光太郎 (九大・数理), 小磯 深幸 (京教大・教育), 梅原 雅顕 (広大・理), 宮岡 礼子 (上智大・理工)

第 27 回 分岐被覆と基本群 4 月, 難波 誠 (阪大・理), 岡 睦雄 (都立大・理), 島田 伊知朗 (北大・理), 徳永 浩雄 (都立大・理)

第 28 回 リーマン面の退化と再生 11 月, 足利 正 (東北学院大・工), 今吉 洋一 (阪市大・理), 松本 幸夫 (東大・数理), 高村 茂 (京大・理)

第 29 回 確率解析 12 月, 楠岡 成雄 (東大・数理), 重川 一郎 (京大・理), 谷口 説男 (九大・数理)

第 30 回 **Symplectic** 幾何と対称性 2004 年 3 月,
小野 薫 (北大・理), 森吉 仁志 (慶応大・理工), 高倉 樹 (中大・理工), 古田 幹雄 (東大・数理), 太田 啓史 (名大・多元)

第 31 回 スペクトル・散乱理論　2004 年 12 月, 池部 晃生, 峯 拓矢 (京大・理), 谷島 賢二 (学習院大・理), 久保 英夫 (阪大・理),
山田 修宣 (立命館大・理工), 田村 英男 (岡山大・理)

第 32 回 山辺の問題 2005 年 1 月, 小林　治 (熊本大・理), 芥川 和雄 (東京理大・理工), 井関 裕靖 (東北大・理)

第 33 回 双曲力学系**-**安定性と混沌**-** 2005 年 2 月, 国府 寛司 (京大・理), 林 修平 (東大・数理), 浅岡 正幸 (京大・理), 三波 篤郎 (北見工大)

第 34 回 非線型の特殊函数論～**Painlevë** 方程式の応用 2005 年 7 月,
大山 陽介 (阪大・情報), 村瀬 元彦 (UC Davis), 筧 三郎 (立教大・理)

第 35 回 山辺不変量 **-**共形幾何学の広がり**-** 2005 年 12 月, 小林 治 (熊本大・理), 石田 政司 (上智大・理工), 芥川 和雄 (東京理大・理工)

第 36 回 正 **20** 面体にまつわる数学 2006 年 3 月, 増田 一男 (東工大・理), 加藤 文元 (京大・理), 橋本 義武 (阪市大・理)

第 37 回 数学者のための分子生物学入門ー新しい数学を造ろうー 2006 年 6 月, 加藤 毅 (京大・理), 阿久津 達也 (京大化学研究所),
岡本 祐幸 (名大・理), 斉藤 成也 (国立遺伝学研究所), 田中 博 (東京医科歯科大)

第 38 回 幾何学と表現論 **- Kostant**–関口対応をめぐって **-** 2006 年 12 月,
関口 次郎 (東京農工大・工), 中島 啓 (京大・理), 落合 啓之 (名大・多元), 竹内 潔 (筑波大・数学系)

第 39 回 **Lusternik-Schnirelmann** カテゴリ 2007 年 3 月,
岩瀬 則夫 (九大・数理), Elmar VOGT (東大・数理/ベルリン自由大), 松元 重則 (日大・理工), 田中 和永 (早大・理工)

第 40 回 力学系のゼータ関数 – 古典力学と量子力学のカオス – 2007 年 5 月,
首藤 啓 (首都大・理工), 盛田 健彦 (広大・理), 辻井 正人 (九大・数理)

第 41 回 **Euler** 生誕３００年 ー **Euler** 数と **Euler** 類を巡って 2007 年 9 月,
佐藤 肇, 秋田 利之 (北大・理), Danny Calegari (Caltech/東工大・情報理工), 松本 幸夫 (学習院大・理), 森田 茂之 (東大・数理)

第 42 回 **Euler** 生誕３００年 ー **Euler** からゼータの世界へー 2007 年 11 月,
黒川 信重 (東工大・理工), 落合 啓之 (名大・多元), 平野 幹 (成蹊大・理工), 権 寧魯 (九大・数理)

第 43 回 **Euler** ３００歳記念 流体力学・変分学編－始祖の業績と現在・未来への展開－ 2008 年 2 月,
岡本 久 (京大・数理研), 鈴木 貴 (阪大・基礎工), 木村 芳文 (名大・多元)

第 44 回 環境数理におけるモデリングとシミュレーション〜数学は環境問題に貢献できるか〜2008 年 3 月,
水藤 寛 (岡山大・環境), 太田 欽幸 (中大・理工), 伊藤 昭彦 (国立環境研究所), 柳野 健 (気象庁・気象研究所),
渡辺 雅二 (岡山大・環境)

第 45 回 **McKay** 対応を巡って 2008 年 5 月, 松澤 淳一 (奈良女子大・理), 石井 亮 (広大・理), 伊藤 由佳理 (名大・多元),
John McKay(Concordia 大／京大・数理研), 植田 一石 (阪大・理)

第 46 回 幾何学的変分問題 – 神の選択・人間の方法 – 2008 年 9 月,
西川 青季 (東北大・理), 長澤 壯之 (埼玉大・理), 利根川 吉廣 (北大・理)

第 47 回 アクセサリー・パラメーターとモノドロミー – 微分方程式の未開の領域を目指して – 2008 年 10 月,
原岡 喜重 (熊本大), 横山 利章 (千葉工業大), 加藤 満生 (琉球大), 大島 利雄 (東大・数理)

第 48 回 微分方程式に対する逆問題 –既知と未知が逆転したときに何が視えるか？ – 2008 年 11 月,
望月 清 (中大・理工), 池畠 優 (群馬大・工), 磯崎 洋 (筑波大・数理), 渡辺 道之 (東京理科大・理工), 山本 昌宏 (東大・数理)

第 49 回 流体の基礎方程式 –色々な視点から見た流体方程式– 2009 年 2 月,
小薗 英雄 (東北大・理), 西畑 伸也 (東工大・情報理工), 清水 扇丈 (静岡大・理), 松本 剛 (京大・理・物)

第 50 回 ラドン変換 –積分が拓く新しい世界– 2009 年 5 月,
筧 知之 (筑波大・数理), 木村 弘信 (熊大・自然), 磯崎 洋 (筑波大・数理), 大島 利雄 (東大・数理)

第 51 回 正 **20** 面体にまつわる数学–その **2** – 2009 年 10 月, 作間 誠 (広島大・理), 関口 次郎 (東京農工大・工), 井上 開輝 (近畿大・理工)

第 52 回 経路積分の数学的基礎 –いつまでも新しい **Feynman** の発明– 2010 年 1 月,
一瀬 孝 (金沢大・理), 藤原 大輔 (学習院大・理), 加藤 晃史 (東大・数理), 熊ノ郷 直人 (工学院大・工)

第 53 回 シューベルトカルキュラス –様々な数学の交流点– 2010 年 3 月,
池田 岳 (岡山理科大・理), 前野 俊昭 (京大・工), 原田 芽ぐみ (McMaster Univ.)

第 54 回 頂点作用素代数入門 2010 年 10 月, 原田 耕一郎 (オハイオ州立大), 山内 博 (東京女子大), 宗政 昭弘 (東北大), 宮本 雅彦 (筑波大)

第 55 回 多変数複素解析 岡の原理 –誕生から最近の発展まで– 2011 年 2 月,
大沢 健夫 (名大・多元), 平地 健吾 (東大・数理), 伊師 英之 (名大・多元)

第 56 回 計算の複雑さの理論とランダムネス 2011 年 5 月, 渡辺 治 (東工大・情報理工), 河内 亮周 (東工大・情報理工)

第 57 回 偏微分方程式の接触幾何 2011 年 10 月, 佐藤 肇 (名大・多元), 垣江 邦夫, 山口 佳三 (北大・理)

第 58 回 モジュラー曲線の数論と幾何 **-**その魅力と百瀬さんの足跡と 2012 年 9 月, 斎藤 毅 (東大・数理), 玉川 安騎男 (京大・数理研),
橋本 喜一郎 (早大・理工), 新井 啓介 (東京電機大・工), 加藤 和也 (Chicago 大)

第 59 回 複素多様体上の岡・グラウエルト理論 –存在定理は空の上に– 2012 年 10 月,
大沢 健夫 (名大・多元), 松村 慎一 (東大・数理), 足利 正 (東北学院大・工)

第 60 回 結び目理論とその不変量をめぐって 2013 年 5 月,
村杉 邦男 (トロント大), 作間 誠 (広大・理), 森藤 孝之 (慶大・経), 合田 洋 (東京農工大・工), 森下 昌紀 (九大・数理)

第 61 回 代数曲面とその位相不変量をめぐって –代数曲面の地誌学– 2014 年 6 月,
宮岡 洋一 (東大・数理), 今野 一宏 (阪大・理), 村上 雅亮 (鹿児島大・理)

第 62 回 波動方程式 –古典物理から相対論まで– 2014 年 9 月,
小澤 徹 (早大・理工), 山口 勝 (東海大・理), 松山 登喜夫 (中大・理工), 中村 誠 (山形大・理)

第 63 回 最適輸送理論とリッチ曲率 –物を運ぶと曲率が分かる– 2015 年 2 月,
桑江 一洋 (熊本大・自然科学), 塩谷 隆 (東北大・理), 太田 慎一 (京大・理), 高津 飛鳥 (名大・多元数理), 楽田 和正 (東工大・理)

第 64 回 複素解析と特異点 –留数が解き明かす特異点の魅力– 2016 年 2 月,
諏訪 立雄 (北大・理), 田島 慎一 (筑波大・数理物質), 鍋島 克輔 (徳島大・総合科学), 伊澤 毅 (北科大・工)

第 65 回 結び目の体積予想 –量子不変量から見える幾何構造– 2016 年 3 月,
村上 順 (早大・理工), 横田 佳之 (首都大・理工)

第 66 回 幾何学と特異点の出会い 2016 年 3 月,
石川 剛郎 (北大・理), 梅原 雅顕 (東工大・情報), 佐治 健太郎 (神戸大・理), 山田 光太郎 (東工大・理)

第 67 回 **AGT** 対応の数学と物理 2016 年 10 月,
立川 裕二 (東大・Kavli IPMU), 中島 啓 (京大・数理研), 名古屋 創 (金沢大・理工研究域), 柳田 伸太郎 (名大・多元数理), 松尾 泰 (東大・理)

第 68 回 エルゴード理論と可微分力学系 –一様双曲世界の向う側– 2016 年 12 月,
鷲見 直哉 (熊本大・先端科学), 鄭 容武 (広島大・工), 高橋 博樹 (慶應大・理工)

第 69 回 自由因子に特異点をもつ微分方程式 –斎藤理論の広がり– 2017 年 6 月,
斎藤 恭司 (東大・IPMU), 眞野 智行 (琉球大・理), 加藤 満生 (琉球大・教育), 千葉 逸人 (九州大・IMI), 三鍋 聡司 (東京電機大・工)

第 70 回 パーシステントホモロジーとその周辺 2017 年 12 月,
平岡 裕章 (東北大・AIMR), 浅芝 秀人 (静岡大・理), 白井 朋之 (九州大・IMI), 福水 健次 (統数研), 大林 一平 (東北大・AIMR)

第 71 回 フーリエ・カールソンから **21** 世紀の調和解析へ 2018 年 12 月,
古谷 康雄 (東海大), 田中 仁 (筑波技術大), Neal Bez(埼玉大), 宮地 晶彦 (東京女子大)

お問い合わせ 又は ご意見等
112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 中央大学理工学部数学教室 tel : 03-3817-1745
e-mail : yoshiATmath.chuo-u.ac.jp 三松 佳彦 / takakuraATmath.chuo-u.ac.jp 高倉 樹 (AT を@に変更)
ホームページ : http://www.math.chuo-u.ac.jp/ENCwMATH