時空間モデル特論

客員教授　藤井　光昭

すべての社会現象、自然現象は空間と時間の中で生起、観測される。我々は、観測されたデータを解釈するとき、時間・空間情報について考慮すべきか否かを判断している。

普通の統計学では、生起場所・時間によらないランダムな現象を対象とし、多くは互いに独立なデータを扱う。時系列解析は、ランダム現象と生起時間の関連のみを対象とし、空間統計学は、ランダム現象と生起位置の関連のみを対象としている。

その時間と空間の情報をともにもつ、上記三つの統計学が併せ持った究極の統計学が空間時系列解析であり、現象をもっとも完璧な形でとらえたデータを扱うことになる。

科学技術が進んだ現代において、ＧＰＳ（全方向位置把握システム）に代表されるように、位置データの観測が容易になり、我々の普段の生活や各学問で頻繁に目にする機会が増えた。しかしながら、空間時系列解析理論はいまやっと試行錯誤が始まった段階である。

講義では、空間時系列解析における空間データの扱い方の一つ、バリオグラムを取り上げる。空間統計学は、確率場の理論で、時系列理論の拡張である多次元パラメータを持つ確率過程として主に時系列・回帰分析の方法論を用いて研究されてきており、時系列解析の知識を前提として話を進める。

データは確率場からの実現値とみなし、領域D $\subset \mathbb{R}^d$ 上の確率場 $Z := \{Z(s); s \in D\}$ を考える。観測位置 s_1,s_2...,s_n $\subset$ D における確率変数 Z(s_1),Z(s_2),...,Z(s_n) の実現値 z(s_1),z(s_2),...,z(s_n) が観測データである。

確率場 Z が２次定常性をもつ ($E(Z(s)^2) < \infty$) とは、任意の $s, s1, s2 \in$ D で

$$EZ(s) = \mu, \quad Cov\{Z(s_1), Z(s_2))\} = C(s_1 - s_2).$$

相対位置 $s_1 - s_2$ のみの依存する関数 C をコバリオグラム (covariogram) とよぶ。これは確率場の共分散である。分散 $Var\{Z(s)\}$ は s によらず一定値 $C(0)$ で、C は偶関数 $C(s) = C(-s)$ であり、$s_1, s_2, \ldots, s_n \in$ D,$w_1, w_2, \ldots, w_n \in \mathbb{R}$ に対して、

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j C(s_i - s_j) \geq 0$$

が成り立つ。確率場 Z が本質的定常性をもつとは、任意の $s_1, s_2 \in$ D に対して、

$$E\{Z(s_1 - s_2)\} = 0,$$
$$Var\{Z(s_1 - s_2)\} = 2\gamma(s_1 - s_2)$$

が成り立つ。相対位置に依存する関数 2γ をバリオグラム (variogram)、γ をセミバリオグラム (semivariogram) と呼ぶ。これは地球統計学の手法で、地質分野だけでなく、環境科学、水文学、気象学、森林学、水産学などに広く応用されている。それらの目的は、空間現象を連続空間確率場でモデル化し、観測されたデータから、任意の位置での確率場の値を予測することにある。

空間データの基礎的扱いの例として、日本のいくつかの場所（東京、横浜など）の位置を s_{j1}= 緯度、s_{j2}=経度で表現する。空間（場所）を表すパラメータを S_j=(s_{j1}, s_{j2}) とする。各地の降水量の現時点、一時間前、二時間前などの値を t（一次元の離散値の整数）とする。ある変量の S_j での時点 t における観測値は、$X(S_j, t)$（実数値）で表現する。

東京の空間（場所）は北緯 35 度 41 分東経 139 度 45 分、S_1=(35.41,139.45) で、現時点 (t=0) の降水量が 10mm、一時間前 (t=1), 二時間前 (t=2) の降水量がそれぞれ 25mm,15mm の場合、$X(S_1, 0)$=10,$X(S_1, 1)$=25,$X(S_1, 2)$=15 となる。

横浜の位置は S_2=(35.26,139.38) で、$X(S_2, 0)$= 0,$X(S_2, 1)$=10,$X(S_2 2)$=30 の場合、S_1-S_2=(35.41-35.46,139.45-139.38)=(-0.05,0.07) で、距離 $\| S_1 - S_2 \|$ は $\| S_1 - S_2 \|$=$\sqrt{-0.05^2 + 0.07^2}$=0.086 と計算できる。

(中央大学大学院理工学研究科数学専攻　博士後期課程２年　前田　康智)