正 20 面体群からの旅たち

東京農工大学
関口次郎

この講演の内容は 2003 年の「数学史研究会」(津田塾大学) と数学セミナー 2009 年 4 月号の記事がもとになっている.

1 序文

ガロアはアーベルとヤコビによって研究された楕円関数のモジュラー方程式に自らの方程式論を応用することを考えた. 位数 p のモジュラー方程式は $p+1$ 次であり, その群 G は $(p+1)p(p-1)$ 個の元をもち, さらに位数が $\frac{1}{2}(p+1)p(p-1)$ の正規部分群 G' をもつ. $p \neq 2, 3$ のとき, G' は単純群である. モジュラー方程式の分解式はモジュラー方程式と同じ群を持つ. 特に $p = 5, 7, 11$ の場合には p 次の分解式が得られる. そして, $p > 11$ のときにはそういう現象は起こらない. これはガロアの遺稿に書かれていたことである. ガロアの遺稿を読んだ多くの数学者が大きな刺激を受け, その解明を試みた. クラインもそのひとりである. これがクラインの正 20 面体群の研究の大きな動機になっている.

クラインの著書「正 20 面体と 5 次方程式」は 2 部の構成で, 第 I 部では正多面体群の詳細な研究が書かれている. そして第 II 部においてはこれを 5 次方程式の解法に応用する. 古今の数学者の中で最も深く正多面体の数学的側面を考察したのがクラインだといえるが, 一般人には１枚の多面体の絵も出てこないクラインの著書はまさしく「絵のない絵本」のような印象を与えるかもしれない.

クラインのアイデアの根幹をなしているのは正多面体方程式である. その中でも最も注目したのが正 20 面体方程式である. この方程式の特徴は, ひとつの解が求まれば, 残りの解は 2 項 20 面体群の作用で求められることである. この正 20 面体方程式と 5 次方程式との関係をクラインは詳しく調べ, それぞれの解の間の関係を具体的に与えた.

位数 168 の有限単純群は可換でない有限単純群の中で 5 次交代群 A_5 の次に位数の小さい群である. これを G_{168} で表す. クラインはこの群を自己同型群にもつ複素射影平面の 3 次曲線を深く考察した. 実は G_{168} は $PSL(2, \mathbf{Z}/7\mathbf{Z})$ と

同型であり，$PSL(2, \mathbf{Z}/7\mathbf{Z})$ が複素数体上の 3 次元表現を持つことを意味する．$PSL(2, \mathbf{Z}/7\mathbf{Z})$ は $p = 7$ の場合のモジュラー方程式の群であることはすでにガロアが指摘していた．

今日では，A_5 と G_{168} は 3 次元空間の鏡映群の商群であることが知られている．ガロアの示唆したもうひとつの素数 $p = 11$ の場合には，モジュラー方程式の群 $PSL(2, \mathbf{Z}/11\mathbf{Z})$ は複素数体上の 3 次元表現をもたない．一方では，クラインもジョルダンも気づかなかったが，ヴァレンティナーは複素数体上の 3 次元表現を持つ位数 360 の有限単純群 G_{360} も発見した．この群はヴァレンティナー群と呼ばれるが，実は 6 次交代群 A_6 と同型である．ヴァレンティナー群は位数 2160 の 3 次元空間の鏡映群の商群であることが知られている．ガロアの示唆したモジュラー方程式のトリオ $p = 5, 7, 11$ の群の代わりに，3 次元鏡映群三兄弟 $G_{120}, G_{336}, G_{2160}$ をもとにして，クラインの正 20 面体の議論の類似を展開することが可能である．クラインやその弟子たちはこの問題を扱っている．

講演の前半では，正 20 面体群や位数 168 の群についてのクラインの問題意識や考えていたことの一端を解説し，後半では，ユニタリ鏡映群 $G_{120}, G_{336}, G_{2160}$ についてのクラインやその弟子たちの考えていたことの現代的な解釈を与える予定である．

2　クラインの「正20面体と5次方程式」

クラインの正多面体群の不変式論的考察に言及する．主にクラインの著書「正20面体と5次方程式」([3]) に依拠した記述にする．

正多面体が5種類しかないという分類はプラトンによるといわれている．その体系的な証明はユークリッドの「幾何学原論」にある．有名な話だが，ケプラーは当時知られていた太陽系の惑星：水星，金星，地球，火星，木星，土星の軌道と5種類の正多面体との関係付けで惑星の軌道を理解しようとしたそうである．歴史的にもこのように正多面体にまつわる話題はつきないが，それでは正多面体を数学者が考えたらどうなるか．クラインの著書はそれに対するひとつの答えと見なせる．

さて，クラインが，正20面体，より正確には正20面体群というべきかもしれないが，に関心をもったひとつの理由は，正20面体群はアーベル群でないもっとも位数の小さい有限単純群だからである．また，クラインはまだ確立されてからそれほどの時間のたっていないリーマンの関数論とガロアの群論とを統合することを試みていたことも理由の一つである．さらには，5次代数方程式が代数的に解けないとはいってもそれではどういう関数を使って解を記述できるか，という問題も当時はきわめて熱をおびていた話題だったことも理由にあげていいのかもしれない．

クライン [3] の73ページには次のようなことが書かれている．

「 ....

このようにして得られた結果に関しては，だいたいにおいてすでに言及しているシュワルツの仕事に含まれている．すなわち，単に，シュワルツの論文では主題の順序がちょうどここで述べるのと逆になっているだけである．超幾何級数の微分方程式から出発して，シュワルツはこの微分方程式の二つの特殊解 z_1, z_2 の商 z が依存する3階の微分方程式をまず構成する．彼はさらに独立変数 Z の二つの半平面から，z が描く等角写像を調べて，z が Z の代数関数であるという条件によっていま考察している z-関数と，それが定義する基本方程式へと進む．それとは反対に，ここではこれらの方程式から始めて，それらから等角写像を構成し，そして z の満たす3階微分方程式をの存在を推定して，最後にこれから P-関数の，あるいは本質的には同じことだが，超幾何級数の2階微分方程式へと移行する．その際，z_1, z_2 に依存する式である $X(z_1, z_2)$ を Z によって直接表すことによって，最終段階で，すでに引用している論文でフックスが導入したあるアイデアを利用することをここで言及しておく.」

しかしながら，実際には必ずしもシュワルツの結果を知らないうちに研究を開始していたことが推察される．事実，序文に次のようなことが書かれている．

「私はそのときまでに（シュワルツ教授の先にやっている仕事をその時には知らないままに）自分のために正 20 面体の研究をはじめていたが，これを，問題に本格的に取り組む前の準備訓練のようなものと考えていた.」

クラインは 1874 年頃にその頃まだ一般的でなかったリーマン流の関数論と難解だったガロアの群論とを結びつけることを目的として研究を開始した．クラインはまず $SO(3)$ が S^2 に回転群として作用しているが，その有限部分群を調べて正多面体の合同群である正多面体群の研究へと議論を進めていく．正確には，$SL(2,\mathbf{C})$ の有限部分群は n 次巡回群，正 2 面体群および正 4 面体群，正 8 面体群，正 20 面体群のいずれかに群同型になることを示している．(立方体の合同群は正 8 面体群に同型，正 12 面体の合同群は正 20 面体群に同型である．) 次にクラインは 2 次元球面 S^2 と複素射影直線 $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ を同一視させる．正多面体 M のすべての頂点が S^2 にあるようにする．そして，M の面の中心と稜の中点を S^2 に中心から投影する．すると S^2 と $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ の同一視によって，$\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ 上に M の面の中心に対応する点 $a_1, a_2, \cdots, a_p$，稜の中点に対応する点 $b_1, b_2, \cdots, b_q$，頂点に対応する点 $c_1, c_2, \cdots, c_r$ を得る．$\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ の斉次座標を $z_1 : z_2$ とすれば，

$$f_M = \prod_{j=1}^{p}(z_1 - a_j z_2),\ e_M = \prod_{j=1}^{q}(z_1 - b_j z_2),\ v_M = \prod_{j=1}^{r}(z_1 - c_j z_2)$$

は G_M の (相対) 不変式になる．$G_M(\subset SO(3))$ を M の合同変換群とする．すると G_M は $S^2 \simeq \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ の 1 次分数変換からなる群と見なせるが，自然に $SU(2)$ の部分群 $\tilde{G}_M$ に持ち上げられる．v_M, e_M, f_M は z_1, z_2 の多項式なので，これらの間にはひとつの代数関係式 $F(v_M, e_M, f_M) = 0$ が存在する．クラインは $z = z_1/z_2$ から $x = v_M/e_M$ などを考えることにより $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ から $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ への有限被覆写像を構成できる．有限被覆であることより，z を x の関数とみると代数関数になる．このことをより詳しく解析することで，z_1, z_2 も x の代数関数とみなせる．さらにはガウスの超幾何関数でより明示的に表示される．どの時点でかはよく知らないが，1874 年秋頃に，すでにシュワルツが 1872 年に出版された論文でまったく逆の議論をしていたことを親交のあったゴルダン (P. Gordan) から聞き知ったのである．

M が正 20 面体の場合を例にとる．この場合，$p=20, q=30, r=12$ であり，

$$\begin{array}{rcl} f_M &=& -(z_1^{20}+z_2^{20})+228(z_1^{15}z_2^5-z_1^5z_2^{15})-494z_1^{10}z_2^{10}, \\ e_M &=& z_1^{30}+z_2^{30}+522(z_1^{25}z_2^5-z_1^5z_2^{25})-10005(z_1^{20}z_2^{10}+z_1^{10}z_2^{20}), \\ v_M &=& z_1z_2(z_1^{10}+11z_1^5z_2^5-z_2^{10}) \end{array} \tag{1}$$

クラインは f_M, e_M, v_M をそれぞれ H, T, f と記している．H, T, f の間には関係式

$$T^2+H^3-1728f^5=0 \tag{2}$$

が成り立つ．(2) は今日では，クライン特異点，有理 2 重点などといわれるものの中でももっとも難しい特異点を表す式としても有名である．この式で与えられる特異点は E_8 型特異点というが，E_8 型複素単純リー環のベキ零多様体の特異点と関係しているとはクラインとリー (S. Lie) が親交がありたがいに影響しあった仲ということがあったとしても，クラインとて想像もできなかった事実に違いない．しかしながら，実際にはすでにシュワルツの研究において出現していた．

次にクラインは $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ から $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ への有理写像

$$Z=\frac{H^3}{1728f^5} \tag{3}$$

を考えた．ただし $z=z_1/z_2$ が変数である．シュワルツの研究との関係を見るならば，$z_1=1, z_2=-s$ とおけば f, H, T はそれぞれ $-\varphi_{12}(s), -\varphi_{20}(s), \varphi_{30}(s)$ に一致する．

さて，(3) は Z をパラメータにもつ z の 60 次代数方程式と見なせるが，クラインはこれを「正 20 面体方程式」と呼んだ．この方程式を 5 次代数方程式の解法に応用することが [3] の後半の主要なテーマである．5 次代数方程式の解法にクラインが関心を持った理由の 1 つに，エルミート (C. Hermite) の 5 次方程式の解法についての研究があると思われる．エルミートは楕円関数の変換論において，ヤコビとゾーンケ (Sohnke) が導きだした，いわゆるモジュラー方程式のひとつに注目した．それは

$$u^6-v^6+5u^2v^2(u^2-v^2)+4uv(1-u^4v^4)=0 \tag{4}$$

である．この式で，

$$u=\sqrt{2}\cdot q^{1/2}\cdot\frac{\sum q^{2m^2+m}}{\sum q^{m^2}}$$

とおけば，v は q のベキで表せる．これを u をパラメータにもつ v の方程式と見る．そしてこれの分解方程式を求めると

$$t^5 - t - A = 0 \tag{5}$$

を得る．ここで，

$$A = \frac{2}{\sqrt[4]{5^5}} \cdot \frac{1+u^8}{u^2(1-u^8)^{1/2}}$$

である．ところで，一般の 5 次方程式

$$x^5 + a_1x^4 + a_2x^3 + a_3x^2 + a_4x + a_5 = 0 \tag{6}$$

はいわゆるチルンハウス (Tschirnhaus) 変換によって，(5) に変換されることをブリング (E.S.Bring) が示していた．特に (5) の形の 5 次方程式はブリング方程式と呼ばれている．クライン [3]，163 ページによれば

「このようにして，ブリング方程式の解法はエルミートの公式によって与えられ，それで間接的に楕円関数による一般の 5 次方程式の解法の得られる.」

クラインの時代では，まだこのエルミートの解法の意味が十分には理解されていなかったと思われ，大変不可思議なことと見なされていたようである．

クラインは論文[16] (Klein, C. F.: Über die Transformationen der elliptischen Funktionen und die Auflosung der Gleichungen Fünften Grade, *Math. Ann.*, **14**, 1878) において 5 次方程式の解法について研究している．その §I で，楕円関数についての観察を寄せ集めた[1]．楕円積分

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{f(x)}},\ f(x) = a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4$$

は 2 つの不変式をもつ．それらを彼は

$$g_2 = a_0a_4 - 4a_1a_3 + 3a_2^2 \quad \text{および} \quad g_3 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}$$

として定義した．g_2 と g_3 の判別式を $\Delta := g_2^3 - 27g_3^2$ で表した．絶対不変式としては，普通に使われている g_2^3/g_3^2 よりもむしろ g_2^3/Δ を選んで，それを J

[1] このあたりの議論は [6]，174 ページ-175 ページに基づいている．

で表した．J は $f(x)$ の 4 根を適当に並べた複比 σ によって書ける．クラインは，等式

$$J=\frac{4}{27}\left(\frac{(1-\sigma+\sigma^2)^3}{\sigma^2(1-\sigma)^2}\right)$$

が成り立つのとを示した．そして，複比のどの値を代入しても J は不変であることを観察した．

クラインはまた楕円積分 I の周期 ω_1,ω_2 の比 ω による g_2, g_3, Δ, J に対する表示式を与えた．特に $q=e^{\pi i\omega}$ とおくと，

$$\omega_2\sqrt[12]{\Delta}=2\pi q^{1/6}\prod_\nu(1-q^{2\nu})^2$$

であり，クラインは $q^{1/6}\prod_\nu(1-q^{2\nu})^2$ がデーデキント (R. Dedekind) の関数 $\eta(\omega)$ の自乗であることを観察した.「数学公式 III」(岩波書店，岩波全書, 第 3 章) にあわせて，$\tau=\omega$ とおいて τ は上半平面上を動く変数とみれば，さらに

$$g_2\left(\frac{\omega_2}{2\pi}\right)^4=\frac{1}{12}+20\sum\frac{n^3q^{2n}}{1-q^{2n}}$$

であることと，q が 0 に向かうとき，J は

$$\frac{1}{1728}\left[\frac{1}{q^2}+744+196884q^2+O(q^4)\right]\quad(\tau\to+i\infty)\tag{7}$$

のように振舞うことを示した．

τ の関数 $J(\tau)$ を導入したのは，クラインが正 20 面体方程式の議論を続けるのに必要であったからである．クラインは正 20 面体方程式 (3) でパラメータ Z を $Z=J(\tau)$ とおいたらどうなるか，という問題を考察した[2]．より一般には，正多面体方程式も扱っている．これはシュワルツが求めた式

$$x=\left(\frac{s^k-1}{s^k+1}\right)^2\tag{8}$$

$$x=\left(\frac{1-2\sqrt{3}s^2-s^4}{1+2\sqrt{3}s^2-s^4}\right)^3\tag{9}$$

[2] [3]，第 I 部 §5.7 参照.

$$x = \frac{(1+14s^4+s^8)^3}{4\cdot 27s^4(1-s^4)^4} \tag{10}$$

$$x = \frac{\varphi_{20}(s)^3}{4^3\cdot 3^3\varphi_{12}(s)^5} \tag{11}$$

において $x = J(\tau)$ として得られる s の方程式のことである．ただし

$$\begin{cases} \varphi_{12}(s) &=& s(1-11s^5-s^{10}) \\ \varphi_{20}(s) &=& 1+228s^5+494s^{10}-228s^{15}+s^{20} \\ \varphi_{30}(s) &=& 1-522s^5-10005s^{10}-10005s^{20}+522s^{25}+s^{30} \end{cases} \tag{12}$$

さらに複比の場合として

$$J(\tau) = \frac{4(w^2-w+1)^3}{27w^2(w-1)^2} \tag{13}$$

も扱っている．この式の右辺は $w \to 1-w$ $w \to 1/w$ で不変である．この場合,「数学公式 III」にもあるように,

$$\lambda(\tau) = 16q\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+q^{2n}}{1+q^{2n-1}}\right)^8$$

とおけば,

$$J(\tau) = \frac{4}{27}\frac{(\lambda^2-\lambda+1)^3}{\lambda^2(\lambda-1)^2}$$

が成り立つ．これは，$w = \lambda(\tau)$ が (13) の解になることを意味している．

J と τ の関係は超幾何微分方程式

$$J(1-J)y'' + \left(\frac{2}{3}-\frac{7}{6}J\right)y' - \frac{1}{144}y = 0 \tag{14}$$

で結ばれている．この微分方程式の基本解 $y_1(J), y_2(J)$ を適当にとれば，$\tau = y_1(J)/y_2(J)$ になる．[16]，Ab. I, §9 には，$y_1(J), y_2(J)$ が

$$\begin{cases} y_1 &=& \frac{i}{2\pi\sqrt[12]{J}}\Big[(\log J + \log 1728)\cdot F\left(\frac{1}{12},\frac{5}{12},1,\frac{1}{J}\right) \\ && \qquad -\frac{\partial}{\partial t}F\left(\frac{1}{12}+t,\frac{5}{12}+t,1+2t,\frac{1}{J}\right)_{|t=0}\Big] \\ y_2 &=& \frac{1}{\sqrt[12]{J}}F\left(\frac{1}{12},\frac{5}{12},1,\frac{1}{J}\right) \end{cases}$$

であることが示されている．

3　グールサの研究

ここで，グールサ (E. Goursat) の学位論文 [12]（Goursat, E.: Sur l'équation différentielle linéaire qui admet pour intégrale la serie hypergéométrique, Ann. Sci. École Normale Supérieure, X suppl. (1881), 1-142）に言及しておく．グールサの学位論文では次の問題を研究している．すなわち，$R(w)$ を w の有理式とするとき，超幾何微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{\gamma-(\alpha+\beta+1)x}{x(1-x)}\frac{dy}{dx}-\frac{\alpha\beta}{x(1-x)}y=0 \tag{15}$$

に対して，$x=R(w)$ という変数変換を施すとどのような w の微分方程式が得られるか？特に，このようにして得られた微分方程式が超幾何微分方程式になるのはどのような場合か？後者の問題がグールサの学位論文の主要テーマである．ガウスは公式

$$(1+w)^{\alpha}F(\alpha,\alpha-\gamma+1,\gamma,w)=F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha+1}{2},\gamma,\frac{4w}{(1+w)^2}\right)$$

を求めているが，この場合，$R(w)=\frac{4w}{(1+w)^2}$ である．もちろん，パラメータ α,β,γ の間にはある種の関係式が成り立たない等式である．さらにクンマーもいくつか公式を求めている．グールサの得た公式をいくつかあげる．

$$F\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3},w\right)=(1-w)^{-1/4}F\left(\frac{1}{12},\frac{1}{12},\frac{2}{3},\frac{w(w+8)^3}{64(w-1)^3}\right) \tag{16}$$

$$F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,w\right)=(1+14w+w^2)^{-1/4}F\left(\frac{1}{12},\frac{5}{12},1,\frac{-108w(1-w)^4}{(1+14w+w^2)^3}\right) \tag{17}$$

$$F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,w\right)=(1-w+w^2)^{-1/4}F\left(\frac{1}{12},\frac{5}{12},1,\frac{27w^2(1-w)^2}{4(1-w+w^2)^3}\right) \tag{18}$$

グールサの学位論文ではその他にもいくつかの公式を求めているのだが，[12], 140 ページ以降にある公式 (126)-(137) は実は上記の公式において，

$$R(w),\ \frac{1}{R(w)},\ 1-R(w),\ \frac{1}{1-R(w)},\ \frac{R(w)-1}{R(w)},\ \frac{R(w)}{R(w)-1}$$

のいずれかを代入した式になっている．

グールサの学位論文はシュワルツやクラインの正多面体に関する研究とは無関係にようにみえるが，実際にはおおいに関連がある．例えば，式 (17) の場合の $R(w)$ は正 8 面体の場合のシュワルツの式

$$x = \frac{(1+14s^4+s^8)^3}{4\cdot 27 s^4(1-s^4)^4} \tag{19}$$

の右辺の式を見比べると，$w = s^4$ とすることで同じ式になることがわかる．つまり，グールサはシュワルツの成果を別の方向から向かったといえる．

グールサの学位論文についてはマッカイ (J. McKay) に教えていただいた．

式 (16)，(17) はシュワルツの解決した問題の別の方向からの接近法であったが，正 20 面体の場合にはそれがうまくはいかない．しかしながら，クラインは次のような結果を得ている．[3] 第 I 部 §5.7 によれば，

$$\Lambda(\tau) = q^{2/5}\frac{\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k q^{5k^2-3k}}{\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k q^{5k^2-k}}$$

とおくとき，$w = \Lambda(\tau)^5$ は

$$J(\tau) = \frac{(-(w^4+1)+228(w^3-w)-494w^2)^3}{1728w(w^2+w-1)^5}$$

を満たす．これは [16] で示した式である．これで正 20 面体方程式において，$Z = J(\tau)$ とした場合の解が具体的に求められたことになる．

4　フックスの問題

シュワルツが解いた問題 (ガウスの超幾何微分方程式がいつ代数関数解をもつか) は大変な反響を呼んだようである．この問題は，超幾何方程式に付随する新しい超越関数のクラス，つまり保型関数の発見につながった．一方では，どのようなときに線型微分方程式のすべての解が代数的になるか，という問題が 1870 年代に大問題となった．[6] によれば，このような一般的な問題に初めて取り組んだフックス (I. L. Fuchs,1833-1902) に因んでフックスの問題と呼ばれたようである．フックスが一般の 2 階の線型微分方程式に対してこの問題を解決した．ゴルダンは，のちにこの不変式論の問題を直接的な方法で解決した．クラインは，すでに紹介したように正多面体の議論で中心的な役割を果たしている幾何的な方法と群論的な方法をあわせて用いることにより，これを簡略化した．同じ頃，ジョルダン (C.Jordan,1838-1922) は，2×2 の複素数成分の行列で行列式が 1 であるものよりなるすべての有限モノドロミー群を探索する問題にフックスの問題を帰着することによって，この問題を純群論的に解く方法を明らかにした．彼は，3 階や 4 階の方程式に対してもフックスの問題が解くことができ，さらに n 階の方程式の場合にこれを解くための一般有限性定理（ジョルダンの有限性定理）を証明することができた．のちに，フックスとアルファン (G. H. Halphen, 1844-1889) は，これらの場合のいくつかを不変式論的な方法で取り扱うことに成功した．

5　クラインの 4 次曲線

本節では，クラインの 4 次曲線についての論文 [17] (Klein, C. F.: Über die Transformation siebenter Ordnung der elliptischen Functionen, Math. Ann., 14(1879), 428-471.) に関連して筆者が興味を抱いたことについて説明する．

5.1　クライン

1878 年にクラインは，以前の研究を 5 次より高次の方程式と変換に一般化する一連の論文を発表した．これらの研究はリーマン面の理論のかなりの発展を記したことになり，そしてモジュラー関数の体系的研究の始まりであり，クラインの最も重要な数学上の貢献である．それらは，今まで示唆していたように，ガロア理論の発展の新たな段階を形成した．それは代数曲線上の有理関数体に関する部分の起源である．クラインは彼の論文において，関数論的なものと研究が先行していた純代数的なものとを区別した．クラインは主に前者に研究を集中させていたが，それはやがて調和のとれたものになる．

関数論的な側面のものの中で最も重要な論文は [17] である[3]．

論文 [17] についてグレイ [6] は詳細に検討している．グレイ [6] には取り上げられていないが少しばかり興味を持ったことを書いておく．クラインは今日ではクラインの 4 次曲線と呼ばれている $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ の曲線

$$x^3y + y^3z + z^3x = 0 \tag{20}$$

の射影変換群を調べている．元来，一般的な平面 4 次曲線 C には 28 本の双接線が存在する．このことについては [6]，194 ページあたりに関連事項の記述がある．この 28 本の双接線の群が現在では E_7 型ワイル群と言われるものになるのだが，この 28 本の群として認識された方が歴史は古い．クラインの 4 次曲線 (20) は特異点を持ち，28 本の双接線は存在しない．しかしながら，この曲線の射影変換群は位数 168 の単純群になる．それを G_{168} と書くことにする．ジョルダンは有限単純群の表を作るためそれまで知られていたいろいろな有限群を調べていたが，そのリストにこの群が含まれていないことをクラインに指摘されたという[4]．

[3] 最近この論文をテーマにした論文集 [9] が出版されている．J.J.Gray が論文 [17] の英訳を掲載している．

[4] [6]128 ページ参照

クラインは[17]，§9 で 4 次曲線 (20) をパラメトライズしている．次がそれである：

$$
\begin{aligned}
\frac{x}{y} &= q^{4/7}\frac{\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^{h+1}q^{21h^2+7h}}{\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^h q^{21h^2+h}+\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^h q^{21h^2+13h+2}},\\
\frac{y}{z} &= q^{2/7}\frac{\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^{h+1}q^{21h^2+7h}}{\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^{h+1} q^{21h^2+19h+4}+\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^h q^{21h^2+37h+16}},\\
\frac{z}{x} &= q^{1/7}\frac{\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^{h+1}q^{21h^2+7h}}{\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^h q^{21h^2+25h+7}+\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^{h+1} q^{21h^2+31h+11}}.
\end{aligned}
\tag{21}
$$

その近くの脚註において，

「方程式 (20) はまた 3 階微分方程式によっても解けるに違いない．どのようにして，それを構成できるだろうか？」

とある．さらに全集ではそれがアルファン [13](Halphen, G. H.: Sur une équation différentielle linéaires du troisième ordre, *Math. Ann.*, **21**(1884), 461) とフルヴィッツ (A. Hurwitz)[14] (Hurwitz, A.: Über einige besondere homogene linearen Differentialgleichungen, *Math. Ann.*, **26**(1886), 117–126) によって解決された，と編集したクライン自身が注釈を与えている．アルファン [13] には具体的な微分方程式は与えられていないが，フルヴィッツ [14] にはある．

このことについて，[6] の 400 ページに註釈がある．3 個の線形独立ないたるところ有限である積分 $J_1,\ J_2,\ J_3$ で

$$dJ_1 : dJ_2 : dJ_3 = x : y : z$$

となるものをとる．すると $y_i = \dfrac{dJ_i}{dJ}\ 1 \le i \le 3$ とおけば，$y_1,\ y_2,\ y_3$ は

$$\frac{d^3y}{dJ^3}+\frac{aJ+b}{J(J-1)}\frac{d^2y}{dJ^2}+\frac{a'J^2+b'J+c'}{J^2(J-1)^2}\frac{dy}{dJ}+\frac{a''J^3+b''J^2+c''J+d''}{J^3(J-1)^3}y=0$$

の形の方程式の解になることがわかる．というのは，分岐点になりうる点は $J = 0, 1, \infty$ のみだから．クラインはすでに，$J = \infty$ で 7 重に分岐し，$J = 0$ では 3 重，$J = 1$ では 2 重であることを証明していた．したがって，指数の和に対するフックスの関係式より，$a, b, \ldots, d''$ のほとんどの値がわかる．$J = 1$ での指数の差は整数なので，解の中に対数項が現れる可能性があるが，実際に

はそうならないので，微分方程式は明示的に書き下せる．実際それは

$$\left\{\begin{aligned} J^2(J-1)^2\frac{d^3y}{dJ^3}+(7J-4)J(J-1)\frac{d^2y}{dJ^2}+\left[\frac{72}{7}J(J-1)-\frac{20}{9}(J-1)+\frac{3}{4}J\right]\frac{dy}{dJ} \\ +\left[\frac{72.11}{7^3}(J-1)+\frac{5}{8}+\frac{2}{63}\right]y=0 \end{aligned}\right. \tag{22}$$

になる．これでグレイの注釈は終了している．フルヴィッツの議論は見事なものである．リーマンの P-関数の理論での議論をみているようである．

さらに計算を続けてみる．(22) で $y=(x-1)^{-1/2}z$，$\vartheta=J\frac{d}{dJ}$ とおけば，

$$\left[\vartheta\left(\vartheta+\frac{1}{3}\right)\left(\vartheta+\frac{2}{3}\right)-J\left(\vartheta+\frac{9}{14}\right)\left(\vartheta+\frac{11}{14}\right)\left(\vartheta+\frac{15}{14}\right)\right]z=0 \tag{23}$$

したがって，

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& (1-J)^{-1/2}{}_3F_2\left(\frac{9}{14},\frac{11}{14},\frac{15}{14};\frac{4}{3},\frac{5}{3};J\right) \\ y &=& J^{-1/3}(1-J)^{-1/2}{}_3F_2\left(\frac{13}{42},\frac{19}{42},\frac{31}{42};1,\frac{4}{3};J\right) \\ z &=& J^{-2/3}(1-J)^{-1/2}{}_3F_2\left(-\frac{1}{42},\frac{5}{42},\frac{17}{42};\frac{2}{3},1;J\right) \end{array}\right. \tag{24}$$

とおけばよいことがわかる．フルヴィッツの論文にはもう 1 つの場合も扱っており，微分方程式が出てくる．それも ${}_3F_2(a_1,a_2,a_3;b_1,b_2;x)$ で表されるのだが，何から導かれてくるものなのか解読できない．これについては後 (第 2 回) で推理を述べる．

このような議論は他の場合にもある．

藤原松三郎著：「代数学」第二巻，内田老鶴圃刊

の 437 ページをみると，ジョルダンはもう一つの三元一次変換群として実現できる有限単純群を見落としていた，とある．それは位数 360 のヴァレンティナー (Valentiner) 群である[5]．それを G_{360} と書くことにする．クラインはもちろん，この群に対しても研究はしている．筆者がここで注目しているのはクラインの 4 次曲線 (20) と微分方程式 (22) に対応するものであるが，これらについての研究はラホチン (L. Lachtin)([21]) (Lachtin, L.: Die Differentialresolvente einer algebraischen Gleiching 6^{ten} Grades mit einer Gruppe 360^{ster} Ordnung.

[5] クライン [17] の注釈には Valentiner-Wiman の群とある．

Math. Ann. 51(1898), 463-472.) がしている．それによれば，(20) に対応する曲線は

$$x_3^6+15x_1x_2x_3^4-15x_1^2x_2^2x_3^2-10x_1^3x_2^3-3\sqrt{3}x_3(x_1^5-x_2^5)=0 \tag{25}$$

であり，微分方程式は

$$\begin{aligned}&J^2(J-1)^2\frac{d^3v}{dJ^3}+(6J-3)J(J-1)\frac{d^2v}{dJ^2}\\&+\left(\frac{518}{75}J^2-\frac{8513}{1200}J+\frac{15}{16}\right)\frac{dv}{dJ}+\left(\frac{616}{675}J-\frac{4389}{4320}\right)v=0\end{aligned} \tag{26}$$

とある．この微分方程式を一般超幾何微分方程式に変換しようとするとうまくいかない．恐らく $\frac{4389}{4320}$ の分子が 2389 のミスではないか，と推測する．2389 だとして計算すると，$v=(x-1)^{-1/2}w$ とおくことで，

$$\left[\vartheta\left(\vartheta-\frac{1}{4}\right)\left(\vartheta+\frac{1}{4}\right)-J\left(\vartheta+\frac{5}{6}\right)\left(\vartheta+\frac{7}{30}\right)\left(\vartheta+\frac{13}{30}\right)\right]w=0 \tag{27}$$

これの解のひとつは

$${}_3F_2\left(\frac{7}{30},\frac{13}{30},\frac{5}{6};\frac{3}{4},\frac{5}{4};J\right) \tag{28}$$

である．

クラインは [17] を発表した 1 年後に，“Zur Theorie der elliptischen Modulfunktionen” という題名の論文 [18] でこの進展を報告している．この仕事で，彼はモジュラー方程式で出会った異なる形をとっているものがいかにして単純な一般的原理のとても特別な場合であるか，ということを示すことを課題にした．$PSL(2;\mathbf{Z})$ の有限指数の部分群を扱う対象として，対応するリーマン面の関数論も考慮すべきであるとした．

6 クラインの群とクラインの 7 次方程式

本節では，7 次方程式についてのクラインの論文

Über die Auflosung gewisser Gleichungen vom siebenten und achten Grades, Math. Ann., **15**

に関係することについて言及する．

6.1 クラインの 7 次方程式

クラインの著書「正 20 面体と 5 次方程式」の第 II 部 §1.5 にある 6 次方程式

$$t^6 - 4At^5 + 10Bt^3 - Ct + 5B^2 - AC = 0 \tag{29}$$

を考える．G_{120} は階数 3 の鏡映群であるから，ある 3 次元複素線形空間 V の鏡映群としてよい．V の座標の多項式には G_{120} が作用するが，A, B, C はその作用で不変になる斉次多項式と見なせる．A, B, C の次数はそれぞれ 2，6，10 である．有限鏡映群には判別式を定義できるが，G_{120} の場合

$$F = 1600A^3B^4 - 1728B^5 - 640A^4B^2C + 720AB^3C + 64A^5C^2 - 80A^2BC^2 + C^3 \tag{30}$$

がこの判別式である．一方，方程式 (29) の普通の意味での判別式を求めると，それは F^2 になっている．

これに類することを G_{336} の場合にクラインは実行した．少し長くなるが t の 7 次多項式

$$\begin{aligned} P(t) &= t^7 - \tfrac{7}{2}(c_7-1)x_4t^5 - \tfrac{7}{2}(c_7-1)x_6t^4 - 7(c_7+4)x_4^2t^3 - 14(c_7+2)x_4x_6t^2 \\ &\quad + \tfrac{7}{2}\{(3c_7-7)x_4^3 - (c_7+5)x_6^2\}t + \tfrac{1}{2}(7c_7-131)x_4^2x_6 + x_{14} \end{aligned}$$

を考える．$c_7 = \sqrt{-7}$ である．この多項式はクライン全集第 II 巻 406 ページにある．(ただし，$x_4 \to f$, $x_6 \to \nabla$, $x_{14} \to C, t \to -c$ と読み替える必要がある．) G_{336} についても G_{120} の場合と同様に，3 次元複素線形空間 V の鏡映群となる．V の座標の多項式には G_{336} が作用するが，x_4, x_6, x_{14} はこの作用について不変でしかも次数がそれぞれ 4，6，14 次の斉次多項式である．V の線形座標 $u = (u_1, u_2, u_3)$ をうまくとれば，

$$x_4 = u_1^3u_2 + u_2^3u_3 + u_3^3u_1 \tag{31}$$

となる．G_{336} の判別式は

$$\begin{aligned} F &= 2048x_4^9x_6 - 22016x_4^6x_6^3 + 60032x_4^3x_6^5 - 1728x_6^7 + 256x_4^7x_{14} - 1088x_4^4x_6^2x_{14} \\ &\quad -1008x_4x_6^4x_{14} + 88x_4^2x_6x_{14}^2 - x_{14}^3 \end{aligned} \tag{32}$$

である．一方では，方程式

$$P(t) = 0 \tag{33}$$

の判別式は F^2 になる．

クラインは7次方程式 (33) の解になるような u_1, u_2, u_3 の2次斉次式を与えている．この7個の解の集合には G_{168} が作用している．このことは G_{168} には位数24の部分群で7個の解のひとつを動かさないものが存在することを意味する．クラインは論文の同じところで，8次方程式も構成している．この8次方程式は G_{168} の位数が21の部分群が対応している．クラインの夢は，この単純群 G_{168} に限って説明すると，G_{168} の部分群 H に対して次数が H の指数 $[G_{168} : H]$ の方程式が存在するが，これらをすべて具体的に求めることであった．G_{168} の場合には，このような方程式の中で7次式が最低次の方程式であった．

それでは最高次のものは何か．次数が168になるが，これはガロアの分解式といわれており，すでにガロアが考えていたものである．近可解群である5次交代群の場合，クラインの求めた正20面体方程式がガロアの分解式である．

6.2 クラインの 4 次曲線との関係

クラインは $x_4=0$ の場合に方程式 (33) を詳しく調べている．(31) をみれば $x_4=0$ は

$$u_1^3u_2+u_2^3u_3+u_3^3u_1=0 \tag{34}$$

で表された超曲面になる．これを 2 次元射影平面上の曲線とみる．このとき，G_{168} は射影変換群として 2 次元射影平面に作用し曲線 (34) を不変にしている．

方程式の方に目を向ければ，7 次方程式は

$$t^7-\frac{7}{2}(c_7-1)x_6t^4-\frac{7}{2}(c_7+5)x_6^2t+x_{14}=0 \tag{35}$$

になる．鏡映群には基本反不変式があるが，G_{336} の場合には，基本反不変式はクラインが求めている．それは 21 次斉次式であり，K で表した．K^2 は G_{336} の不変式になる．そして (32) の右辺の符号を変えたものと一致する．$x_4=0$ に制限すると，この等式は

$$K^2=1728x_6^7+x_{14}^3 \tag{36}$$

そこで，w を任意定数としたとき

$$x_{14}^3+1728wx_6^7=0,\ x_4=0 \tag{37}$$

が G_{168} に対する正 20 面体方程式の類似である．クラインは $x_4=0$ を満たす u_1,u_2,u_3 の比をテータ級数の比で表す式を求めて，射影化して得られる 4 次曲線の一意化を与えている．

6.3 位数 7 のモジュラー方程式と 7 次方程式

これからクラインの 7 次方程式 (33) の解法に議論を進めるべきところだが，実はクラインの 7 次方程式の解法を扱った 1879 年の論文の序文に，前年に解の公式を与え，エルランゲン大学にそれを書いた文書を提出していたが，ゴルダンがすでに別の解法を公表していたので，具体的な公式を書かなかったとある (わたしの同僚の指摘).

方程式 (33) の別の解法ができることがわかったので，それを解説することにする．もとのエルミートの 5 次方程式の解法の類似である．本質的にはウェーバーの本 Lehrbuch der Algebra III にある．この本の §133 に位数 7 の (シュレフリの) モジュラー方程式が与えられている．それは次のものである：

$$v^8 - u^7v^7 + 7u^4v^4 - 8uv + u^8 = 0 \tag{38}$$

この関係式を満たす u, v として

$$\begin{cases} u &= q^{-1/24} \prod_{h=1}^{\infty}(1+q^{2h-1}) \\ v &= q^{-7/24} \prod_{h=1}^{\infty}(1+q^{7(2h-1)}) \end{cases} \tag{39}$$

がある．

(38) を v の 8 次方程式とみて，その解を

$$v_0, v_1, v_2, \ldots, v_6, v_\infty$$

とする．このとき，

$$w_d = \frac{(v_\infty - v_d)(v_{d+1}-v_{d+3})(v_{d+2}-v_{d+6})(v_{d+4}-v_{d+5})}{c_7' u^4} \tag{40}$$

とおく．v_j の添え字 j は 7 を法として考える．また，c_7' は ${c_7'}^2 + 7 = 0$ となる数とする．すると $w_0, w_1, \ldots, w_6$ は次の 7 次方程式の解になる：

$$w^2\left(w - \frac{7+c_7'}{2}\right)^4 \left(w + \frac{c_7'(c_7'+1)^2}{4}\right) = \left(u^{12} - \frac{64}{u^{12}}\right)^2 \tag{41}$$

ここで

$$z^2 = w + \frac{c_7'(c_7'+1)^2}{4}$$

とおいて z の方程式にすると次をえる．

$$z\left(z^2-\frac{c_7'(c_7'+1)^2}{4}\right)(z^2+c_7')^2=u^{12}-\frac{64}{u^{12}} \tag{42}$$

ところで，$P(t)$ の定義より，

$$P(t)|_{x_6=0}=t^7-\frac{7}{2}(c_7-1)x_4t^5-7(c_7+4)x_4^2t^3+\frac{7}{2}(3c_7-7)x_4^3t+x_{14} \tag{43}$$

である．簡単な計算によって，

$$\begin{aligned} & t^6-\tfrac{7}{2}(c_7-1)t^4-7(c_7+4)t^2+\tfrac{7}{2}(3c_7-7) \\ = \quad & (t^2-c_7)^2\left(t^2+\frac{c_7(c_7-1)^2}{4}\right) \end{aligned}$$

が成り立つ．したがって，$x_6=0$ のとき，7 次方程式 $P(t)=0$ は

$$t(t^2-c_7x_4)^2\left(t^2+\frac{c_7(c_7-1)^2}{4}x_4\right)+x_{14}=0 \tag{44}$$

となる．(44) において

$$t=\sqrt{x_4}z, \quad c_7=-c_7', \quad \frac{x_{14}}{x_4^{7/2}}=-\left(u^{12}-\frac{64}{u^{12}}\right)$$

となるようにすれば (42) になる．

このような議論で 7 次方程式 (44) の解を求めることができる．

参考文献

[1] C. ウーゼル著：「楕円関数と Abel 積分」(デュドネ編 (浪川幸彦他訳)：「数学史 1700-1900 II」第 VII 章) 岩波書店

[2] F. クライン著 (弥永昌吉監修，足立恒雄他監訳)：「19 世紀の数学」共立出版

[3] F. クライン著 (関口次郎訳)：「正 20 面体と 5 次方程式」シュプリンガーフェアラーク東京

[4] 斎藤利弥著：「線形微分方程式とフックス関数 I, II, III」河合文化教育研究所

[5] U. ボタチーニ著 (好田順治訳)：「解析学の歴史」現代数学社

[6] J.J. グレイ著 (関口次郎，室政和 共訳)：「リーマンからポアンカレにいたる線形微分方程式と群論」(シュプリンガーフェアラーク東京刊)

[7] 藤原松三郎著：「代数学」第二巻，内田老鶴圃刊

[8] Brieskorn, E: Singular elements of semisimple algebraic groups, Actes, Congrès intern. Math., 17970. Tome 2, 279-284.

[9] *The Eightfold Way, The Beauty of Klein's Quartic Curve* (edited by S. Levy). Mathematical Sciences Research Institute Publications, 35, Cambridge University Press.

[10] Fricke, R. and Klein, C. F.: *Vorlesungen über die Theorie der Automorphen Functionen*, 2 vols, 1897, 1912, Teubner, Leipzig and Berlin

[11] Fuchs, L.: Über eine Klasse von Functionen mehrerer Variablen, welche durch die Umkehrung der Integrale von Lösungen der linearen Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten entstehen, J. für reine und angew. Math., 89(1880), 151-169.

[12] Goursat, E.: Sur l'équation différentielle linéaire qui admet pour intégrale la serie hypergéométrique, Ann. Sci. École Normale Supérieure, X suppl. (1881), 1-142

[13] Halphen, G. H.: Sur une équation différentielle linéaires du troisième ordre, *Math. Ann.*, **21**(1884), 461, in *Oeuvres*, IV, 112–115

[14] Hurwitz, A.: Über einige besondere homogene linearen Differentialgleichungen, *Math. Ann.*, **26**(1886), 117–126, in *Math. Werke*, I (no. 9) 153–162

[15] Jacobi, C G. J.: Fundamenta Nova Theoriae Functionum Ellipticarum, (1829) in *Ges. Werke*, I, (2nd ed.) 49–239

[16] Klein, C. F.: Über die Transformationen der elliptischen Funktionen und die Auflosung der Gleichungen Fünften Grade, *Math. Ann.*, **14**, 1878, in *Ges. Math. Abh.*, III (no. LXXXII) 13–75

[17] Klein, C. F.: Über die Transformation siebenter Ordnung der elliptischen Functionen, Math. Ann., 14(1879), 428-471.

[18] Klein, C. F.: Zur Theorie der elliptischen Modulfunktionen, *M. Ann.*, **17**(1880/1881), in *Ges. Math. Abh.*, III (no. LXXXVII) 169–178

[19] Klein, C. F.,: Neue Beiträge zur Riemannschen Funktionentheorie, *Math. Ann.*, **21**(1883), in *Ges. Math. Abh.*, III (no. CIII) 630–710

[20] Klein, C. F. and Fricke, R.: *Vorlesungen über die Theorie der Elliptische Modulfunktionen*, 2 vols, 1890, Teubner, Leipzig and Berlin

[21] Lachtin, L.: Die Differentialresolvente einer algebraischen Gleiching 6^{ten} Grades mit einer Gruppe 360^{ster} Ordnung. Math. Ann. 51(1898), 463-472.

[22] Riemann, B.: Ueber die Fläche vom kleinsten Inhalt bei gegebener Begrenzung, K. Ges. Wiss. Göttingen, **13**(1867), 21–57, in *Werke*, 301–337

[23] Schwarz, H. A.: Ueber diejenigen Fälle, in welchen die Gaussische hypergeometrische Reiche eine algebraische Function ihres vierten Elementes darstellt. J. für reine und angew. Math., **75**(1872), 292-335.