最適輸送理論と Ricci 曲率に関する今後の課題

桒田 和正

(東京工業大学大学院理工学研究科)

Encounter with Mathematics
2015 年 2 月 20 日 – 21 日 中央大学

1. 解析系の問題

(1) 境界条件

Q. **境界条件下での，最適輸送と熱流**

- Neumann **条件下での，RCD 型条件の確率解析**
  (**境界の形状に依存；凸なら無問題**) [F.-Y. Wang]
  $\rightsquigarrow$ **最適輸送理論で定式化できるか？**
  (e.g. **距離の修正による** convexification [Sturm])
  $\rightsquigarrow$ **測度距離空間への拡張？**

- Dirichlet **境界条件** or **非保存的条件と**
  最適輸送／RCD 条件
  ([Figalli & Gigli '10]: $\equiv 1$ **の境界条件**)

(1) 境界条件

Q. 境界条件下での，最適輸送と熱流

- Neumann 条件下での，RCD 型条件の確率解析 (境界の形状に依存；凸なら無問題) [F.-Y. Wang]
  $\rightsquigarrow$ 最適輸送理論で定式化できるか？
  (e.g. 距離の修正による convexification [Sturm])
  $\rightsquigarrow$ 測度距離空間への拡張？

- Dirichlet 境界条件 or 非保存的条件と
  最適輸送／RCD 条件
  ([Figalli & Gigli '10]: $\equiv 1$ の境界条件)

(2) 測度距離空間上の確率解析

★ **RCD 空間**

$\Rightarrow P_t \leftrightarrow X_t$: **標準的拡散過程** (Brown **運動**)

Q. **特異空間での確率微分幾何**

- $d(z, X_t)$ **の比較定理** ([K. & Kuwae] In progress) ($\Rightarrow$ **熱核比較定理**)

Q. **分布** (Wasserstein **距離**) **の評価** $\Rightarrow$ **見本路の解析**

- Brown **運動の平行移動カップリング** [Sturm]
- **鏡映カップリング** ([K.] In preparation)

いずれも $N = \infty$**.** $N < \infty$ **では？**

(2) 測度距離空間上の確率解析

★ RCD 空間

$\Rightarrow P_t \leftrightarrow X_t$: 標準的拡散過程 (Brown 運動)

Q. 特異空間での確率微分幾何

- $d(z, X_t)$ の比較定理 ([K. & Kuwae] In progress)
  ($\Rightarrow$ 熱核比較定理)

Q. 分布 (Wasserstein 距離) の評価 $\Rightarrow$ 見本路の解析

- Brown 運動の平行移動カップリング [Sturm]
- 鏡映カップリング ([K.] In preparation)

いずれも $N = \infty$. $N < \infty$ では？

(2) 測度距離空間上の確率解析

★ **RCD 空間**

$\Rightarrow P_t \leftrightarrow X_t$: **標準的拡散過程** (Brown **運動**)

Q. **特異空間での確率微分幾何**

- $d(z, X_t)$ **の比較定理** ([K. & Kuwae] In progress) (⇒ **熱核比較定理**)

Q. **分布** (Wasserstein **距離**) **の評価** ⇒ **見本路の解析**

- Brown **運動の平行移動カップリング** [Sturm]
- **鏡映カップリング** ([K.] In preparation)

いずれも $N = \infty$**．** $N < \infty$ **では？**

(3) 偏微分方程式族の "Universality"

- **RCD**(K,N) $(N<\infty)$ **は，**
  Porous medium eq. **の解でも** characterize **可能**
  [Ambrosio, Savaré & Mondino]
- (**LSI**) $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Ent}(\mu_t)$ **の指数減衰** (μ_t: **熱流**)
  $\Leftrightarrow$ P_t **の超縮約性**

(3) 偏微分方程式族の “Universality”

- **RCD**(K, N) $(N < \infty)$ **は，**
  Porous medium eq. **の解でも** characterize **可能**
  [Ambrosio, Savaré & Mondino]

- (**LSI**) $\Leftrightarrow \mathrm{Ent}(\mu_t)$ **の指数減衰** $(\mu_t$: **熱流**$)$
  $\Leftrightarrow P_t$ **の超縮約性**

(3) 偏微分方程式族の “Universality”

- **RCD**(K,N) $(N<\infty)$ **は，**
  Porous medium eq. **の解でも** characterize **可能**
  [Ambrosio, Savaré & Mondino]

- **(LSI)** $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Ent}(\mu_t)$ **の指数減衰** (μ_t: **熱流**)
  $\Leftrightarrow$ P_t **の超縮約性**
  $\Leftrightarrow$ Hopf-Lax **半群の超縮約性**
  [Bobkov, Gentil & Ledoux '01]

(3) 偏微分方程式族の "Universality"

- **RCD**(K, N) $(N < \infty)$ **は，**
  Porous medium eq. **の解でも** characterize **可能**
  [Ambrosio, Savaré & Mondino]
- (**LSI**) $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Ent}(\mu_t)$ **の指数減衰** (μ_t: **熱流**)
  $\Leftrightarrow$ P_t **の超縮約性**
  $\Leftrightarrow$ Hopf-Lax **半群の超縮約性**
  [Bobkov, Gentil & Ledoux '01]

Q. **熱方程式での特性** $\Leftrightarrow$ **他の** PDE **での特性**
は，どこまで，どう成り立つか？

(4) ベクトル値の関数／測度の解析

Q. **多様体上，ベクトル値測度の最適輸送理論は？**
また，テンソル値熱方程式との関係は？
ベクトル値関数の関数不等式？

Q. **ベクトル値関数の解析を介する結果を**
(別手法で) 特異空間上に拡張できるか？

(4) ベクトル値の関数／測度の解析

Q. 多様体上，ベクトル値測度の最適輸送理論は？
また，テンソル値熱方程式との関係は？
ベクトル値関数の関数不等式？

Q. ベクトル値関数の解析を介する結果を
(別手法で) 特異空間上に拡張できるか？

(5) Markov 連鎖／飛躍型過程と Ricci 曲率

- Markov **連鎖の** W_p**-収縮性**
  [Ollivier / Veysseire / S.-T. Yau et al. /
  Jost et al. / Kuwae / Kitabeppu / . . .]
- Markov **連鎖への** Otto **解析**
  - W_2 **型距離の導入** [Maas / Mielke / Erbar / . . .]
  - Lévy **過程への拡張** [Erbar]
- **グラフ上の最適輸送による** Ent **の凸性**
  [Gozlan et al. / Hillion / Léonard / . . .]

(5) Markov 連鎖／飛躍型過程と Ricci 曲率

- Markov 連鎖の W_p-収縮性
  [Ollivier / Veysseire / S.-T. Yau et al. /
  Jost et al. / Kuwae / Kitabeppu / . . .]
- Markov 連鎖への Otto 解析
  - W_2 型距離の導入 [Maas / Mielke / Erbar / . . .]
  - Lévy 過程への拡張 [Erbar]
- グラフ上の最適輸送による Ent の凸性
  [Gozlan et al. / Hillion / Léonard / . . .]

(5) Markov 連鎖／飛躍型過程と Ricci 曲率

- Markov 連鎖の W_p-収縮性
  [Ollivier / Veysseire / S.-T. Yau et al. /
  Jost et al. / Kuwae / Kitabeppu / . . .]
- Markov 連鎖への Otto 解析
  - W_2 型距離の導入 [Maas / Mielke / Erbar / . . .]
  - Lévy 過程への拡張 [Erbar]
- **グラフ上の最適輸送による Ent の凸性**
  [Gozlan et al. / Hillion / Léonard / . . .]

(5) Markov 連鎖／飛躍型過程と Ricci 曲率

- Markov **連鎖の W_p-収縮性**
  [Ollivier / Veysseire / S.-T. Yau et al. /
  Jost et al. / Kuwae / Kitabeppu / . . .]
- Markov **連鎖への** Otto **解析**
  - W_2 **型距離の導入** [Maas / Mielke / Erbar / . . .]
  - Lévy **過程への拡張** [Erbar]
- **グラフ上の最適輸送による** Ent **の凸性**
  [Gozlan et al. / Hillion / Léonard / . . .]

百家争鳴…同値性不在

2. 幾何系の問題

(1) 理論の適用範囲の拡大

Q. **RCD 条件の修正版は？**

- **多様体上，$\mathrm{Ric}_N \geq K$ の K を関数に** [Sturm]
  (最適輸送／勾配流の理論不在)
- **重みつき** Ricci **で，∇V を非勾配型に**
  - **重みつき** Riemann **多様体にはならない**
  - **拡散過程による最大直径定理** [K. '13]
- **時間依存計量** (e.g. **後進** Ricci **流と，$\mathcal{L}$-型距離**)
  - **W_2-収縮性型定理**
    [Topping / Lott / K. et al. / . . .]
  - **熱流は $\mathrm{Ent}_{\mathrm{vol}_t}$ の勾配流ではない！**

(1) 理論の適用範囲の拡大

Q. RCD 条件の修正版は？

- 多様体上，$\mathrm{Ric}_N \geq K$ の K を関数に [Sturm]
  (最適輸送／勾配流の理論不在)
- 重みつき Ricci で，∇V を非勾配型に
  - 重みつき Riemann 多様体にはならない
  - 拡散過程による最大直径定理 [K. '13]
- 時間依存計量 (e.g. 後進 Ricci 流と，$\mathcal{L}$-型距離)
  - W_2-収縮性型定理
    [Topping / Lott / K. et al. / . . .]
  - 熱流は $\mathrm{Ent}_{\mathrm{vol}_t}$ の勾配流ではない！

(1) 理論の適用範囲の拡大

Q. **RCD 条件の修正版は？**

- 多様体上，$\mathrm{Ric}_N \geq K$ の K を関数に [Sturm]
  (最適輸送／勾配流の理論不在)
- 重みつき Ricci で，∇V を非勾配型に
  - 重みつき Riemann 多様体にはならない
  - 拡散過程による最大直径定理 [K. '13]
- **時間依存計量** (e.g. **後進** Ricci **流と，**$\mathcal{L}$-**型距離**)
  - W_2-**収縮性型定理**
    [Topping / Lott / K. et al. / . . .]
  - **熱流は** $\mathrm{Ent}_{\mathrm{vol}_t}$ **の勾配流ではない！**

(2) 平均RCD条件

★ RCD(K, N), $K > 0$
$\Rightarrow$ $(W_2$ での$)$ 熱分布の定常分布への指数的収束

(2) 平均RCD条件

★ RCD(K, N), $K > 0$

$\Rightarrow$ $(W_2$ での$)$ 熱分布の定常分布への指数的収束

Q. 同様の結論を導く，より弱い(幾何的な)条件は？

(2) 平均RCD条件

★ RCD(K,N), $K > 0$
$\Rightarrow$ $(W_2$ での$)$ 熱分布の定常分布への指数的収束

Q. 同様の結論を導く，より弱い(幾何的な)条件は？

- 空間の直径の情報を加味？ (e.g. [Bakry & Qian])
- 曲率の空間平均？
  - [Veysseire '10]: Spec. gap 評価
  - 微分幾何的に意味あり [G.-F. Wei et al. / ...]

(2) 平均RCD条件

★ RCD(K, N), $K > 0$
$\Rightarrow$ (W_2 での) 熱分布の定常分布への指数的収束

Q. 同様の結論を導く，より弱い (幾何的な) 条件は？

- 空間の直径の情報を加味？ (e.g. [Bakry & Qian])
- 曲率の空間平均？
  - [Veysseire '10]: Spec. gap 評価
  - 微分幾何的に意味あり [G.-F. Wei et al. / . . .]

(2) 平均RCD条件

★ **RCD**(K, N), $K > 0$
$\Rightarrow$ $(W_2$ **での**$)$ **熱分布の定常分布への指数的収束**

Q. **同様の結論を導く，より弱い(幾何的な)条件は？**

- **空間の直径の情報を加味？** (e.g. [Bakry & Qian])
- **曲率の空間平均？**
  - [Veysseire '10]: Spec. gap **評価**
  - **微分幾何的に意味あり** [G.-F. Wei et al. / . . .]

(2) 平均RCD条件

★ RCD(K,N), $K>0$
$\Rightarrow$ $(W_2$ での$)$ 熱分布の定常分布への指数的収束

Q. 同様の結論を導く，より弱い (幾何的な) 条件は？

- 空間の直径の情報を加味？ (e.g. [Bakry & Qian])
- 曲率の空間平均？
  - [Veysseire '10]: Spec. gap 評価
  - 微分幾何的に意味あり [G.-F. Wei et al. / . . .]

(3) 下に非有界な Ricci 曲率

Q. **空間の特性に応じ，条件 (達) が拡張できるか？**

- **劣** Riemann **多様体** (or **準楕円型生成作用素**) **での** Bakry-Émery **理論** [Baudoin & Garofalo / ...]
  $\rightsquigarrow$ **最適輸送理論との関係は？**
- **フラクタル上の最適輸送？**
  ([Kajino]: Ent **の RCD 条件不成立**)
- **無限次元空間では？**
  (e.g. [S. Fang et al.] ／ Wasserstein diffusion)

(3) 下に非有界な Ricci 曲率

Q. **空間の特性に応じ，条件 (達) が拡張できるか？**

- 劣 Riemann 多様体 (or 準楕円型生成作用素) での Bakry-Émery 理論　　[Baudoin & Garofalo / ...]
  $\rightsquigarrow$ 最適輸送理論との関係は？
- **フラクタル上の最適輸送？**
  ([Kajino]: Ent の RCD 条件不成立)
- 無限次元空間では？
  (e.g. [S. Fang et al.] ／ Wasserstein diffusion)

(3) 下に非有界な Ricci 曲率

Q. **空間の特性に応じ，条件 (達) が拡張できるか？**

- **劣** Riemann **多様体** (or **準楕円型生成作用素**) **での** Bakry-Émery **理論** [Baudoin & Garofalo / . . .]
  $\rightsquigarrow$ **最適輸送理論との関係は？**
- **フラクタル上の最適輸送？**
  ([Kajino]: Ent **の RCD 条件不成立**)
- **無限次元空間では？**
  (e.g. [S. Fang et al.] ／ Wasserstein diffusion)

(3) 下に非有界な Ricci 曲率

Q. **空間の特性に応じ，条件 (達) が拡張できるか？**

- 劣 Riemann 多様体 (or 準楕円型生成作用素) での Bakry-Émery 理論 [Baudoin & Garofalo / . . .]
  $\rightsquigarrow$ 最適輸送理論との関係は？
- フラクタル上の最適輸送？
  ([Kajino]: Ent の RCD 条件不成立)
- 無限次元空間では？
  (e.g. [S. Fang et al.] ／ Wasserstein diffusion)

Q. $z^{1/n}$ の Riemann 面達 と $\log z$ の Riemann 面 を，
最適輸送 or **熱分布の挙動**で区別できるか？
また， Walsh Brown 運動 との対比では？