最適輸送理論とリッチ曲率

～物を運ぶと曲率が分かる～

2015 年 2 月 20 日,21 日

目 次

1 モンジュの問題とモンジュ・カントロヴィッチ問題 (桑江)

本稿では最適輸送理論の歴史的経緯を交えながら基本となる考え方や方法を伝えたい. より詳しくはC. Villani 氏や Ambrosio-Gigli-Savaré 諸氏による教科書 [143, 144, 4] を, 日本語による解説では會田茂樹氏による講演スライド [147] や三上敏夫氏や太田慎一氏による論説 [153, 148, 149] を参照されたい.

1.1 モンジュの問題とモンジュ・カントロヴィッチ問題の歴史

次の問題を考える.

問題 1.1 ([103]) ある砂山をそれと同じ体積の穴に移したい. 砂粒一つ一つの移動には移動距離に依存したコストがかかるとき, 最適な移動のさせ方は何か？

この問題は仏の数学者・工学者である Gaspard Monge の 1781 年の論文 [103] の中で提唱され, モンジュ [1]の最適輸送問題, 略してモンジュの問題と呼ばれています. モンジュはフランス革命時に海軍大臣を務めたこともあり, モンジュの問題は物資の輸送におけるコストの節約の観点から現実的な要請が背景にあったと考えられます.

さて問題の文面のままでは何が問題なのか分りにくいですが, 実は砂山の砂粒はそれを移動させたら空中 (地中？) で静止してそこに留まっていることを暗に仮定しています. 解りやすい形に言い換えると次のようになります.

問題 1.2 n 個の工場と n 個の店舗があり, 各工場から各店舗にそれぞれ一個の製品のみを移動させ距離に応じてコストがかかるとき, 総コストを最小にする移動のさせ方は何か？

問題 1.2 [2]の解は工場と店の具体的な配置から決まります. しかも移動のさせ方は $n!$ 通りしかないので計算して具体的な解を (しらみつぶしかコンピュータで) 求めることが原理的に可能です. 最初の問題 1.1 は問題 1.2 において工場の個数が無限でしかも至る所密に詰っていて, さらに移動先の店舗も無限で密に詰っている状況の問題と解釈することができます. さらに一歩進めて「密に詰った無限の各工場から密に詰った無限の各店舗に総コストが最小になるような 1 対 1 上への写像を決める問題」と理解できます. 問題 1.1を数学的に述べると以下のようになります.

[1]モンジュはラプラス, フーリエと並んでナポレオンに仕えた数学者の一人である. 真面目で正義感の強い人物だったが, それが災いしてナポレオンを最後まで信奉したため悲惨な末路を迎えた逸話が残っている.

[2]この問題は, n 個の工場と m 個の店舗を考え, P_i が i 番目の工場の供給製品数, Q_j が j 番目の店舗の必要製品数を表し, X_{ij} を i 番目の工場の製品数 P_i のうち j 番目の店舗へ配送する供給数, その移動コストを C_{ij} として $\sum_{i=1}^n P_i = \sum_{j=1}^m Q_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m X_{ij}$ の条件下で総コスト $C(X) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m X_{ij} C_{ij}$ を最小にする配送数行列 $X = (X_{ij})$ を求めよという問題に一般化できる. これをヒッチコック型輸送問題という. 問題 1.2は $n = m$ で C が単位行列の場合を考えている.

問題 1.3 D_1, D_2 は $\mathbb{R}^3$ の部分集合で同じ体積 1 をもつとする．位置 x の砂を位置 y に移動するのに要する価格は単位体積あたり $c(x,y)$ [3] だけかかるとする．D_1 から D_2 への写像 T で次の条件 (1), (2) を満たすものを考える:

(1) T は全単射である．すなわち $x \neq x'$ ならば $T(x) \neq T(x')$, かつ D_1 の T による像 $T(D_1) = \{T(x) \mid x \in D_1\}$ は D_2 である．

(2) D_1 の任意の部分集合 U に対してその像 $T(U)$ と U の体積は同じである．

<u>これらの条件下</u>で $C(T) := \displaystyle\int_{D_1} c(x, T(x))\mathrm{d}x$ を最小にする写像 T を求めよ．

問題 1.3はたいへんな難問で解決されるまで長い年月がかかりました. Sudakov [135, 136] が 1979 年にモンジュの問題の解である最適輸送写像 T の存在証明を発表しましたが, それには一部誤りがありました. 修復された証明は測度の台が互いに素でコンパクトという強い仮定の下で Evans-Gangbo [49] (1999), 密度をもつ仮定の下で Ambrosio [2] (2000), Trudinger-Wang [139] (2001), Caffarelli-Feldman-McCann [23] (2002) [4]等によりなされました.

1979 年の Sudakov [135, 136] 以前にこの問題に関して重要なアイディアを提出したのがロシアの数学者・経済学者 Leonid Kantorovich(レオニード・カントロヴィッチ)(1912-1986) です. カントロビッチはモンジュの問題を, <u>写像を決めるのでなく</u>,「工場の散らばり (確率分布 μ) と店舗の散らばり (確率分布 ν) が与えられているときに x から y への移動コスト $c(x,y)$ の総コスト

$$C(\pi) := \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} c(x,y)\pi(\mathrm{d}x\mathrm{d}y)$$

が最小になるような工場と店舗の配置の結合分布 π(輸送計画) を決めよ」という問題に置き換えました. これをモンジュ・カントロビッチ問題 (以下 MK 問題) と呼びます. MK 問題はモンジュの問題よりは解決が数学的には易しく, モンジュの問題の解決に向けて大きな進展が得られました. カントロビッチは線形計画法 [5]において先駆的な業績を挙げており, 資源の適正配分に関する一連の研究により 1975 年にノーベル経済学賞を受賞しています. MK 問題の解から対応するモンジュの問題の解 T の満たすべき性質が予想できます. そのことに基づいてコスト関数 $c(x,y)$ が良い条件を満たすとき初めて厳密に解いたのが Yann Brenier です (1987 年).

定理 1.4 (Yann Brenier(1987), cf. [19, 20]) μ, ν は $\mathbb{R}^n$ 上の連続型確率分布で, 2 次の積率をもつとし, μ は n-次元ルベーグ測度に関して絶対連続なものとする. コスト関数 $c(x,y) = \frac{1}{2}|x-y|^2$ に対する MK 問題の解 $\pi \in \Pi(\mu,\nu)$ に対して $\pi(A \times B) = \mu(A \cap T^{-1}(B))$,

[3] $c(x,y)$ はここでは必ずしも $\mathbb{R}^3$ のユークリッド距離 $|x-y|$ に依存しているとは限らないものとする.
[4] Brenier の定理の結果と異なり, 最適輸送写像の一意性は成立しない.
[5] ジョージ・ダンツィーグ (George Dantzig 1914–2005) が 1948 年に線形計画法を確立した.

$\forall A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ [6]を満たす写像 $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ が存在する．さらに凸関数 $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ で $T = \nabla\phi$ μ-a.s. をみたすものが存在する．ここで

$$\Pi(\mu, \nu) := \{\pi \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \mid \pi(A \times \mathbb{R}^n) = \mu(A), \pi(\mathbb{R}^n \times B) = \nu(B)\ \forall A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\}$$

は μ, ν の結合分布 (カップリング) と呼ばれる $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 確率測度の全体で, $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ は $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n}$ 上のボレル確率測度の全体である．

証明 (定理 1.4の証明の概略) $\pi_0 \in \Pi(\mu, \nu)$ を

$$D^2[\pi] := \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} |x - y|^2 \pi(\mathrm{d}x\mathrm{d}y), \quad \pi \in \Pi(\mu, \nu)$$

を最小にする輸送計画とする (後述の定理 1.6からこの最小点 $\pi_0 \in \Pi(\mu, \nu)$ は存在する)．すると任意の $x, y \in \mathbb{R}^n$ で $\varphi(x) + \psi(y) \le \frac{1}{2}|x - y|^2$ をみたす有界連続関数 $\varphi, \psi \in C_b(\mathbb{R}^n)$ [7]について

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}D^2[\pi] = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} |x - y|^2 \pi(\mathrm{d}x\mathrm{d}y) &\ge \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} (\varphi(x) + \psi(y))\pi(\mathrm{d}x\mathrm{d}y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\mu(\mathrm{d}x) + \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y)\nu(\mathrm{d}y) \end{aligned}$$

となって, これより

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2} \inf_{\pi \in \Pi(\mu,\nu)} D^2[\pi] \ge \sup \quad & \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\mu(\mathrm{d}x) + \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y)\nu(\mathrm{d}y) \;\middle|\; \right. \\ & \left. \varphi, \psi \in C_b(\mathbb{R}^n),\ \varphi(x) + \psi(y) \le \tfrac{1}{2}|x - y|^2 \quad {}^{\forall}x, y \in \mathbb{R}^n \right\} \end{aligned} \tag{1.1}$$

を得る．右辺を最大化する関数の組 $(\varphi, \psi) \in L^1(\mu) \times L^1(\nu)$ [8]で, 任意の $x, y \in \mathbb{R}^n$ で $\varphi(x) + \psi(y) \le \frac{1}{2}|x - y|^2$ を満たし, かつ

$$\pi_0\text{-a.s. } (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \text{ で } \varphi(x) + \psi(y) = \frac{1}{2}|x - y|^2 \tag{1.2}$$

をみたすものが存在することが (μ, ν の 2 次の積率有限性から後述の定理 1.24(2) が適用できて) わかり, (1.1) で等号が成立する (Kantorovich 双対性, 定理 1.24(3))．特に (1.2) から μ-a.s. $x \in \mathbb{R}^n$ に対し, $\varphi(x) + \psi(y) = \frac{1}{2}|x - y|^2$ をみたす $y \in \mathbb{R}^n$ が存在する．実際,

$$A := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \varphi(x) + \psi(y) = \frac{1}{2}|x - y|^2 \text{ を満たす } y \text{ が存在する} \right\}$$

[6] これは T のグラフ $G(T) := \{(x, T(x)) \in \mathbb{R}^{2n} \mid x \in \mathbb{R}^n\}$ に対して $\pi(G(T)) = 1$ と同値である．

[7] $C_b(\mathbb{R}^n)$ は $\mathbb{R}^n$ 上の有界連続関数の全体.

[8] この最大化する関数の組 (φ, ψ) の φ を **Kantorovich potential** という．また ψ はこの場合, $\psi(y) := \varphi^c(y) := \inf_{z \in \mathbb{R}^n} \left\{ \frac{1}{2}|z - y|^2 - \varphi(z) \right\}$ と定め, その帰結として $\varphi(x) + \psi(y) \le \frac{1}{2}|x - y|^2$, $x, y \in \mathbb{R}^n$ となる．

とすると

$$\begin{aligned}\mu(A) &= \pi_0(A \times \mathbb{R}^n) \\ &= \pi_0\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \varphi(x) + \psi(y) = \frac{1}{2}|x-y|^2 \text{ を満たす } y \text{ が存在する}\right\} \times \mathbb{R}^n\right) \\ &\geq \pi_0\left(\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \;\middle|\; \varphi(x) + \psi(y) = \frac{1}{2}|x-y|^2\right\}\right) = 1\end{aligned}$$

となる．$x \in A$ をとれば, $\varphi(x) + \psi(y) = \frac{1}{2}|x-y|^2$ をみたす y 毎に

$$z \mapsto \frac{1}{2}|z-y|^2 - \varphi(z)$$

は x で最小値をとることがわかる．特に, $x \in A$ で

$$\varphi(x) \leq \inf_{w \in \mathbb{R}^n}\left(\frac{1}{2}|x-w|^2 - \psi(w)\right) \leq \frac{1}{2}|x-y|^2 - \psi(y) = \varphi(x)$$

から,

$$\varphi(x) = \inf_{w \in \mathbb{R}^n}\left(\frac{1}{2}|x-w|^2 - \psi(w)\right) \tag{1.3}$$

を得る．

$$\varphi_k(z) := \inf_{|w|<k}\left\{\frac{1}{2}|z-w|^2 - \psi(w)\right\}$$

とおくと, φ_k は局所 Lipschitz 連続であり, $x \in A$ として十分大きい $k \in \mathbb{N}$ に対して $|y| < k$ になることから $\varphi(x) = \varphi_k(x)$ を得る．これより μ-a.s. $x \in \mathbb{R}^n$ で $k \in \mathbb{N}$ がとれて $\varphi(x) = \varphi_k(x)$ となる．したがって Rademacher の定理 ([144, Theorem 10.8(ii)]) より μ-a.s. $x \in \mathbb{R}^n$ で φ は微分可能となる．そこで

$$D(T) := A \cap \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi \text{ は } x \text{ で微分可能}\right\}$$

とする．明らかに $\mu(D(T)) = 1$ である．$x \in D(T)$ において $\varphi(x) + \psi(y) = \frac{1}{2}|x-y|^2$ の両辺を微分して

$$(x-y) - \nabla\varphi(x) = \nabla\left(\frac{1}{2}|\cdot - y|^2 - \varphi\right)(x) = 0,$$

すなわち $y = x - \nabla\varphi(x)$ を得る．つまり $x \in D(T)$ 毎に $\varphi(x) + \psi(y) = \frac{1}{2}|x-y|^2$ をみたす y がこの表示から一意的に決まる．そこで写像 $T : D(T) \to \mathbb{R}^n$ を

$$T(x) = x - \nabla\varphi(x) = \nabla\left(\frac{1}{2}|\cdot|^2 - \varphi\right)(x), \quad x \in D(T)$$

で定めることにする．リーマン多様体での指数写像 $\exp_x$ をユークリッド空間の場合に適用すると

$$T(x) = x - \nabla\varphi(x) = \exp_x(-\nabla\varphi(x))$$

と表される. そこで

$$\phi(z) := \sup_{w\in\mathbb{R}^n}\left(\psi(w) - \frac{1}{2}|w|^2 + \langle z, w\rangle\right)$$

で関数 ϕ を定めると, ϕ は表示から明らかに $\mathbb{R}^n$ 上の凸関数であり [9], (1.3) から

$$\phi(x) = \frac{1}{2}|x|^2 - \varphi(x), \quad x \in A$$

となることから $T = \nabla\phi = \exp_{\cdot}(-\nabla\varphi)$ μ-a.s. を得る.

最後に $\pi_0 = (\mathrm{Id}, T)_\sharp\mu$ [10]を示そう. これから最適輸送計画 π_0 は一意に定まることがわかり, $\nu = T_\sharp\mu$ [11]も従う.[12] まず T のグラフを $G(T) := \{(x, T(x)) \mid x \in D(T)\}$ とする. $\Gamma_0 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid \varphi(x) + \psi(y) = \frac{1}{2}|x-y|^2\}$ とすると写像 T の構成の手続きから $G(T) = \Gamma_0 \cap (D(T) \times \mathbb{R}^n)$ がわかるので $\pi_0(\Gamma_0) = 1$ から

$$\pi_0(G(T)) = \pi_0(\Gamma_0 \cap (D(T)\times\mathbb{R}^n)) = \pi_0(D(T)\times\mathbb{R}^n) = \mu(D(T)) = 1$$

となる. これより, 任意の $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$\begin{aligned}
\pi_0(A\times B) &= \pi_0((A\times B)\cap G(T)) \\
&= \pi_0(\{(x,T(x)) \mid x \in D(T)\cap A, T(x) \in B\}) \\
&= \pi_0(\{(x,T(x)) \mid x \in D(T)\cap A\cap T^{-1}(B)\}) \\
&= \pi_0([(D(T)\cap A\cap T^{-1}(B))\times\mathbb{R}^n]\cap G(T)) \\
&= \pi_0((D(T)\cap A\cap T^{-1}(B))\times\mathbb{R}^n) \\
&= \mu(D(T)\cap A\cap T^{-1}(B)) = \mu(A\cap T^{-1}(B)) = (\mathrm{Id}, T)_\sharp(A\times B)
\end{aligned}$$

となり, $\pi_0 = (\mathrm{Id}, T)_\sharp\mu$ を得る. □

注意 1.5 (1) 定理 1.4の帰結として Brenier [19, 20] による**極因子分解定理 (Polar factorization Theorem)** がわかる: λ^n を n-次元ルベーグ測度とし, $\nu \in \mathcal{P}_2^{\mathrm{ac}}(\mathbb{R}^n)$ [13]を考える. 可測ベクトル場 $X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ が

$$X_\sharp\lambda^n \ll \lambda^n$$

[9] $\phi((1-t)x+ty) = \sup_{w\in\mathbb{R}^n}\{\psi(w) - \frac{1}{2}|w|^2 + \langle(1-t)x+ty, w\rangle\} = \sup_{w\in\mathbb{R}^n}\{(1-t)(\psi(w) - \frac{1}{2}|w|^2 + \langle x, w\rangle) + t(\psi(w) - \frac{1}{2}|w|^2 + \langle y, w\rangle)\} \le (1-t)\phi(x) + t\phi(y)$.

[10] ここで $(\mathrm{Id}, T)_\sharp\mu$ は μ の直積写像 (Id, T) による押し出し測度 (確率論の教科書では像測度) と呼ばれるもので $(\mathrm{Id}, T)_\sharp\mu(C) := \mu((\mathrm{Id}, T)^{-1}(C)) = \mu(\{x \in \mathbb{R}^n \mid (x, T(x)) \in C\})$, $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$ で定義される.

[11] $T_\sharp\mu$ も写像 $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ による μ の押し出し測度で, $T_\sharp\mu(B) := \mu(T^{-1}(B)) = \mu(\{x \in \mathbb{R}^n \mid T(x) \in B\})$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ で定義される. μ (resp. ν) が n-次元 Lebesgue 測度 λ^n に関して絶対連続で, その密度関数を $f(x)$ (resp. $g(x)$) とするとき, T が λ^n-a.e. で可微分ならば, $\nu = T_\sharp\mu$ は $|\det(\frac{\partial T_i}{\partial x_j}(x))|g(T(x)) = f(x)$ λ^n-a.e. $x \in \mathbb{R}^n$ と同等である. ここで $\det(\frac{\partial T_i}{\partial x_j}(x))$ は T のヤコビ行列式である. $T = \nabla\phi$ λ^n-a.e. と T が凸関数 ϕ の勾配で表示されていれば, T は λ^n-a.e. で微分可能で g が正なら, ϕ は Monge-Ampére 方程式 $\det\nabla^2\phi(x) = \frac{f(x)}{g(\nabla\phi(x))}$ の解となる.

[12] $\nu = T_\sharp\mu$ を直接的に示すこともできる. これは (φ, ψ) が (1.1) の右辺を最大化することから, $h \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$ に対して $\int_{\mathbb{R}^n} h\circ T\mathrm{d}\mu - \int_{\mathbb{R}^n} h\mathrm{d}\nu = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}(J(\varphi+\varepsilon h\circ T, \psi - \varepsilon h) - J(\varphi, \psi)) = 0$ となることでわかる. ここで $J(f,g) := \int_{\mathbb{R}^n} f\mathrm{d}\mu + \int_{\mathbb{R}^n} g\mathrm{d}\nu$ である.

[13] $\mathcal{P}_2^{\mathrm{ac}}(\mathbb{R}^n) := \{\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \mid \mu$ は Lebesgue 測度に関して絶対連続 $\}$.

を満たせば, ある凸関数 ψ と $\eta_\sharp\nu=\nu$ をみたす写像 $\eta:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ が存在して $X=\nabla\psi\circ\eta$ ν-a.s. と表せる.

証明　$\mu:=X_\sharp\nu$ とすると仮定から $\mu\in\mathcal{P}_2^{\mathrm{ac}}(\mathbb{R}^n)$ であり, 定理 1.4からコスト関数 $c(x,y)=\frac{1}{2}|x-y|^2$ と μ,ν に関する最適輸送写像 T は下半連続な凸関数 ϕ を用いて $T=\nabla\phi$ μ-a.s. の表現を持ち

$$\nu=T_\sharp\mu=(\nabla\phi)_\sharp\mu=(\nabla\phi)_\sharp X_\sharp\nu=(\nabla\phi\circ X)_\sharp\nu$$

と表せる. $\eta:=\nabla\phi\circ X$ とおくと上式は $\eta_\sharp\nu=\nu$ を表している. ϕ の Fenchel-Legendre 変換を $\phi^*(y):=\sup\{\langle x,y\rangle-\phi(x)\mid x\in\mathbb{R}^n\}$ とおくと, これは下半連続凸関数で $\nabla\phi^*\circ\nabla\phi=\mathrm{Id}$ μ-a.s. [14]となるので $X=\nabla\phi^*\circ\eta$ ν-a.s. を得る. □

(2) 定理 1.4は Mikami [99] によって確率論的な別証明が与えられている.

(3) 定理 1.4はユークリッド空間の設定で Gangbo-McCann [56] においていくつかの条件をみたす狭義凸関数 $h:\mathbb{R}^n\to[0,+\infty[$ [15]を用いたコスト関数 $c(x,y)=h(x-y)$, $x,y\in\mathbb{R}^n$ の場合に拡張されている. 詳細は [153] の解説を参照されたい. モンジュの問題を解決した Trudinger-Wang [139], Caffarelli-Feldman-McCann [23] の証明は Gangbo-McCann [56] の結果に立脚している.[16]

(4) 定理 1.4は McCann [97] によってコンパクトリーマン多様体の場合に, その後 Fathi-Figalli [52], Figalli-Gigli [53] によって非コンパクトリーマン多様体 (M,g) の場合に拡張された. その場合もリーマン距離 $d_g(x,y)$ を用いた $c(x,y)=\frac{1}{2}d_g^2(x,y)$ をコスト関数とする $\mu_0\in\mathcal{P}_2^{\mathrm{ac}}(M)$ と $\mu_1\in\mathcal{P}_2(M)$ に関する最適輸送写像 T は局所弱凸関数 φ が存在して

$$T=\exp_\cdot(\nabla\varphi)\quad \mu\text{-a.s.}$$

と表現される. また勾配ベクトル場に沿う μ_0 の押し出し測度

$$\mu_t:=(T_t)_\sharp\mu_0,\quad T_t(x):=\exp_x(t\nabla\varphi(x)),\quad t\in[0,1]$$

が後述の L^2-Wasserstein 空間 $(\mathcal{P}_2(M),W_2)$ [17]における μ_0 から μ_1 への最短測地線を与える. すなわち

$$W_2(\mu_0,\mu_t)=tW_2(\mu_0,\mu_1),\quad W_2(\mu_t,\mu_1)=(1-t)W_2(\mu_0,\mu_1),\quad t\in[0,1].$$

[14]凸関数の組 (ϕ,ϕ^*) は $\mu:=X_\sharp\nu$ と ν に対してコスト関数 $c(x,y)=-\langle x,y\rangle$ に後述の Kantorovich 双対性 (定理 1.24) を適用して, $(-\phi,-\phi^*)$ が $\sup_{\pi\in\Pi(\mu,\nu)}\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}\langle x,y\rangle\pi(\mathrm{d}x\mathrm{d}y)=\inf_{(\varphi,\psi)\in\Phi_c\cap C_b}J(-\varphi,-\psi)$ の右辺を最小化するものであり, 左辺の最大点 $\pi_0\in\Pi(\mu,\nu)$ について等式 $\langle x,y\rangle=\phi(x)+\phi^*(y)$ π_0-a.s. $(x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ をみたすものになっている. $\phi(x)$ (resp. $\phi^*(y)$) は Lebesgue 測度に関して a.e. x (resp. a.e. y) で微分可能であるので π_0-a.s. (x,y) で $\phi(x)$ と $\phi^*(y)$ は微分可能となり, 等式 $\langle x,y\rangle=\phi(x)+\phi^*(y)$ の両辺を y について微分することで $x=\nabla\phi^*(y)$, x について微分することで $y=\nabla\phi(x)$ を得て, $x=\nabla\phi^*\circ\nabla\phi(x)$ π_0-a.s. (x,y) となる, したがって $x=\nabla\phi^*\circ\nabla\phi(x)$ μ-a.s. $x\in\mathbb{R}^n$ となる.

[15]$h(x)=|x|^p$, $x\in\mathbb{R}^n$, $p\in]1,+\infty[$ などが一例.

[16]コスト関数 $c_p(x,y)=|x-y|^p$ に対するモンジュ・カントロヴィッチ問題の一意的な解において極限 $p\to1$ をとることで $c(x,y)=|x-y|$ に対するモンジュ・カントロヴィッチ問題の解を構成している.

[17]$\mathcal{P}_2(M)$ はリーマン多様体 (M,g) における 2 次積率有限なボレル確率測度の全体である. すなわち $\mathcal{P}_2(M):=\{\mu\in\mathcal{P}(M)\mid\exists x_0\in M \text{ s.t. } \int_M d_g^2(x,x_0)\mu(\mathrm{d}x)<\infty\}$ (d_g は (M,g) 上のリーマン距離).

1.2 モンジュ・カントロヴィッチ問題の解の存在

定理 1.6 (最小点の存在) X, Y をポーランド空間[18]とし, $\mu \in \mathcal{P}(X)$, $\nu \in \mathcal{P}(Y)$ をそれぞれの空間上の確率測度とする．コスト関数 $c : X \times Y \to [0, \infty]$ [19] は下半連続とする．$\int_{X\times Y} c(x,y)\pi(\mathrm{d}x\mathrm{d}y) < \infty$ をみたす $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$ が存在すれば, モンジュ・カントロヴィッチ問題

$$\inf_{\pi\in\Pi(\mu,\nu)} \int_{X\times Y} c(x,y)\pi(\mathrm{d}x\mathrm{d}y) < \infty \tag{1.4}$$

の最小点 $\pi_0 \in \Pi(\mu, \nu)$ が存在する．この π_0 を μ **から** ν **への最適輸送計画, あるいは** μ **と** ν **の最適カップリング**と呼ぶ.

注意 1.7 (1) (1.4) の 最小点である最適輸送計画 π_0 は一般に一意ではない.

(2) MK 問題は確率論的には

$$\inf \{\mathbf{E}[c(U,V)] \mid U_\sharp \mathbf{P} = \mu, V_\sharp \mathbf{P} = \nu\} \tag{1.5}$$

を最小化する $X\times Y$-値確率変数 (U, V) を求めることでもある．(U, V) の分布 $(U, V)_\sharp \mathbf{P}$ は U の分布 $U_\sharp \mathbf{P} = \mu$, V の分布 $V_\sharp \mathbf{P} = \nu$ のカップリングに他ならない.

定義 1.8 (半連続性) $(E, \mathcal{O}(E))$ を位相空間とする．関数 $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ の $x \in E$ における**下極限** (lower limit) を

$$\varliminf_{y\to x} f(y) := \sup_{U\in\mathcal{U}(x)} \inf_{y\in U} f(y) \tag{1.6}$$

で定める．同様に**上極限** (upper limit) を

$$\varlimsup_{y\to x} f(y) := \inf_{U\in\mathcal{U}(x)} \sup_{y\in U} f(y) \tag{1.7}$$

で定める．ここで $\mathcal{U}(x)$ は $x \in E$ での位相の近傍系である．$(E, \mathcal{O}(E))$ が第一可算で, 点列 $\{x_n\}$ が x に収束しているときは

$$\varliminf_{y\to x} f(y) = \varliminf_{n\to\infty} f(x_n) := \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n} f(x_k), \tag{1.8}$$

$$\varlimsup_{y\to x} f(y) = \varlimsup_{n\to\infty} f(x_n) := \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} f(x_k) \tag{1.9}$$

となる．$(E, \mathcal{O}(E))$ が距離 d から定まる位相空間のときは

$$\varliminf_{y\to x} f(y) = \lim_{\varepsilon\to 0} \inf_{d(x,y)<\varepsilon} f(y), \tag{1.10}$$

$$\varlimsup_{y\to x} f(y) = \lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{d(x,y)<\varepsilon} f(y) \tag{1.11}$$

---

[18] ポーランド空間とは完備可分な距離空間と位相同型な位相空間である．この講演で扱う空間は全てポーランド空間である.

[19] ここでは簡単のためコスト c は非負としているが, 非負の条件を弱めて上半連続な $a \in L^1(X;\mu)$, $b \in L^1(Y;\nu)$ がとれて $c(x,y) \geq a(x) + b(y)$ ${}^\forall(x,y) \in X \times Y$ が成立するとしても同じ結論を得る.

となる． 関数 $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ が $x \in E$ **で下半連続** (lower semi continuous at $x \in E$) (resp. $x \in E$ **で上半連続** (upper semi continuous at $x \in E$)) であるとは $f(x) \le \underline{\lim}_{y \to x} f(y)$ (resp. $f(x) \ge \overline{\lim}_{y\to x} f(y)$) のこととする．また $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ が E **上で下半連続** (lower semi continuous on E) (resp. E **上で上半連続** (upper semi continuous on E) とは f が全ての点 $x \in E$ で下半連続 (resp. 全ての点 $x \in E$ で下半連続) のこととする．

補題 1.9 (E, d) を距離空間とする．下に有界な下半連続関数 $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ に対して Lipschitz 連続な有界関数からなる単調非減少列 $\{f_n\}$ で $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ となるものが存在する．

証明 f_n, g_n を

$$g_n(x) := \inf_{y\in E} \{nd(x, y) + f(y)\}, \quad f_n(x) := g_n(x) \wedge n$$

とおくと，明らかに $g_n(x) \le g_{n+1}(x) \le f(x)$ で，g_n は n-Lipschitz であるので f_n も同じ性質をもつ．f が下に有界であることから g_n, f_n も下に一様に有界で同じ下界をもつ．$g_n(x) \to f(x)$ as $n \to \infty$ のみ示せばよい． $f(x) - \sup_{n\in\mathbb{N}} g_n(x) > 0$ として $0 < \varepsilon < f(x) - \sup_{n\in\mathbb{N}} g_n(x)$ をとる．これから点列 $\{y_n\}$ で $nd(x, y_n) + f(y_n) < f(x) - \varepsilon$ をみたすものがとれる．したがって

$$d(x, y_n) < \frac{f(x) - f(y_n) - \varepsilon}{n} \le \frac{f(x) - \inf_{y\in E} f(y) - \varepsilon}{n} \to 0 \quad n \to \infty$$

となるので $\lim_{n\to\infty} y_n = x$ となる．これと f の下半連続性から $f(x) \le \underline{\lim}_{n\to\infty} f(y_n) \le f(x) - \varepsilon$ を得て矛盾するので，$f(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} g_n(x)$ となる． □

定義 1.10 (弱収束) (E, d) を距離空間とする． $\{\mu_k\} \subset \mathcal{P}(E)$ が $\mu \in \mathcal{P}(E)$ に**弱収束** (weakly convergent) するとは，任意の $\varphi \in C_b(E)$ [20]に対して

$$\lim_{k\to\infty} \int_E \varphi(x)\mu_k(\mathrm{d}x) = \int_E \varphi(x)\mu(\mathrm{d}x) \tag{1.12}$$

が成立することとする．このとき $\mu_k \xrightarrow{w} \mu$ と記す．これらは次の条件と同値である．

(1) 任意の有界な下半連続関数 φ に対し，$\displaystyle\int_E \varphi(x)\mu(\mathrm{d}x) \le \underline{\lim}_{k\to\infty} \int_E \varphi(x)\mu_k(\mathrm{d}x)$.

(2) 任意の下に有界な下半連続関数 φ に対し，$\displaystyle\int_E \varphi(x)\mu(\mathrm{d}x) \le \underline{\lim}_{k\to\infty} \int_E \varphi(x)\mu_k(\mathrm{d}x)$.

(3) 任意の有界な上半連続関数 φ に対し，$\displaystyle\int_E \varphi(x)\mu(\mathrm{d}x) \ge \overline{\lim}_{k\to\infty} \int_E \varphi(x)\mu_k(\mathrm{d}x)$.

(4) 任意の上に有界な上半連続関数 φ に対し，$\displaystyle\int_E \varphi(x)\mu(\mathrm{d}x) \ge \overline{\lim}_{k\to\infty} \int_E \varphi(x)\mu_k(\mathrm{d}x)$.

[20] $C_b(E)$ は E 上の有界連続関数の全体.

(5) 任意の開集合 G に対し, $\mu(G) \le \varliminf_{k\to\infty} \mu_k(G)$.

(6) 任意の閉集合 F に対し, $\mu(F) \ge \varlimsup_{k\to\infty} \mu_k(F)$.

(7) 任意のボレル集合 A で $\mu(\partial A) = 0$ をみたすものに対し, $\mu(A) = \lim_{k\to\infty} \mu_k(A)$.

証明 (定義 1.10での主張の同値性の証明) (5), (6), (7) と (1.12) との同値性は標準的なテキスト (例えば, 小谷 [151, 命題 9.2]) に記述があるので略する. (1) と (3) との同値性は φ を $-\varphi$ にすることで自明. したがって (1) を仮定すると (3) とあわせて (1.12) が得られる. 逆に (1.12) を仮定すると, 補題 1.9から任意の有界な下半連続関数 φ が有界な連続関数列 $\{\varphi_n\}$ の単調増大極限であることから

$$\int_E \varphi \mathrm{d}\mu =\uparrow \lim_{n\to\infty} \int_E \varphi_n \mathrm{d}\mu \le \lim_{n\to\infty} \lim_{k\to\infty} \int_E \varphi_n \mathrm{d}\mu_k \le \varliminf_{k\to\infty} \int_E \varphi \mathrm{d}\mu_k$$

となり (3) を得る. (1)$\Longrightarrow$(2) と (3)$\Longrightarrow$(4) は自明, (2)$\Longrightarrow$(1) は $\varphi_n := \varphi \wedge n$ として

$$\int_E \varphi_n \mathrm{d}\mu \le \varliminf_{k\to\infty} \int_E \varphi_n \mathrm{d}\mu_k \le \varliminf_{k\to\infty} \int_E \varphi \mathrm{d}\mu_k$$

から従う. (4)$\Longrightarrow$(3) も同様である. □

注意 1.11 (1) 距離空間 (E,d) において $\mathcal{P}(E)$ 上の弱収束は距離化可能な位相から決まる. この位相を**弱位相 (weak topology)** という ([4, Remark 5.1.1]).

(2) 距離空間 (E,d) において確率測度の全体 $\mathcal{P}(E)$ は有界連続関数全体 $C_b(E)$ の位相的双対空間 $(C_b(E))^*$ の単位球とみなせることから $\mathcal{P}(E)$ の弱位相は $(C_b(E))^*$ の weak* 位相とみなせる.

定義 1.12 (緊密性 (tightness)) (E,d) を距離空間, $\mathcal{P}(E)$ を E 上のボレル確率測度の全体とする. E 上の確率測度の族 $\Pi(\subset \mathcal{P}(E))$ が**緊密 (tight)** であるとは $\forall\varepsilon > 0$ に対し, コンパクト集合 $\exists K_\varepsilon$ で $\sup_{\mu\in\Pi} \mu(K_\varepsilon^c) < \varepsilon$ を満たすものがとれることとする.

定理 1.13 (Prokhorov's Theorem)
(E,d) を可分距離空間とする. E 上の確率測度の族 $\Pi(\subset \mathcal{P}(E))$ に対し,

(1) Π は緊密 (tight) である.

(2) Π は $\mathcal{P}(E)$ の弱収束で相対点列コンパクトである.

としたとき, (1)$\Rightarrow$(2) が成立する. さらに (E,d) が完備なら (2)$\Rightarrow$(1) が成立する.

注意 1.14 (1) 定理 1.13の証明についてはBillingsley [16, Theorems 5.1 and 5.2], Ikeda-Watanabe [73, Theorem 2.6], Dellacherie-Meyer [41, III-59] や小谷 [151, 定理 9.4] 等の確率論の教科書を参照されたい.

(2) 定理 1.13から E がポーランド空間なら Π の緊密性と Π の弱位相での相対コンパクト性が同値になる．このような性質をもつ位相空間を**ラドン空間 (Radon space)** という ([4, Definition 5.1.4])．定理 1.13はポーランド空間ならラドン空間であることを主張している．

証明　(定理 1.6の証明) $\{\pi_n\} \subset \Pi(\mu,\nu)$ を (1.4) の 最小化列とすると, $\{\pi_n\}$ は $\mathcal{P}(X\times Y)$ において緊密 (tight) な族になる．実際, X, Y がポーランド空間であることから Prokhorov の定理 (定理 1.13) より $\forall\varepsilon>0$ に対してコンパクト集合 $K_1 \subset X, K_2 \subset Y$ で $\mu(K_1^c), \nu(K_2^c) < \varepsilon/2$ となるものがとれるので $\pi_n((K_1\times K_2)^c) \le \pi_n(K_1^c\times Y)+\pi_n(X\times K_2^c) = \mu(K_1^c)+\nu(K_2^c) < \varepsilon$ から $\sup_{n\in\mathbb{N}} \pi_n((K_1\times K_2)^c) < \varepsilon$ となるので $\{\pi_n\}$ は緊密な族である．これと Prokhorov の定理 (定理 1.13) から $\{\pi_n\}$ から部分列 $\{\pi_{n_k}\}$ がとれて, ある $\pi_0 \in \mathcal{P}(X\times Y)$ に弱収束する．コスト関数の下半連続性から

$$
\begin{aligned}
\int_{X\times Y} c(x,y)\pi_0(\mathrm{d}x\mathrm{d}y) &\le \lim_{n\to\infty}\int_{X\times Y}\{c(x,y)\wedge n\}\pi_0(\mathrm{d}x\mathrm{d}y)\\
&= \lim_{n\to\infty}\varliminf_{k\to\infty}\int_{X\times Y}\{c(x,y)\wedge n\}\pi_{n_k}(\mathrm{d}x\mathrm{d}y)\\
&= \varliminf_{k\to\infty}\int_{X\times Y} c(x,y)\pi_{n_k}(\mathrm{d}x\mathrm{d}y)\\
&= \inf_{\pi\in\Pi(\mu,\nu)}\int_{X\times Y} c(x,y)\pi(\mathrm{d}x\mathrm{d}y)
\end{aligned}
$$

から π_0 が最小点であることがわかる．次に $\pi_0 \in \Pi(\mu,\nu)$ になることを示す．$A \in \mathcal{B}(X)$ に対して $\pi_0(A\times Y) = \mu(A)$ のみ示せば十分である．$f \in C_b(X)$ に対して $f \in C_b(X\times Y)$ でもあるので $\pi_{n_k} \in \Pi(\mu,\nu)$ とルベーグ積分の変数変換公式から

$$
\int_X f(x)\pi_{n_k}(\mathrm{d}x\mathrm{d}y) = \int_X f(x)\mu(\mathrm{d}x)
$$

を得る．これより

$$
\int_X f(x)\pi_0(\mathrm{d}x\mathrm{d}y) = \lim_{k\to\infty}\int_X f(x)\pi_{n_k}(\mathrm{d}x\mathrm{d}y) = \int_X f(x)\mu(\mathrm{d}x)
$$

である．これから開集合 $G \in \mathcal{O}(X)$ に対して $\mathbf{1}_G(x) = \lim_{n\to\infty} nd(x,G^c)\wedge 1$ から

$$
\begin{aligned}
\pi_0(G\times Y) &= \int_X \mathbf{1}_G(x)\pi_0(\mathrm{d}x\mathrm{d}y)\\
&= \lim_{n\to\infty}\int_X (nd(x,G^c)\wedge 1)\pi_0(\mathrm{d}x\mathrm{d}y)\\
&= \lim_{n\to\infty}\int_X (nd(x,G^c)\wedge 1)\mu(\mathrm{d}x)\\
&= \int_X \mathbf{1}_G(x)\mu(\mathrm{d}x) = \mu(G)
\end{aligned}
$$

を得る．補集合をとることで X の閉集合 F に対しても $\pi_0(F\times Y)=\mu(F)$ を得る．

$$\mathcal{A}=\{A\in\mathcal{B}(X)\mid \pi_0(A\times Y)=\mu(A)\}$$

と置くと上記のことから $\mathcal{O}(X)\subset\mathcal{A}\subset\mathcal{B}(X)$ であり, $\mathcal{A}$ が X 上の σ-加法族になることから $\mathcal{A}=\mathcal{B}(X)$, すなわち 任意の $A\in\mathcal{B}(X)$ に対して $\pi_0(A\times Y)=\mu(A)$ を得る． □

ボレル可測写像 $T:X\to Y$ で $T_\sharp\mu=\nu$ をみたすものに対して $\pi_T:=(\mathrm{Id},T)_\sharp\mu$ とおくと π_T は μ と ν のカップリングになる．実際, $A\in\mathcal{B}(X)$, $B\in\mathcal{B}(Y)$ に対し $\pi_T(A\times Y)=\mu((\mathrm{Id},T)^{-1}(A\times Y))=\mu(A\times T^{-1}(Y))=\mu(A)$, $\pi_T(X\times B)=\mu((\mathrm{Id},T)^{-1}(X\times B))=\mu(X\times T^{-1}(B))=\mu(T^{-1}(B))=\nu(B)$ である．このような型の輸送計画において最小化を考えるのが (一般化された) モンジュの問題である：

定義 1.15 ((一般化された) モンジュの問題)

$$\begin{aligned}&\inf\left\{\int_{X\times Y}c(x,y)\pi_T(\mathrm{d}x\mathrm{d}y)\,\middle|\, T:X\to Y\ \text{ボレル可測},\ T_\sharp\mu=\nu\right\}\\&=\inf\left\{\int_X c(x,T(x))\mu(\mathrm{d}x)\,\middle|\, T:X\to Y\ \text{ボレル可測},\ T_\sharp\mu=\nu\right\}\end{aligned}$$

を最小にする $T_\sharp\mu=\nu$ をみたすボレル可測写像 $T:X\to Y$ を求めることを (一般化された) モンジュの問題という．“一般化” とは必ずしも T に全単射性を要請しないことを意味する．以後, 一般化された意味でのモンジュの問題を単にモンジュの問題と呼ぶことにする．

例 1.16 (ディラック測度のケース I) X,Y を位相空間とする．$\mu\in\mathcal{P}(X)$, $\nu\in\mathcal{P}(Y)$ において $\nu=\delta_b$, $b\in Y$ と仮定する．このとき μ と ν のカップリングは直積測度 $\mu\times\delta_b$ のみである．実際, $b\notin B$ なら $\pi(A\times B)\le\pi(X\times B)=\delta_b(B)=0$ なので $b\in B$ なら $\pi(A\times B)=\pi(A\times Y)=\mu(A)$ となることから, $\pi(A\times B)=\mu(A)\delta_b(B)$ がわかる．また $T_\sharp\mu=\delta_b$ をみたす輸送写像 T は $T(x):=b$, $x\in X$ となる定値写像なので $\pi_T=\mu\times\delta_b$ がわかり

$$\int_{X\times Y}c(x,y)\pi_T(\mathrm{d}x\mathrm{d}y)=\int_X c(x,b)\mu(\mathrm{d}x)$$

が MK 問題かつモンジュの問題の最小値である．T は定値写像なので全射でも単射でもないことに注意されたい．特に $\mu=\delta_a$, $\nu=\delta_b$ $(a\in X, b\in Y)$ のとき, μ と ν のカップリングは直積測度 $\delta_a\times\delta_b$ のみで $c(a,b)$ が MK 問題かつモンジュの問題の最小値である．

例 1.17 (ディラック測度のケース II) X,Y を位相空間とする．$\mu\in\mathcal{P}(X)$, $\nu\in\mathcal{P}(Y)$ において $\mu=\delta_a$, $a\in X$ のみを仮定する．このとき例 1.16 と同様に μ と ν のカップリングは直積測度 $\delta_a\times\nu$ のみである．したがって

$$\int_X c(a,y)\nu(\mathrm{d}x)$$

が MK 問題の最小値である． しかしながら $T_\sharp \delta_a = \delta_{T(a)}$ なので $\nu = \delta_{T(a)}$ の場合を除いて $T_\sharp \delta_a = \nu$ とはできない．したがって $\nu = \delta_{T(a)}$ の場合を除いてモンジュの問題を定式化することはできない．

例 1.18 (有限集合のケース) X, Y を位相空間とする．$\mu \in \mathcal{P}(X)$ $\nu \in \mathcal{P}(Y)$ が同じ個数の有限集合をそれぞれ台とする一様離散確率測度とする．すなわち

$$\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta_{x_i}, \quad \nu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta_{y_i}$$

とする． この場合，μ と ν のカップリング π は双確率行列 $\Pi = (\pi_{ij})$ を用いて $\pi = \frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^{n} \pi_{ij}\delta_{(x_i, y_j)}$ と表示される．ここで双確率行列とは

$$\forall j, \quad \sum_{i=1}^{n} \pi_{ij} = 1, \quad \forall i, \quad \sum_{j=1}^{n} \pi_{ij} = 1$$

をみたす行列 $\Pi = (\pi_{ij})$ のことである．したがって MK 問題は

$$\inf \left\{ \frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^{n} \pi_{ij} c(x_i, y_j) \;\middle|\; \Pi \in \mathcal{B}_n \right\}$$

を最小化する問題となる．ここで $\mathcal{B}_n$ は $n \times n$ の双確率行列の全体である．この問題は $n \times n$ 行列全体の有界凸部分集合 $\mathcal{B}_n$ 上の線形最小化問題そのものである．Choquet の定理 (定理 1.48) により，この MK 問題の最小点は $\mathcal{B}_n$ の端点集合の全体である． ここで $\mathcal{B}_n$ の端点とは $\mathcal{B}_n$ 内の任意の異なる 2 点を結ぶ線分の内点でない点を指す．Birkhoff の定理 (定理 1.49) により，$\mathcal{B}_n$ の端点 $\Pi = (\pi_{ij})$ は置換 $\sigma \in S_n$ を用いて $\pi_{ij} = \delta_{j\sigma(i)}$ と表現される．写像 T を $T(x_i) := y_{\sigma(i)}$, $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ をみたすようにとると $T_\sharp \mu = \nu$ が確認できる．したがって MK 問題は離散モンジュ問題

$$\inf \left\{ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} c(x_i, y_{\sigma(i)}) \;\middle|\; \sigma \in S_n \right\}$$

を最小化する問題となる．

1.3 Kantorovich 双対性

Kantorovich 双対性 (定理 1.24) と Kantorovich-Rubinstein Theorem (定理 1.27) の説明と証明のため以下の諸概念を準備する．

定義 1.19 (c-変換, c-凹性, c-劣微分) X, Y を空でない集合とする．$c : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ を任意の関数とする．

(1) 関数 $u : X \to \overline{\mathbb{R}}$ に対して, その c-**変換** (c-transform) $u^c : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ を

$$u^c(y) := \inf_{x \in X}(c(x,y) - u(x))$$

で定める. ここで $c(x,y) = u(x) = +\infty$ のときは $c(x,y) - u(x) := +\infty$ と規約する. 同様に, 関数 $v : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ に対して, その c-**変換** (c-transform) $v^c : X \to \overline{\mathbb{R}}$ を

$$v^c(x) := \inf_{y \in X}(c(x,y) - v(y))$$

で定める. $c \equiv +\infty$ のときは上記の規約性から $u^c \equiv +\infty$ となり, $u^{cc} \equiv +\infty$ となる.

(2) 関数 $u : X \to \overline{\mathbb{R}}$ が c-**凹** (c-concave) とは, ある関数 $v : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ を用いて $u = v^c$ と表されることとする. 同値な言い換えとして u が c-**凹**であるとは, ある $\{(y_i, t_i)\}_{i \in I} \subset Y \times \overline{\mathbb{R}}$ で

$$u(x) = \inf_{i \in I}(c(x, y_i) + t_i) \quad \forall x \in X \tag{1.13}$$

が成立することである. 同様に, 関数 $v : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ が c-**凹** (c-concave) とはある関数 $u : X \to \overline{\mathbb{R}}$ を用いて $v = u^c$ と表されることとする.

(3) $\varphi : X \to \overline{\mathbb{R}}$ が c-**凸関数** (c-convex) [21]であるとは $-\varphi$ が c-凹関数であることとする.

(4) c-凸関数 φ の $x \in X$ **での** c-**劣微分** $\partial^c\varphi(x)$ を

$$\partial^c\varphi(x) := \{y \in Y \mid \varphi(z) + c(z,y) \geq \varphi(x) + c(x,y) \text{ for any } z \in X\}$$

で定める. また c-凸関数 φ の c-**劣微分** $\partial^c\varphi$ を

$$\partial^c\varphi := \{(x,y) \in X \times Y \mid y \in \partial^c\varphi(x)\}$$

で定める.

注意 1.20 $X = Y = \mathbb{R}^n$ で $c(x,y) = -\langle x, y\rangle = -\sum_{i=1}^n x_i y_i$, $x, y \in \mathbb{R}^n$ のとき, φ の c-凸性と通常の凸性は一致し, $\partial^c\varphi(x) = \partial\varphi(x)$, $\partial^c\varphi = \partial\varphi$ となる. このとき, $u : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ の c-変換は Fenchel-Legendre 変換

$$f^*(y) := \sup\{\langle x, y\rangle - f(x) \mid x \in \mathbb{R}^n\}$$

を用いると $u^c(y) = -(-u)^*(y)$ と表される. ここで

$$\partial\varphi(x) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(z) - \varphi(x) \geq \langle y, z - x\rangle \text{ for any } z \in \mathbb{R}^n\}$$

は凸関数 φ の x **における劣微分 (subdifferential at** $x \in \mathbb{R}^n$**)** で, $\partial\varphi := \{(x,y) \mid y \in \partial\varphi(x)\}$ は φ **の劣微分 (subdifferential)** である. φ が x で微分可能なときは $\partial\varphi(x) = \{\nabla\varphi(x)\}$ となるので φ が微分可能関数のときは $\partial\varphi = \{\nabla\varphi(x) \mid x \in \mathbb{R}^n\}$ となる.

[21]後述の K-凸性の概念とは意味が異なるので注意を要する.

補題 1.21 X, Y を空でない集合とする．$c : X \times Y \to [0, +\infty]$ を任意の関数とする．次が成立する．

(1) 関数 $u : X \to \overline{\mathbb{R}}$ に対し, $u^{cc} \geq u$ が成立する．等号が成立するのは u が c-凹のときである．同様に, 関数 $v : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ に対し, $v^{cc} \geq v$ が成立する．等号が成立するのは v が c-凹のときである．

(2) c が連続なら関数 $u : X \to \overline{\mathbb{R}}$ に対し, u^c は上半連続である．関数 $v : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ に対しても同様の主張が成立する．

証明 (1): $u^{cc}(x) = -\infty$ のときは, ある $\{y_i\} \subset Y$ がとれて $c(x, y_i) - u^c(y_i) \overset{i \to \infty}{\to} -\infty$ となる．部分列をとることで全ての i で $c(x, y_i) < \infty$ としてよい．実際, 有限個の i を除いて $c(x, y_i) = +\infty$ とすると $c(x, y_i) - u^c(y_i) = +\infty$ が $u^c(y_i)$ の値に依らず成立するので矛盾である．このとき, $u(x) = c(x, y_i) - (c(x, y_i) - u(x)) \leq c(x, y_i) - u^c(y_i) \to -\infty$ から $u(x) = -\infty$ となり主張が成立する．$u^{cc}(x) = +\infty$ のときは自明な主張である．したがって $u^{cc}(x) \in \mathbb{R}$ と仮定してよい．任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\exists y \in Y$ s.t. $u^{cc}(x) \leq c(x, y) - u^c(y) < u^{cc}(x) + \varepsilon$ となる．$u^c(y) = +\infty$ とすると $c(x, y) < \infty$ なら $u^{cc}(x) = -\infty$ となり矛盾, $c(x, y) = +\infty$ なら $c(x, y) - u^c(y) = +\infty < u^{cc}(x) + \varepsilon$ となるので矛盾．したがって, $u^c(y) < +\infty$ となり, $c(x, y) < +\infty$ を得る．ゆえに

$$
\begin{aligned}
u^{cc}(x) + \varepsilon &\geq c(x, y) - u^c(y) \\
&= c(x, y) - \inf_{z \in X}(c(z, y) - u(z)) \\
&\geq (c(x, y) - c(x, y) + u(x)) = u(x)
\end{aligned}
$$

において $\varepsilon \to 0$ として $u^{cc}(x) \geq u(x)$ を得る．等号成立ならあきらかに u は c-凹である: $u = u^{cc} \iff u = (u^c)^c$．逆に u が c-凹とする．すなわち $u = v^c$ となる関数 $v : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ があるとする．$v^{ccc} \leq v^c$ を示せばよい．これは

$$
v^{ccc}(x) \leq c(x, y) - v^{cc}(y) \leq c(x, y) - v(y)
$$

から自明である．
(2) は自明な主張である． □

定義 1.22 (c-巡回的単調性) X, Y をポーランド空間とし, $c : X \times Y \to [0, \infty]$ を任意の関数とする．$\Gamma \subset X \times Y$ が c-**巡回的単調** (c-cyclically monotone) であるとは任意の $n \in \mathbb{N}$, $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n \subset \Gamma$ と置換 $\sigma \in S_n$ に対し,

$$
\sum_{i=1}^n c(x_i, y_{\sigma(i)}) = \sum_{i=1}^n c(x_{\sigma(i)}, y_i) \geq \sum_{i=1}^n c(x_i, y_i)
$$

が成立することとする．

補題 1.23 c-凸関数 $\varphi : X \to \mathbb{R}$ に対し, $\partial^c \varphi$ は c-巡回的単調である．

証明　$n\in\mathbb{N}$, $\{(x_i,y_i)\}_{i=1}^n\subset\partial^c\varphi$, $\sigma\in S_n$ に対し, $y_i\in\partial^c\varphi(x_i)$ なので $\varphi(x_{\sigma(i)})+c(x_{\sigma(i)},y_i)\geq\varphi(x_i)+c(x_i,y_i)$ が成立する．両辺を $i=1,2,\cdots,n$ について和をとれば主張を得る． □

定理 1.24 (Kantorovich 双対性) X, Y をポーランド空間とし, $c: X\times Y\to[0,\infty]$ は proper で下半連続とする．$\pi\in\mathcal{P}(X\times Y)$, $(\varphi,\psi)\in L^1(X;\mu)\times L^1(Y;\nu)$ に対して

$$C[\pi]:=\int_{X\times Y}c(x,y)\mathrm{d}\pi(x,y),\quad J(\varphi,\psi):=\int_X\varphi\mathrm{d}\mu+\int_Y\psi\mathrm{d}\nu$$

とし,

$$\begin{aligned}\Phi_c\cap L^1:=\Big\{(\varphi,\psi)\in L^1(X;\mu)\times L^1(Y;\nu)\ \Big|\ &\varphi(x)+\psi(y)\leq c(x,y)\\ &\text{for }\mu\text{-a.s. }x\in X\quad\nu\text{-a.s. }y\in Y\Big\},\end{aligned}\tag{1.14}$$

$$\begin{aligned}\Phi_c\cap C_b:=\Big\{(\varphi,\psi)\in C_b(X)\times C_b(Y)\ \Big|\ &\varphi(x)+\psi(y)\leq c(x,y)\\ &\text{for }(x,y)\in X\times Y\Big\}\end{aligned}\tag{1.15}$$

とする．このとき次が成立する．

(1) π_0 が最適輸送計画で $\int_{X\times Y}c\,\mathrm{d}\pi_0<\infty$ をみたすとする．このとき, ある c-巡回的単調なボレル集合 $\Gamma\subset X\times Y$ で $\pi_0(\Gamma)=1$ をみたすものがとれる．さらに c が連続なら $\Gamma\supset\mathrm{supp}[\pi_0]$ となり $\mathrm{supp}[\pi_0]$ は c-巡回的単調になる．

(2) $c<\infty$ とする．ある c-巡回的単調なボレル集合 $\Gamma\subset X\times Y$ で $\pi_0(\Gamma)=1$ をみたすものがとれるとする．さらに

$$\mu\left(\left\{x\in X\ \middle|\ \int_Y c(x,y)\nu(\mathrm{d}y)<\infty\right\}\right)>0,\tag{1.16}$$

$$\nu\left(\left\{y\in Y\ \middle|\ \int_X c(x,y)\mu(\mathrm{d}x)<\infty\right\}\right)>0\tag{1.17}$$

を仮定する．このとき, π_0 は最適輸送計画となり, $\int_{X\times Y}c\,\mathrm{d}\pi_0<\infty$ となる．さらに $\sup_{(\varphi,\psi)\in\Phi_c\cap C_b}J(\varphi,\psi)$ を最大化する関数の組 $(\varphi,\psi)\in L^1(X;\mu)\times L^1(Y;\nu)$ [22]で φ が μ-a.s. で c-凹かつ $\psi=\varphi^c$ で $\varphi(x)+\psi(y)=c(x,y)$ π_0-a.s. $(x,y)\in X\times Y$ となるものがとれる．さらに次の等式が成立する．

$$\inf_{\pi\in\Pi(\mu,\nu)}C[\pi]=\sup_{(\varphi,\psi)\in\Phi_c\cap L^1}J(\varphi,\psi)=\sup_{(\varphi,\psi)\in\Phi_c\cap C_b}J(\varphi,\psi).\tag{1.18}$$

(3) (1.18) が常に成立する．

[22]組 (φ,φ^c) は (1.18) の中辺の最大点ではあるが, 有界連続になるとは限らないので (φ,φ^c) は (1.18) の右辺の最大点とは限らない．

注意 1.25 Caffarelli による Kantorovich 双対性の解釈：φ の替わりに $-\varphi$ を考えると, (1.18) の等式

$$\inf_{\pi\in\Pi(\mu,\nu)}\int_{X\times Y} c\,\mathrm{d}\pi = \sup\left\{\int_Y \psi\,\mathrm{d}\nu - \int_X \varphi\,\mathrm{d}\mu \;\middle|\; (-\varphi,\psi)\in\Phi_c\cap C_b\right\} \tag{1.19}$$

は以下のように解釈できる:

- $\varphi(x)$: x における単位当たりの供給商品の価格.
- $\psi(y)$: y における単位当たりの需要商品の価格.
- 輸送業者は x から y に商品を輸送するに当たり, 価格 $\varphi(x)$ で供給源から購入して, 価格 $\psi(y)$ で需要先に売却する.
- $\psi(y)-\varphi(x)$ は x から y への商品の輸送に関する輸送業者の収入を表し, $J(-\varphi,\psi) = \int_Y \psi\,\mathrm{d}\nu - \int_X \varphi\,\mathrm{d}\mu$ は輸送業者の総収入を表す.
- 条件 $(-\varphi,\psi)\in\Phi_c\cap C_b$ は, 商品を輸送するにあたり全ての x, y に対し輸送業者の収入 $\psi(y)-\varphi(x)$ が x から y への輸送コスト $c(x,y)$ 以下に制限されることを意味する.
- 商品の供給と需要を統括する会社は輸送会社に最小の総コストで支払うことを希望し, 輸送業者の方は輸送コストを越えない制限下で最大収入を得ることを希望する. それらが一致することを表現するのが双対性の式 (1.19) である.

系 1.26 (有界な距離 d での Kantorovich-Rubinstein Theorem)
(E,d) をポーランド空間とし, d を有界な距離とする. $\mu,\nu\in\mathcal{P}(E)$ と $\pi\in\Pi(\mu,\nu)$ に対し, $D[\pi] := \int_{X\times X} d(x,y)\pi(\mathrm{d}x\mathrm{d}y)$ として

$$\begin{aligned}\inf_{\pi\in\Pi(\mu,\nu)} D[\pi] &= \sup_{\varphi\in L^1(\mu)} J(\varphi^{dd},\varphi^d)\\ &= \sup_{\varphi\in L^1(\mu)} J(-\varphi^d,\varphi^d) = \sup_{f\in 1\text{-Lip}(E)} J(f,-f).\end{aligned} \tag{1.20}$$

証明 d-凹な φ に対しては $\varphi=\varphi^{dd}$ なので定理 1.24 から, あきらかに $\inf_{\pi\in\Pi(\mu,\nu)} D[\pi] \le \sup_{\varphi\in L^1(\mu)} J(\varphi^{dd},\varphi^d)$. $\varphi\in L^1(E;\mu)$ に対し, $\varphi^d(y) := \inf_{x\in E}(d(x,y)-\varphi(x))$ は 1-Lipschitz 連続で, d の有界性から $\varphi^d\in L^1(E;\nu)$ となる. また, φ^d の 1-Lipschitz 連続性から

$$-\varphi^d(x) \le \inf_{y\in E}[d(x,y)-\varphi^d(y)] \le -\varphi^d(x)$$

となって, $\varphi^{dd} = -\varphi^d$ を得る. したがって

$$\begin{aligned}\sup_{\varphi\in L^1(\mu)} J(\varphi^{dd},\varphi^d) &= \sup_{\varphi\in L^1(\mu)} J(-\varphi^d,\varphi^d) \le \sup_{f\in 1\text{-Lip}(E)} J(f,-f)\\ &\le \sup_{(\varphi,\psi)\in\Phi_d} J(\varphi,\psi) = \inf_{\pi\in\Pi(\mu,\nu)} D[\pi].\end{aligned}$$

□

証明 (定理 1.24の証明) (1): $\pi_0 \in \Pi(\mu,\nu)$ を最適輸送計画とする. $\{(\varphi_n,\psi_n)\} \subset C_b(X)\times C_b(Y)$, $\varphi_n(x)+\psi_n(y) \le c(x,y)$ $(n\in\mathbb{N})$ を (1.18) の右辺を最大化する関数列とする. φ_n, ψ_n ともに各点で n に関して単調増加していると仮定していても一般性を失わない. $c_n := c-\varphi_n-\psi_n \ge 0$ on $X\times Y$ から $\int_{X\times Y} c_n\,\mathrm{d}\pi_0 = \int_{X\times Y} c\,\mathrm{d}\pi_0 - \int_X \varphi_n\,\mathrm{d}\mu - \int_Y \psi_n\,\mathrm{d}\nu \to 0$ as $n\to\infty$ なので部分列 $\{n_k\}$ で $\{c_{n_k}\}$ は 0 に π_0-a.s. で収束する. そこで

$$\Gamma := \{(x,y)\in X\times Y \mid \lim_{k\to\infty} c_{n_k}(x,y)=0, \quad c(x,y)<\infty\}$$

とおくと明らかに $\pi_0(\Gamma)=1$ となる. c が連続の場合, Γ 上で $\{c_n\}$ が c に各点において単調減少で収束することから, Dini の定理を適用することで Γ が閉集合になり, $\Gamma \supset \mathrm{supp}[\pi_0]$ を得る.

$\{(x_i,y_i)\}_{1\le i\le n} \subset \Gamma$ に対し,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n c(x_i,y_{\sigma(i)}) &\ge \sum_{i=1}^n (\varphi_{n_k}(x_i)+\psi_{n_k}(y_{\sigma(i)}))\\ &= \sum_{i=1}^n (\varphi_{n_k}(x_i)+\psi_{n_k}(y_i))\\ &= \sum_{i=1}^n (c(x_i,y_i)-c_{n_k}(x_i,y_i))\end{aligned}$$

から $k\to\infty$ として $\sum_{i=1}^n c(x_i,y_{\sigma(i)}) \ge \sum_{i=1}^n c(x_i,y_i)$, すなわち Γ の c-巡回的単調性を得る. c が連続の場合での $\mathrm{supp}[\pi_0]$ の c-巡回的単調性は $\Gamma\supset\mathrm{supp}[\pi_0]$ から明らかである.

(2): Γ を c-巡回的単調なボレル集合で $\pi_0(\Gamma)=1$ を仮定する. 一般性を失うことなく, $\Gamma=\bigcup_{k=1}^\infty \Gamma_k$, 各 Γ_k はコンパクトで $c|_{\Gamma_k}$ は連続としてよい. また c_ℓ を補題 1.9で構成された c に単調増大で収束する有界連続な非負関数列とする. まず固定された $(x_0,y_0)\in\Gamma_1$ に対し, φ を

$$\varphi(x) := \inf\left\{\sum_{i=0}^n (c(x_{i+1},y_i)-c(x_i,y_i)) \;\middle|\; n\in\mathbb{N}, x=x_{n+1}, \{(x_i,y_i)\}_{i=1}^n \subset \Gamma\right\}$$

とおく.

$$\varphi_{n,m,\ell}(x) := \inf\left\{\sum_{i=0}^n (c_\ell(x_{i+1},y_i)-c(x_i,y_i)) \;\middle|\; n\in\mathbb{N}, x=x_{n+1}, \{(x_i,y_i)\}_{i=1}^n \subset \Gamma_m\right\}$$

とすると

$$\varphi(x)=\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\lim_{\ell\to\infty}\varphi_{n,m,\ell}(x)$$

がわかるので, $\varphi_{n,m,\ell}$ の上半連続性から φ のボレル可測性がわかる.

一方で $n=1$ として

$$\varphi(x) \le c(x,y_1)-c(x_1,y_1)+c(x_1,y_0)-c(x_0,y_0)$$

となるので $(x_1,y_1)=(x_0,y_0)$ として $\varphi(x)\le c(x,y_0)-c(x_0,y_0)$ を得る．Γ が c-巡回的単調なので $\varphi(x)\ge 0$ である．また $x'\in X$ に対し，$x'_{n+1}:=x'$, $x_{n+1}:=x$, $x'_i=x_i$, $(x_i,y_i)\in\Gamma$, $(1\le i\le n)$ とすると，

$$\sum_{i=0}^{n}(c(x'_{i+1},y_i)-c(x'_i,y_i))-\sum_{i=0}^{n}(c(x_{i+1},y_i)-c(x_i,y_i))\le c(x',y_n)-c(x,y_n)$$

から，$x_{n+1}=x_n=x$, $y_n=y$ とおくと

$$\begin{aligned}\varphi(x')&\le\sum_{i=0}^{n}(c(x_{i+1},y_i)-c(x_i,y_i))+c(x',y_n)-c(x,y_n)\\&=\sum_{i=0}^{n-1}(c(x_{i+1},y_i)-c(x_i,y_i))+c(x',y)-c(x,y)+c(x,y)-c(x,y)\\&=\sum_{i=0}^{n-1}(c(x_{i+1},y_i)-c(x_i,y_i))+c(x',y)-c(x,y)\end{aligned}$$

が任意の $n\in\mathbb{N}$, $(x_i,y_i)\in\Gamma$, $(1\le i\le n-1)$ で成立し，

$$\varphi(x')\le\varphi(x)+c(x',y)-c(x,y)<\infty,\quad (x,y)\in\Gamma \tag{1.21}$$

を得る．(1.21) に $x'=x_0$ を代入することで $0\le\varphi(x_0)\le c(x_0,y_1)-c(x_1,y_1)+c(x_1,y_0)-c(x_0,y_0)=0$ for $(x_1,y_1)=(x_0,y_0)$ から $\varphi(x_0)=0$ を得る．これを再び (1.21) に代入して $\varphi>-\infty$ on $p_1(\Gamma)$ を得て $\varphi(x')<\infty$ と合わせて $\varphi\in\mathbb{R}$ μ-a.s. on X が成立する．

以下 $\psi:=\varphi^c$ [23] とする．$\varphi(x')>-\infty$ なら $c(x',y)-\varphi(x')\ge c(x,y)-\varphi(x)$ から $y\in p_2(\Gamma)$ なら

$$\begin{aligned}c(x,y)-\varphi(x)&\le\inf_{x'\in X,\varphi(x')>-\infty}(c(x',y)-\varphi(x'))\\&\le\inf_{x'\in X}(c(x',y)-\varphi(x'))=:\psi(y)\\&\le c(x,y)-\varphi(x)\end{aligned}$$

すなわち $\varphi(x)+\varphi^c(y)=c(x,y)$ が $(x,y)\in\Gamma$ で成立する．特に $\varphi+\varphi^c=c$ π_0-a.s. on $X\times Y$ となる．これより，μ-a.s. $x\in X$ に対し，$\varphi(x)+\psi(y)=c(x,y)$ をみたす y が存在する．そこで

$$A:=\{x\in X\mid \varphi(x)+\psi(y)=c(x,y)\text{ をみたす }y\in Y\text{ が存在する }\}$$

とすると $\mu(A)=1$ であり，$x\in A$ をとれば，$\varphi(x)+\psi(y)=c(x,y)$ をみたす y 毎に

$$z\mapsto c(z,y)-\varphi(z)$$

[23] $\psi:=\varphi^c$ とすることで，$\varphi(x)+\psi(y)\le c(x,y)$ が任意の $(x,y)\in X\times Y$ で成立する．

は x で最小値をとることがわかる．特に，

$$\varphi(x) \le \inf_{z\in Y} (c(x,z) - \psi(z)) \le c(x,y) - \psi(y) = \varphi(x)$$

から，

$$\varphi(x) = \inf_{z\in Y} (c(x,z) - \psi(z)),$$

すなわち $\varphi(x) = \psi^c(x) = \varphi^{cc}(x)$, $x \in A$ となり，φ の μ-a.s. な c-凹性を得る．

次に $\pi_0 = \int_Y \pi_y \nu(\mathrm{d}y)$ を測度 π_0 の測度分解 (後述の定理 1.32) とすると $\pi_y(\Gamma_y) = 1$ ν-a.s. から

$$\psi(y) = \int_X (c(x,y) - \varphi(x))\pi_y(\mathrm{d}x) \quad \nu\text{-a.s. } y \in Y.$$

$y \mapsto \pi_y$ がボレル写像をなす (定理 1.32の直前を参照) ことから $\psi = \varphi^c$ は ν-可測である．

(1.16) と $\varphi \in \mathbb{R}$ μ-a.s. から $\exists x \in X$ s.t. $\int_Y c(x,y)\nu(\mathrm{d}y) < \infty$ and $\varphi(x) \in \mathbb{R}$. また (1.17) と $\psi \in \mathbb{R}$ ν-a.s. から $\exists y \in Y$ s.t. $\int_X c(x,y)\mu(\mathrm{d}y) < \infty$ and $\psi(x) \in \mathbb{R}$ なので

$$\begin{aligned} \psi^+ &\le c(x,\cdot) + \varphi^-(x) \in L^1(Y;\nu) \quad \text{for some } x \in X, \\ \varphi^+ &\le c(\cdot,y) + \psi^-(y) \in L^1(X;\mu) \quad \text{for some } y \in Y \end{aligned}$$

を得る．したがって

$$\begin{aligned} \int_{X\times Y} c\,\mathrm{d}\pi_0 = \int_\Gamma c\,\mathrm{d}\pi_0 = \int_\Gamma (\varphi+\psi)\mathrm{d}\pi_0 = \int_{X\times Y} (\varphi+\psi)\mathrm{d}\pi_0 \\ = \int_X \varphi\,\mathrm{d}\mu + \int_Y \psi\,\mathrm{d}\nu < \infty \end{aligned}$$

から

$$\begin{aligned} \varphi^- &= (\psi - c)^+ \le (\psi^+ - c)_+ \le \psi^+ \in L^1(X;\mu), \\ \psi^- &= (\varphi - c)^+ \le (\varphi^+ - c)_+ \le \varphi^+ \in L^1(Y;\nu) \end{aligned}$$

なので $\varphi \in L^1(X;\mu)$, $\psi = \varphi^c \in L^1(Y;\nu)$ を得る．したがってこの $\varphi \in L^1(X;\mu)$ と任意の $(\tilde\varphi, \tilde\psi) \in \Phi_c \cap L^1$ に対して

$$\begin{aligned} J(\varphi,\varphi^c) &= \int_X \varphi\,\mathrm{d}\mu + \int_Y \varphi^c\,\mathrm{d}\nu = \int_{X\times Y} (\varphi+\varphi^c)\mathrm{d}\pi_0 \\ &= \int_{X\times Y} c(x,y)\pi_0(\mathrm{d}x\mathrm{d}y) = C[\pi_0] \quad (\because \varphi + \varphi^c = c \quad \pi_0\text{-a.s.}) \\ &\ge \int_{X\times Y} (\tilde\varphi + \tilde\psi)\mathrm{d}\pi_0 = J(\tilde\varphi,\tilde\psi) \quad (\because \tilde\varphi + \tilde\psi \le c \quad \pi_0\text{-a.s.}) \end{aligned}$$

から

$$J(\varphi,\varphi^c) \ge \inf_{\pi\in\Pi(\mu,\nu)} C[\pi] \ge \sup_{(\tilde\varphi,\tilde\psi)\in\Phi_c\cap L^1} J(\tilde\varphi,\tilde\psi) \ge J(\varphi,\varphi^c)$$

となり, $\inf_{\pi\in\Pi(\mu,\nu)} C[\pi] = \sup_{(\tilde{\varphi},\tilde{\psi})\in\Phi_c\cap L^1} J(\tilde{\varphi},\tilde{\psi})$ を得る. 同様にして $\inf_{\pi\in\Pi(\mu,\nu)} C[\pi] = \sup_{(\tilde{\varphi},\tilde{\psi})\in\Phi_c\cap C_b} J(\tilde{\varphi},\tilde{\psi})$ も示せる. π_0 の最適性も, 任意の $\pi\in\Pi(\mu,\nu)$ に対し

$$\begin{aligned}\int_{X\times Y} c\,\mathrm{d}\pi_0 &= \int_{X\times Y} (\varphi+\varphi^c)\,\mathrm{d}\pi_0 = \int_X \varphi\,\mathrm{d}\mu + \int_Y \varphi^c\,\mathrm{d}\nu \\ &= \int_{X\times Y} (\varphi+\varphi^c)\,\mathrm{d}\pi \le \int_{X\times Y} c\,\mathrm{d}\pi\end{aligned}$$

から自明である.

(3): c が有界連続のときは (1), (2) から主張は成立する. 一般の proper 下半連続な $c : X\times Y\to[0,+\infty]$ のときは補題 1.9から c を有界連続な $c_n : X\times Y\to[0,+\infty[$ の単調増加極限で表現できる. 前半の議論から c_n に対して等式

$$\inf_{\pi\in\Pi(\mu,\nu)} C_n[\pi] = \sup_{(\varphi,\psi)\in\Phi_{c_n}\cap L^1} J(\varphi,\psi) = \sup_{(\varphi,\psi)\in\Phi_{c_n}\cap C_b} J(\varphi,\psi) \tag{1.22}$$

が成立する.

$$\inf_{\pi\in\Pi(\mu,\nu)} C[\pi] \le \lim_{n\to\infty}\inf_{\pi\in\Pi(\mu,\nu)} C_n[\pi] \tag{1.23}$$

が示されれば, (1.22) から

$$\begin{aligned}\inf_{\pi\in\Pi(\mu,\nu)} C_n[\pi] &= \sup_{(\varphi,\psi)\in\Phi_{c_n}\cap C_b} J(\varphi,\psi) \\ &= \sup\left\{\int_E \varphi(x)\mu(\mathrm{d}x) + \int_E \psi(y)\nu(\mathrm{d}y)\;\middle|\;(\varphi,\psi)\in\Phi_{c_n}\cap C_b\right\} \\ &\le \sup\left\{\int_E \varphi(x)\mu(\mathrm{d}x) + \int_E \psi(y)\nu(\mathrm{d}y)\;\middle|\;(\varphi,\psi)\in\Phi_{c}\cap C_b\right\}\end{aligned}$$

なので

$$\inf_{\pi\in\Pi(\mu,\nu)} C[\pi] \le \sup_{(\varphi,\psi)\in\Phi_c\cap C_b} J(\varphi,\psi) \le \sup_{(\varphi,\psi)\in\Phi_c\cap L^1} J(\varphi,\psi) \tag{1.24}$$

となる. 逆向きの不等式は自明なので主張を得る. (1.23) を示そう. 定理 1.6 の証明で見たように $\Pi(\mu,\nu)$ も緊密なので Prokhorov の定理 (定理 1.13) から確率測度の弱収束の位相で相対コンパクトである. $\{\pi_n^k\}$ を $\inf_\pi C_n[\pi]$ の最小化列とすると, 部分列をとることである $\pi_n\in\mathcal{P}(E\times E)$ に弱収束する. 特にこれから $f,g\in C_b(E)$ に対し $\int_E (f(x)+g(y))\pi_n(\mathrm{d}x\mathrm{d}y) = \lim_{k\to\infty}\int_E (f(x)+g(y))\pi_n^k(\mathrm{d}x\mathrm{d}y) = \int_E f(x)\mu(\mathrm{d}x) + \int_E g(y)\nu(\mathrm{d}y)$ となって $\pi_n\in\Pi(\mu,\nu)$ がわかり (この議論から $\Pi(\mu,\nu)$ はコンパクトである)

$$\inf_{\pi\in\Pi(\mu,\nu)} C_n[\pi] = \lim_{k\to\infty} C_n[\pi_n^k] = C_n[\pi_n]$$

を得る．$\Pi(\mu,\nu)$ のコンパクト性から部分列をとることで $\{\pi_n\}$ がある $\pi_* \in \Pi(\mu,\nu)$ に弱収束するとしてよい．このとき，

$$C_m[\pi_*] = \lim_{n\to\infty} C_m[\pi_n] \leq \varliminf_{n\to\infty} C_n[\pi_n]$$

から

$$\inf_{\pi\in\Pi(\mu,\nu)} C[\pi] \leq C[\pi_*] = \lim_{m\to\infty} C_m[\pi_*] \leq \varliminf_{n\to\infty} C_n[\pi_n] = \lim_{n\to\infty} \inf_{\pi\in\Pi(\mu,\nu)} C_n[\pi]$$

となり，(1.23) を得る． □

$X = Y = E$ でコスト関数が E 上の距離関数 d のときは次のことが成立する．

定理 1.27 (Kantorovich-Rubinstein Theorem) (E,d) をポーランド空間とし，$\mu,\nu \in \mathcal{P}(E)$ と $\pi \in \Pi(\mu,\nu)$ に対し，$D[\pi] := \int_{X\times X} d(x,y)\pi(\mathrm{d}x\mathrm{d}y)$ とする．このとき，

$$\inf_{\pi\in\Pi(\mu,\nu)} D[\pi] = \sup_{f\in 1\text{-Lip}(E)} \left\{ \int_E f(x)\mu(\mathrm{d}x) - \int_E f(y)\nu(\mathrm{d}y) \right\} \tag{1.25}$$

が成立する．ここで 1-Lip(E) は距離 d に関する 1-Lipschitz 関数の全体である．

証明 d が有界な距離の場合は系 1.26で示した．実際 $d_n := d/(1+n^{-1}d)$ は $d_n \leq d$ であり，各点で単調増大で下の距離に収束する．特に d_n に関する 1-Lipschitz 関数は d 関する 1-Lipschitz 関数になる．d_n で主張が成立したとする．$D_n[\pi] := \int_{E\times E} d_n(x,y)\,\pi(\mathrm{d}x\mathrm{d}y)$ として

$$\inf_{\pi\in\Pi(\mu,\nu)} D[\pi] \leq \lim_{n\to\infty} \inf_{\pi\in\Pi(\mu,\nu)} D_n[\pi] \tag{1.26}$$

が示されれば，

$$\begin{aligned}\inf_{\pi\in\Pi(\mu,\nu)} D_n[\pi] &= \sup\left\{ \int_E f(x)\mu(\mathrm{d}x) - \int_E f(y)\nu(\mathrm{d}y) \;\middle|\; |f(x)-f(y)| \leq d_n(x,y) \right\} \\ &\leq \sup\left\{ \int_E f(x)\mu(\mathrm{d}x) - \int_E f(y)\nu(\mathrm{d}y) \;\middle|\; |f(x)-f(y)| \leq d(x,y) \right\}\end{aligned}$$

から

$$\inf_{\pi\in\Pi(\mu,\nu)} D[\pi] \leq \sup_{f\in 1\text{-Lip}(E)} \left\{ \int_E f(x)\mu(\mathrm{d}x) - \int_E f(y)\nu(\mathrm{d}y) \right\} \tag{1.27}$$

となる．逆向きの不等式は自明なので (1.25) を得る．(1.26) の証明は (1.23) の証明と同様なので省略する． □

1.4 Wasserstein 距離

定義 1.28 (Wasserstein 距離) (E,d) をポーランド空間, $p\in[1,\infty[$ とする. E 上の確率測度 μ,ν に対し, その p-次の Wasserstein 距離 W_p を

$$W_p(\mu,\nu):=\inf_{\pi\in\Pi(\mu,\nu)}\left(\int_{E\times E}d^p(x,y)\pi(\mathrm{d}x\mathrm{d}y)\right)^{1/p}(\leq\infty), \tag{1.28}$$

$$=\inf\left\{\mathbf{E}[d^p(X_1,X_2)]\mid (X_1)_\sharp\mathbf{P}=\mu,\ (X_2)_\sharp\mathbf{P}=\nu\right\}(\leq\infty) \tag{1.29}$$

で定める. ここで $\Pi(\mu,\nu)$ は $\mu,\nu\in\mathcal{P}(E)$ のカップリングの全体であり, X_1,X_2 は確率空間 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P})$ 上の E-値確率変数で $(X_1)_\sharp\mathbf{P}=\mu$ は X_1 の分布が μ であること [24] を表す.

注意 1.29 (1) 後の講演では我々は主に $p=2$ の場合を扱い, 単に Wasserstein といえば 2-次の Wasserstein 空間 $(\mathcal{P}_2(E),W_2))$ 等のことを指すことにする.

(2) W_1 を Kantorovich-Rubinstein 距離とも呼ぶ. Wasserstein 距離 W_p への本質的な寄与は Kantorovich(-Rubinstein) に負う ([141, 142]). 後年, この距離は様々な研究者によって独立に発見もしくは再発見された. 確率解析における**田中の公式**で有名な慶応大学名誉教授・田中洋先生 [137] もそのうちの一人である. 年代順に列挙すると, Gini [64, (1914)], Salvemini [123, (1943)], Kantorovich [77, (1942)], Kantorovich–Rubinshtein [78, (1958)], Dall'Aglio [39, (1956)], Fréchet [55, (1957)], Vasershtein [140, (1969)], Mallows [96, (1972)], Tanaka [137, (1973)] となる. Gini [64, (1914)] の研究対象は $\mathbb{R}$ 上の離散分布のカップリングで W_1,W_2 を扱い, Salvemini [123, (1943)] も離散の設定で扱った. Dall'Aglio [39, (1956)] は離散分布とは限らない一次元確率分布 μ,ν の場合を扱い,

$$W_p(\mu,\nu)=\left(\int_0^1|F_\mu^{-1}(t)-F_\nu^{-1}(t)|^p\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.30}$$

を最初に示した. ここで F_μ,F_ν はそれぞれ μ,ν の分布関数である.[25] Gini [64, (1914)] は (1.30) を μ,ν が経験分布で $p=1,2$ の場合で示している. Fréchet [55, (1957)] は W_p の距離としての性質を扱った. Mallows [96, (1972)] も統計学の範疇で W_2 のみを扱った. 一方で Tanaka [137, (1973)] は Boltzmann 方程式での平衡状態への収束の記述のため W_2 を扱った.

(3) Wasserstein 距離の名称は Vasershtein [140] に起源をもつ. この名称を最初に名付けたのは Dobrushin [43, (1970)] である. Vasershtein [140] 自身は (Kantorovich の研究を知らずに) Kantorovich-Rubinstein 距離 W_1 が研究対象であった. Vasershtein [26]は

[24] $\mathbf{P}(X_1\in C)=\mu(C)$, $\forall C\in\mathcal{B}(E)$

[25] $F_\mu(t):=\mu(]-\infty,t])$, $F_\nu(t):=\nu(]-\infty,t])$

[26] Leonid Vasershtein, Pennsylvania State University 数学教室教授, 専門は代数学と力学系, Moscow State University で lya I. Piatetski-Shapiro の下で 1969 年に学位を取得した. 1978 年以後に欧州・合衆国に移籍した.

英語の文献では Wasserstein とするのが通例である．これは Vaserstein がドイツ語圏を起源とする名称であることに由来する[27](Rubinstein の名称も昔は Rubinshtein であった).

(3) 確率測度間の距離として W_p 以外に以下の距離が知られている:

(i) Lévy–Prokhorov 距離 (あるいは単に Prokhorov 距離):

$$d_P(\mu,\nu) := \inf\left\{\varepsilon > 0 \,\middle|\, \exists\pi \in \Pi(\mu,\nu) \text{ s.t. } \int_{E\times E} \mathbf{1}_{\{d(x,y)>\varepsilon\}}\pi(\mathrm{d}x\mathrm{d}y) \le \varepsilon\right\}.$$

(ii) 有界 Lipschitz 距離:

$$d_{bP}(\mu,\nu) := \sup\left\{\int_E \varphi\,\mathrm{d}\mu - \int_E \varphi\,\mathrm{d}\nu \,\middle|\, \|\varphi\|_\infty + \|\varphi\|_{\mathrm{Lip}} \le 1\right\}.$$

(iii) 局所コンパクト距離空間 E 上の確率測度空間での weak*距離: $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ を $(C_0(E), \|\cdot\|_\infty)$ 内の可算稠密集合として

$$d_{w*}(\mu,\nu) := \sum_{k=1}^\infty 2^{-k}\left|\int_E \varphi_k\,\mathrm{d}\mu - \int_E \varphi_k\,\mathrm{d}\nu\right|.$$

(iv) Boltzmann 方程式に有用な距離として Toscani によって導入された $\mu,\nu \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^n)$ 間の Toscani 距離:

$$d_T(\mu,\nu) := \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{1}{|\xi|^2}\left|\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x,\xi\rangle}\mu(\mathrm{d}x) - \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x,\xi\rangle}\nu(\mathrm{d}x)\right|.$$

ただし $\int_{\mathbb{R}^n} x\mu(\mathrm{d}x) = \int_{\mathbb{R}^n} x\nu(\mathrm{d}x)$ とする．

(4) $\mu,\nu \in \mathcal{P}_p(E)$ ならば $W_p(\mu,\nu) < \infty$ である．実際, $\pi \in \Pi(\mu,\nu)$ に対し

$$\begin{aligned}
&\left(\int_{E\times E} d^p(x,y)\pi(\mathrm{d}x\mathrm{d}y)\right)^{1/p} \\
&\le \left(\int_{E\times E} d^p(x,x_0)\pi(\mathrm{d}x\mathrm{d}y)\right)^{1/p} + \left(\int_{E\times E} d^p(x_0,y)\pi(\mathrm{d}x\mathrm{d}y)\right)^{1/p} \\
&= \left(\int_E d^p(x,x_0)\mu(\mathrm{d}x)\right)^{1/p} + \left(\int_E d^p(x_0,y)\nu(\mathrm{d}y)\right)^{1/p} < \infty.
\end{aligned}$$

(5) (1.28) の最適輸送計画を π_0 と置く．π_0 を $E\times E$ 上の分布にもつ $E\times E$-値確率変数 (X_1,X_2) を (1.29) に対する最適輸送計画と呼ぶ．一般に, 可分距離空間 (E,d) 上の確率測度を分布にもつ E-値確率変数 X が適当な確率空間 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P})$ を構成することで常に存在する (Skorokhod の定理 [73, Theorem 2.7]).

[27]Vaserstein 自身が自分のホームページ `http://www.math.psu.edu/vstein/` で Wasserstein 距離の呼称を使用している．

例 1.30 $W_p(\delta_x,\delta_y)=d(x,y)$ が p に依らず任意の $x,y\in E$ で常に成立する.

証明 $\pi\in\Pi(\delta_x,\delta_y)$ は常に $\pi=\delta_{(x,y)}$ になる. 実際, $\pi(A\times E)=\delta_x(A)$ と $\pi(E\times B)=\delta_y(B)$ から $\pi(\{(x,y)\}^c)=\pi((\{x\}^c\times E)\cup(E\times\{y\}^c))\le\delta_x(\{x\}^c)+\delta_y(\{y\}^c)=0.$ □

定義 1.31 (ボレル写像) 一般に可分距離空間 E_1,E_2 が与えられているとき, $E_1\ni x\mapsto\mu_x\in\mathcal{P}(E_2)$ を $\mathcal{P}(E_2)$-値写像とする. μ_x が**ボレル写像** (Borel map) とは $B\in\mathcal{B}(E_2)$ 毎に $x\mapsto\mu_x(B)$ がボレル可測関数のこととする. 測度論の単調族定理から

$$E_1\ni x\mapsto\int_{E_2}f(x,y)\mu_x(\mathrm{d}y) \tag{1.31}$$

は任意の有界 (もしくは非負) ボレル関数 $f:E_1\times E_2\to\mathbb{R}$ に対してボレル可測である. (1.31) から $\nu\in\mathcal{P}(E_1)$ に対し,

$$\langle\boldsymbol{\mu},f\rangle:=\int_{E_1}\left(\int_{E_2}f(x,y)\mu_x(\mathrm{d}y)\right)\nu(\mathrm{d}x) \tag{1.32}$$

は確率測度 $\boldsymbol{\mu}\in\mathcal{P}(E_1\times E_2)$ を定める. この $\boldsymbol{\mu}$ を $\int_{E_1}\mu_x\nu(\mathrm{d}x)$ と表す. 逆に任意の確率測度 $\boldsymbol{\mu}\in\mathcal{P}(E_1\times E_2)$ は E_1 への周辺分布 $\nu:=(p_1)_\sharp\boldsymbol{\mu}$ を用いて書けるのが次の測度分解定理である.

補題 1.32 (測度分解定理 (Disintegration Theorem)) $\boldsymbol{E}$, E をポーランド空間で $\boldsymbol{\mu}\in\mathcal{P}(\boldsymbol{E})$ とし, $\Pi:\boldsymbol{E}\to E$ をボレル写像で $\nu:=\Pi_\sharp\boldsymbol{\mu}$ とおく. このとき ν-a.s. に一意的で, かつ全ての $x\in E$ で定義されるボレル写像をなす確率測度の族 $\{\mu_x\}_{x\in E}\subset\mathcal{P}(\boldsymbol{E})$ が存在して

$$\mu_x(\boldsymbol{E}\setminus\Pi^{-1}(\{x\}))=0\quad\text{for }\nu\text{-a.s. }x\in E \tag{1.33}$$

かつ

$$\int_{\boldsymbol{E}}f(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\mu}(\mathrm{d}\boldsymbol{x})=\int_E\left(\int_{\Pi^{-1}(\{x\})}f(\boldsymbol{x})\mu_x(d\boldsymbol{x})\right)\nu(\mathrm{d}x) \tag{1.34}$$

が任意のボレル関数 $f:\boldsymbol{E}\to[0,\infty]$ で成立する. 特に $\boldsymbol{E}:=E_1\times E_2$, $E:=E_1$, $\boldsymbol{\mu}\in\mathcal{P}(E_1\times E_2)$, $p_1(x_1,x_2):=x_1$, $\nu:=\mu_1:=(p_1)_\sharp\boldsymbol{\mu}$ なら, それぞれのファイバー $(p_1)^{-1}(\{x_1\})$ と E_2 を同一視し, μ_1-a.s. $x_1\in E_1$ に一意的に定義されるボレル写像をなす確率測度の族 $\{\mu_{x_1}\}_{x_1\in E_1}\subset\mathcal{P}(E_2)$ で $\boldsymbol{\mu}=\int_{E_1}\mu_{x_1}\mu_1(\mathrm{d}x_1)$ となるものが存在する.

証明 証明は Dellacherie-Meyer [41] の III-70 に準ずる.
$\boldsymbol{E}$ がコンパクト距離空間のとき: $f\in C(\boldsymbol{E})$ 毎に E 上の符号値測度 $\Pi_\sharp(f\boldsymbol{\mu})$ を考える. この測度は $\nu:=\Pi_\sharp(\boldsymbol{\mu})$ について絶対連続なので Radon-Nikodym の密度関数 d_f が ν-a.s. に定義される. $\mathcal{H}(\subset C(\boldsymbol{E}))$ を有理数体 $\mathbb{Q}$ を係数体とする可算線形空間で $\min,\max$ の演算で閉じていて 1 を含み $C(\boldsymbol{E})$ 内で稠密となるものとする. このような $\mathcal{H}$ は, $\{\boldsymbol{x}_i\}$ を $\boldsymbol{E}$ 内の可算稠密集合として, 1 と全ての $f_{ij}(\boldsymbol{x}):=(d(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_j)/2-d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_i))_+$ を含む最小の $\mathbb{Q}$-ベクトル束として構成される. $\{\boldsymbol{x}_i\}$ が稠密であるので $f_{ij}(\boldsymbol{x})$ から任意の 2 点を分離する関

数がとれる．そこで Stone-Weierstrass Theorem のベクトル束版から $\mathcal{H}$ は $C(\boldsymbol{E})$ において一様位相で稠密となる．E の部分集合 A を

$$A := \{x \in E \mid f \mapsto d_f(x) \text{ が } \mathcal{H} \text{ 上の非減少 } \mathbb{Q}\text{-線形汎関数かつ } d_1(x) = 1\}.$$

と定める．$A \in \mathcal{B}(E)$ で $\nu(A) = 1$ が簡単にわかる．$x \in A$ ならば $f \mapsto d_f(x)$ はノルムが 1 の $C(\boldsymbol{E})$ 上の非減少 $\mathbb{R}$-線形汎関数に拡張される, すなわち $\boldsymbol{E}$ 上の確率測度となる．これを μ_x と記す．$x \notin A$ のときは μ_x は E 上の適当な確率測度で定める．
関数 $E \ni x \mapsto \langle \mu_x, f\rangle$ は $f \in \mathcal{H}$ なら $\mathcal{B}(E)$-可測であり, $f \in C(\boldsymbol{E})$ でも同じことが一様近似からわかる．したがって f が単に有界 $\mathcal{B}(\boldsymbol{E})$-可測でも $\mathcal{B}(E)$-可測となることが単調族定理から得られる．

まず, $f \in C(\boldsymbol{E})$ に対して

$$\int_{\boldsymbol{E}} f(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\mu}(\mathrm{d}\boldsymbol{x}) = \int_E \left(\int_{\boldsymbol{E}} f(\boldsymbol{x})\mu_x(\mathrm{d}\boldsymbol{x})\right)\nu(\mathrm{d}x) \tag{1.35}$$

を示す．これと (1.33) が示されれば, (1.34) がわかる．$\mathcal{H}$ が $C(\boldsymbol{E})$ で稠密であることから $f \in \mathcal{H}$ で (1.35) を示せばよい．このとき

$$\begin{aligned}\int_{\boldsymbol{E}} f(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\mu}(\mathrm{d}\boldsymbol{x}) &= \int_E \Pi_\sharp(f\boldsymbol{\mu})(\mathrm{d}x) = \int_E \frac{\mathrm{d}\Pi_\sharp(f\boldsymbol{\mu})}{\mathrm{d}\Pi_\sharp(\boldsymbol{\mu})}(x)\Pi_\sharp(\boldsymbol{\mu})(\mathrm{d}x)\\ &= \int_E \frac{\mathrm{d}\Pi_\sharp(f\boldsymbol{\mu})}{\mathrm{d}\Pi_\sharp(\boldsymbol{\mu})}(x)\nu(\mathrm{d}x)\\ &= \int_A d_f(x)\nu(\mathrm{d}x) = \int_E \langle \mu_x, f\rangle \nu(\mathrm{d}x)\\ &= \int_E \left(\int_{\boldsymbol{E}} f(\boldsymbol{x})\mu_x(\mathrm{d}\boldsymbol{x})\right)\nu(\mathrm{d}x).\end{aligned}$$

つぎに $\boldsymbol{E}$ が一般のポーランド空間のときに (1.35) を示す．$\boldsymbol{\mu}$ の緊密性から, あるコンパクト集合の増大列 $\{\boldsymbol{K}_n\}$ がとれて $\boldsymbol{J} := \bigcup_{n=1}^\infty \boldsymbol{K}_n$ は $\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{J}) = 1$ をみたす．$\boldsymbol{E}$ はコンパクト距離空間 $\boldsymbol{K}$ に埋め込めるので, 測度 $\boldsymbol{\mu}$ をコンパクト距離空間 $\boldsymbol{K}$ 上の測度で $\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{J}^c) = 0$ となるものと考えてよい．写像 $\Pi : \boldsymbol{K} \to E$ は $\boldsymbol{K} \setminus \boldsymbol{E}$ 上では適当な定値で定めておく．μ_x を $\boldsymbol{K}$ 上の測度として構成して,

$$\int_{\boldsymbol{K}} f(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\mu}(\mathrm{d}\boldsymbol{x}) = \int_E \left(\int_{\boldsymbol{K}} f(\boldsymbol{x})\mu_x(\mathrm{d}\boldsymbol{x})\right)\nu(\mathrm{d}x) \tag{1.36}$$

が既に得られている．$\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{K} \setminus \boldsymbol{J}) = 0$ と (1.36) から ν-a.s. $x \in E$ で $\mu_x(\boldsymbol{K} \setminus \boldsymbol{J}) = 0$ となるので (1.35) を得る．
最後に (1.33) を示す．$(\mathrm{Id}, \Pi)(\boldsymbol{J})$ の $x \in E$ での切り口 $(\mathrm{Id}, \Pi)(\boldsymbol{J})_x := \{\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{E} \mid (\boldsymbol{y}, x) \in (\mathrm{Id}, \Pi)(\boldsymbol{J})\}$ は $(\mathrm{Id}, \Pi)(\boldsymbol{J})_x \subset \Pi^{-1}(\{x\})$ を満たすことと, Fubini の定理から $(\mu_x \times \delta_x)(A) =$

$\mu_x(A_x)$, $A \in \mathcal{B}(\boldsymbol{E} \times E)$ なので

$$\begin{aligned}\int_E \mu_x(\boldsymbol{E} \setminus \Pi^{-1}(\{x\}))\nu(\mathrm{d}x) &\le \int_E \mu_x((\mathrm{Id}, \Pi)(\boldsymbol{J}^c)_x)\nu(\mathrm{d}x) \\ &= \int_E (\mu_x \times \delta_x)(\mathrm{Id}, \Pi)(\boldsymbol{J}^c)\nu(\mathrm{d}x) \\ &= \int_E (\mu_x \times \delta_x)((\boldsymbol{J}^c \times \Pi(\boldsymbol{J}^c)))\nu(\mathrm{d}x) \\ &= \int_E \mu_x(\boldsymbol{J}^c)\delta_x(\Pi(\boldsymbol{J}^c))\nu(\mathrm{d}x) \\ &= 0\end{aligned}$$

となる．ここで ν-a.s. $x \in E$ で $\mu_x(\boldsymbol{J}^c) = 0$ を用いた． □

補題 1.33 (接着補題 (Gluing Lemma)) (E_i, μ_i) を確率測度 μ_i をともなったポーランド空間とする $(i = 1, 2, 3)$. (X_1, X_2) が (μ_1, μ_2) のカップリング, (Y_2, Y_3) が (μ_2, μ_3) のカップリングならば 3 変数確率変数 (Z_1, Z_2, Z_3) で, (Z_1, Z_2) と (X_1, X_2) が同分布[28], (Z_2, Z_3) が (Y_2, Y_3) と同分布[29] であるものが存在する.

証明 π_{12} を (X_1, X_2) の分布[30], π_{23} を (X_2, X_3) の分布[31] とする．すなわち $\pi_{12} \in \Pi(\mu_1, \mu_2)$, $\pi_{23} \in \Pi(\mu_2, \mu_3)$ とする．測度分解定理 (定理 1.32) より, μ_2-a.s. $x_2 \in E_2$ に一意的に定義されるボレル写像をなす確率測度の族 $\{(\pi_{12})_{x_2}\}_{x_2 \in E_2} \subset \mathcal{P}(E_1)$ (resp. $\{(\pi_{23})_{x_2}\}_{x_2 \in E_2} \subset \mathcal{P}(E_3)$) が存在して

$$\pi_{12} = \int_{E_2} (\pi_{12})_{x_2}\mu_2(\mathrm{d}x_2) \quad (\text{resp. } \pi_{23} = \int_{E_2} (\pi_{23})_{x_2}\mu_2(\mathrm{d}x_2))$$

をみたす．そこで

$$\pi_{123}(\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3) = (\pi_{12})_{x_2}(\mathrm{d}x_1)(\pi_{23})_{x_2}(\mathrm{d}x_3)\mu_2(\mathrm{d}x_2).$$

とおいて π_{123} を分布とする確率変数 (Z_1, Z_2, Z_3) をとればよい． □

命題 1.34 W_p は擬距離 [32]である．特に $(\mathcal{P}_p(E), W_p)$ は距離空間になる.

証明 (1) $W_p(\mu, \nu) = W_p(\nu, \mu)$ の証明: $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$ に対して

$$\overline{\pi}(A) := \pi(\{(x, y) \mid (y, x) \in A\})$$

で $\overline{\pi}$ を定めると $\overline{\pi} \in \Pi(\nu, \mu)$ となり

$$\int_{E \times E} d^p(x, y)\overline{\pi}(\mathrm{d}x\mathrm{d}y) = \int_{E \times E} d^p(y, x)\pi(\mathrm{d}x\mathrm{d}y) = \int_{E \times E} d^p(x, y)\pi(\mathrm{d}x\mathrm{d}y)$$

から $W_p(\mu, \nu) = W_p(\nu, \mu)$ が従う.

[28] $\mathbf{P}((Z_1, Z_2) \in A \times B) = \mathbf{P}((X_1, X_2) \in A \times B)$, $A \in \mathcal{B}(E_1)$, $B \in \mathcal{B}(E_2)$.
[29] $\mathbf{P}((Z_2, Z_3) \in B \times C) = \mathbf{P}((Y_2, Y_3) \in B \times C)$, $B \in \mathcal{B}(E_2)$, $C \in \mathcal{B}(E_3)$.
[30] $\pi_{12}(A \times B) = \mathbf{P}(X_1 \in A, X_2 \in B)$, $A \in \mathcal{B}(E_1)$, $B \in \mathcal{B}(E_2)$,
[31] $\pi_{23}(B \times C) = \mathbf{P}(X_2 \in B, X_3 \in C)$, $B \in \mathcal{B}(E_2)$, $C \in \mathcal{B}(E_3)$.
[32] ここでいう擬距離とは $W_p(\mu, \nu) = +\infty$ を許すが, それ以外は距離の公理系をみたすものととして扱う.

(2) $W_p(\mu,\nu) \geq 0$, $W_p(\mu,\nu) = 0 \iff \mu = \nu$ の証明: $W_p(\mu,\nu) \geq 0$ は自明. 写像 $p := (\mathrm{Id}, \mathrm{Id}) : E \to \mathsf{diag}(\subset E \times E))$ を $p(x) := (x,x)$ で定めて $\pi_0 := p_\sharp \mu$ とおくと $\pi_0 \in \Pi(\mu,\mu)$ である. 実際, $\pi_0(A \times E) = \mu(p^{-1}(A \times E)) = \mu(A) = \mu(p^{-1}(E \times A)) = \pi_0(E \times A)$ である. $\pi_0(E \times E \setminus \mathsf{diag}) = \mu(p^{-1}(E \times E \setminus \mathsf{diag})) = \mu(\emptyset) = 0$ から

$$\int_{E\times E} d^p(x,y)\pi_0(\mathrm{d}x\mathrm{d}y) = \int_{E\times E\setminus \mathsf{diag}} d^p(x,y)\pi_0(\mathrm{d}x\mathrm{d}y) = 0$$

である. したがって, ${W_p}^p(\mu,\mu) \leq \int_{E\times E} d^p(x,y)\pi_0(\mathrm{d}x\mathrm{d}y) = 0$.
次に, $W_p(\mu,\nu) = 0$ とする. E がポーランド空間であることから最適輸送計画 $\pi_0 \in \Pi(\mu,\nu)$ が存在して

$$\int_{E\times E} d^p(x,y)\pi_0(\mathrm{d}x\mathrm{d}y) = {W_p}^p(\mu,\nu) = 0$$

なので, $d(x,y) = 0$ π_0-a.s. $(x,y) \in E \times E$, すなわち $\pi_0(E \times E \setminus \mathsf{diag}) = \pi_0(\{(x,y) \mid d(x,y) > 0\}) = 0$ (i.e. $\pi_0(\mathsf{diag}) = 1$) である. これより,

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \pi_0(A \times E) = \pi_0((A \times E) \cap \mathsf{diag})) = \pi_0(\{(x,x) \mid x \in A\}) \\ &= \pi_0((E \times A) \cap \mathsf{diag})) = \pi_0(E \times A) = \nu(A). \end{aligned}$$

(3) 三角不等式の証明: $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \mathcal{P}(E)$ をとる. (X_1, X_2) を (μ_1, μ_2) に対する最適輸送計画, (Y_2, Y_3) を (μ_2, μ_3) に対する最適輸送計画とする. 補題 1.33 により, 確率変数 (Z_1, Z_2, Z_3) で (Z_1, Z_2) と (X_1, X_2) が同分布[33], (Z_2, Z_3) と (Y_2, Y_3) が同分布[34] となるものが存在する. 特に (Z_1, Z_3) は (μ_1, μ_3) の輸送計画 [35] になる. その結果,

$$\begin{aligned} W_p(\mu_1,\mu_3) &\leq \mathbf{E}\left[d^p(Z_1,Z_3)\right]^{1/p} \\ &\leq \mathbf{E}\left[d^p(Z_1,Z_2)\right]^{1/p} + \mathbf{E}\left[d^p(Z_2,Z_3)\right]^{1/p} \\ &= \mathbf{E}\left[d^p(X_1,X_2)\right]^{1/p} + \mathbf{E}\left[d^p(Y_2,Y_3)\right]^{1/p} \\ &= W_p(\mu_1,\mu_2) + W_p(\mu_2,\mu_3). \end{aligned}$$

□

定義 1.35 ($\mathcal{P}_p(E)$ での収束) (E,d) を距離空間とする, $p \in [1,\infty[$ とする. $\{\mu_k\} \subset \mathcal{P}_p(E)$ が $\mu \in \mathcal{P}_p(E)$ に $\mathcal{P}_p(E)$ において弱収束することを, ある $x_0 \in E$ (全ての $x_0 \in E$) に対して成立する次の４つの同値な条件で定める.

(1) $\mu_k \xrightarrow{w} \mu$ かつ $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \int_E d^p(x,x_0)\mu_k(\mathrm{d}x) = \int_E d^p(x,x_0)\mu(\mathrm{d}x)$.

(2) $\mu_k \xrightarrow{w} \mu$ かつ $\displaystyle\overline{\lim_{k\to\infty}} \int_E d^p(x,x_0)\mu_k(\mathrm{d}x) \leq \int_E d^p(x,x_0)\mu(\mathrm{d}x)$.

[33] $\mathbf{P}((Z_1,Z_2) \in A \times B) = \mathbf{P}((X_1,X_2) \in A \times B)$ $\forall A, B \in \mathcal{B}(E)$
[34] $\mathbf{P}((Z_2,Z_3) \in A \times B) = \mathbf{P}((Y_2,Y_3) \in A \times B)$ $\forall A, B \in \mathcal{B}(E)$
[35] $(Z_1)_\sharp \mathbf{P} = \mu_1$, $(Z_3)_\sharp \mathbf{P} = \mu_3$

(3) $\mu_k \xrightarrow{w} \mu$ かつ $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\varlimsup_{k\to\infty}\int_{d(x,x_0)\geq R} d^p(x,x_0)\mu_k(\mathrm{d}x) = 0.$

(4) $|\varphi(x)| \leq C(1+d^p(x,x_0))$, $C>0$ をみたす連続関数 φ に対して (1.12) が成立する.

証明 ((1),(2),(3),(4) の同値性) (4)$\Longrightarrow$(1)$\Longrightarrow$(2) は自明. (2)$\Longrightarrow$(3) は

$$\begin{aligned}\varlimsup_{k\to\infty}\int_{d(x,x_0)\geq R} d^p(x,x_0)\mu_k(\mathrm{d}x) &= \varlimsup_{k\to\infty}\int_E d^p(x,x_0)\mu_k(\mathrm{d}x) - \varliminf_{k\to\infty}\int_{d(x,x_0)<R} d^p(x,x_0)\mu_k(\mathrm{d}x)\\ &\leq \int_E d^p(x,x_0)\mu(\mathrm{d}x) - \int_{d(x,x_0)>R} d^p(x,x_0)\mu(\mathrm{d}x)\\ &= \int_{d(x,x_0)\geq R} d^p(x,x_0)\mu(\mathrm{d}x)\end{aligned}$$

から従う. (3)$\Longrightarrow$(4) は

$$\begin{aligned}\varlimsup_{k\to\infty}\left(\int_E \varphi\,\mathrm{d}\mu_k - \int_E\varphi\,\mathrm{d}\mu\right) &\leq \varlimsup_{k\to\infty}\left|\int_{d>R}\varphi\,\mathrm{d}\mu_k - \int_{d>R}\varphi\,\mathrm{d}\mu\right| + \varlimsup_{k\to\infty}\int_{d\leq R}\varphi\,\mathrm{d}\mu_k - \int_{d\leq R}\varphi\,\mathrm{d}\mu\\ &\leq \varlimsup_{k\to\infty}\int_{d>R}|\varphi|\,\mathrm{d}\mu_k + \int_{d>R}|\varphi|\,\mathrm{d}\mu \to 0 \text{ as } R\to\infty\end{aligned}$$

と

$$\begin{aligned}\varlimsup_{k\to\infty}\left(\int_E \varphi\,\mathrm{d}\mu - \int_E\varphi\,\mathrm{d}\mu_k\right) &\leq \varlimsup_{k\to\infty}\left|\int_{d\geq R}\varphi\,\mathrm{d}\mu - \int_{d\geq R}\varphi\,\mathrm{d}\mu_k\right| + \int_{d<R}\varphi\,\mathrm{d}\mu - \varliminf_{k\to\infty}\int_{d<R}\varphi\,\mathrm{d}\mu_k\\ &\leq \varlimsup_{k\to\infty}\int_{d\geq R}|\varphi|\,\mathrm{d}\mu_k + \int_{d\geq R}|\varphi|\,\mathrm{d}\mu \to 0 \text{ as } R\to\infty\end{aligned}$$

から従う. □

補題 1.36 (E,d) をポーランド空間, $p\in[1,\infty[$ とする. $\{\mu_k\}\subset\mathcal{P}_p(E)$ が W_p-コーシー列なら, それは緊密である. 特に Prokhorov の定理 (定理 1.13) から弱位相で相対コンパクトである.

証明

$$\int_E d^p(x,x_0)\mu_k(\mathrm{d}x) = {W_p}^p(\mu_k,\delta_{x_0})$$

は $k\in\mathbb{N}$ について有界である. $W_1\leq W_p$ より $\{\mu_k\}$ は W_1-コーシー列なので, 任意の $\varepsilon>0$ に対し, $n_0\in\mathbb{N}$ がとれ $k\geq n_0$ なら $W_1(\mu_k,\mu_{n_0})<\varepsilon^2$ とできる. 特に $j\in\{1,2,\cdots,n_0\}$ がとれ, $W_1(\mu_k,\mu_j)<\varepsilon^2$ とできる. $\{\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_{n_0}\}$ の緊密性からコンパクト集合 K で $\sup_{1\leq j\leq n_0}\mu_j(K^c)<\varepsilon$ をみたすものがとれる. K を有限個の開球で覆い: $K\subset\bigcup_{i=1}^m B_\varepsilon(x_i) =: U$.

$$U_\varepsilon := B_\varepsilon(U) \subset \bigcup_{i=1}^m B_{2\varepsilon}(x_i)$$

$$\phi(x) := \left(1-\frac{d(x,U)}{\varepsilon}\right)_+$$

とおくと $\mathbf{1}_U \le \phi \le \mathbf{1}_{U_\varepsilon}$ と ϕ の $1/\varepsilon$-Lipschitz 連続性がわかる. これと Kantorovich-Rubinstein Theorem (定理 1.27) から $j \le n_0$ と任意の $k \in \mathbb{N}$ に対し,

$$\begin{aligned}\mu_k(U_\varepsilon) &\ge \int_E \phi \,\mathrm{d}\mu_k = \int_E \phi \,\mathrm{d}\mu_j + \left(\int_E \phi \,\mathrm{d}\mu_k - \int_E \phi \,\mathrm{d}\mu_j\right) \\ &\ge \int_E \phi \,\mathrm{d}\mu_j - \frac{W_1(\mu_k, \mu_j)}{\varepsilon} \\ &\ge \mu_j(U) - \frac{W_1(\mu_k, \mu_j)}{\varepsilon}.\end{aligned}$$

一方で $j \le n_0$ なら $\mu_j(U) \ge \mu_j(K) \ge 1-\varepsilon$ なので $\mu_k(U_\varepsilon) \ge 1-\varepsilon-\frac{W_1(\mu_k,\mu_j)}{\varepsilon}$ となる. $k \in \mathbb{N}$ に対し, $j = j(k)$ がとれて $W_1(\mu_k, \mu_j) < \varepsilon^2$ だったことから,

$$\mu_k(U_\varepsilon) \ge 1-\varepsilon-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon} = 1-2\varepsilon$$

となる. 以上をまとめると $\varepsilon > 0$ に対し, 有限個の点 $\{x_i\}_{1\le i\le m}$ がとれて $\mu_k\left(\bigcup_{i=1}^m B_{2\varepsilon}(x_i)\right) \ge 1-2\varepsilon$ が任意の $k \in \mathbb{N}$ で成立する. ε を $\varepsilon/2^{\ell+1}, \ell \in \mathbb{N}$ に置き換えて条件をみたす $\{x_i\}_{1\le i\le m(\ell)}$ を構成する:

$$\mu_k\left(E \setminus \bigcup_{i=1}^{m(\ell)} B_{\varepsilon/2^\ell}(x_i)\right) < 2^{-\ell}\varepsilon.$$

これより $\mu_k(E \setminus S) < \varepsilon$ とできる. ここで

$$S := \bigcap_{\ell=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{m(\ell)} \overline{B_{\varepsilon/2^\ell}(x_i)}.$$

S の構成方法から S は任意の $\delta > 0$ に対して半径 δ の有限個の開球で被覆される. すなわち S は全有界な閉集合となりコンパクトである. したがって $\{\mu_k\}$ は緊密な族である. □

定理 1.37 (W_p による位相との一致) (E, d) をポーランド空間, $p \in [1, \infty[$ とする. $\{\mu_k\} \subset \mathcal{P}_p(E)$ が $\mu \in \mathcal{P}_p(E)$ に $\mathcal{P}_p(E)$ において弱収束することと $\lim_{k\to\infty} W_p(\mu_k, \mu) = 0$ は同値である.

証明 $W_p(\mu_k, \mu) \to 0$ as $k \to \infty$ とする. $\{\mu_k\}$ の緊密性から $\{\pi_k\} (\subset \Pi(\mu_k, \mu))$ も緊密となり, Prokhorov の定理 (定理 1.13) より相対コンパクトなので共通の部分列 $\{\mu_{k_i}\}, \{\pi_{k_i}\}$, がとれ, $\nu \in \mathcal{P}(E)$, $\pi \in \mathcal{P}(E \times E)$ にぞれぞれ弱収束する. 特に $\pi \in \Pi(\nu, \mu)$ を得る. このとき輸送計画の弱収束に関する総コストの下半連続性から

$$W_p(\mu, \nu) \le \varliminf_{i\to\infty} W_p(\mu, \mu_{k_i}) = 0$$

となって $\mu = \nu$ を得て $\{\mu_k\}$ が μ に弱収束することもわかる. これだけでは, まだ $\mathcal{P}_p(E)$ における弱収束を示したことにはならない. これを示そう.

$p>1$ のときは初等的な不等式: $\forall\varepsilon>0$, $\exists C_\varepsilon>0$ [36] s.t.

$$(a+b)^p \le (1+\epsilon)a^p + C_\varepsilon b^p \quad a,b\ge 0$$

から

$$d^p(x,x_0) \le (1+\epsilon)d^p(x_0,y) + C_\varepsilon d^p(x,y)$$

を得る. $p=1$ のときは $\varepsilon=0$, $C_\varepsilon=1$ として適用する. $\pi_k\in\Pi(\mu_k,\mu)$ を最適輸送計画とすると,

$$\begin{aligned}\int_E d^p(x,x_0)\mu_k(\mathrm{d}x) &\le (1+\epsilon)\int_E d^p(x_0,y)\mu(\mathrm{d}y) + C_\varepsilon\int_{E\times E} d^p(x,y)\pi_k(\mathrm{d}x\mathrm{d}y)\\ &= (1+\epsilon)\int_E d^p(x_0,y)\mu(\mathrm{d}y) + C_\varepsilon {W_p}^p(\mu_k,\mu)\end{aligned}$$

となる. したがって

$$\varlimsup_{k\to\infty}\int_E d^p(x,x_0)\mu_k(\mathrm{d}x) \le (1+\epsilon)d^p(x_0,y)\mu(\mathrm{d}y)$$

となり, $\varepsilon\to 0$ とすることで 定義 1.35(2) を得る. 逆に $\{\mu_k\}\subset\mathcal{P}_p(E)$ が $\mu\in\mathcal{P}_p(E)$ に $\mathcal{P}_p(E)$ で弱収束したとする. $\pi_k\in\Pi(\mu_k,\mu)$ を最適輸送計画とする:

$$\int_{E\times E} d^p(x,y)\pi_k(\mathrm{d}x\mathrm{d}y) = {W_p}^p(\mu_k,\mu).$$

$\{\mu_k\}$ が μ に弱収束するので, これは緊密であり, 一点集合 $\{\mu\}$ も緊密なので $\{\pi_k\}$ も緊密になる. したがって Prokhorov の定理 (定理 1.13) から部分列をとることで π_k はある π に弱収束する. したがって $\pi\in\Pi(\mu,\mu)$ である. 特に $\int_{E\times E} d^p(x,y)\pi(\mathrm{d}x\mathrm{d}y)=0$ を得て, $\pi=(\mathrm{Id},\mathrm{Id})_\sharp(\mu)$ となり, π の最適性と同時に, 部分列に依らずに $\pi=(\mathrm{Id},\mathrm{Id})_\sharp\mu$ に $\{\pi_k\}$ が弱収束することがわかる.

$x_0\in E$ と $R>0$ を固定する. $d(x,y)\ge R$ とすると, $d(x,x_0)$, $d(y,x_0)$ のいずれかは $R/2$ 以上で, ともに $d(x,y)/2$ 未満とはならないので

$$\begin{aligned}\mathbf{1}_{\{d(x,y)\ge R\}} &\le \mathbf{1}_{\{d(x,y)\ge R\ \&\ d(x,x_0)\ge d(x,y)/2\}} + \mathbf{1}_{\{d(x,y)\ge R\ \&\ d(y,x_0)\ge d(x,y)/2\}}\\ &\le \mathbf{1}_{\{d(x,x_0)\ge R/2\ \&\ d(x,x_0)\ge d(x,y)/2\}} + \mathbf{1}_{\{d(y,x_0)\ge R/2\ \&\ d(y,x_0)\ge d(x,y)/2\}}\end{aligned}$$

となる. これより,

$$\begin{aligned}(d^p(x,y)-R^p)_+ &\le d^p(x,y)\mathbf{1}_{\{d(x,x_0)\ge R/2\ \&\ d(x,x_0)\ge d(x,y)/2\}}\\ &\qquad + d^p(x,y)\mathbf{1}_{\{d(y,x_0)\ge R/2\ \&\ d(y,x_0)\ge d(x,y)/2\}}\\ &\le 2^p d^p(x,x_0)\mathbf{1}_{\{d(x,x_0)\ge R/2\}} + 2^p d^p(y,x_0)\mathbf{1}_{\{d(y,x_0)\ge R/2\}}\end{aligned}$$

[36] $C_\varepsilon = \frac{1+\varepsilon}{\left((1+\varepsilon)^{1/(p-1)}-1\right)^{p-1}}$.

となる．したがって

$$
\begin{aligned}
{W_p}^p(\mu_k,\mu) &= \int_{E\times E} d^p(x,y)\pi_k(\mathrm{d}x\mathrm{d}y)\\
&= \int_{E\times E}[d(x,y)\wedge R]^p\pi_k(\mathrm{d}x\mathrm{d}y) + \int_{E\times E}[d^p(x,y)-R^p]_+\pi_k(\mathrm{d}x\mathrm{d}y)\\
&\le \int_{E\times E}[d(x,y)\wedge R]^p\pi_k(\mathrm{d}x\mathrm{d}y) + 2^p\int_{d(x,x_0)\ge R/2} d^p(x,x_0)\pi_k(\mathrm{d}x\mathrm{d}y)\\
&\qquad + 2^p\int_{d(y,x_0)\ge R/2} d^p(y,x_0)\pi_k(\mathrm{d}x\mathrm{d}y)\\
&\le \int_{E\times E}[d(x,y)\wedge R]^p\pi_k(\mathrm{d}x\mathrm{d}y) + 2^p\int_{d(x,x_0)\ge R/2} d^p(x,x_0)\mu_k(\mathrm{d}x)\\
&\qquad + 2^p\int_{d(y,x_0)\ge R/2} d^p(y,x_0)\mu(\mathrm{d}y)
\end{aligned}
$$

これと定義 1.35(3) から

$$
\begin{aligned}
\varlimsup_{k\to\infty} {W_p}^p(\mu_k,\mu) &\le \lim_{R\to\infty} 2^p \varlimsup_{k\to\infty}\int_{d(x,x_0)\ge R/2} d^p(x,x_0)\mu_k(\mathrm{d}x)\\
&\qquad + \lim_{R\to\infty} 2^p \varlimsup_{k\to\infty}\int_{d(y,x_0)\ge R/2} d^p(y,x_0)\mu(\mathrm{d}y)\\
&= 0.
\end{aligned}
$$

□

系 1.38 (W_p の連続性) (E,d) をポーランド空間, $p\in[1,\infty[$ とする．このとき W_p は $\mathcal{P}_p(E)$ 上で連続である．すなわち, $\{\mu_k\}$ (resp. $\{\nu_k\}$) が μ (resp. ν) に $\mathcal{P}_p(E)$ において $k\to\infty$ で弱収束すれば

$$\lim_{k\to\infty} W_p(\mu_k,\nu_k) = W_p(\mu,\nu)$$

となる．

系 1.39 ($(\mathcal{P}_p(E),W_p)$ の完備性) $p\in[1,\infty[$ とする．(E,d) をポーランド空間で d を完備な距離とする．このとき $(\mathcal{P}_p(E),W_p)$ は完備である．

証明 $\{\mu_k\}$ を W_p-コーシー列とする．補題 1.36 から部分列 $\{\mu_{k_i}\}$ と $\mu\in\mathcal{P}(E)$ がとれ $\{\mu_{k_i}\}$ は μ に弱収束する．このとき

$$\int_E d^p(x,x_0)\mu(\mathrm{d}x) \le \varliminf_{i\to\infty}\int_E d^p(x,x_0)\mu_{k_i}(\mathrm{d}x) < \infty$$

から $\mu\in\mathcal{P}_p(E)$ となる．さらに W_p の下半連続性から

$$W_p(\mu,\mu_{k_j}) \le \varliminf_{i\to\infty} W_p(\mu_{k_i},\mu_{k_j})$$

より

$$\overline{\lim_{j\to\infty}} W_p(\mu, \mu_{k_j}) \le \overline{\lim_{i,j\to\infty}} W_p(\mu_{k_i}, \mu_{k_j}) = 0$$

を得る．これは部分列 $\{\mu_{k_i}\}$ が W_p で μ に収束することを示している．つまり，コーシー列が収束する部分列を含んでいることを示した．したがって収束列である． □

補題 1.40 (E, d) をポーランド空間，$p \in [1, +\infty[$ とする．$x_0 \in E$ 毎に

$$W_p(\mu, \nu) \le 2^{\frac{1}{q}} \left(\int_E d^p(x_0, x) |\mu - \nu|(\mathrm{d}x) \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

が成立する．

証明 π を

$$\begin{aligned} &\pi := (\mathrm{Id}, \mathrm{Id})_\sharp(\mu \wedge \nu) + \frac{1}{a}(\mu - \nu)_+ \times (\mu - \nu)_-, \\ &\mu \wedge \nu := \mu - (\mu - \nu)_+, \quad a := (\mu - \nu)_+(E) = (\mu - \nu)_-(E) \end{aligned}$$

で定めると [37] $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$ となる．

実際，$A, B \in \mathcal{B}(E)$ に対し

$$\begin{aligned} \pi(A \times E) &= (\mu \wedge \nu)(A) + \frac{1}{a}(\mu - \nu)_+(A)(\mu - \nu)_-(E) \\ &= (\mu - (\mu - \nu)_+)(A) + (\mu - \nu)_+(A) = \mu(A) \end{aligned}$$

となる．$\pi(E \times B) = \nu(B)$ も同様に確認できる．これから

$$\begin{aligned} W_p^p(\mu, \nu) &\le \int_E d^p(x, y) \pi(\mathrm{d}x\mathrm{d}y) \\ &= \frac{1}{a} \int_E d^p(x, y)(\mu - \nu)_+(\mathrm{d}x)(\mu - \nu)_-(\mathrm{d}y) \\ &\le \frac{2^{p-1}}{a} \int_E (d^p(x, x_0) + d^p(x_0, y))(\mu - \nu)_+(\mathrm{d}x)(\mu - \nu)_-(\mathrm{d}y) \\ &= 2^{p-1} \left[\int_E d^p(x, x_0)(\mu - \nu)_+(\mathrm{d}x) + \int_E d^p(y, x_0)(\mu - \nu)_-(\mathrm{d}y) \right] \\ &= 2^{p-1} \left[\int_E d^p(x, x_0)\{(\mu - \nu)_+ + (\mu - \nu)_-\}(\mathrm{d}x) \right] \\ &= 2^{p-1} \left[\int_E d^p(x, x_0)|\mu - \nu|(\mathrm{d}x) \right]. \end{aligned}$$

□

[37] $|\mu-\nu| := (\mu-\nu)_+ + (\mu-\nu)_-$, $(\mu-\nu)_- := (\nu-\mu)_+$, $(\mu-\nu)_+(A) := \sup\{(\mu-\nu)(B) \mid B \in \mathcal{B}(E), B \subset A\}$ for $A \in \mathcal{B}(E)$.

定理 1.41 $p \in [1, +\infty[$ とする．(E, d) をポーランド空間とすると $(\mathcal{P}_p(E), W_p)$ は可分である．

証明 D を E の可算稠密集合とする．$\mathcal{P}$ を

$$\mathcal{P} := \left\{ \sum_{j=1}^{N} a_j \delta_{x_j} \;\middle|\; a_j \in \mathbb{Q}, a_j \in D, 1 \leq j \leq N, N \in \mathbb{N} \right\}$$

で定め，$\mathcal{P}$ が $(\mathcal{P}_p(E), W_p)$ で稠密であることを示そう．$\mu \in \mathcal{P}_p(E)$ をとる．任意の $\varepsilon > 0$ に対して E のコンパクト部分集合 K で

$$\int_{K^c} d^p(x_0, x) \mu(\mathrm{d}x) < \varepsilon$$

となるものをとる．K を有限個の開球 $\{B_{\varepsilon/2}(x_k)\}_{k=1}^{N}$ で被覆する．ここで $x_k \in D$, $1 \leq k \leq N$ である．集合 B'_k を

$$B'_k := B_\varepsilon(x_k) \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} B_\varepsilon(x_j), \quad 1 \leq k \leq N$$

で定めると，$\{B'_k\}_{k=1}^{N}$ は互いに素な K の開被覆となる．関数 $f : E \to \mathbb{R}$ を

$$f(x) := \begin{cases} x_k, & x \in B'_k \cap K, \\ x_0, & x \in K^c \end{cases}$$

と定めると，$x \in K$ で $d(x, f(x)) \leq \varepsilon$ となる．そのことから

$$\int_E d^p(x, f(x)) \mu(\mathrm{d}x) \leq \varepsilon^p \mu(K) + \int_{K^c} d^p(x, f(x)) \mu(\mathrm{d}x) < 2\varepsilon^p$$

となる．$(\mathrm{Id}, f)_\sharp \mu$ は μ と $f_\sharp \mu$ のカップリングなので，$W_p^p(\mu, f_\sharp \mu) < 2\varepsilon^p$ を得る．測度 $f_\sharp \mu$ は f の定め方から $\sum_{k=0}^{N} a_k \delta_{x_k}$ ($a_k := \mu(B'_k \cap K)$, $1 \leq k \leq N$, $a_0 := \mu(K^c)$) の形をしている．あとは a_k を有理数にしたもので μ が $\sum_{k=0}^{N} a_k \delta_{x_k}$ で近似できればよい．それは補題 1.40を用いて

$$\begin{aligned} W_p\left(\sum_{j=0}^{N} a_j \delta_{x_j}, \sum_{j=0}^{N} b_j \delta_{x_j} \right) &\leq 2^{\frac{1}{q}} \left(\int_E d^p(x_k, x) \mathrm{d} \left| \sum_{j=0}^{N} a_j \delta_{x_j} - \sum_{j=0}^{N} b_j \delta_{x_j} \right| \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq 2^{\frac{1}{q}} \left(\int_E d^p(x_k, x) \mathrm{d} \sum_{j=0}^{N} |a_j - b_j| \delta_{x_j} \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq 2^{\frac{1}{q}} \max_{0 \leq k, \ell \leq N} d(x_k, x_\ell) \sum_{j=0}^{N} |a_j - b_j|^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

から示される． □

定義 1.42 (曲線, 曲線の長さ, 測地線) 距離空間 (E,d) において**曲線**とは連続写像 $\gamma : I \to E$ のこととする．ここで $I=[a,b]\subset\mathbb{R}$ は閉区間である．曲線 $\gamma : I \to E$ の**長さ** $L(\gamma)$ とは

$$L(\gamma) := \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} d(\gamma(t_{i-1}),\gamma(t_i)) \,\middle|\, a=t_0<t_1<\cdots<t_{n-1}<t_n=b\right\}$$

のこととする．曲線 $\gamma : I \to E$ が**最短測地線**とは $L(\gamma|_{[s,t]}) = d(\gamma_s,\gamma_t)$ が任意の $s,t\in I, s<t$ で成立することとする．これは任意の $r<s<t$ に対して $d(\gamma_r,\gamma_t)=d(\gamma_r,\gamma_s)+d(\gamma_s,\gamma_t)$ が成立することと同値である．最短測地線は一般に一意ではないことに注意しよう．曲線 $\gamma : I \to E$ が**測地線**とは $|t-s|$ が十分小さい任意の $s,t\in I$, $s<t$ に対して $L(\gamma|_{[s,t]}) = d(\gamma_s,\gamma_t)$ が成立することとする．

定義 1.43 (測地空間) 距離空間 (E,d) が**測地空間**であるとは E の任意の 2 点 $x,y\in E$ が最短測地線 $\gamma:[0,1]\to E$, $\gamma_0=x,\gamma_1=y$ で結ばれることとする．

定理 1.44 ($(\mathcal{P}_p(E),W_p)$ の測地空間の性質) (E,d) を完備可分な測地空間とする．このとき $(\mathcal{P}_p(E),W_p)$ も完備可分な測地空間になる．

証明 $(\mathcal{P}_p(E),W_p)$ の完備性は系 1.39で, 可分性は定理 1.41で示したので任意の $\mu_0,\mu_1\in\mathcal{P}_p(E)$ を結ぶ $(\mathcal{P}_p(E),W_p)$ での最短測地線 $(\mu_t)_{0\le t\le 1}$ の存在のみを示せばよい．$\mu_0,\mu_1\in\mathcal{P}_p(E)$ をとり, $\pi_0\in\Pi(\mu_0,\mu_1)$ をコスト関数 $c(x,y)=d^p(x,y)$ に関する最適輸送計画とする．写像 $\Phi_t : E\times E\to E$ を $\Phi_t(x,y):=\gamma_t^{x,y}$ で定める．[38] ここで $\gamma^{x,y}:[0,1]\to E$ は x から y への最短測地線とする．そこで $\mu_t := (\Phi_t)_\sharp\pi_0$ とすると $(\mu_t)_{0\le t\le 1}$ が μ_0 から μ_1 への $(\mathcal{P}_p(E),W_p)$ での最短測地線を与える．実際, Kantorovich 双対性 (定理 1.24(3)) から, $0\le s<t\le 1$ に対し

$$\begin{aligned}
W_p^p(\mu_s,\mu_t) &= \sup\left\{\int_E \varphi\,\mathrm{d}\mu_s + \int_E \psi\,\mathrm{d}\mu_t \,\middle|\, \varphi,\psi\in C_b(E),\ \varphi(x)+\psi(y)\le d^p(x,y)\ {}^\forall x,y\in E\right\}\\
&= \sup\Bigg\{\int_{E\times E} (\varphi(\Phi_s(x,y))+\psi(\Phi_t(x,y))\,\mathrm{d}\pi_0 \,\Bigg|\\
&\qquad\qquad \varphi,\psi\in C_b(E),\ \varphi(x)+\psi(y)\le d^p(x,y)\ {}^\forall x,y\in E\Bigg\}\\
&\le \int_{E\times E} d^p(\Phi_s(x,y),\Phi_t(x,y))\pi_0(\mathrm{d}x\mathrm{d}y) = |t-s|^p\int_{X\times X} d^p(x,y)\pi_0(\mathrm{d}x\mathrm{d}y)\\
&= |t-s|^p W_p^p(\mu_0,\mu_1)
\end{aligned}$$

[38] E 上の最短測地線 $\gamma:[0,1]\to E$ の全体に一様距離 $d_\Gamma(\gamma,\eta):=\max_{t\in[0,1]} d(\gamma_t,\eta_t)$ をいれた空間を $\Gamma(E)$ とし, 端点 $x,y\in E$ にそれを結ぶ最短測地線を対応させる写像を $\Phi: E\times E\to\Gamma(E)$ とするとこれは Aumann の可測選択定理 ([88, Proposition 1] や [26, Theorem III.22] を参照) から可測であり γ に γ_t を対応させる写像 $e_t:\Gamma(E)\to E$, $e_t(\gamma):=\gamma_t$ が連続であることから $\Phi_t=\Phi\circ e_t$ は可測になる．

なので $W_p(\mu_s,\mu_t) \leq (t-s)W_p(\mu_0,\mu_1)$ を得る．またこれと三角不等式から

$$\begin{aligned} W_p(\mu_0,\mu_1) &\leq W_p(\mu_0,\mu_s) + W_p(\mu_s,\mu_t) + W_p(\mu_t,\mu_1) \\ &\leq sW_p(\mu_0,\mu_1) + W_p(\mu_s,\mu_t) + (1-t)W_p(\mu_0,\mu_1) \end{aligned}$$

となるので $(t-s)W_p(\mu_0,\mu_1) \leq W_p(\mu_s,\mu_t)$ を得て, $W_p(\mu_s,\mu_t) = (t-s)W_p(\mu_0,\mu_1)$ を得る．
□

命題 1.45 $p \in [1,+\infty[$ とする．(E,d) がコンパクト距離空間なら, $(\mathcal{P}_p(E), W_p)$ はコンパクト距離空間になる．

証明 E のコンパクト性から $\mathcal{P}_p(E) = \mathcal{P}(E)$ であり, これは常に緊密になるので Prokhorov の定理 (定理 1.13) から $\mathcal{P}_p(E) = \mathcal{P}(E)$ から弱収束する部分列, したがって W_p で収束する部分列を取り出せる．したがって, $(\mathcal{P}_p(E), W_p)$ は点列コンパクトになり $(\mathcal{P}_p(E), W_p)$ が距離空間であることからこれはコンパクトである． □

1.5 Appendix

定義 1.46 (端集合, 端点) E を線形空間, $A \subset K \subset E$ とする．A が K の**端集合** (extremal set) であるとは $x, y \in K$, $t \in]0,1[$ について $(1-t)x + ty \in A$ ならば $x, y \in A$ となることとする．K の端集合 A が一点集合 $\{z\}$ のとき, z を**端点** (extremal point) という．換言すると z が K の**端点** (extremal point) とは $z \in K$ が K の任意の異なる 2 点を結ぶ線分の内点でないことである．

定理 1.47 (Krein-Milman's Theorem, [154, 定理 6.3, 6.4], [44, pp. 439–440]) E を Banach 空間, K を空でない E のコンパクト部分集合とする．このとき次が成立する．

(1) K には端点が存在する．

(2) K の端点の全体を $\mathcal{E}(K)$ とすると, K は $\mathcal{E}(K)$ の**閉凸包** (closed convex hull) $\overline{\mathrm{co}}\,\mathcal{E}(K)$ に含まれる．特に K の任意の点は $\mathcal{E}(K)$ の元の有限凸結合で近似される．

定理 1.48 (Choquet's Theorem) E を Banach 空間, K を E のコンパクト凸集合とする．$\mathcal{E}(K)$ で K の端点の全体とする．$\ell : K \to \mathbb{R}$ を E 上の連続線形汎関数の K への制限としたとき ℓ の K 上の最小点は $\mathcal{E}(K)$ に属する．

証明 $\mathcal{E}(K)$ は閉集合なのでコンパクトである．実際, $\{z_n\} \subset \mathcal{E}(K)$ が $z \in K$ に収束したとして $x, y \in K$, $t \in]0,1[$ が $(1-t)x + ty = z$ をみたすとする．このとき, $y_n := y$, $x_n := y + \frac{1}{1-t}(z_n - y)$ とおくと $(1-t)x_n + ty_n = z_n$ となるので $x_n = y_n = z_n$ である．一方で $\{x_n\}$ は x に収束するので, これより $x = y = z$．したがって $y \in \mathcal{E}(K)$ である．Krein-Milman の定理から $x \in K$ は $\mathcal{E}(K)$ の元の有限凸結合で表現される列 $\{x_n\}$ の極限

である．すなわち x は $x_n=\sum_{k=1}^{N_n}\lambda_k^n x_k^n$, ($x_k^n\in\mathcal{E}(K)$, $\sum_{k=1}^{N_n}\lambda_k^n=1$) で定まる列 $\{x_n\}$ の極限である．したがって

$$\begin{aligned}\ell(x_n)&=\ell\left(\sum_{k=1}^{N_n}\lambda_k^n x_k^n\right)=\sum_{k=1}^{N_n}\lambda_k^n\ell(x_k^n)\\&\geq\inf_{y\in\mathcal{E}(K)}\ell(y)\sum_{k=1}^{N_n}\lambda_k^n=\inf_{y\in\mathcal{E}(K)}\ell(y)\end{aligned}$$

となり, $n\to\infty$ として $\inf_{x\in K}\ell(x)=\inf_{x\in\mathcal{E}(K)}\ell(x)$ となり, $\mathcal{E}(K)$ のコンパクト性から $\ell|_K$ の最小点は $\mathcal{E}(K)$ の点である． $\square$

定理 1.49 (Birkhoff's Theorem) (n,n)-双確率行列の全体 $\mathcal{B}_n$ の端点は置換行列である．すなわち $\mathcal{B}_n$ の端点 $\Pi=(\pi_{ij})$ はある置換 $\sigma\in S_n$ を用いて $\pi_{ij}=\delta_{j\sigma(i)}$ と表される．

証明 Horn-Johnson [72] の Theorem 8.7.1 を参照せよ． $\square$

2　リーマン幾何（塩谷）

最適輸送理論を用いて測度距離空間にリッチ曲率の下限条件が定義されるが，このように曲率の概念を一般化することの有用性は，リーマン多様体の収束・崩壊理論に起因する．ここでは，曲率概念の説明から初めて，リーマン幾何の研究の歴史を概観しつつ，リーマン多様体の収束・崩壊理論を解説する．これにより，曲率概念を一般の空間へ拡張することの意義を伝えたい．

2.1　曲率の大小を測る

$\mathbb{R}^3$ の曲面またはより一般にリーマン多様体 M を考える．曲率の大小をどのように測ったらよいだろうか？ 一つの方法として，球体

$$B_r(p) := \{\, q \in M \mid d(p,q) \le r \,\} \qquad (p \in M,\ r > 0)$$

の体積 $\operatorname{vol} B_r(p)$ を見てみよう．ここで，距離 d は測地的距離（リーマン距離）とする．M の曲率が大きいほど，この体積は小さくなる．また，M の測地三角形（３辺が最短測地線から成る三角形）を見る方法もある．曲率が大きいほど，測地三角形は太くなる．このような考察から，以下のことが読み取れる．

$$\begin{aligned}
&\text{曲率が大（正）} \Longrightarrow \text{空間が小さい}\\
&\text{曲率が小（負）} \Longrightarrow \text{空間が大きくなりうる}
\end{aligned}$$

ここで，曲率が小さいからといって，空間が必ずしも大きいとは限らない．例えば，２次元の平坦トーラスに漏斗を接着した２次元リーマン多様体を考えると，これは大域的には円錐と同じ形をしていて，空間の広がり具合は円錐と同じと言えるが，曲率が非正である．つまり，曲率 $\ge \kappa$（κ：定数）は条件として意味があるが，曲率 $\le \kappa$ は空間の大域的な形にあまり制約を与えないのである．

話が前後するが，リーマン多様体 M の曲率について，より詳しく説明しよう．代表的な曲率として，断面曲率とリッチ曲率がある．断面曲率（sec で表す）は，M の一点 p における接空間の２次元線形部分空間 σ に対して決まる実数である．p から出て σ に接する測地線全体からなる束を考えると，これは p の近くで２次元の曲面を成すが，この曲面の p におけるガウス曲率が断面曲率に一致する．リッチ曲率（Ric で表す）は，M の一点 p における単位接ベクトル u に対して決まる．u に接するような接空間の２次線形部分空間を動かして断面曲率の平均をとった値の $n-1$ 倍がリッチ曲率である．ここで，n は M の次元とする．（正確には，リッチ曲率 Ric は $(2,0)$ 型テンソル場として定義され，ここに述べた値は $\mathrm{Ric}(u,u)$ と一致する．）

$M^n(\kappa)$ を定曲率 κ の n 次元完備単連結空間形とする．つまり，$\kappa > 0$ のとき，$M^n(\kappa)$ は半径 $1/\sqrt{\kappa}$ の球面，$\kappa = 0$ のときはユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$，$\kappa < 0$ のときは双曲空間である．

三角形の比較として次の定理が知られている．

定理 2.1 (Toponogov の比較定理) 完備リーマン多様体 M と実定数 κ に対して，次の (1),(2) は同値である．

(1) $\sec \geq \kappa$

(2) M の任意の測地三角形 $\triangle pqr$ と，辺 qr 上の任意の点 s に対して，$M^2(\kappa)$ の測地三角形 $\triangle\tilde{p}\tilde{q}\tilde{r}$ が存在して，$d(p,q)=d(\tilde{p},\tilde{q})$, $d(q,r)=d(\tilde{q},\tilde{r})$, $d(r,p)=d(\tilde{r},\tilde{p})$ が成り立ち，$\tilde{s}$ を辺 $\tilde{q}\tilde{r}$ 上の点で $d(q,s)=d(\tilde{q},\tilde{s})$ をみたすものとすると，

$$d(p,s) \geq d(\tilde{p},\tilde{s})$$

が成り立つ．

任意の 2 点を結ぶ長さ最短の曲線が存在するような距離空間を**測地空間**と呼ぶが，定理 2.1(2) の条件は測地空間でも意味をもつ仮定である．

定義 2.2 (Alexandrov 空間) 定理 2.1(2) をみたす測地空間を**曲率** $\geq \kappa$ **の** *Alexandrov* **空間**という．

$M^n(\kappa)$ の半径 r の閉球体を $B_r^n(\kappa)$ とおく．その体積 $\mathrm{vol}\, B_r^n(\kappa)$ は中心の点によらない．体積の比較として以下の 2 つの不等式がある．

定理 2.3 (Bishop と Bishop-Gromov の不等式) $n \geq 2$ を整数，κ を実数とする．M が n 次元完備リーマン多様体で, $\mathrm{Ric} \geq \kappa$ をみたすならば, 任意の点 $p \in M$ と任意の $R \geq r > 0$ に対して

(1) $$\mathrm{vol}\, B_r(p) \leq \mathrm{vol}\, B_r^n(\kappa) \qquad \text{（Bishop の不等式）}$$

(2) $$\frac{\mathrm{vol}\, B_r(p)}{\mathrm{vol}\, B_R(p)} \geq \frac{\mathrm{vol}\, B_r^n(\kappa)}{\mathrm{vol}\, B_R^n(\kappa)} \qquad \text{（Bishop-Gromov の不等式）}$$

が成り立つ．

それでは，この体積の比較定理の 2 つの不等式でリッチ曲率を定義すればよいのでは？という発想が思い浮かぶが，これではあまり面白い帰結が得られない．条件としては弱すぎるのである．

2.2 リーマン幾何の歴史

リーマン多様体の研究は，局所理論が整備された後，大域的な性質にその研究の中心が移っていった．代表的な研究として球面定理がある．これは種々の幾何学的条件のもとリーマン多様体が球面に等長同型，微分同相，または同相になることを結論する形の定理である．以下に代表的な球面定理を幾つか列挙しよう．

ユークリッド空間 $\mathbb{R}^{n+1}$ 内の n 次元単位球面を $S^n(1)$ で表すことにする．

定理 2.4 (最大直径定理；Myers-Cheng [35]) $n \geq 2$ とする．n 次元閉リーマン多様体 M のリッチ曲率が $\mathrm{Ric} \geq n-1$ をみたすならば，その直径は

$$\operatorname{diam} M \leq \pi$$

をみたし，等号成立は M が n 次元単位球面 $S^n(1)$ に等長同型であるときに限る．

この定理の系として，リッチ曲率の下限が正の完備リーマン多様体はコンパクトであり，その基本群が有限であることが従う．

定理 2.5 (1/4 ピンチング定理；Berger-Klingenberg-Brendle-Schoen [18]) 単連結な閉リーマン多様体 M の断面曲率が $1/4 < \sec \leq 1$ をみたすとき，M は球面 $S^n(1)$ に微分同相となる．

これは長い歴史をもつ定理である．最初に Hopf がこの定理を予想し，Rauch が $3/4 \leq \sec \leq 1$ のときに同相版を証明し，その後 Berger と Klingenberg が同相版を証明した．微分同相版について，Im Hof-Ruh, 杉本（後藤）・塩濱，陶山らによる様々な研究を経て，最終的にリッチ・フローを用いて Brendle-Schoen が解決した．

定理 2.6 (Lichnerowicz-小畠の定理 [90, 104]) $n \geq 2$ とし，M を n 次元閉リーマン多様体で $\mathrm{Ric} \geq n-1$ と仮定する．M のラプラシアンの非ゼロ第 1 固有値 $\lambda_1(M)$ について，

$$\lambda_1(M) \geq n$$

が成り立ち，等号成立は M が n 次元単位球面 $S^n(1)$ に等長同型であるときに限る．

定理 2.7 (Grove-塩濱 [69]) n 次元閉リーマン多様体が $\sec \geq 1$ かつ $\operatorname{diam} M > \pi/2$ をみたすとき，M は n 次元球面に同相である．

このように様々な興味深い定理が生み出されていく中で，条件を少し摂動してみようというのは自然な発想である．そのような摂動についての初期の試みとして，例えば以下がある．

定理 2.8 (勝田 [79]) 任意の整数 $n \geq 2$ と任意の実数 $\Delta > 0$ に対して，ある実数 $\varepsilon(n,\Delta) > 0$ が存在して，n 次元閉リーマン多様体 M が $\mathrm{Ric} \geq n-1$，$|\sec| \leq \Delta$，かつ $\operatorname{vol} M \geq \operatorname{vol} S^n(1) - \varepsilon(n,\Delta)$ をみたすとき，M は n 次元球面 $S^n(1)$ に微分同相である．

この定理以前に関連する幾つかの結果（山口，糸川，塩濱らによる）があったが，それについては省略する．この定理は Gromov によるリーマン多様体の収束理論によって得られた．以下にこれを説明する．

定義 2.9 (Hausdorff 距離) X を距離空間とする．2 つのコンパクト部分集合 $A, B \subset X$ の間の *Hausdorff* **距離** $d_{\mathrm{H}}(A,B)$ を

$$d_{\mathrm{H}}(A,B) := \inf\{\, \varepsilon > 0 \mid A \subset B_\varepsilon(B),\ B \subset B_\varepsilon(A) \,\}$$

で定義する．

定義 2.10 (Gromov-Hausdorff 距離 [67]) 2つのコンパクト距離空間 X, Y の間の *Gromov-Hausdorff* **距離** $d_{\mathrm{GH}}(X,Y)$ を

$$d_{\mathrm{GH}}(X,Y) := \inf\{\, d_{\mathrm{H}}(\varphi(X),\psi(Y)) \mid \varphi : X \to Z,\, \psi : Y \to Z \text{ は} \\ \text{ある距離空間 } Z \text{ への等長埋め込み} \,\}$$

で定義する．コンパクト距離空間の列が d_{GH} について収束するとき，*Gromov-Hausdorff* **収束する**という．

定理 2.11 (Gromov の収束定理 [68]) $n \geq 1$ を整数, $\Delta, v > 0$ を実数とする．$i = 1, 2, \ldots$ に対して，M_i を n 次元閉リーマン多様体で $|\sec| \leq \Delta$, $\mathrm{vol}\, M_i \geq v$ とする．もし M_i が距離空間 X へ Gromov-Hausdorff 収束するならば，以下の (1),(2) が成り立つ．

(1) X は C^∞ 級微分可能多様体で $C^{1,\alpha}$ 級リーマン計量（$0 < \alpha < 1$ は任意）をもつ．

(2) ある番号 i_0 が存在して，$i \geq i_0$ ならば M_i は X と微分同相である．

定理 2.8**の証明の概略** もし定理 2.8をみたす $\varepsilon(n,\Delta)$ が存在しなかったと仮定すると，ある閉リーマン多様体の列 M_i で $\mathrm{Ric} \geq n-1$, $|\sec| \leq \Delta$, かつ $\mathrm{vol}\, M_i \to \mathrm{vol}\, S^n(1)$ $(i \to \infty)$ をみたすものが存在する．このとき，M_i は $S^n(1)$ へ Gromov-Hausdorff 収束することが分かる．そこで，Gromov の収束定理を用いて矛盾を得る．□

さらに以下が知られている．

定理 2.12 (Cheeger-Colding [31]) 任意の整数 $n \geq 2$ に対して，ある実数 $\varepsilon(n) > 0$ が存在して，n 次元閉リーマン多様体 M が $\mathrm{Ric} \geq n-1$ かつ $\mathrm{vol}\, M \geq \mathrm{vol}\, S^n(1) - \varepsilon(n)$ をみたすとき，M は n 次元球面 $S^n(1)$ に微分同相である．

この定理の証明においても定理 2.8のように背理法から多様体の列を得るが，これが球面に Gromov-Hausdorff 収束することを証明することは遥かに難しい．

リーマン多様体の収束・崩壊を考える上で重要となるのは，何時与えられたリーマン多様体の列が収束部分列をもつか？ である．これについて次の章で詳しく説明する．

2.3 Gromov のプレコンパクト性定理

距離空間 X の離散部分集合 $\mathcal{N} \subset X$ が ε-**ネット**であるとは，

$$X = \bigcup_{x \in \mathcal{N}} B_\varepsilon(x)$$

が成り立つときをいう．距離空間 X が**プレコンパクト**または**全有界**であるとは，任意の $\varepsilon > 0$ に対して X が有限な ε-ネットをもつときをいう．言い換えると，ある有限個の点 $x_1, x_2, \ldots, x_N \in X$ が存在して

$$X = \bigcup_{i=1}^{N} B_\varepsilon(x_i)$$

をみたすことである．距離空間がコンパクトであることと，プレコンパクトかつ完備であることは必要十分であることに注意しておく．

$n \geq 2$, $\kappa \in \mathbb{R}$, $D > 0$ とする．$\mathcal{M}_{\mathrm{Ric}}(n, \kappa, D)$ を n 次元閉リーマン多様体で $\mathrm{Ric} \geq (n-1)\kappa$ かつ $\mathrm{diam}\, M \leq D$ をみたすものの等長同型類全体の集合とする．

$\mathcal{H}$ をコンパクト距離空間の等長同型類全体の集合とすると，これは Gromov-Hausdorff 距離に関して完備であることが知られている．

定理 2.13 (Gromov のプレコンパクト性定理 [67]) 任意の $n \geq 2$, $\kappa \in \mathbb{R}$, $D > 0$ に対して，$\mathcal{M}_{\mathrm{Ric}}(n, \kappa, D)$ は Gromov-Hausdorff 距離に関してプレコンパクトである．即ち $\mathcal{M}_{\mathrm{Ric}}(n, \kappa, D)$ の $\mathcal{H}$ における閉包はコンパクトである．特に，$\mathcal{M}_{\mathrm{Ric}}(n, \kappa, D)$ の中の任意のリーマン多様体の列は，あるコンパクト距離空間へ Gromov-Hausdorff 収束するような部分列をもつ．

この章ではこの定理の証明を簡単に紹介する．証明のキーポイントは以下の補題である．

補題 2.14 部分集合 $\mathcal{C} \subset \mathcal{H}$ について以下の (1),(2) を仮定する．

(1) ある実数 $D > 0$ が存在して，任意の $X \in \mathcal{C}$ に対して $\mathrm{diam}\, X \leq D$ が成り立つ．

(2) 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある自然数 $N(\varepsilon)$ が存在して，任意の $X \in \mathcal{C}$ に対して X のある ε-ネット $\mathcal{N}$ が存在して $\mathcal{N}$ の元の個数が $\#\mathcal{N} \leq N(\varepsilon)$ をみたす．

このとき，$\mathcal{C}$ は Gromov-Hausdorff 距離に関してプレコンパクトである．

証明 証明のアイディアは，アスコリ・アルツェラの定理の証明と同じように有限次元近似をすることである．

自然数 N と実数 $D > 0$ に対して，

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(N, D) := \{\ X \mid X\ &\text{は距離空間の等長同型類で}\\ &\#X \leq N,\ \mathrm{diam}\, X \leq D\ \text{をみたす}\ \}\end{aligned}$$

とおくとき，$\mathcal{F}(N, D)$ は Gromov-Hausdorff 距離に関してコンパクトである．$\mathcal{F}(N, D)$ は有限次元であり，そのコンパクト性は直感的には明らかなので，証明は省略する．

任意に $\varepsilon > 0$ をとる．条件 (2) のような $N(\varepsilon)$ が存在する．任意の $X \in \mathcal{C}$ に対して, ある ε-ネット $\mathcal{N} \subset X$ が存在して，$\#\mathcal{N} \leq N(\varepsilon)$ をみたす．$d_{\mathrm{GH}}(X, \mathcal{N}) \leq \varepsilon$ かつ $\mathcal{N} \in \mathcal{F}(N(\varepsilon), D)$ なので，

$$\mathcal{C} \subset B_\varepsilon(\mathcal{F}(N(\varepsilon), D))$$

が成り立つ．$\mathcal{F}(N(\varepsilon), D)$ のプレコンパクト性から，ある有限個の距離空間 $X_1, \dots, X_n \in \mathcal{F}(N(\varepsilon), D)$ が存在して

$$\mathcal{F}(N(\varepsilon), D) \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_\varepsilon(X_i)$$

をみたす．従って，三角不等式から

$$\mathcal{C} \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_{2\varepsilon}(X_i)$$

を得る．補題が証明された．□

Gromov **のプレコンパクト性定理** 2.13**の証明**　$\mathcal{M}(n,\kappa,D)$ が補題 2.14の条件 (1),(2) をみたすことをチェックすればよい．(1) は明らかなので，(2) を確かめればよい．

任意の $\varepsilon > 0$ と $M \in \mathcal{M}(n,\kappa,D)$ をとる．$\mathcal{N} \subset M$ を ε-離散ネットとする．つまり，任意の異なる 2 点 $p,q \in \mathcal{N}$ に対して $d(p,q) > \varepsilon$ をみたすような集合とする．このとき，$B_{\varepsilon/2}(p)$ と $B_{\varepsilon/2}(q)$ は交わらないことに注意する．Bishop-Gromov の不等式から

$$\operatorname{vol} B_{\varepsilon/2}(p) \geq \frac{\operatorname{vol} B^n_{\varepsilon/2}(\kappa)}{\operatorname{vol} B^n_D(\kappa)} \operatorname{vol} M$$

が得られる．故に

$$\operatorname{vol} M \geq \sum_{p\in\mathcal{N}} \operatorname{vol} B_{\varepsilon/2}(x) \geq \frac{\operatorname{vol} B^n_{\varepsilon/2}(\kappa)}{\operatorname{vol} B^n_D(\kappa)} \operatorname{vol} M \cdot \#\mathcal{N}$$

よって

$$\#\mathcal{N} \leq \frac{\operatorname{vol} B^n_D(\kappa)}{\operatorname{vol} B^n_{\varepsilon/2}(\kappa)}$$

となる．$\mathcal{N}$ を M の極大な ε-離散ネットとおくと，これは ε-ネットとなる．実際，もしそうでないなら，ある点 $p \in M$ が存在して $d(p,\mathcal{N}) > \varepsilon$ をみたす．$\mathcal{N} \cup \{p\}$ も ε-離散ネットとなるので，$\mathcal{N}$ の極大性に反する．

$\mathcal{N}$ は M の ε-ネットで，その元の個数が M によらない数で評価されたので，補題 2.14 の条件 (2) が得られた．従って Gromov のプレコンパクト性定理が証明された．□

定理 2.13の証明と全く同じ方法で，以下が得られる．$\mathcal{A}(n,\kappa,D)$ を n 次元コンパクト Alexandrov 空間 X で曲率 $\geq \kappa$，$\operatorname{diam} X \leq D$ をみたすものの等長同型類全体の集合とする．

定理 2.15 (Gromov のプレコンパクト性定理（Alexandrov 空間版）) 任意の $n \geq 2$, $\kappa \in \mathbb{R}$, $D > 0$ に対して，$\mathcal{A}(n,\kappa,D)$ は Gromov-Hausdorff 距離に関してプレコンパクトである．

2.4　リーマン多様体の収束・崩壊とその極限

リーマン多様体の収束理論の応用例として以下を挙げる．$\mathcal{M}_{\mathrm{sec}}(n,\kappa,D,v)$ を n 次元リーマン多様体 M で $\sec \geq \kappa$, $\operatorname{diam} M \leq D$, $\operatorname{vol} M \geq v$ をみたすものの等長同型類全体の集合とする．

定理 2.16 (有限性定理；Cheeger-Grove-Petersen-Wu-Perelman [120]) 任意の $n \geq 1$, $\kappa \in \mathbb{R}$, $D, v > 0$ に対して，$\mathcal{M}_{\mathrm{sec}}(n, \kappa, D, v)$ は高々有限個の位相同型類しか含まない．

これは最初，ホモトピー版が証明された．最終的には，Perelman が Gromov-Hausdorff 距離と Alexandrov 空間の理論を用いて証明した．以下の定理が主要な役割を果たす．

定理 2.17 (Perelman の安定性定理 [120]) 任意の Alexandrov 空間 $X \in \mathcal{A}(n, \kappa, D)$ に対して，ある $\varepsilon(X) > 0$ が存在して $Y \in \mathcal{A}(n, \kappa, D)$ が $d_{\mathrm{GH}}(X, Y) < \varepsilon(X)$ をみたすならば，X と Y は互いに同相である．

有限性定理の証明の概略 $\mathcal{A}(n, \kappa, D, v)$ を $X \in \mathcal{A}(n, \kappa, D)$ で n 次元 Hausdorff 測度が $\mathcal{H}^n(X) \geq v$ なるもの全体の集合とする．$\mathcal{M}_{\mathrm{sec}}(n, \kappa, D, v)$ は $\mathcal{A}(n, \kappa, D, v)$ に含まれるので，$\mathcal{A}(n, \kappa, D, v)$ に含まれる位相同型類が高々有限であることを示せば十分である．Gromov のプレコンパクト性定理と少しの議論により，$\mathcal{A}(n, \kappa, D, v)$ は Gromov-Hausdorff 距離に関してコンパクトであることが分かる．よって，ある有限個の Alexandrov 空間 $X_1, \ldots, X_N \in \mathcal{A}(n, \kappa, D, v)$ が存在して，

$$\mathcal{A}(n, \kappa, D, v) \subset \bigcup_{i=1}^{N} B_{\varepsilon(X_i)}(X_i)$$

が成り立つ．ここで，$\varepsilon(X)$ は Perelman の安定性定理のものである．安定性定理により，$B_{\varepsilon(X_i)}(X_i) \cap \mathcal{A}(n, \kappa, D, v)$ の任意の元は X_i に同相なので，$\mathcal{A}(n, \kappa, D, v)$ は高々 N 個の位相同型類しか含まない．$\square$

ここに紹介した定理たちはほんの一部であり，他にも多くの重要な結果がある．ここでは，Gromov-Hausdorff 収束における極限の次元が，列の多様体の次元と同じだが，極限の次元が列の多様体の次元より真に小さくなるときは，問題がより難しくなり，そのような収束を**崩壊**とよぶ．崩壊理論の研究は Cheeger, Fukaya, Gromov, Perelman，山口らによって整備された．断面曲率が下に有界な完備リーマン多様体の列の Gromov-Hausdorff 極限は Alexandrov 空間となるが，そのような崩壊現象の解明は，Alexandrov 空間の理解が本質的であった．その中で一つの代表的な定理が以下である．

定理 2.18 (体積崩壊定理；塩谷・山口 [129, 130]) ある定数 $\varepsilon_0 > 0$ が存在して，3 次元閉リーマン多様体 M で $\sec \geq -1$ かつ $\operatorname{vol} M \leq \varepsilon_0$ をみたすものは，グラフ多様体に限る．

この定理は最初 Perelman [121] により証明なしで主張され，塩谷・山口が証明した．これは Perelman によるポアンカレ予想および幾何化予想の解決における一つの重要なステップであった．

このように断面曲率の下限条件において，Alexandrov 空間を解析することで，収束・崩壊現象を解明する手段はかなり有効な研究手段であった．同じことがリッチ曲率に対して期待できるが，リッチ曲率の下限条件を備えた距離空間は最適輸送理論を用いて定義される．

また他方で，Cheeger-Colding [31, 32, 33] はリッチ曲率が下に有界かつ次元が上に有界なリーマン多様体の列の極限空間の構造を詳しく研究した．現在，最適輸送の意味でリッチ曲率が下に有界な距離空間について，Cheeger-Colding の結果を一般化するという結果も得られつつある．

3　曲率次元条件（太田）

この講演の内容については，[148] に（情報は若干古いが）概説がある．興味を持たれた方はそちらも参照されたい．

3.1　リッチ曲率の下限の特徴づけ

まずリーマン多様体において，リッチ曲率がある定数以上であるという性質が，Wasserstein 空間上のある汎関数（エントロピー）の凸性で特徴づけられることを述べる．このエントロピーの凸性を曲率次元条件と呼ぶ．

(M,g) を n 次元完備連結リーマン多様体（$n \geq 2$，$\partial M = \emptyset$），vol_g をその体積測度とし，リーマン距離関数を単に d で表す．簡単のため，M は常にコンパクトであるとする．

3.1.1　重みつきリッチ曲率

曲率次元条件における「次元」の役割を理解するためには，vol_g に M 上の正値関数による重みをつけた測度

$$\mathfrak{m} = \mathrm{e}^{-V}\,\mathrm{vol}_g, \qquad V \in C^\infty(M)$$

を考えた方が良い．すると，リッチ曲率は測度の振る舞いを制御するものであるので，V に応じて変形する必要がある．

定義 3.1 (重みつきリッチ曲率) $N \in (n,\infty)$ と $v \in T_xM$ に対し，

$$\mathrm{Ric}_N(v) := \mathrm{Ric}_g(v,v) + \mathrm{Hess}\,V(v,v) - \frac{\langle \nabla V(x), v\rangle^2}{N-n}$$

（$\mathrm{Ric}_g : TM \times TM \longrightarrow \mathbb{R}$ は g についてのリッチテンソル）．極限として，

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}_\infty(v) &:= \mathrm{Ric}_g(v,v) + \mathrm{Hess}\,V(v,v), \\
\mathrm{Ric}_n(v) &:= \begin{cases} \mathrm{Ric}_g(v,v) + \mathrm{Hess}\,V(v,v) & \text{if } \langle \nabla V(x), v\rangle = 0, \\ -\infty & \text{if } \langle \nabla V(x), v\rangle \neq 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

定義から直ちに次の性質がわかる．

補題 3.2 　(i) $v \in TM$ と $c \in \mathbb{R}$ に対し，$\mathrm{Ric}_N(cv) = c^2\,\mathrm{Ric}_N(v)$．

(ii) 重みがない場合（$\mathfrak{m} = \mathrm{vol}_g$，つまり $V \equiv 0$），全ての $N \in [n,\infty]$ に対して $\mathrm{Ric}_N(v) = \mathrm{Ric}_g(v,v)$．

(iii) Ric_N は N について単調非減少である．つまり，$n \leq N < N' \leq \infty$ ならば，$\mathrm{Ric}_N(v) \leq \mathrm{Ric}_{N'}(v)$．

注意 3.3 (a) Ric_∞ を下から押さえた状況での幾何・解析は，Lichnerowicz [89] による先駆的な仕事の後，Bakry–Émery [11] らによって線形半群や関数不等式の枠組で組織的に研究された．Ric_∞ は **Bakry–Émery テンソル**，または **Bakry–Émery–Ricci テンソル**とも呼ばれる．その後，Ric_N が Bakry [10] や Qian [122] により導入され，解析的・幾何的な興味から研究が進んだ（[91] など参照）．Bakry らの理論では，ラプラシアンを一般化したような線形作用素について，$\mathrm{Ric}_N \ge K$ での Bochner 不等式に対応する不等式を曲率次元条件と呼び，その下での解析を展開した（**Γ-calculus** と呼ばれる，桒田氏の講演参照）．この講演で扱う最適輸送理論に基づく曲率次元条件は彼らの理論からその名前を流用しており，区別するために Bakry らのものを「解析的曲率次元条件」，最適輸送理論に基づくものを「幾何的曲率次元条件」と呼ぶことがある．

(b) 以前は $N < n$ の場合は考えない，若しくは形式的に $\mathrm{Ric}_N(v) = -\infty$ とされていたが，最近 $N < 0$（または更に $N < 1$）の場合にも（同じ定義による）Ric_N を考えることに意味があることがわかってきている．例えば，Bochner 不等式が $N < 0$ でも成り立つ（[83, 108]）．

以降，実数 $K \in \mathbb{R}$ に対し $\mathrm{Ric}_N(v) \ge K|v|^2$ が全ての $v \in TM$ で成り立つことを，「$\mathrm{Ric}_N \ge K$」で表す．$\mathrm{Ric}_N \ge K$ を満たす $(M, g, \mathfrak{m})$ は，「リッチ曲率が K 以上，かつ次元が N 以下」であるように振る舞うことが知られている．例えば，$N \in [n, \infty)$ に対し $\mathrm{Ric}_N \ge K$ であるとき，Bishop–Gromov 体積比較定理の拡張：

$$\frac{\mathfrak{m}(B_R(x))}{\mathfrak{m}(B_r(x))} \le \frac{\int_0^R \mathbf{s}_{K/(N-1)}(t)^{N-1}\,dt}{\int_0^r \mathbf{s}_{K/(N-1)}(t)^{N-1}\,dt} \qquad \forall x \in M,\ 0 < r < R$$

が成り立つ．ここで，

$$\mathbf{s}_\kappa(r) := \begin{cases} \sqrt{1/\kappa}\sin(r\sqrt{\kappa}) & (\kappa > 0), \\ r & (\kappa = 0), \\ \sqrt{-1/\kappa}\sinh(r\sqrt{-\kappa}) & (\kappa < 0) \end{cases} \tag{3.1}$$

は方程式

$$f'' + \kappa f = 0, \quad f(0) = 0, \quad f'(0) = 1$$

の解で，比較定理で頻繁に現れる．

3.1.2 エントロピー

次に，曲率次元条件で主役を務める Wasserstein 空間上の汎関数（エントロピー）を定義する．

定義 3.4 (エントロピー) (1) $\mu \in \mathcal{P}(M)$ の $\mathfrak{m}$ についての**相対エントロピー**を，μ が $\mathfrak{m}$ と絶対連続である場合（$\mu = \rho\mathfrak{m}$ と表せる）には

$$\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu) := \int_M \rho \log \rho \, d\mathfrak{m},$$

それ以外のときは $\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu) := \infty$ と定義する．

(2) $N \in (1,\infty)$ に対し，$\mu \in \mathcal{P}(M)$ の $\mathfrak{m}$ についての **Rényi（–Tsallis）エントロピー**を，μ を $\mu = \rho\mathfrak{m} + \mu_s$ と $\mathfrak{m}$ と絶対連続な部分 $\rho\mathfrak{m}$ と特異な部分 μ_s にルベーグ分解して，

$$S_N(\mu) := -\int_M \rho^{(N-1)/N}\, d\mathfrak{m}$$

と定義する．

上の (1) において，Jensen の不等式より

$$\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu) = \mathfrak{m}(M)\int_M \rho\log\rho\,\frac{d\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}(M)} \geq \mathfrak{m}(M)\frac{1}{\mathfrak{m}(M)}\log\frac{1}{\mathfrak{m}(M)} = -\log\mathfrak{m}(M).$$

従って $\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu)$ は well-defined である（$\mathfrak{m}(M)=\infty$ の場合には，$\int_{\{\rho>1\}}\rho\log\rho\,d\mathfrak{m}=\infty$ なら $\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu):=\infty$ とする）．

相対エントロピーは，熱力学や情報理論で基本的な概念であるボルツマン・シャノンエントロピーの符号を逆にしたものである（従って，自然な拡散で相対エントロピーは減少する）．実際，集合 $A \subset M$ 上の一様分布 $\mu_A = \mathfrak{m}(A)^{-1}\cdot\mathfrak{m}|_A$ については

$$\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu_A) = \int_A \frac{1}{\mathfrak{m}(A)}\log\frac{1}{\mathfrak{m}(A)}\,d\mathfrak{m} = -\log\mathfrak{m}(A) \tag{3.2}$$

となり，$\mathfrak{m}(A)$ が大きいほど（広範囲に一様に分布しているほど）$\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu_A)$ は小さくなる．S_N は相互作用のあるより複雑な系についての統計力学などに関連するものである．

3.1.3 リッチ曲率の下限の特徴づけ

定義3.4のエントロピーを用いると，重みつきリッチ曲率がある定数以上であるという性質が次のように特徴づけられる．次の定理の (i) で $\mathfrak{m}=\mathrm{vol}_g$ の場合はRenesse–Sturm [126]，それ以外はSturm [131, 132, 133] と Lott–Villani [92, 93] による（$\mathrm{Ric}_\infty \geq K$ が $\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}$ の K 凸性を導くことについては，Cordero-Erausquin et al [37, 38] による先行研究がある）．

定理 3.5 (リッチ曲率の下限の特徴づけ) $K \in \mathbb{R}$ とする．

(i) $(M,g,\mathfrak{m})$ が $\mathrm{Ric}_\infty \geq K$ を満たすことは，$\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}$ が K **凸**であること，つまり任意の $\mu_0,\mu_1 \in \mathcal{P}(M)$ とその間の W_2 についての最短測地線 $(\mu_t)_{t\in[0,1]}$ に対し

$$\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu_t) \leq (1-t)\,\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu_0) + t\,\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu_1) - \frac{K}{2}(1-t)tW_2^2(\mu_0,\mu_1) \tag{3.3}$$

が全ての $t\in(0,1)$ で成り立つこと，と同値である．

(ii) $N\in[n,\infty)$ に対し，$(M,g,\mathfrak{m})$ が $\mathrm{Ric}_N \geq K$ を満たすことは，任意の $\mathfrak{m}$ に絶対連続な $\mu_0,\mu_1\in\mathcal{P}(M)$ とその間の W_2 についての最短測地線 $(\mu_t)_{t\in[0,1]}$ に対し，

$$\begin{aligned} S_N(\mu_t) \leq -\int_{M\times M} \Big\{ &(1-t)\beta_{K,N}^{1-t}\big(d(x,y)\big)^{1/N}\rho_0(x)^{-1/N} \\ &+ t\beta_{K,N}^{t}\big(d(x,y)\big)^{1/N}\rho_1(x)^{-1/N}\Big\}\,\pi(dxdy) \end{aligned} \tag{3.4}$$

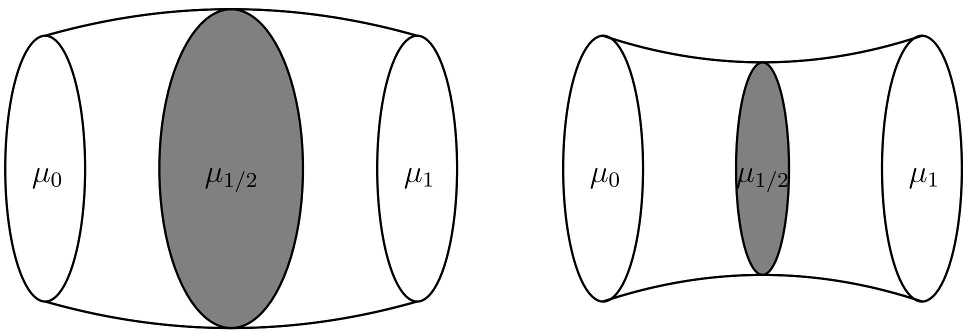
が全ての $t \in (0,1)$ で成り立つことと同値である．ここで，$i = 0,1$ に対し $\mu_i = \rho_i \mathfrak{m}$ とし，π を μ_0 と μ_1 の最適カップリングとした．

不等式 (3.4) 中の $\beta^t_{K,N}$ は，(3.1) の $\mathbf{s}_\kappa$ を用いて次のように定義される：$t \in (0,1)$ に対し，

$$\beta^t_{K,N}(r) := \left(\frac{\mathbf{s}_{K/(N-1)}(tr)}{t\mathbf{s}_{K/(N-1)}(r)} \right)^{N-1}, \qquad \beta^t_{K,\infty}(r) := \mathrm{e}^{K(1-t^2)r^2/6}. \tag{3.5}$$

(3.3) は $d^2[\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu_t)]/dt^2 \geq KW_2^2(\mu_0,\mu_1)$ を弱い意味で（積分した形で）表したものであり，$\mathcal{P}(M)$ をリーマン多様体と見なした場合には $\mathrm{Hess}\,\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}} \geq K$ に当たる．(3.4) は絶対連続でない μ_0, μ_1 に対しても書くことはできるが，煩雑になるので割愛する．

幾何的なイメージでは，曲率が大きいほど μ_t は μ_0, μ_1 に比べて「広がる」ため，エントロピーが小さくなり，よってより凸になる（下図）．



エントロピーの凸性のイメージ

注意 3.6 $K = 0$ のときは $\beta_{0,N} \equiv 1$ となり，よって (3.4) は S_N の凸性（0 凸性）：

$$S_N(\mu_t) \leq (1-t)S_N(\mu_0) + tS_N(\mu_1)$$

に他ならない．しかし，$K \neq 0$ については S_N の K 凸性は良い条件ではない．具体的には，$K > 0$ に対し S_N が K 凸になることはなく，$K < 0$ の場合に S_N が K 凸であることは $\mathrm{Ric}_N \geq 0$ であることと同値である（[131, 113]）．

$\mathrm{Ric}_N \geq K$ からエントロピーの凸性 (3.3), (3.4) を得る方法の概略を述べる．$N \in [n, \infty)$ とする（$N = \infty$ の場合も同様）．簡単のため，μ_0, μ_1 が共に $\mathfrak{m}$ に絶対連続なときのみ考える．ユークリッド空間の場合と同様に，μ_0 から μ_1 への最短測地線（最適輸送）は一意であり，M の測地線に沿った押し出しとなる．具体的には，ある種の凸性を満たす関数 $\varphi : M \longrightarrow \mathbb{R}$ が存在し，

$$T_t(x) := \exp_x \bigl(t\nabla\varphi(x) \bigr)$$

と（殆ど全ての点 $x \in M$ で）定義される写像 T_t について，$\mu_t = (T_t)_\sharp \mu_0$ が成り立つ．φ の凸性より T_t は殆ど全ての点で微分可能であり，$\mu_t = \rho_t \mathfrak{m}$ と表すとき，**Monge–Amperè 方程式**

$$\rho_0(x)\mathrm{e}^{-V(x)} = \rho_t\bigl(T_t(x)\bigr)\mathrm{e}^{-V(T_t(x))} \det[dT_t(x)] \tag{3.6}$$

が μ_0-a.e. $x \in M$ で成り立つ．ここで $\det[dT_t(x)]$ は T_t の $\underline{\mathrm{vol}_g\text{ についての}}$ x でのヤコビアンである．$\rho_0(x)$ と $\rho_t(T_t(x))$ の比

$$\mathbf{J}_t(x) := \mathrm{e}^{V(x)-V(T_t(x))} \det[dT_t(x)] \tag{3.7}$$

は T_t の $\underline{\mathfrak{m}\text{ についての}}$ x でのヤコビアンと見なせ，ヤコビ場と重みつきリッチ曲率の下限 $\mathrm{Ric}_N \ge K$ を用いた（よく行われる）計算により，

$$\mathbf{J}_t(x)^{1/N} \ge (1-t)\beta_{K,N}^{1-t}\Bigl(d\bigl(x,T_1(x)\bigr)\Bigr)^{1/N}\mathbf{J}_0(x)^{1/N} + t\beta_{K,N}^{t}\Bigl(d\bigl(x,T_1(x)\bigr)\Bigr)^{1/N}\mathbf{J}_1(x)^{1/N} \tag{3.8}$$

が示せる（**$\mathbf{J}_t(x)^{1/N}$ の凹性**）．$\mathbf{J}_0(x) = 1$ に注意して，(3.8) を積分すると (3.4) が得られる：

$$\begin{aligned}
S_N(\mu_t) &= -\int_M \rho_t^{(N-1)/N}\, d\mathfrak{m} = -\int_M \rho_t^{-1/N}\, d\mu_t \\
&= -\int_M (\rho_t \circ T_t)^{-1/N}\, d\mu_0 \quad (\because \mu_t = (T_t)_\sharp \mu_0) \quad \underset{(3.6)}{=} -\int_M \left(\frac{\mathbf{J}_t}{\rho_0}\right)^{1/N} d\mu_0 \\
&\underset{(3.8)}{\le} -\int_M \Biggl\{(1-t)\beta_{K,N}^{1-t}\Bigl(d\bigl(x,T_1(x)\bigr)\Bigr)^{1/N}\rho_0(x)^{-1/N} \\
&\qquad\qquad + t\beta_{K,N}^{t}\Bigl(d\bigl(x,T_1(x)\bigr)\Bigr)^{1/N}\left(\frac{\mathbf{J}_1(x)}{\rho_0(x)}\right)^{1/N}\Biggr\}\mu_0(dx) \\
&= -\int_M \Bigl\{(1-t)\beta_{K,N}^{1-t}\bigl(d(x,y)\bigr)^{1/N}\rho_0(x)^{-1/N} + t\beta_{K,N}^{t}\bigl(d(x,y)\bigr)^{1/N}\rho_1(y)^{-1/N}\Bigr\}\,\pi(dxdy).
\end{aligned}$$

最後の等号では $y = T_1(x)$ π-a.e. $(x,y) \in M \times M$ と $t=1$ での (3.6) を使った．

逆向き（(3.3), (3.4) $\Rightarrow$ $\mathrm{Ric}_N \ge K$）については，§3.2.3で略証を与える．

3.2 曲率次元条件

定理3.5で現れた $\mathrm{Ric}_N \ge K$ を特徴づける性質（エントロピーの凸性）は，微分構造を用いずに，距離（測地線）と測度のみで定式化できる．そこで，それを測度距離空間の「N 次元的なリッチ曲率が K 以上である」ことの定義として採用すると，$\mathrm{Ric}_N \ge K$ である重みつきリーマン多様体（または $\mathrm{Ric}_g \ge K$ かつ $\dim \le N$ である重みのないリーマン多様体）と共通する様々な性質が導かれる．

3.2.1 定義

(X,d) を完備な測地距離空間, $\mathfrak{m}$ を X 上のボレル測度で任意の有界開集合 $U(\neq \emptyset)$ に対し $0 < \mathfrak{m}(U) < \infty$ であるものとする．$\Gamma(X)$ を X 上の最短測地線 $\gamma : [0,1] \longrightarrow X$ のなす集合

とし，距離 $d_\Gamma(\gamma_1,\gamma_2):=\max_{t\in[0,1]} d(\gamma_1(t),\gamma_2(t))$ によって位相を入れる．$t\in[0,1]$ に対し，$e_t:\Gamma(X)\longrightarrow X$ を $e_t(\gamma):=\gamma(t)$ と定める．定義より明らかに，$d(e_t(\gamma_1),e_t(\gamma_2))\le d_\Gamma(\gamma_1,\gamma_2)$ が成り立つ．

定義 3.7 (曲率次元条件) (1) $K\in\mathbb{R}$ に対し，$(X,d,\mathfrak{m})$ が**曲率次元条件** $\mathrm{CD}(K,\infty)$ を満たすということを，次で定義する：任意の確率測度 $\mu_0,\mu_1\in\mathcal{P}_2(X)$ に対し，ある μ_0 から μ_1 への W_2 についての最短測地線 $(\mu_t)_{t\in[0,1]}$ が存在し，

$$\mathrm{Ent}_\mathfrak{m}(\mu_t)\le(1-t)\,\mathrm{Ent}_\mathfrak{m}(\mu_0)+t\,\mathrm{Ent}_\mathfrak{m}(\mu_1)-\frac{K}{2}(1-t)tW_2^2(\mu_0,\mu_1)$$

が全ての $t\in(0,1)$ で成立する（$\mathrm{Ent}_\mathfrak{m}$ の弱 K 凸性）．

(2) $K\in\mathbb{R}$，$N\in(1,\infty)$ に対し，次が成り立つとき，$(X,d,\mathfrak{m})$ は**曲率次元条件** $\mathrm{CD}(K,N)$ を満たすという：任意の $\mathfrak{m}$ に絶対連続な確率測度 $\mu_0,\mu_1\in\mathcal{P}_2(X)$ に対し，ある $\Pi\in\mathcal{P}(\Gamma(X))$ が存在し，$\mu_t:=(e_t)_\sharp\Pi$ が μ_0 から μ_1 への W_2 についての最短測地線，$\pi:=(e_0\times e_1)_\sharp\Pi$ が μ_0 と μ_1 の最適カップリング，かつ

$$\begin{aligned}S_{N'}(\mu_t)\le-\int_{X\times X}\Big\{&(1-t)\beta_{K,N'}^{1-t}\big(d(x,y)\big)^{1/N'}\rho_0(x)^{-1/N'}\\&+t\beta_{K,N'}^{t}\big(d(x,y)\big)^{1/N'}\rho_1(x)^{-1/N'}\Big\}\,\pi(dxdy)\end{aligned}$$

が全ての $t\in(0,1)$ と $N'\in[N,\infty)$ で成り立つ．

この定義は Sturm [132, 133] による（但し，(2) で $(\mu_t)_{t\in[0,1]}$ と π を Π を通して関係づけるのは Lott–Villani [92, 93] のアイディアによる）．$N=1$ の場合も考えることができるが，特別な扱いが必要になるので割愛する．

注意 3.8 (a) (2) で Π は最短測地線 $(\mu_t)_{t\in[0,1]}$ と最適カップリング π を結びつける役割を果たす．$K=0$ の場合には (2) の不等式は $S_{N'}$ の凸性：

$$S_{N'}(\mu_t)\le(1-t)S_{N'}(\mu_0)+tS_{N'}(\mu_1)$$

となり，π は表に現れないので，Π を持ち出す必要はない．

(b)「全ての」最短測地線／Π ではなく，「ある」最短測地線／Π としていること（そのため <u>弱</u> K 凸性と呼ぶ）は，空間の収束での保存を考える上で本質的である（§3.2.4参照）．

(c) 定理 3.5の証明で見たように，リッチ曲率の下限で本質的なのは底空間の測地線に沿ってのヤコビアンの凹性 (3.8) だが，測度距離空間での定式化や空間の収束による保存のためには積分した不等式を考える必要がある．

(d) (2) で全ての $N'\ge N$ を考えたことで，単調性：

$$\mathrm{CD}(K,N)\ \Rightarrow\ \mathrm{CD}(K',N')\quad\forall K'\le K,\ \forall N'\in[N,\infty]$$

が保証される．Lott–Villani [92, 93] による定義では，より広いクラスのエントロピーの凸性を曲率次元条件として採用する．それらは，ヤコビアンの凹性を表す不等式 (3.8) を色々な方法で積分することに当たる．

(e) 定義より直ちに，$(X,d,\mathfrak{m})$ が $\mathrm{CD}(K,N)$ を満たすなら，距離と測度を正の定数倍した測度距離空間 $(X,a\cdot d,b\cdot\mathfrak{m})$ は $\mathrm{CD}(K/a^2,N)$ を満たすことがわかる．

3.2.2 幾何学的応用

曲率次元条件の幾何学的応用として，**Brunn–Minkowski 不等式**を取り上げる．これは $\mathbb{R}^n$ のルベーグ測度についての古典的な Brunn–Minkowski 不等式：

$$|(1-t)A+tB|^{1/n}\geq(1-t)|A|^{1/n}+t|B|^{1/n},\quad A,B\subset\mathbb{R}^n \tag{3.9}$$

（$|\cdot|$：ルベーグ測度）の一般化であり，曲がった空間では，リーマン多様体の場合でも曲率次元条件を用いて始めて示された（[133, 144, 107]）．

定理 3.9 (Brunn–Minkowski 不等式) $(X,d,\mathfrak{m})$ が $\mathrm{CD}(K,N)$ を満たすとする．有界なボレル集合 $A_0,A_1\subset X$ で $\mathfrak{m}(A_0),\mathfrak{m}(A_1)>0$ であるものを固定し，$t\in(0,1)$ に対し $A_t\subset X$ を A_0 の点から A_1 の点への最短測地線 $\gamma:[0,1]\longrightarrow X$ の時刻 t での点 $\gamma(t)$ のなす集合とする．つまり，

$$A_t:=\{\gamma(t)\,|\,\gamma\in\Gamma(X),\ \gamma(0)\in A_0,\ \gamma(1)\in A_1\}.$$

このとき，次が成り立つ：

(i) $N\in(1,\infty)$ のとき，

$$\begin{aligned}\mathfrak{m}(A_t)^{1/N}\geq(1-t)&\inf_{x\in A_0,y\in A_1}\beta^{1-t}_{K,N}\big(d(x,y)\big)^{1/N}\mathfrak{m}(A_0)^{1/N}\\&+t\inf_{x\in A_0,y\in A_1}\beta^{t}_{K,N}\big(d(x,y)\big)^{1/N}\mathfrak{m}(A_1)^{1/N}.\end{aligned}$$

(ii) $N=\infty$ ならば，$i=0,1$ に対し μ_i を A_i 上の一様分布 $\mu_i:=\mathfrak{m}(A_i)^{-1}\cdot\mathfrak{m}|_{A_i}$ として，

$$\log\mathfrak{m}(A_t)\geq(1-t)\log\mathfrak{m}(A_0)+t\log\mathfrak{m}(A_1)+\frac{K}{2}(1-t)tW_2^2(\mu_0,\mu_1).$$

証明は，一様分布 μ_0,μ_1 の間で曲率次元条件を適用し，Jensen の不等式を使えばよい．(i) で $K=0$ の場合には，

$$\mathfrak{m}(A_t)^{1/N}\geq(1-t)\mathfrak{m}(A_0)^{1/N}+t\mathfrak{m}(A_1)^{1/N}$$

となり（$\mathfrak{m}^{1/N}$ の凹性），確かに (3.9) と同じ形になる．

(i) で A_1 を点 x を中心とする開球 $B_R(x)$ とし，A_0 を $\{x\}$ につぶし，$t=r/R$ とすることで，Bishop–Gromov 体積比較定理の一般化が得られる：

$$\frac{\mathfrak{m}(B_R(x))}{\mathfrak{m}(B_r(x))}\leq\frac{\int_0^R\mathbf{s}_{K/(N-1)}(t)^{N-1}\,dt}{\int_0^r\mathbf{s}_{K/(N-1)}(t)^{N-1}\,dt}.$$

これから特に，測度距離空間上の解析で重要である測度の（局所）**2 倍条件**（doubling condition）が成り立つ．更に，$K > 0$ なら **Bonnet–Myers 型の直径評価**も導ける：

$$\operatorname{diam} X \le \pi \sqrt{\frac{N-1}{K}}. \tag{3.10}$$

$N = \infty$ のときは，$K > 0$ でも直径が有界になるとは限らない．典型的な例はユークリッド空間上のガウス型測度 $d\mathfrak{m} = \mathrm{e}^{-|x|^2/2}dx$ で（$|\cdot|$ はユークリッドノルム／距離），この場合重み関数 $V(x) = |x|^2/2$ は 1 凸なので $(\mathbb{R}^n, |\cdot|, \mathfrak{m})$ は $\mathrm{CD}(1,\infty)$ を満たす．

3.2.3 $\mathrm{CD}(K,N) \Rightarrow \mathrm{Ric}_N \ge K$ の略証

ここで, Brunn–Minkowski 不等式（定理 3.9）を用いて, 重みつきリーマン多様体 $(M, g, \mathfrak{m})$ の場合に $\mathrm{CD}(K,N)$ から $\mathrm{Ric}_N \ge K$ が導かれることを見る．

まず，$N \in (n, \infty)$ とする．単位接ベクトル $v \in T_xM$ を固定し，$\gamma(t) := \exp_x(tv)$ とおく．$a := \langle \nabla V(x), v\rangle/(N-n)$ と $0 < \varepsilon \ll r$ に対し，

$$A_0 := B_{\varepsilon(1-ar)}\bigl(\gamma(r)\bigr), \qquad A_1 := B_{\varepsilon(1+ar)}\bigl(\gamma(-r)\bigr)$$

とおく．Brunn–Minkowski 不等式より，

$$\mathfrak{m}(A_{1/2})^{1/N} \ge \frac{1}{2}\beta_{K,N}^{1/2}\bigl(2r + O(\varepsilon)\bigr)\left\{\mathfrak{m}(A_0)^{1/N} + \mathfrak{m}(A_1)^{1/N}\right\}.$$

ここで，$r \downarrow 0$（従って $\varepsilon \downarrow 0$）としたときの $\mathfrak{m}(A_0), \mathfrak{m}(A_1)$ の漸近挙動を V を用いて評価して，

$$\frac{\mathfrak{m}(A_{1/2})}{\varepsilon^n} \ge c_n \mathrm{e}^{-V(x)}\left\{1 + \frac{1}{2}\left(K - \operatorname{Hess} V(v,v) + \frac{\langle \nabla V(x), v\rangle^2}{N-n}\right)r^2\right\} + O(r^4)$$

（c_n は $\mathbb{R}^n$ の単位球の体積）．一方，リッチ曲率を用いて $r \downarrow 0$ としたときの $\mathfrak{m}(A_{1/2})$ の漸近挙動を計算すると，

$$\frac{\mathfrak{m}(A_{1/2})}{\varepsilon^n} = c_n \mathrm{e}^{-V(x)}\left(1 + \frac{1}{2}\mathrm{Ric}_g(v,v)r^2\right) + O(r^3).$$

r^2 の係数を比べて，$\mathrm{Ric}_N(v) \ge K$ を得る．

$N = \infty$ のときの証明は同様．$N = n$ のときは, 上の議論から任意の $N' > n$ で $\mathrm{Ric}_{N'} \ge K$ が成り立つので，$N' \downarrow n$ として $\mathrm{Ric}_n \ge K$ を得る（このとき，結果的には V は定数関数となり，よって $\mathrm{Ric}_{N'} = \mathrm{Ric}_n = \mathrm{Ric}_g$）．

3.2.4 空間の収束での保存

曲率次元条件の定式化が適切かつ有用であることの 1 つの証左は，測度距離空間の収束で保たれることである．簡単のため，コンパクトな空間のみ考える．コンパクト測度

距離空間の列 $\{(X_i, d_i, \mathfrak{m}_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ がコンパクト測度距離空間 $(X, d, \mathfrak{m})$ に**測度つき Gromov–Hausdorff 収束**するとは，ある 0 に収束する正数の列 $\{\varepsilon_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ とボレル写像の列 $\phi_i : X_i \longrightarrow X$ が存在して，

$$\begin{aligned}&\big|d_i(x,y) - d\big(\phi_i(x), \phi_i(y)\big)\big| < \varepsilon_i \quad \forall x, y \in X_i,\\ &B_{\varepsilon_i}\big(\phi_i(X_i)\big) = X,\\ &(\phi_i)_\sharp \mathfrak{m}_i \to \mathfrak{m} \text{（弱収束）}\end{aligned}$$

が成り立つことである．ここで，$(X, d, \mathfrak{m})$ は $\mathfrak{m}(X) > 0$ を満たすとする．

定理 3.10 (保存性) コンパクト測度距離空間の列 $\{(X_i, d_i, \mathfrak{m}_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ がコンパクト測度距離空間 $(X, d, \mathfrak{m})$ に測度つき Gromov–Hausdorff 収束しているとする．ある $K \in \mathbb{R}$ と $N \in (1, \infty]$ に対し全ての $(X_i, d_i, \mathfrak{m}_i)$ が $\mathrm{CD}(K, N)$ を満たすならば，$(X, d, \mathfrak{m})$ も $\mathrm{CD}(K, N)$ を満たす．

尚，Sturm [132, 133] は $\mathbb{D}$-distance という測度つき Gromov–Hausdorff 収束より弱い概念を導入し，それについての保存性を示している．ここでは，Lott–Villlani [92, 93] による証明法の概略を述べる．簡単のため，$N = \infty$ とする．

$\mu_0, \mu_1 \in \mathcal{P}(X)$ を固定する．

(I) $a = 0, 1$ に対し，連続関数 $\rho_a^k \in C(X)$（$k \in \mathbb{N}$）で $\mu_a^k := \rho_a^k \mathfrak{m} \in \mathcal{P}(X)$ かつ

$$\lim_{k\to\infty} W_2(\mu_a^k, \mu_a) = 0, \qquad \lim_{k\to\infty} \mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu_a^k) = \mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu_a)$$

を満たすものを取る（取れる）．

(II) 各 $i \in \mathbb{N}$，$a = 0, 1$ に対し，

$$\mu_{a,i}^k := \frac{\rho_a^k \circ \phi_i \cdot \mathfrak{m}_i}{\int_{X_i} \rho_a^k \circ \phi_i \, d\mathfrak{m}_i} \in \mathcal{P}(X_i)$$

とおき，$\mathrm{CD}(K, \infty)$ を満たす最短測地線 $(\mu_{t,i}^k)_{t\in[0,1]} \subset \mathcal{P}(X_i)$ を取る．つまり，

$$\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}_i}(\mu_{t,i}^k) \le (1-t)\,\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}_i}(\mu_{0,i}^k) + t\,\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}_i}(\mu_{1,i}^k) - \frac{K}{2}(1-t)tW_2^2(\mu_{0,i}^k, \mu_{1,i}^k).$$

部分列を取ると，$(\mu_{t,i}^k)_{t\in[0,1]}$ は $i \to \infty$ で μ_0^k から μ_1^k へのある最短測地線 $(\mu_t^k)_{t\in[0,1]}$ に収束する．ここで，ρ_a^k が連続関数であることから端点でのエントロピーは収束する：

$$\begin{aligned}&(1-t)\,\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}_i}(\mu_{0,i}^k) + t\,\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}_i}(\mu_{1,i}^k) - \frac{K}{2}(1-t)tW_2^2(\mu_{0,i}^k, \mu_{1,i}^k)\\ \underset{i\to\infty}{\to}\ &(1-t)\,\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu_0^k) + t\,\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu_1^k) - \frac{K}{2}(1-t)tW_2^2(\mu_0^k, \mu_1^k).\end{aligned}$$

一方，$0 < t < 1$ では一般にエントロピーは下半連続である：

$$\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu_t^k) \le \varliminf_{i\to\infty} \mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}_i}(\mu_{t,i}^k).$$

従って，$(\mu_t^k)_{t\in[0,1]}$ は $\mathrm{CD}(K, \infty)$ の式を満たす．更に $k \to \infty$ として，同じ議論によって $\mathrm{CD}(K, \infty)$ を満たす最短測地線 $(\mu_t)_{t\in[0,1]}$ を得る．

3.2.5　例

空間の収束による保存性（定理3.10）により，Cheeger–Colding [31, 31, 33] らによって以前から研究されていたリッチ曲率を一様に下から押さえたリーマン多様体の極限空間（もはや多様体とは限らない）が曲率次元条件を満たすことがわかった．他に曲率次元条件を満たす（または満たさない）リーマン多様体以外の空間としては，以下のものが知られている．

- フィンスラー多様体：**フィンスラー多様体** (M, F) は，多様体 M の接束 TM 上に，各接空間 T_xM 上で Minkowski ノルムとなるような関数 $F : TM \longrightarrow (0, \infty)$ が与えられたものである（[15, 149] 参照）．これはリーマン多様体の一般化であると共に，バナッハ空間の非線形化という側面もある．フィンスラー多様体とその上のなめらかな正値測度の組 $(M, F, \mathfrak{m})$ には重みつきリッチ曲率 Ric_N が定義され，定理3.5と同様に $\mathrm{Ric}_N \geq K$ は $\mathrm{CD}(K, N)$ と同値になる（[106]）．

  特に，n 次元ノルム空間とルベーグ測度の組は $\mathrm{CD}(0, n)$ を満たす．ℓ_1^n, ℓ_∞^n は曲率次元条件を満たし測地線が分岐する典型的な例である．

- Alexandrov 空間：有限次元 Alexandrov 空間は，次元が整数かつ一様であり，更にある弱い意味での微分構造及びリーマン構造を持つことが知られている（[22, 111, 21]）．断面曲率とリッチ曲率の間の関係から，曲率 k 以上の n 次元 Alexandrov 空間と n 次元 Hausdorff 測度の組は $\mathrm{CD}((n-1)k, n)$ を満たすことが期待される．それは $k = 0$ の場合は Petrunin [119]，$k \neq 0$ の場合は Zhang–Zhu [146] により，Petrunin の第2変分公式 [118] を用いて示された．（しかし [118] の議論は難解で，主張の正否についての一般的なコンセンサスはまだ得られていないと思われる．）

- Wiener 空間に Cameron–Martin 擬距離を入れたものは，$\mathrm{CD}(1, \infty)$ を満たす（[132, 51]；筆者は門外漢なので詳しくは述べられない）．

- Heisenberg 群 $\mathbb{H}^n$ に Carnot–Carathéodory 距離と $(2n+1)$ 次元ルベーグ測度を入れたものは，全ての K, N で $\mathrm{CD}(K, N)$ を満たさないが，より弱い**測度の収縮性**を満たす（Juillet [75]）．$\mathrm{CD}(K, N)$ を満たさないことは，Brunn–Minkowski 不等式が成り立たないことによって示される．

フィンスラー多様体が曲率次元条件を満たすことには，2つの見方がある．1つは，リーマン幾何や Alexandrov 幾何では捉えられなかったより広い範囲を含むという良い点．もう1つは，**Cheeger–Gromoll の分解定理**のようなリーマン幾何で重要な性質が，この曲率次元条件の下では期待できないという（ある意味では）悪い点である．後者に関連して，曲率次元条件に空間が「リーマン的」であるための何らかの条件を付け加えて，フィンスラー多様体を排除し，分解定理のようなより強い帰結を得ようという自然な問題提起がなされた．それに対する1つの答えが，後の講演で述べられる**リーマン的曲率次元条件**である．

4　エントロピーと Wasserstein 幾何（高津）

前章でリーマン多様体 (M, g) 上の測度 $\mathfrak{m}$ に対し, $\mathrm{Ric}_\infty \geq K$ と相対エントロピー $\mathrm{Ent}_\mathfrak{m}$ の K 凸性が同値であることをみた (定理 3.5(i)). そして関数の K 凸性は, 関数のヘッシアンの固有値が各点において K 以上であることの一般化である. 本章ではこの結果をリーマン幾何の観点から部分的に再解釈する: Wasserstein 空間 $(\mathcal{P}_2^{\mathrm{ac}}(M), W_2)$ にリーマン構造–接空間とその上の内積–を導入し, $(M, g, \mathfrak{m})$ が “$\mathrm{Ric}_\infty \geq K$ 満たすならば $\mathrm{Hess}\,\mathrm{Ent}_\mathfrak{m} \geq K$” となることを説明する. その後 $\mathrm{Hess}\,\mathrm{Ent}_\mathfrak{m} \geq K$ から種々の関数不等式–HWI 不等式, 対数 Sobolev 不等式, Talagrand 不等式など–を導く.

以下, 本章では前章同様に (M, g) は完備連結リーマン多様体 $(\dim M \geq 2, \partial M = \emptyset)$ で, その上の測度 $\mathfrak{m}$ は $\mathfrak{m} = \mathrm{e}^{-V}\,\mathrm{vol}, V \in C^\infty(M)$ で与えられているとする. また Wasserstein 空間にリーマン構造を導入するためのアイデア紹介に重きをおくため, 議論はやや形式的に行う. 例えば関数の正則性などは無視し, 積分と微分は自由に交換できるとする. 厳密な議論は [143, Theorem 8.1] や [144, Sections 7,13] などを参照にして頂きたい. 本章はこの他に [116, Section 3] も参考にした. またリーマン構造導入の先駆となった論文は [115] であるが, そこにおける手法と以下で説明する手法はやや異なる.

4.1　$(\mathcal{P}_2^{\mathrm{ac}}(M), W_2)$ のリーマン構造

多様体において, ある点における接空間はその点を通る曲線のその点における速度ベクトルのなす空間のことであった. ここで ‘曲線’ は ‘最短測地線’ に取替えても良い. また多様体の任意の二点 x_0, x_1 に対し, $\gamma_0 = x_0, \gamma_1 = x_1$ を満たす C^∞-曲線 $(\gamma_t)_{t\in[0,1]}$ のなす空間を $\mathcal{C}_{x_0,x_1}$ と記す. このときリーマン計量が誘導する測地距離 d^* は

$$d^*(x_0, x_1)^2 = \inf_{(\gamma_t)_{t\in[0,1]}\in\mathcal{C}_{x_0,x_1}} \int_0^1 |\dot{\gamma}_t|_g^2 dt$$

で与えられ, リーマン距離 d と一致する. ここで $|\cdot|_g$ はリーマン計量 g から誘導される接空間上のノルムである. そして上式の下限は $(\gamma_t)_{t\in[0,1]}$ が最短測地線のときに達成され, その初速度ベクトル $\dot{\gamma}_0$ は任意の $t \in (0, 1]$ に対し

$$\frac{1}{t^2} d(\gamma_0, \gamma_t)^2 = g(\dot{\gamma}_0, \dot{\gamma}_0)$$

を満たす.

以上を踏まえ $\mathcal{P}_2^{\mathrm{ac}}(M)$ にリーマン構造を導入する. まず任意の二点 $\mu_0, \mu_1 \in \mathcal{P}_2^{\mathrm{ac}}(M)$ を結ぶ $\mathcal{P}_2^{\mathrm{ac}}(M)$ 内の曲線 $(\mu_t = \rho_t\mathfrak{m})_{t\in[0,1]}$ を考える. ここで確率測度 μ_t を流体の時刻 t における分布状態と考えれば, 曲線は質量が保たれる流体の動きとみなせる. そして各時刻 $t \in [0, 1]$ における流体の速度ベクトルを v_t, 位置ベクトルを X_t とすれば

$$\frac{d}{dt} X_t = v_t(X_t)$$

が成立つ. そこで M 上の写像族 $(T_t)_{t\in[0,1]}$ を

$$T_0(x) = x, \quad \frac{\partial}{\partial t}T_t(x) = v_t(T_t(x)) \tag{4.1}$$

の解として定める. すると $T_\tau(x)$ は時刻 $t=0$ で x に存在する粒子が速度 v_t で流れ, 時刻 $t=\tau$ のときに存在する位置を表し, $\mu_t = T_{t\sharp}\mu_0$ となる. このとき任意の $h \in C_0^\infty(M)$ に対して

$$\frac{d}{dt}\int_M h(x)d\mu_t(x) = \frac{d}{dt}\int_M h(x)\rho_t(x)d\mathfrak{m}(x) = \int_M h(x)\left(\frac{\partial}{\partial t}\rho_t(x)\right)d\mathfrak{m}(x)$$

が成立つ. また M 上のベクトル場 Φ に対し, 重みつき発散 $\mathrm{Div}_\mathfrak{m}$ を

$$\mathrm{Div}_\mathfrak{m}(\Phi) := \mathrm{Div}(V) - g(\Phi, \nabla V)$$

で定義すれば, 押出測度の定義と (4.1), そして Stokes の定理 (部分積分) より

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_M h(x)d\mu_t(x) &= \frac{d}{dt}\int_M h(T_t(x))d\mu_0(x) = \int_M \left(\frac{\partial}{\partial t}h(T_t(x))\right)d\mu_0(x) \\
&= \int_M g\left(\nabla h(T_t(x)), \frac{\partial}{\partial t}T_t(x)\right)d\mu_0(x) = \int_M g\left(\nabla h(T_t(x)), v_t(T_t(x))\right)d\mu_0(x) \\
&= \int_M g(\nabla h(x), v_t(x))d\mu_t(x) = -\int_M h(x)\,\mathrm{Div}_\mathfrak{m}(\rho_t(x)v_t(x))d\mathfrak{m}(x)
\end{aligned}$$

となる. よって任意の $h \in C_0^\infty(M)$ に対して

$$\int_M h(x)\left(\frac{\partial}{\partial t}\rho_t(x)\right)d\mathfrak{m}(x) = -\int_M h(x)\,\mathrm{Div}_\mathfrak{m}(\rho_t(x)v_t(x))d\mathfrak{m}(x)$$

が成立つ. このことを

$$\frac{\partial}{\partial t}\mu_t = -\mathrm{Div}_\mathfrak{m}(\mu_t v_t) \tag{4.2}$$

と略記し, 式 (4.2) を連続方程式 (*continuity equation*) と呼ぶ.

注意 4.1 例えば $(\mu_t)_{t\in[0,1]}$ が Wasserstein 最短測地線ならば, 注意 1.5(4) よりある関数 φ が存在して

$$\mu_t = T_{t\sharp}\mu_0, \quad T_t = \exp_\cdot(t\nabla\varphi) \quad \forall t \in [0,1]$$

と書ける. このとき速度ベクトル v_t は

$$v_t := \left(\frac{\partial}{\partial t}T_t\right) \circ (T_t)^{-1}$$

で与えられる. 実際に任意の $h \in C_0^\infty(M)$ に対し, 前述の議論と同様にして

$$\int_M h(x)\left(\frac{\partial}{\partial t}\rho_t(x)\right)d\mathfrak{m}(x) = \frac{d}{dt}\int_M h(x)d\mu_t(x) = -\int_M h(x)\,\mathrm{Div}_\mathfrak{m}(\rho_t v_t(x))d\mathfrak{m}(x)$$

が成立つことが分かり $(\mu_t, v_t)_{t\in[0,1]}$ の組は連続方程式 (4.2) を満たす. 特に $T_0(x) = x$ より

$$v_0 = \frac{\partial}{\partial t} T_t \Big|_{t=0} = \nabla\varphi$$

となり, 最短測地線の初速度ベクトル v_0 は関数の勾配で表されることが分かる. さらに任意の $t \in (0,1]$ に対し, $\pi_t := (T_0, T_t)_\sharp \mu_0 \in \Pi(\mu_0, \mu_t)$ は最適であり

$$\begin{aligned}\frac{1}{t^2} W_2(\mu_0, \mu_t)^2 &= \frac{1}{t^2} \int_{M\times M} d(x,y)^2 d\pi_t(x,t) = \frac{1}{t^2}\int_M d(T_0(x), T_t(x))^2 d\mu_0(x) \\ &= \int_M g(\nabla\varphi(x), \nabla\varphi(x)) d\mu_0(x)\end{aligned}$$

が成立つ.

以上を鑑みて, 任意の $\mu \in \mathcal{P}_2^{\mathrm{ac}}(M)$ に対しその接空間を

$$T_\mu \mathcal{P}_2^{\mathrm{ac}}(M) := \overline{\{\nabla\varphi \mid \varphi \in C_0^\infty(M)\}},$$

その上の内積 $\langle\!\langle \cdot, \cdot \rangle\!\rangle_\mu$ を $\varphi, \psi \in C_0^\infty(M)$ に対し

$$\langle\!\langle \nabla\varphi, \nabla\psi \rangle\!\rangle_\mu := \int_M g(\nabla\varphi(x), \nabla\psi(x)) d\mu(x)$$

と定める. ここで $T_\mu \mathcal{P}_2^{\mathrm{ac}}(M)$ の定義に現れる閉包は内積 $\langle\!\langle \cdot, \cdot \rangle\!\rangle_\mu$ から定まるノルム $\|\cdot\|_\mu$ に関してとり, 内積は $\{\nabla\varphi \mid \varphi \in C_0^\infty(M)\}$ から $T_\mu \mathcal{P}_2^{\mathrm{ac}}(M)$ に連続的に拡張される. そして連続方程式 (4.2) を満たす曲線と速度 $(\mu_t, v_t)_{t\in[0,1]}$ の組に対し, この曲線の速度ベクトル $\dot{\mu}_t \in T_{\mu_t}\mathcal{P}_2^{\mathrm{ac}}(M)$ を v_t とみなし, その大きさを $\|v_t^{\mu_\tau}\|_{\mu_t}^2 = \int_M |v_t^{\mu_\tau}(x)|_g^2 d\mu_t(x)$ とする. するとこのリーマン構造が誘導する測地距離 d^* は Wasserstein 距離と一致する.

このことを確かめるために, 任意の $\mu_0, \mu_1 \in \mathcal{P}_2^{\mathrm{ac}}(M)$ を固定し, μ_0 と μ_1 を結ぶ曲線 $\mu_\tau = (\mu_\tau)_{\tau\in[0,1]} \in \mathcal{C}_{\mu_0,\mu_1}$ を考える. そして $(v_t^{\mu_\tau})_{t\in[0,1]}$ をその速度ベクトル, $(T_t^{\mu_\tau})_{t\in[0,1]}$ を (4.1) の解とすれば, $(T_t^{\mu_\tau}(x))_{t\in[0,1]}$ は $T_0^{\mu_\tau}(x)$ と $T_1^{\mu_\tau}(x)$ を結ぶ M 上の曲線であり, その速度ベクトルは $\dfrac{\partial}{\partial t} T_t^{\mu_\tau}(x)$ である. よって

$$d(T_0^{\mu_\tau}(x), T_1^{\mu_\tau}(x))^2 \le \int_0^1 \left| \frac{\partial}{\partial t} T_t^{\mu_\tau}(x) \right|_g^2 dt$$

が成立ち, さらに

$$\|v_t^{\mu_\tau}\|_{\mu_t}^2 = \int_M |v_t^{\mu_\tau}(x)|_g^2 d\mu_t(x) = \int_M |v_t^{\mu_\tau}(T_t^{\mu_\tau}(x))|_g^2 d\mu_0(x) = \int_M \left| \frac{\partial}{\partial t} T_t^{\mu_\tau}(x) \right|_g^2 d\mu_0(x) \quad (4.3)$$

となる. また測地距離と Wasserstein 距離の定義, そして $\pi^{\mu_\tau} := (T_0^{\mu_\tau}, T_1^{\mu_\tau})_\sharp \mu_0 \in \Pi(\mu_0, \mu_1)$ という性質より

$$\begin{aligned} d^*(\mu_0, \mu_1)^2 &= \inf_{\mu_\tau \in \mathcal{C}_{\mu_0,\mu_1}} \int_0^1 \|v_t^{\mu_\tau}\|_{\mu_t}^2 dt = \inf_{\mu_\tau \in \mathcal{C}_{\mu_0,\mu_1}} \int_M \left(\int_0^1 \left| \frac{\partial}{\partial t} T_t^{\mu_\tau}(x) \right|_g^2 dt \right) d\mu_0(x) \\ &\ge \inf_{\mu_\tau \in \mathcal{C}_{\mu_0,\mu_1}} \int_M d(T_0^{\mu_\tau}(x), T_1^{\mu_\tau}(x))^2 d\mu_0(x) = \inf_{\mu_\tau \in \mathcal{C}_{\mu_0,\mu_1}} \int_{M\times M} d(x,y)^2 d\pi^{\mu_\tau}(x,y) \\ &\ge W_2(\mu_0, \mu_1)^2 \end{aligned}$$

となるので, $d^* \geq W_2$ である. 一方, $\mu_\tau \in \mathcal{C}_{\mu_0,\mu_1}$ を注意 4.1で定義した Wasserstein 最短測地線とすれば, 各 $x \in M$ に対し $(T_t^{\mu_\tau}(x))_{t\in[0,1]}$ は M 上の最短測地線なので

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}T_t^{\mu_\tau}(x)\right|_g^2 = |\nabla\varphi(x)|_g^2 = d(T_0^{\mu_\tau}(x), T_1^{\mu_\tau}(x))^2$$

が成立つ. このとき π^{μ_τ} は最適カップリングなので (4.3) と併せて

$$\begin{aligned}
W_2(\mu_0,\mu_1)^2 &= \int_M d(x,y)^2 d\pi^{\mu_\tau}(x,y) = \int_M d(T_0^{\mu_\tau}(x), T_1^{\mu_\tau}(x))^2 d\mu_0(x) \\
&= \int_M \left(\int_0^1 \left|\frac{\partial}{\partial t}T_t^{\mu_\tau}(x)\right|_g^2 dt\right) d\mu_0(x) = \int_0^1 \|v_t^{\mu_\tau}\|_{\mu_t}^2 dt \\
&\geq d^*(\mu_0,\mu_1)^2
\end{aligned}$$

となり $W_2 \geq d^*$ を得る. 以上より $d^* = W_2$ が示された.

このように Wasserstein 空間にリーマン距離が Wasserstein 距離と一致するリーマン構造が導入できた. この構造をリーマン-*Wasserstein* 構造と呼ぶ.

さて, 本章では用いないが 5 章および 6 章での議論のために, リーマン-Wasserstein 構造における測地線の接ベクトルについての考察を深めておく. 以下の議論でも常に関数の微分可能性は仮定し，さらに Brenier の定理 (定理 1.4) 等からの形式的な帰結は全て認める.

命題 4.2 $(\mu_t)_{t\in[0,1]} \subset \mathcal{P}_2^{\mathrm{ac}}(M)$ をリーマン-Wasserstein 構造に関する最短測地線とし, 時刻 $t \in [0,1]$ における速度ベクトル $\dot\mu_t$ を $\nabla\varphi_t$ と表す. このとき, φ_t は φ_0 を以下の Hopf-Lax 公式で変換したものになる:

$$\varphi_t(x) := \inf_{y\in X}\left[\varphi_0(y) + \frac{d(x,y)^2}{2t}\right]. \tag{4.4}$$

証明 直前の議論で見たように, 初速度ベクトル $\dot\mu_0 = \nabla\varphi_0$ を表す関数 φ_0 は μ_0 から μ_1 への最適輸送写像 $T_1 = \exp(\nabla\varphi_0)$ に現れるものとして定まる. さらに, 定理 1.4の証明で見たように, この φ_0 は (すなわち) Kantorovich 双対性の maximizer になっている[39]. つまり, $\varphi_0 \in L^1(\mu_0)$ は, ある $\psi_0 \in L^1(\mu_1)$ との組として次を満たしている (定理 1.24参照 ; φ_0 の符号に注意) :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}W_2(\mu_0,\mu_1)^2 &= \int_M \psi_0\, d\mu_1 - \int_M \varphi_0\, d\mu_0, \\
\psi_0(y) &= \inf_{x\in M}\left[\varphi_0(x) + \frac{d(x,y)^2}{2}\right] \quad \mu_1\text{-a.e. } y.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

ここで $t \in (0,1)$ に対し同様の考察を行うことで, φ_t を求めることは μ_t と μ_1 の間の最適輸送の双対問題を考えることに帰着できる. ただし, 費用関数を適切に調整する必要がある. 今の場合,

$$\frac{1}{2}W_2(\mu_0,\mu_1)^2 = \frac{1}{2t}W_2(\mu_0,\mu_t)^2 + \frac{1}{2(1-t)}W_2(\mu_t,\mu_1)^2$$

[39] 正確には定理 1.4では $M = \mathbb{R}^n$ の場合のみ扱っているが, 注意 1.5(4) で述べられているリーマン多様体への一般化の議論でも同様の性質が期待されることが, 証明から分かる.

が成立つことを踏まえると, μ_t と μ_1 の間の輸送費用を, 費用関数 $d(x,y)^2/(2(1-t))$ で計った場合の Kantorovich potential を考えるのが自然だと分かる. 従って, (4.4) の右辺を $\tilde{\varphi}_t$ と置いたとき, $(\tilde{\varphi}_t, \psi_0)$ が次を満たすことを示せば良い :

$$\frac{1}{2(1-t)} W_2(\mu_t, \mu_1)^2 = \int_M \psi_0 \, d\mu_1 - \int_M \tilde{\varphi}_t \, d\mu_t, \tag{4.6}$$

$$\psi_0(y) = \inf_{x \in M} \left[\tilde{\varphi}_t(x) + \frac{d(x,y)^2}{2(1-t)} \right] \quad \mu_1\text{-a.e. } y. \tag{4.7}$$

まず $\tilde{\varphi}_t$ の定義より, 任意の $x \in M$ と $\varepsilon > 0$ に対し, ある $z_0 \in M$ が存在し

$$\tilde{\varphi}_t(x) > \varphi_0(z_0) + \frac{d(z_0,x)^2}{2t} - \varepsilon$$

を満たす. そして (4.5) より μ_1-a.e. $y \in M$ に対して,

$$\begin{aligned} \psi_0(y) - \tilde{\varphi}_t(x) &< \psi_0(y) - \varphi_0(z_0) - \frac{d(z_0,x)^2}{2t} + \varepsilon \\ &\leq \frac{d(y,z_0)^2}{2} - \frac{d(z_0,x)^2}{2t} + \varepsilon \leq \frac{d(y,x)^2}{2(1-t)} + \varepsilon \end{aligned}$$

となる. ここで最後の不等式は三角不等式と初等的な不等式 $(a+b)^2 \leq t^{-1}a^2 + (1-t)^{-1}b^2$ から従う. $\varepsilon > 0$ は任意であるから, (4.7) の "$\leq$" を得る. 残りの主張のため, 写像 $l : M \to \Gamma(M)$ を $y \mapsto (\exp_y(-t\nabla\psi_0(y)))_{t\in[0,1]}$ で定め, $\Pi = l_\sharp \mu_1$ とおく. このとき, Brenier の定理 (の, 多様体版) から, 各 $s_0, s_1 \in [0,1]$ に対して, $(e_{s_i})_\sharp \Pi = \mu_{1-s_i}$ $(i=0,1)$ かつ $(e_{s_0}, e_{s_1})_\sharp \Pi$ は, 費用関数 $d^2/2$ に対する μ_{1-s_0} から μ_{1-s_1} への最適輸送計画になっている. $(e_0,e_1)_\sharp\Pi$ の最適性から, Π-a.e. $(\gamma_t)_{t\in[0,1]}$ で

$$\psi_0(\gamma_0) - \varphi_0(\gamma_1) = \frac{d(\gamma_0,\gamma_1)^2}{2}$$

が成立つ. このとき $(\gamma_t)_{t\in[0,1]}$ が最短測地線であることから,

$$\begin{aligned} \psi_0(\gamma_0) &= \varphi_0(\gamma_1) + \frac{d(\gamma_0,\gamma_1)^2}{2} = \varphi_0(\gamma_1) + \frac{d(\gamma_{1-t},\gamma_1)^2}{2t} + \frac{d(\gamma_0,\gamma_{1-t})^2}{2(1-t)} \\ &\geq \tilde{\varphi}_t(\gamma_{1-t}) + \frac{d(\gamma_0,\gamma_{1-t})^2}{2(1-t)} \geq \inf_{x\in M}\left[\tilde{\varphi}_t(x) + \frac{d(\gamma_0,x)^2}{2(1-t)}\right] \end{aligned}$$

となり, (4.7) の "$\geq$" を得る. 以上より (4.7) が示された. 従って結果として直前の二不等式は共に等号になるので, Π-a.e. $(\gamma_t)_{t\in[0,1]}$ で

$$\psi_0(\gamma_0) - \tilde{\varphi}_t(\gamma_{1-t}) = \frac{d(\gamma_0,\gamma_{1-t})^2}{2(1-t)}$$

が成立つ. これを Π で積分して (4.6) を得る. □

注意 4.3 Hopf-Lax 公式 (4.4) で得られる対応 $\varphi_0 \mapsto Q_t\varphi := \varphi_t$ によって, 関数の変換 Q_t が得られる. この Q_t を *Hopf-Lax* 半群と呼ぶ[40]. もし基空間が測地的であれば, Q_t は半群性 ($Q_tQ_s = Q_{t+s}$) を満たす (証明は略すが難しくはない). さらに $Q_t\varphi$ は, (少なくとも $\mathbb{R}^n$ 上では) 次の Hamilton-Jacobi 方程式の解を与えることが知られている :

$$\frac{\partial}{\partial t}Q_t\varphi + \frac{1}{2}|\nabla Q_t\varphi|^2 = 0. \tag{4.8}$$

ただし一般には, この方程式の (古典) 解は有限時刻で微分不可能な点が発生するため, 解概念を拡張する必要がある. 偏微分方程式論での標準的な議論では, 粘性解の概念を用いる (例えば [48] 参照). 一方で, この方程式は, 空間微分の意味を局所リプシッツ定数に置き換えることで, 比較的緩い仮定の下で, 測度距離空間の枠組まで拡張できる (例えば, [5, 3 章] を参照). 今回の話では, 後者の立場が深く関係してくる.

最後に, $Q_t\varphi(x)$ が (4.8) の解となることの直感的な説明を与える : $d(y,x)^2/(2t)$ を (t,x) の関数と見たとき, この関数は (弧長に対する第一変分公式を認めれば)(4.8) の解になる. 従って, (4.4) で (t,x) を摂動したとき, 下限を近似する点が (より低いオーダーでしか) 変化しない状況であれば, (4.4) も (4.8) の解を与えるであろうと想像できる.

4.2 $\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}$ の勾配とヘッシアンの下限

本節ではリーマン-Wasserstein 構造に関する相対エントロピー $\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}$ の勾配とヘッシアンの固有値の一様下限を計算する.

任意の Wasserstein 最短測地線 $(\mu_t = \rho_t\mathfrak{m})_{t\in[0,1]} \subset \mathcal{P}_2^{\mathrm{ac}}(M)$ を固定し, 注意 4.1同様に φ, T_t, v_t を定める. このときリーマン幾何の一般論より

$$\frac{d}{dt}\,\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu_t) = d\,\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\dot{\mu}_t) = \langle\!\langle \nabla\,\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}, v_t\rangle\!\rangle_{\mu_t}$$

が成立する. 一方, 直接計算より

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu_t) &= \frac{d}{dt}\int_M \rho_t(x)\log\rho_t(x)d\mathfrak{m}(x) = \int_M (\log\rho_t(x)+1)\left(\frac{\partial}{\partial t}\rho_t(x)\right)d\mathfrak{m}(x)\\ &= -\int_M (\log\rho_t(x)+1)\,\mathrm{Div}_{\mathfrak{m}}(\rho_t(x)v_t(x))d\mathfrak{m}(x) = \int_M g(\nabla\log\rho_t(x), v_t(x))d\mu_t(x)\\ &= \langle\!\langle \nabla\log\rho_t, v_t\rangle\!\rangle_{\mu_t}\end{aligned}$$

となる. ここで最短測地線 $(\mu_t)_{t\in[0,1]}$ は任意なので, 任意の $\mu = \rho\mathfrak{m} \in \mathcal{P}_2^{\mathrm{ac}}(M)$ における $\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}$ の勾配は

$$\nabla\,\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu) = \nabla\log\rho \tag{4.9}$$

---

[40] Hamilton-Jacobi 半群, Moreau-Yosida 近似, inf-convolution 等と呼ばれるものは, これの別名又は親戚である.

であり, その大きさの二乗を *Fisher* 情報量と呼び $I_{\mathfrak{m}}(\mu)$ と記す．すなわち

$$I_{\mathfrak{m}}(\mu)=\langle\!\langle \nabla \operatorname{Ent}_{\mathfrak{m}}, \nabla \operatorname{Ent}_{\mathfrak{m}} \rangle\!\rangle_{\mu}=\int_M |\nabla \log \rho(x)|_g^2 d\mu(x)=\int_M \frac{|\nabla \rho(x)|_g^2}{\rho(x)} d\mathfrak{m}(x)$$

である.

注意 4.4 厳密には任意の $\mu=\rho\mathfrak{m}\in\mathcal{P}_2^{\mathrm{ac}}(M)$ に対し, $|\nabla\rho(x)|_g^2$ は well-defined とは限らない．しかし例えば ρ がリプシッツ関数であれば $|\nabla\rho(x)|_g$ は $\mathfrak{m}$ に関して殆ど至る所定義され, $I_{\mathfrak{m}}(\mu)$ は well-defined となる.

ここで $\operatorname{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu_t)$ を t に関してもう一度微分すると

$$\frac{d^2}{dt^2}\operatorname{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu_t)=\operatorname{Hess}\operatorname{Ent}_{\mathfrak{m}}(\dot{\mu}_t,\dot{\mu}_t)+\langle\!\langle \nabla \operatorname{Ent}_{\mathfrak{m}}, \ddot{\mu}_t \rangle\!\rangle_{\mu_t}=\operatorname{Hess}\operatorname{Ent}_{\mathfrak{m}}(\dot{\mu}_t,\dot{\mu}_t)$$

が成立つ．最後の等式は $(\mu_t)_{t\in[0,1]}$ が測地線であること, すなわち $\ddot{\mu}_u=0$ を用いた．ここで T_t の $\mathfrak{m}$ についての x でのヤコビアン $\mathbf{J}_t(x)$ は (3.6),(3.7) を満たすので

$$\rho_0(x)=\rho_t(T_t(x))\mathbf{J}_t(x), \quad \mu_0\text{-a.e.}x$$

が成立ち

$$\operatorname{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu_t)=\int_M \log\rho_t(x)d\mu_t(x)=\int_M \log\rho_t(T_t(x))d\mu_0(x)=\int_M \log\left(\frac{\rho_0(x)}{\mathbf{J}_t(x)}\right)d\mu_0(x)$$

となる．ここで (3.8) の $N=\infty$ に対する微分版として

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\log\mathbf{J}_t(x)\geq \operatorname{Ric}_g\left(\frac{\partial}{\partial t}T_t(x),\frac{\partial}{\partial t}T_t(x)\right)+\operatorname{Hess}V\left(\frac{\partial}{\partial t}T_t(x),\frac{\partial}{\partial t}T_t(x)\right)$$

が成立つ (例えば [144, Theorem 14.8(2)] 参照)．よって $\operatorname{Ric}_\infty\geq K$ ならば

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt^2}\operatorname{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu_t)&=\int_M \frac{\partial^2}{\partial t^2}\log\left(\frac{\rho_0(x)}{\mathbf{J}_t(x)}\right)d\mu_0(x)=\int_M -\frac{\partial^2}{\partial t^2}\log\mathbf{J}_t(x)d\mu_0(x)\\&\geq\int_M K\left|\frac{\partial}{\partial t}T_t(x)\right|_g^2 d\mu_0(x)=K\|v_t\|_{\mu_t}^2=K\langle\!\langle\dot{\mu}_t,\dot{\mu}_t\rangle\!\rangle_{\mu_t}\end{aligned}$$

となる．ここで最短測地線 $(\mu_t)_{t\in[0,1]}$ は任意のだったので, $\operatorname{Ent}_{\mathfrak{m}}$ のヘッシアンは

$$\operatorname{Hess}\operatorname{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu)(v,v)\geq K\langle\!\langle v,v\rangle\!\rangle_{\mu}\quad \forall\mu\in\mathcal{P}_2^{\mathrm{ac}}(M),\ v\in T_{\mu}\mathcal{P}_2^{\mathrm{ac}}(M)$$

を満たす.

注意 4.5 これらの議論は, Hopf-Lax 半群を用いた Wasserstein 測地線の表現に対する考察と Bochner 公式から導くこともできる．詳しくは 6.3節を参照にして頂きたい.

4.3 関数不等式

この節において $\mathfrak{m}$ は常に確率測度であるとする．そしてある実数 K 対し

$$\operatorname{Hess}\operatorname{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu)(v,v) \geq K\langle\langle v,v\rangle\rangle_\mu \quad \forall\mu\in\mathcal{P}_2^{\mathrm{ac}}(M),\ v\in T_\mu\mathcal{P}_2^{\mathrm{ac}}(M)$$

が成立つと仮定して，種々の関数不等式を導く． 多くの場合 K は正数であり，また本節の殆どの議論は測度距離空間に拡張できる． このことについては例えば6.5節や [144, Section 30] を参照して頂きたい．

4.3.1 HWI 不等式 ⇒ 対数 Sobolev 不等式 ⇒ Poincaré 不等式

定理 4.6 $(M,g,\mathfrak{m})$ がある実数 K に対し，

$$\operatorname{Hess}\operatorname{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu)(v,v) \geq K\langle\langle v,v\rangle\rangle_\mu \quad \forall\mu\in\mathcal{P}_2^{\mathrm{ac}}(M),\ v\in T_\mu\mathcal{P}_2^{\mathrm{ac}}(M)$$

を満たせば，

$$\operatorname{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu) \leq W_2(\mu,\mathfrak{m})\sqrt{I_{\mathfrak{m}}(\mu)} - \frac{K}{2}W_2(\mu,\mathfrak{m})^2, \quad \forall\mu\in\mathcal{P}_2^{\mathrm{ac}}(M) \tag{4.10}$$

が成立つ．

注意 4.7 不等式 (4.10) は

H:相対エントロピー (H-関数)　W: Wasserstein 距離　I: Fisher 情報量 (Information)

に因んで *HWI* 不等式と呼ばれる．

証明　任意の $\mu\in\mathcal{P}_2^{\mathrm{ac}}(M)$ に対し，$(\mu_t)_{t\in[0,1]}\subset\mathcal{P}_2^{\mathrm{ac}}(M)$ を μ と $\mathfrak{m}$ を結ぶ Wasserstein 最短測地線とする．すると任意の $t\in[0,1]$ に対し

$$\|\dot\mu_t\|_{\mu_t}^2 = \|\dot\mu_0\|_{\mu_0}^2 = W_2(\mu,\mathfrak{m})^2$$

であり，$\operatorname{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu_t)$ の Taylor 展開から

$$\operatorname{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu_1) = \operatorname{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu_0) + \langle\langle\nabla\operatorname{Ent}_{\mathfrak{m}},\dot\mu_0\rangle\rangle_{\mu_0} + \int_0^1(1-t)\operatorname{Hess}\operatorname{Ent}_{\mathfrak{m}}(\dot\mu_t,\dot\mu_t)dt$$

となる．ここで 左辺は $\mu_1=\mathfrak{m}=1\mathfrak{m}$ より $\operatorname{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mathfrak{m})=0$ であり，右辺の第一項は $\mu_0=\mu$ と Cauchy–Schwarz 不等式より

$$\langle\langle\nabla\operatorname{Ent}_{\mathfrak{m}},\dot\mu_0\rangle\rangle_{\mu_0} \geq -\|\nabla\operatorname{Ent}_{\mathfrak{m}}\|_{\mu_0}\|\dot\mu_0\|_{\mu_0} = -\sqrt{I_{\mathfrak{m}}(\mu)}W_2(\mu,\mathfrak{m}),$$

第二項は仮定より

$$\int_0^1(1-t)\operatorname{Hess}\operatorname{Ent}_{\mathfrak{m}}(\dot\mu_t,\dot\mu_t)dt \geq K\int_0^1(1-t)\|\dot\mu_t\|_{\mu_t}^2 = \frac{K}{2}W_2(\mu,\mathfrak{m})^2$$

となる. これらを代入し, 式を整理することで

$$\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu) \le W_2(\mu,\mathfrak{m})\sqrt{I_{\mathfrak{m}}(\mu)} - \frac{K}{2}W_2(\mu,\mathfrak{m})^2$$

を得る. □

定理 4.8 $(M,g,\mathfrak{m})$ がある正数 K に対し HWI 不等式を満たせば

$$\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu) \le \frac{1}{2K}I_{\mathfrak{m}}(\mu) \quad \forall \mu \in \mathcal{P}_2^{\mathrm{ac}}(M) \tag{4.11}$$

が成立つ.

注意 4.9 不等式 (4.11) を対数 *Sobolev* 不等式と呼ぶ.

証明 任意の $\mu \in \mathcal{P}_2^{\mathrm{ac}}(M)$ に対し HWI 不等式を適用した後に平方完成すると

$$\begin{aligned}\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu) &\le W_2(\mu,\mathfrak{m})\sqrt{I_{\mathfrak{m}}(\mu)} - \frac{K}{2}W_2(\mu,\mathfrak{m})^2 \\ &= -\left(\sqrt{\frac{1}{2K}I_{\mathfrak{m}}(\mu)} - \sqrt{\frac{K}{2}}W_2(\mu,\mathfrak{m})\right)^2 + \frac{1}{2K}I_{\mathfrak{m}}(\mu) \le \frac{1}{2K}I_{\mathfrak{m}}(\mu)\end{aligned}$$

となり, 結論が従う. □

定理 4.10 $(M,g,\mathfrak{m})$ がある正数 K に対し対数 Sobolev 不等式を満たせば

$$\int_M f^2 d\mathfrak{m} \le \frac{1}{K}\int_M |\nabla f|^2 d\mathfrak{m} \quad \forall f \in L^2(\mathfrak{m}) \cap \mathrm{Lip}(M) \ \text{ with } \int_M f d\mathfrak{m} = 0 \tag{4.12}$$

が成立つ.

注意 4.11 不等式 (4.12) を *Poincaré* 不等式と呼ぶ.

証明 $L^2(\mathfrak{m}) \cap \mathrm{Lip}(M)$ に属する関数は有界関数で近似できるので, f の有界性を仮定して良い. すると十分小さい $\varepsilon > 0$ に対して

$$\mu_\varepsilon := (1+\varepsilon f)\mathfrak{m} \in \mathcal{P}_2^{\mathrm{ac}}(M)$$

となるので, 対数 Sobolev 不等式より

$$\int_M (1+\varepsilon f)\log(1+\varepsilon f) d\mathfrak{m} = \mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu_\varepsilon) \le \frac{1}{2K}I_{\mathfrak{m}}(\mu_\varepsilon) = \frac{1}{2K}\int_M \frac{|\nabla(1+\varepsilon f)|_g^2}{(1+\varepsilon f)}d\mathfrak{m} \tag{4.13}$$

となる. ここで

$$(1+\varepsilon f)\log(1+\varepsilon f) = 0 + \varepsilon f + \frac{1}{2}(\varepsilon f)^2 + o(\varepsilon^2), \quad |\nabla(1+\varepsilon f)|_g^2 = \varepsilon^2|\nabla f|_g^2$$

より, (4.13) の両辺を ε^2 で割った後に $\varepsilon \to 0$ とすれば

$$\int_M f^2 d\mathfrak{m} \le \frac{1}{K}\int_M |\nabla f|_g^2 d\mathfrak{m}$$

を得る. □

注意 4.12 以上の議論より, ある正数 K に対し $(M,g,\mathfrak{m})$ が $\mathrm{Ric}_\infty \geq K$ を満たす (よって $\mathrm{Hess}\,\mathrm{Ent}_\mathfrak{m} \geq K$) ならば Poincaré 不等式 (4.12) が成立つ. より一般に $N \in [\dim M, \infty)$ に対し $(M,g,\mathfrak{m})$ が $\mathrm{Ric}_N \geq K$ を満たすならば, Poincaré 不等式の定数 K は $KN/(N-1)$ に改良できる. すなわち

$$\int_M f^2 d\mathfrak{m} \leq \frac{N-1}{KN}\int_M |\nabla f|^2 d\mathfrak{m} \quad \forall f \in L^2(\mathfrak{m}) \cap \mathrm{Lip}(M) \ \text{ with } \int_M f d\mathfrak{m} = 0 \tag{4.14}$$

が成立つ. 不等式 (4.14) は *Lichnerowicz* 不等式と呼ばれる. 証明については例えば [92, Theorem 5.34] を参照して頂きたい.

4.3.2 Talagrand 不等式 ⇒ 測度の集中現象

定理 4.13 $(M,g,\mathfrak{m})$ がある正数 K に対し,

$$\mathrm{Hess}\,\mathrm{Ent}_\mathfrak{m}(\mu)(v,v) \geq K\langle\!\langle v,v\rangle\!\rangle_\mu \quad \forall \mu \in \mathcal{P}_2^{\mathrm{ac}}(M),\ v \in T_\mu\mathcal{P}_2^{\mathrm{ac}}(M)$$

を満たせば,

$$W_2(\mu,\mathfrak{m}) \leq \sqrt{\frac{2}{K}\mathrm{Ent}_\mathfrak{m}(\mu)}, \quad \forall \mu \in \mathcal{P}_2^{\mathrm{ac}}(M) \tag{4.15}$$

が成立つ.

注意 4.14 不等式 (4.15) は *Talagrand* 不等式 (輸送不等式) と呼ばれる. 情報幾何の文脈において相対エントロピーは距離関数の二乗のように振舞うので (例えば [1] 参照), Talagrand 不等式は異なる距離関数の比較とも見なせる.

証明 任意の $\mu \in \mathcal{P}_2^{\mathrm{ac}}(M)$ に対し, $(\mu_t)_{t\in[0,1]} \subset \mathcal{P}_2^{\mathrm{ac}}(M)$ を $\mathfrak{m}$ と μ を結ぶ最短測地線とする (最短測地線の向きは定理 4.6の証明のときと逆である). このとき $\mu_0 = \mathfrak{m} = 1\mathfrak{m}$ より

$$\mathrm{Ent}_\mathfrak{m}(\mathfrak{m}) = 0, \quad \nabla\,\mathrm{Ent}_\mathfrak{m}(\mathfrak{m}) = 0$$

であり, $\mathrm{Ent}_\mathfrak{m}(\mu_t)$ の Taylor 展開より

$$\begin{aligned}\mathrm{Ent}_\mathfrak{m}(\mu) = \mathrm{Ent}_\mathfrak{m}(\mu_1) &= \mathrm{Ent}_\mathfrak{m}(\mu_0) + \langle\!\langle \nabla\,\mathrm{Ent}_\mathfrak{m}, \dot{\mu}_0\rangle\!\rangle_{\mu_0} + \int_0^1 (1-t)\,\mathrm{Hess}\,\mathrm{Ent}_\mathfrak{m}(\dot{\mu}_t,\dot{\mu}_t)dt \\ &\geq K\int_0^1 (1-t)\|\dot{\mu}_t\|_{\mu_t}^2 = \frac{K}{2}W_2(\mu,\mathfrak{m})^2\end{aligned}$$

となるので結論を得る. □

一般に対数 Sobolev 不等式は Talagrand 不等式を導く ([116],[17]). 逆に Talagrand 不等式はある弱い形の対数 Sobolev 不等式を導き ([65]), そして曲率次元条件を課せば Talagrand 不等式は対数 Sobolev 不等式を導く ([116]). しかし対数 Sobolev 不等式と Talagrand 不等式は同値ではない ([25]). だが一方で両不等式に共通する性質は多々あり, 例えばどち

らの不等式からもガウス型の測度の集中現象が従う．ここで距離空間 (X,d) 上の確率測度 $\mathfrak{m}$ が二正数 (λ,C) に対しガウス型の測度の集中現象を満たすとは, $\mathfrak{m}$ に関する測度が $1/2$ 以上である任意のボレル集合 $A\subset X$ と任意の非負実数 r に対し

$$\mathfrak{m}(A_r)\geq 1-\lambda \mathrm{e}^{-Cr^2},\quad A_r:=\{x\in X\mid d(x,A)<r\}\text{: } A \text{ の } r\text{-距離近傍}$$

を満たすことである．大雑把に言うと測度の集中現象は集合の周長と測度を比べる等周不等式の積分版であり ([101]), そして偏差不等式と同値である (例えば [87] 参照)．詳しく述べないが, これらの不等式の間には

ガウス型の等周不等式 $\Rightarrow$ 対数 Sobolev 不等式 $\Rightarrow$ Talagrand 不等式 $\Rightarrow$ ガウス型の測度の集中現象

なる関係がある．そして $(M,g,\mathfrak{m})$ が曲率次元条件 $\mathrm{CD}(0,\infty)$ を満たせば測度の集中現象から等周不等式が導かれる ([100])． これらの関数不等式間の関係は上述の論文や [144, Section] とそれらに現れる参考文献を参照にして頂きたい.

最後に Marton 議論と呼ばれる手法で Talagrand 不等式からガウス型の集中現象を導いてこの章を閉じる.

定理 4.15 $(M,g,\mathfrak{m})$ がある正数 K に対し Talagrand 不等式を満たせば, $(2,K/4)$ に対してガウス型の測度の集中現象を満たす.

証明 $\mathfrak{m}(A)\geq 1/2$ となる任意のボレル集合 $A\subset M$ と任意の非負実数 r に対し,

$$\mathfrak{m}(M\setminus A_r)\leq 2\mathrm{e}^{-Kr^2/4}$$

を示す．$\mathfrak{m}(M\setminus A_r)=0$ のとき主張は明らかに正しいので, 以下 $\mathfrak{m}(M\setminus A_r)\neq 0$ を仮定する．また, $r\leq\sqrt{(8\log 2)/K}$ ならば

$$2\mathrm{e}^{-Kr^2/4}\geq 1/2\geq \mathfrak{m}(M\setminus A)\geq \mathfrak{m}(M\setminus A_r)$$

となり結論は正しいので, $r>\sqrt{(8\log 2)/K}$ を仮定して良い.

ここで (3.2) で見たように, 非零ボレル集合 $B\subset M$ 上の一様分布 $\mu_B:=\mathfrak{m}(B)^{-1}\mathfrak{m}|_B$ の相対エントロピーが $\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu_B)=-\log\mathfrak{m}(B)$ となることに留意し, $\mu_A,\mu_{M\setminus A_r}$ を考える. すると $\mu_A,\mu_{M\setminus A_r}$ の任意のカップリング π の台は直積集合 $A\times(M\setminus A_r)$ の閉包に含まれるので,

$$d(x,y)\geq r\quad \pi\text{-a.e.}$$

となる．よって

$$\begin{aligned} W_2(\mu_A,\mu_{M\setminus A_r})^2 &= \inf_{\pi\in\Pi(\mu_A,\mu_{M\setminus A_r})}\int_{M\times M} d(x,y)^2 d\pi(x,y)\\ &\geq \inf_{\pi\in\Pi(\mu_A,\mu_{M\setminus A_r})}\int_{M\times M} r^2 d\pi(x,y)=r^2 \end{aligned}$$

であり, 三角不等式と Talagrand 不等式を併せて

$$\begin{aligned} r \le W_2(\mu_A, \mu_{M\setminus A_r}) &\le W_2(\mu_A, \mathfrak{m}) + W_2(\mathfrak{m}, \mu_{M\setminus A_r}) \\ &\le \sqrt{\frac{2}{K}\operatorname{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu_A)} + \sqrt{\frac{2}{K}\operatorname{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu_{M\setminus A_r})} \\ &= \sqrt{-\frac{2}{K}\log \mathfrak{m}(A)} + \sqrt{-\frac{2}{K}\log \mathfrak{m}(M\setminus A_r)} \end{aligned}$$

となる. ここで仮定より

$$r > \sqrt{(8\log 2)/K} > \sqrt{(2\log 2)/K} \ge \sqrt{-(2\log \mathfrak{m}(A))/K}$$

なので, 上式を整理し二乗すると

$$\left(\sqrt{\frac{K}{2}}r - \sqrt{\log 2}\right)^2 \le -\log \mathfrak{m}(M\setminus A_r)$$

となり, さらに整理して

$$\mathfrak{m}(M\setminus A_r) \le \mathrm{e}^{-\left(\sqrt{\frac{K}{2}}r - \sqrt{\log 2}\right)^2} \le \mathrm{e}^{-\frac{K}{4}r^2 + \log 2} = 2\mathrm{e}^{-\frac{K}{4}r^2}$$

となるので示された. □

5 最適輸送理論と熱流（桒田）

5.1 導入

熱流を考える上での技術的な困難の説明を後回しにするため，ここでは完備で境界を持たない重みつき Riemann 多様体 $(M, g, \mathfrak{m})$ ($\mathfrak{m} = \mathrm{e}^{-V} \mathrm{vol}_g$, $V \in C^\infty(M)$) 上で話を展開する (3.1.1項参照).

前の講演 (4 章) で導入された，確率測度の空間上の形式的なリーマン構造に基づく解析 (これも勿論，形式的な解析になる) は，その最初のアイデアを導入した Otto 氏にちなんで，Otto 解析と呼ばれる [115]．Otto 解析を通じて様々な発展的考察が可能になり，厳密な理論を展開する上での指針を得ることができる．その有用性は既に 4 章でも見た.

Otto 解析を用いることで，確率測度の時間変化として記述できる[41]幾つかの時間発展型偏微分方程式の解を，$(\mathcal{P}_2(M), W_2)$ 上の汎関数の勾配流として (形式的に) 特徴づけることができる．それらの多くの例および詳細は [143, 144] 等の文献に譲るとして，ここでは，その最も基本的な例である熱方程式について考える．Otto 解析において，$\mu = \rho\,\mathfrak{m}$ のとき $\nabla \mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu) = \nabla \log \rho$ であったことを踏まえ，

$$\dot{\mu}_t = -\nabla \mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu_t) \tag{5.1}$$

が表す連続方程式を考察すると，各 $h \in C_0^\infty(M)$ で

$$\frac{d}{dt}\int_M h\, d\mu_t = \int_M \mathcal{L}h\, d\mu_t \tag{5.2}$$

(ただし，$\mathcal{L}h := \Delta h - \langle \nabla V, \nabla h \rangle$) が成り立つと分かる．つまり μ_t は (形式的には) 熱方程式[42]の弱解になっている.

このような観点から，$(\mathcal{P}_2(M), W_2)$ 上での $\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}$ の性質と熱方程式の解との間には何らかの関係があると期待される．実際に，もう少し Otto 解析を行うことで，$\mathrm{CD}(K, \infty)$ 条件から次の結果 (W_2**-収縮性**) が形式的に得られる：

命題 5.1 (Otto 解析による W_2-収縮性) ある $K \in \mathbb{R}$ で $\mathrm{Hess}\,\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}} \geq K$ とする．このとき，$(\mu_t^{(0)})_{t \geq 0}$, $(\mu_t^{(1)})_{t \geq 0}$ を $\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}$ の勾配流とすると，各 $t \geq 0$ で次が成り立つ：

$$W_2(\mu_t^{(0)}, \mu_t^{(1)}) \leq \mathrm{e}^{-Kt} W_2(\mu_0^{(0)}, \mu_0^{(1)}). \tag{5.3}$$

証明 $(\nu_s)_{s \in [0,1]}$ を W_2-最短測地線で，$\nu_0 = \mu_t^{(0)}$, $\nu_1 = \mu_t^{(1)}$ なるものとする．ここで，W_2

---

[41]関数を解とするものであれば，その関数が確率密度関数になること，すなわち正値性と L^1-ノルムを時間変化で保つことが必要.

[42]本来は拡散方程式と呼ぶべきもの ($V = 0$ の時が熱方程式) だが，測度距離空間の場合の用語に合わせて，こう呼ぶことにする (測度距離空間上では標準的な測度が一意に定まらないので，重みつき Riemann 多様体での上記に相当する方程式を全て「熱方程式」と呼んでいる).

に対して第一変分公式が適用できるとすると，(5.1) および $\mathrm{Hess}\,\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}} \geq K$ より，

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}W_2(\mu_t^{(0)},\mu_t^{(1)})^2 &= \langle\!\langle \dot{\mu}_t^{(1)}, \dot{\nu}_1\rangle\!\rangle - \langle\!\langle \dot{\mu}_t^{(0)}, \dot{\nu}_0\rangle\!\rangle = \langle\!\langle \nabla\,\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\nu_0), \dot{\nu}_0\rangle\!\rangle - \langle\!\langle \nabla\,\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\nu_1), \dot{\nu}_1\rangle\!\rangle \\ &= -\int_0^1 \mathrm{Hess}\,\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\dot{\nu}_s,\dot{\nu}_s)\,ds \leq -K\int_0^1 |\dot{\nu}_s|^2 ds = -KW_2(\mu_t^{(0)},\mu_t^{(1)})^2\end{aligned}$$

となる．よって Gronwall 不等式から (5.3) が従う． □

このような，Otto 解析による形式的な議論を厳密にするためには，以下が問題になる：

(Q1) $(\mathcal{P}_2(M), W_2)$ 上で，$\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}$ の勾配流をどう定式化するのか？

(Q2) 勾配流は，$\mathrm{CD}(K,\infty)$ 条件下で (5.3) を満たすのか？

(Q3) 勾配流は熱流 (熱方程式の解) と同一のものなのか？

問 (Q2) の重要性のひとつは，(5.3) を経由して Bochner 不等式が導出できる点にある．このことの詳細は，6 章を参照のこと．まずこの講演では，(Q1)–(Q3) に対する答を与える．

5.2 距離空間上の勾配流

$(\mathcal{P}_2(M), W_2)$ は距離空間であるから，距離空間上の勾配流の理論が援用できる．そのうち，ここでは，[4] で扱われているものに話題を限定する．枠組の抽象性故に複数の定義があり，それらは一般には一致するとは限らない (そもそも，解の存在が問題になる)：

- 然るべき近似スキーム (minimizing movement scheme) の極限
- エネルギー消散等式 (EDE; <u>E</u>nergy <u>D</u>issipation <u>E</u>quality)
- 発展変分不等式 (EVI; <u>E</u>volution <u>V</u>ariational <u>I</u>nequality)

おおまかに言って，下方のものほど狭義の勾配流といえる．ここでは，EDE と EVI についてのみ紹介する．(Y, d_Y) を距離空間とする．

定義 5.2 (**絶対連続曲線**) Y 上の**曲線** $(\gamma_t)_{t\in I}$ ($I\subset\mathbb{R}$ は区間) **が (局所) 絶対連続** ((locally) absolutely continuous) とは，$\ell \in L^1_{\mathrm{loc}}(I)$ であって，各 $s, t\in I$, $s<t$ で以下をみたすものが存在することをいう：

$$d_Y(\gamma_s,\gamma_t) \leq \int_s^t \ell(r)\,dr.$$

$(\gamma_t)_{t\in I}$ が絶対連続な曲線であれば，各 $z\in Y$ で $d_Y(\gamma_t, z)$ は a.e. t で微分可能．また，

$$|\dot{\gamma}|(s) := \varlimsup_{\delta\downarrow 0}\frac{d_Y(\gamma_s,\gamma_{s+\delta})}{\delta}$$

を定義の ℓ として取れる (これを metric speed という; [4, Theorem 1.1.2])．

$U: Y\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ を下半連続関数とする．また $D(U)=\{y\in Y \mid U(y)<\infty\}$ とする．以下，U の勾配流に相当する概念を導入していく．

定義 5.3 (**エネルギー消散等式**) Y 上の曲線 $(\gamma_t)_{t\geq 0}$ が $\gamma_0 \in D(U)$ を初期条件とする **EDE の意味での** U **の勾配流**である，とは，絶対連続であって，a.e. $t > 0$ で以下の関係式をみたすことを言う：

$$-\frac{d}{dt}U(\gamma_t) = \frac{1}{2}|\dot{\gamma}|(t)^2 + \frac{1}{2}|\nabla_- U|(\gamma_t)^2,$$

ただし，

$$|\nabla_- U|(y) := \overline{\lim_{z\to y}} \frac{[U(y) - U(z)]_+}{d_Y(y,z)}$$

(これを U の descending slope という).

定義 5.4 (**発展変分不等式**) $K \in \mathbb{R}$ とし，$\gamma_0 \in D(U)$ とする．Y 上の曲線 $(\gamma_t)_{t\geq 0}$ が γ_0 **を初期条件とする** K**-EVI の意味での** U **の勾配流**である，とは，$(\gamma_t)_{t>0}$ が絶対連続かつ $\lim_{t\to 0} d_Y(\gamma_t, \gamma_0) = 0$ であって，各 $z \in Y$ に対し a.e. $t > 0$ で以下の関係式をみたすことを言う：

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}d_Y(\gamma_t, z)^2 + \frac{K}{2}d_Y(\gamma_t, z)^2 \leq U(z) - U(\gamma_t).$$

定義 5.3, 5.4共に，確かに (Y, d_Y) の距離構造のみで勾配流の定義を与えている．従って，これらの定義は可微分構造を持たない空間上でも意味を持ち得る．

補題 5.5 (**勾配流の検証**) (Y, g_Y) を (境界をもたない) 完備 Riemann 多様体で $U \in C^\infty(Y)$, $K \in \mathbb{R}$ とする．

(1) EDE の解，K-EVI の解は，それぞれ U の勾配流になる．

(2) U の勾配流は EDE の解になる．$\mathrm{Hess}\, U \geq K$ であれば，K-EVI の解にもなる．

証明　まず EDE について示す．(1) を考えるため，$(\gamma_t)_{t\geq 0}$ を EDE の解とする．このとき，各 $t > 0$ で次が成り立つ：

$$\frac{d}{dt}U(\gamma_t) = \langle \nabla U(\gamma_t), \dot{\gamma}_t \rangle \geq -|\nabla U|(\gamma_t)\,|\dot{\gamma}|(t) \geq -\frac{1}{2}|\nabla U|(\gamma_t)^2 - \frac{1}{2}|\dot{\gamma}|(t)^2. \tag{5.4}$$

EDE が成り立つなら，この 2 つの不等号は等号でなければならない．第一の等号は $\nabla U(\gamma_t)$ と $\dot{\gamma}_t$ が平行かつ逆向きであることを意味し，第二の等号は $|\nabla U|(\gamma_t) = |\dot{\gamma}|(t)$ を意味する．従って，合わせると $\dot{\gamma}_t = -\nabla U(\gamma_t)$ を得る．また，この議論から，(2) の EDE についての主張も容易に分かる．

次に EVI について示す．(1) を考えるため，$(\gamma_t)_{t\geq 0}$ を EVI の解とする．$t > 0$ とし，$(\eta_s)_{s\in[0,1]}$ を最短測地線で $\eta_0 = \gamma_t$ をみたすものとする．d_Y に対して第一変分公式が適用できるとすると，各 $s \in (0,1]$ に対して，

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}d_Y(\gamma_t, \eta_s)^2 = -s\langle \dot{\gamma}_t, \dot{\eta}_0 \rangle$$

を得る．従って，z を η_s として EVI を適用すると，

$$-s\langle\dot{\gamma}_t,\dot{\eta}_0\rangle+\frac{Ks^2}{2}d_Y(\gamma_t,\eta_1)^2\le U(\eta_s)-U(\eta_0).$$

この式の両辺を s で割って $s\to 0$ とすると，$-\langle\dot{\gamma}_t,\dot{\eta}_0\rangle\le\langle\nabla U(\gamma_t),\dot{\eta}_0\rangle$ を得る．ここで $(\eta_s)_{s\in[0,1]}$ は任意であるから，$\dot{\eta}_0=\dot{\gamma}_t-\nabla U(\gamma_t)$ あるいは $\dot{\eta}_0=-(\dot{\gamma}_t-\nabla U(\gamma_t))$ となるように選ぶことで，$\dot{\gamma}_t=-\nabla U(\gamma_t)$ が従う．

次に (2) を考える．$(\gamma_t)_{t\ge 0}$ を U の勾配流，$z\in Y$ とし，$(\eta_s)_{s\in[0,1]}$ を Y の最短測地線で $\eta_0=\gamma_t$, $\eta_1=z$ とする．$\mathrm{Hess}\,U\ge K$ より U は K 凸，すなわち，

$$U(\eta_s)\le(1-s)U(\eta_0)+sU(\eta_1)-\frac{K}{2}s(1-s)d_Y(\eta_0,\eta_1)^2.$$

この式から，

$$\langle\nabla U(\eta_0),\dot{\eta}_0\rangle=\lim_{s\downarrow 0}\frac{U(\eta_s)-U(\eta_0)}{s}\le U(z)-U(\gamma_t)-\frac{K}{2}d_Y(\gamma_t,z)^2 \tag{5.5}$$

を得る．一方で，第一変分公式および γ が U の勾配流であることから

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}d_Y(\gamma_t,z)^2=-\langle\dot{\gamma}_t,\dot{\eta}_0\rangle=\langle\nabla U(\eta_0),\dot{\eta}_0\rangle \tag{5.6}$$

が成り立つ．この 2 つの式を組み合わせれば，γ が EVI の解と分かる． □

EVI の意味での勾配流については，以下が成り立つ．

定理 5.6 (EVI ⇒ 収縮性) $(\gamma_t^{(0)})_{t\ge 0}$, $(\gamma_t^{(1)})_{t\ge 0}$ を K-EVI の意味での U の勾配流とする．このとき，各 $t\ge 0$ で

$$d_Y(\gamma_t^{(0)},\gamma_t^{(1)})\le \mathrm{e}^{-Kt}d_Y(\gamma_0^{(0)},\gamma_0^{(1)}).$$

証明 2 変数関数に対する合成関数の微分則より，

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}d_Y(\gamma_t^{(0)},\gamma_t^{(1)})^2=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}d_Y(\gamma_t^{(0)},\gamma_{t'}^{(1)})^2|_{t'=t}+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}d_Y(\gamma_{t'}^{(0)},\gamma_t^{(1)})^2|_{t'=t}$$

(この微分則が今の文脈で適用可能かどうかは，本来証明が必要．実際には “$\le$” が証明できる)．右辺第一項に z を $\gamma_{t'}^{(1)}$ とした $\gamma_t^{(0)}$ の EVI を，第二項に z を $\gamma_{t'}^{(0)}$ とした $\gamma_t^{(0)}$ の EVI をそれぞれ適用すると，

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}d_Y(\gamma_t^{(0)},\gamma_t^{(1)})^2\le -K d_Y(\gamma_t^{(0)},\gamma_t^{(1)})^2$$

が得られる．よって Gronwall 不等式から結論が従う． □

補題 5.5 (1) での EVI に関する議論では，K に依存する項は高次の無限小となっており特に役割を果たしていなかった．一方で定理 5.6では，その項が本質的に重要な役割を果たしていることを注意しておく．

注意 5.7 (EDE と EVI の基本的性質) 以下，証明は [4] を参照.

(1) EVI の意味での勾配流は EDE の意味での勾配流になる.

(2) EVI の意味での勾配流は，存在すれば (初期条件に関して) 一意．更に初期条件を $\overline{D(U)}$ まで拡張できる (いずれも定理 5.6による).

(3) (Y, d_Y) が完備局所コンパクト測地空間で，U が (下半連続かつ) ある $K \in \mathbb{R}$ で K 凸ならば，EDE の解が存在する (一般に一意性は不明；ただし，L^2-Wasserstein 空間上の $\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}$ の勾配流は一意 [5, 57])．局所コンパクトの仮定は，他の仮定で置き換えて弱めることもできる.

5.3 曲率次元条件と発展変分不等式

$(\mathcal{P}_2(M), W_2)$ 上の $\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}$ の勾配流の話に戻る．まず準備として，(L^2 空間での熱方程式の解としての) 熱流を導入しておく．熱方程式の解を関数解析的に考える枠組として，L^2-空間上の**熱半群** $P_t = \mathrm{e}^{t\mathcal{L}}$ を考える[43]．すなわち，$P_t : L^2(\mathfrak{m}) \to L^2(\mathfrak{m})$ は有界線形作用素で，L^2-強収束の意味で

$$\frac{\partial}{\partial t} P_t f = \mathcal{L} P_t f, \quad \lim_{t \downarrow 0} P_t f = f$$

を各 $f \in L^2(\mathfrak{m})$ でみたすものとする (例えば，[54, 66] 等を参照)．また，P_t は対称作用素かつ Markov 性をみたすことから，各 $p \in [1, \infty]$ に対して $L^p(\mathfrak{m})$ からそれ自身への有界線形作用素として一意拡張できる.

もう一つの準備として，次の条件を (測度距離空間に対して) 導入しておこう.

定義 5.8 (条件 (V)) ある $c > 0$ と $x_0 \in X$ で以下が成り立つとき，測度距離空間 $(X, d, \mathfrak{m})$ は**条件** (V) をみたすという：

$$\int_M \exp\left(-c d(x_0, x)^2\right) \mathfrak{m}(dx) < \infty.$$

以下，この条件は必要に応じて (明示的に) 仮定する．条件 (V) のもと，M 上の熱方程式の L^1-解は総熱量を保つことが知られている．すなわち，$f \in L^1(\mathfrak{m})$，$f \geq 0$ に対して，各 $t > 0$ で $\|P_t f\|_1 = \|f\|_1$ (例えば [5, Theorem 4.20, Remark 4.21] を参照).

定理 5.6より，(Q2) の解決には，EVI の解の存在が密接に関係している．EVI の解の存在と $\mathrm{CD}(K, \infty)$ 条件との関係を述べた次の定理は，より一般の測度距離空間での結果の特別な場合に相当する．一般の枠組については，次の講演で扱う.

定理 5.9 ($\mathrm{CD}(K, \infty) \Leftrightarrow K$-EVI on $(M, g, \mathfrak{m})$) $K \in \mathbb{R}$ に対して，次は同値.

(a) $(M, g, \mathfrak{m})$ は $\mathrm{CD}(K, \infty)$ をみたす.

---

[43] (5.2) の後の脚注と同様，用語は測度距離空間での慣例に従う.

(b) $(M, d, \mathfrak{m})$ は条件 (V) をみたし，$(\mathcal{P}_2(M), W_2)$ 上で，各 $\mu_0 \in D(\mathrm{Ent}_\mathfrak{m})$ に対して μ_0 を初期条件とする K-EVI の意味での $\mathrm{Ent}_\mathfrak{m}$ の勾配流が存在する．

更に, (a)(b) いずれかが成り立てば, 熱流は K-EVI の解を与える．すなわち, f が M 上の確率密度 ($f \in L^1(\mathfrak{m})$, $f \geq 0$ かつ M 上での積分値が 1) で $f\,\mathfrak{m} \in D(\mathrm{Ent}_\mathfrak{m})$ のとき，$(P_t f\,\mathfrak{m})_{t\geq 0}$ は K-EVI の解になる．

証明 ここでは [3, Theorem 6.1], [6, Theorem 5.1] および [40, Theorem 3.2] の証明の概略を述べるに止める．以下のやり方に沿って証明が遂行できるが，証明中に都合よく「〜であるとしてよい」としているところは[44]，逐一実現のための近似が必要になり，総体としてかなりの技巧を要する．

(a) ⇒ (b): 条件 (V) は，$\mathrm{CD}(K,\infty)$ 条件の下で成り立つ弱い意味での体積増大度評価から従う (例えば [132, 4.6 節] 参照)．EVI については，補題 5.5 (2) の議論を Otto 解析の言葉で焼き直したものを厳密にする，という流れで示す．ただしその際に，勾配流の代わりに熱流を用いる．すなわち，定理後半部の主張に現れる f に対して $\mu_t = P_t f\,\mathfrak{m}$ が EVI の解を与えることを示す．ただし，$(\mu_t)_{t>0}$ の絶対連続性はここでは議論しない (次節 (5.4 節) で扱う)．$\nu \in \mathcal{P}_2(M)$ として，$(\psi, -\varphi)$ を，$d^2/2$ を費用関数とする次の Kantorovich 問題の解とする．すなわち，

$$\frac{1}{2}W_2(\mu_t,\nu)^2 = \int_M \psi\,d\nu - \int_M \varphi\,d\mu_t, \tag{5.7}$$

$$\psi(y) - \varphi(x) \leq \frac{1}{2}d(x,y)^2 \quad (x, y \in M).$$

以下，ψ, φ は “よい” 関数「であるとしてよい」．この設定の下で，次の 2 つを示せばよい．

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}W_2(\mu_t,\nu)^2 = \int_M \langle \nabla P_t f, \nabla\varphi\rangle\,d\mathfrak{m}, \tag{5.8}$$

$$\mathrm{Ent}_\mathfrak{m}(\nu) - \mathrm{Ent}_\mathfrak{m}(\mu_t) - \frac{K}{2}W_2(\nu,\mu_t)^2 \geq \int_M \langle \nabla P_t f, \nabla\varphi\rangle\,d\mathfrak{m}. \tag{5.9}$$

まず (5.8) を示す．Kantorovich 双対性から，各 $\delta > 0$ で次が成り立つ：

$$\frac{1}{2}W_2(\mu_{t+\delta},\nu)^2 \geq \int_M \psi\,d\nu - \int_M \varphi\,d\mu_{t+\delta}.$$

この式と (5.7) を辺々引いて δ で割り極限をとれば,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}W_2(\mu_t,\nu)^2 \geq -\lim_{\delta\downarrow 0}\int_M \varphi\frac{P_{t+\delta}f - P_t f}{\delta}\,d\mathfrak{m} = \int_M \langle\nabla\varphi, \nabla P_t f\rangle\,d\mathfrak{m}$$

を得る (最後の等式で Gauss-Green の公式を用いた)．$t+\delta$ の代わりに $t-\delta$ で同じ計算をすれば逆向きの不等号が得られるので，合わせて (5.8) が従う．次に (5.9) を示す．$\mathrm{Ent}_\mathfrak{m}$ の K 凸性から，μ_t から ν に至る W_2-最短測地線 $(\nu_s)_{s\in[0,1]}$ に対して

$$\varliminf_{s\downarrow 0}\frac{\mathrm{Ent}_\mathfrak{m}(\nu_s) - \mathrm{Ent}_\mathfrak{m}(\nu_0)}{s} \geq \int_M \langle\nabla P_t f, \nabla\varphi\rangle\,d\mathfrak{m} \tag{5.10}$$

[44]実際には，それ以外にも，もっと厳密な議論が必要なところはある．

を示せば充分 ((5.5) を見よ)．$\nu_s \ll \mathfrak{m}$「であるとしてよい」．$\nu_s = \sigma_s \mathfrak{m}$ と書く．ここで，$(e_s)_\sharp \Pi = \nu_s$ となる $\Pi \in \mathcal{P}(\Gamma(M))$ が存在することを認める (記号については 3.2.1項を参照)．$\zeta(r) = r \log r$ は (0 以外で) 可微分な凸関数であるから，$\zeta(r_2) - \zeta(r_1) \geq \zeta'(r_1)(r_2 - r_1)$ が (r_1, r_2 の大小関係によらず) 成り立つ．この 2 つを用いて，

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\nu_s) - \mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\nu_0)}{s} &\geq \frac{1}{s}\int_M (\sigma_s - \sigma_0) \log \sigma_0 \, d\mathfrak{m} \\ &= \frac{1}{s}\int_M \log \sigma_0 \, d(e_s)_\sharp \Pi - \int_M \log \sigma_0 \, d(e_0)_\sharp \Pi \\ &= \frac{1}{s}\int_{\Gamma(M)} (\log \sigma_0(\gamma_s) - \log \sigma_0(\gamma_0)) \, \Pi(d\gamma).\end{aligned}$$

Brenier の定理 (定理 1.4) の多様体版 (注意 1.5 (4)) から，$\nabla \varphi(\gamma_0) = \dot{\gamma}_0$ Π-a.e. γ「であるとしてよく」，また $\sigma_0 = P_t f$ であるから，

$$\begin{aligned}\varliminf_{s \downarrow 0} \frac{\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\nu_s) - \mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\nu_0)}{s} &\geq \int_{\Gamma(M)} \langle \frac{\nabla \sigma_0}{\sigma_0}(\gamma_0), \dot{\gamma_0} \rangle \, \Pi(d\gamma) \\ &= \int_M \langle \frac{\nabla P_t f}{P_t f}, \nabla \varphi \rangle \, d\nu_0 = \int_M \langle \nabla P_t f, \nabla \varphi \rangle \, d\mathfrak{m}.\end{aligned}$$

よって結論を得る．

(b) $\Rightarrow$ (a): $(\mu_s)_{s \in [0,1]}$ を W_2-最短測地線とし，$(\mu_s(t))_{t \geq 0}$ を μ_s を初期条件とする K-EVI の解とする．ここで，

$$\Xi(t) := (1-s) W_2(\mu_0, \mu_s(t))^2 + s W_2(\mu_s(t), \mu_1)^2$$

とおく．このとき，W_2 の三角不等式と初等的な不等式 $s(1-s)(a+b)^2 \leq (1-s)a^2 + sb^2$ ($a, b \in \mathbb{R}$) から $\Xi(t) \geq \Xi(0)$ が従う．よって，K-EVI を適用すると

$$\begin{aligned}0 \leq \frac{1}{2}\frac{d\Xi}{dt}(0) &\leq (1-s)(\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu_0) - \mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu_s)) + s(\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu_1) - \mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu_s)) - \frac{K}{2}\Xi(0) \\ &= (1-s)\,\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu_0) + s\,\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu_1) - \mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu_s) - \frac{K}{2} s(1-s) W_2(\mu_0, \mu_1)^2\end{aligned}$$

となるので，結論を得る． □

注意 5.10 (Otto 解析による，定理 5.9 の証明の解釈) (5.8) の右辺について補足する．証明中と同様に $(\nu_s)_{s \in [0,1]}$ を μ_t から ν に至る W_2-最短測地線とすると，$\dot{\nu}_0 = \nabla \varphi$ となる (Brenier の定理の多様体版による)．従って，μ_t が $\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}$ の勾配流であることを認めれば

$$\int_M \langle \nabla P_t f, \nabla \varphi \rangle \, d\mathfrak{m} = \int_M \langle \frac{\nabla P_t f}{P_t f}, \nabla \varphi \rangle \, d\mu_t = \langle\!\langle \nabla \,\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu_t), \dot{\nu}_0 \rangle\!\rangle$$

となる．従って，(5.9),(5.8) を (5.5), (5.6) と各々対比すれば，これらが自然な式とわかる．

注意5.7 (2) よりEVIの解は存在すれば一意なので, 定理5.9の後半の主張より, $\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}$ の勾配流をEVIの意味で考えた場合に(Q3)が解決する(EVIの解が熱半群が与える熱流の解と一致する，と言う意味で)．また，このことと定理5.6を合わせると，$\mu_t^{(i)} = P_t f_i \,\mathfrak{m} \in \mathcal{P}_2(M)$ ($f_i \in L^2(\mathfrak{m})$, $i = 0, 1$) に対して(5.3)が成り立つことも分かる．

注意 5.11 (W_2-収縮性の導出について) $\mu_t^{(i)} = P_t f_i \,\mathfrak{m} \in \mathcal{P}_2(M)$ ($f_i \in L^2(\mathfrak{m})$, $i = 0, 1$) に対する(5.3)については，別の証明も知られている．一番古いものは，熱流の確率論的対応物であるBrown運動の結合法(平行移動カップリング)による(W_2での定式化を初めて結合法で議論したのは[126]と思われるが，より強い評価がそれ以前から既知であった．[126]の参考文献を参照)．解析的には，Bakry-Émeryの微分評価から導出する方法が複数知られている([17, 84])．結合法は後進Ricci流の下での熱流にも適用でき[85]，微分評価に基づく方法はHeisenberg群上の，劣Laplacianに対応する熱流にも適用できる[84]など，それぞれの方法に利点がある．

5.4 熱流の同定に関する補足

ここで，(Q3)に関する研究の歴史的な流れを概観しておく．

この方面での最初の結果は，$\mathbb{R}^n$ 上での，minimizing movement schemeの収束に相当する方法で構成した相対エントロピーの勾配流が熱方程式の弱解になることを示した[74]であろう．この方法は[4]により整理・一般化され，この方面の結果の礎になった([144]も参照のこと)．その後，Riemann多様体では最も一般的な結果が[45]で与えられた．また，Finsler多様体においては，[110]で示された(この場合には，対応する熱流は非線形になる)．更には，無限次元空間であるWiener空間[51]，劣Riemann多様体の代表例であるHeisenberg群[76]等の，様々な設定で研究されてきた．

これらの研究は，(Q3)を，対応する偏微分方程式(熱方程式)の解の一意性へと帰着させる方法であり，$\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}$ の勾配流の一意性へと帰着させた定理5.9のような方法とは，問題へのアプローチの仕方が本質的に異なる．このような転換の背景には，通常の可微分構造を持たない特異空間上でも適用可能な議論を展開したい，という構想があった．この新たなアプローチに基づく議論は，(コンパクト)Alexandrov空間での結果[62]を嚆矢として，(測地的)測度距離空間[3, 5, 6]へと一般化された．また，別の流れとして，(有限)グラフ上で同様の問題を考えた研究があり[95, 98]，この場合には空間の離散性に起因する難しさが発生する．離散の場合の考え方を利用し，Lévy過程に対応する非局所的拡散方程式の解についても同様の研究が展開されている[46]．

なお，[5, 62]ではEVIの代わりにEDEを勾配流の定義に用いて議論している(EVIの解の存在は空間に制約を課す(6.1.2項参照)．そのため，Finsler多様体など，EVIを考えるのが適切ではない状況がある)．熱流の同定を示す過程で $(P_t f \,\mathfrak{m})_{t \ge 0}$ が $(\mathcal{P}_2(M), W_2)$ 上の絶対連続な曲線になることが示され，そのことは，EVIの解を考える際にも暗に用いられている(定義5.4を参照)．

定理 5.12 (EDE の勾配流 = 熱流) $\mathrm{CD}(K,\infty)$ を仮定する．$f \in L^2(\mathfrak{m})$ を，$f\,\mathfrak{m} \in \mathcal{P}_2(M) \cap D(\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}})$ なるものとする．このとき，$\mu_t = P_t f\,\mathfrak{m}$ は EDE の意味での勾配流になる．特に，注意 5.7 (3) より，結果的に μ_t は (唯一の)EDE の意味での $\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}$ の勾配流と一致する．

証明 以下の流れに沿って実際の証明が展開できる ([5] 参照) が，本来の証明で行う近似は全て省略し，各種極限操作の妥当性も議論しない．まず，$\mathrm{CD}(K,\infty)$ 条件から $|\nabla_- \mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}|$ が $\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}$ の upper gradient になることが分かり，そこから (5.4) に相当する不等式が従う．よって逆向きの不等式を示せばよい．ここで，EDE の定義に現れる 3 つの量のうち，

$$\frac{d}{dt}\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu_t) = -I_{\mathfrak{m}}(\mu_t) \quad \text{for a.e. } t, \tag{5.11}$$

$$|\nabla_- \mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}|(\mu)^2 \le I_{\mathfrak{m}}(\mu) \tag{5.12}$$

が成り立つ ($I_{\mathfrak{m}}$ は Fisher 情報量；4.2節参照)．(5.11) は，少なくとも形式的には計算で確かめられる．(5.12) は，$\mathrm{CD}(K,\infty)$ を用いて Otto 解析の考え方をうまく実装することで得られる ((5.10) は，(5.12) と関連の深い評価であることを注意しておく)．従って，証明は次の不等式を示すことに帰着される：

$$|\dot{\mu}_t|^2 \le I_{\mathfrak{m}}(\mu_t). \tag{5.13}$$

これを, Kantorovich 双対性と Hopf-Lax 半群 Q_s (注意 4.3参照) を用いて示す．Kantorovich 双対性より，

$$\frac{W_2(P_t f\,\mathfrak{m}, P_{t+\delta} f\,\mathfrak{m})^2}{2\delta^2} = \frac{1}{\delta} \sup_{\varphi \in \mathrm{Lip}_b(M)} \left[\int_M Q_\delta \varphi \cdot P_{t+\delta} f \, d\mathfrak{m} - \int_M \varphi \cdot P_t f \, d\mathfrak{m} \right] \tag{5.14}$$

となる．右辺の sup の中身を，φ に無関係な量で評価する．$s \mapsto \int_M Q_s\varphi \cdot P_{t+s} f \, d\mathfrak{m}$ に微積分学の基本定理や Leibniz 則が適用でき，(4.8) が (古典解の意味で) 成立するとすれば，

$$\begin{aligned}
\int_M Q_\delta \varphi \cdot P_{t+\delta} f \, d\mathfrak{m} - \int_M \varphi \cdot P_t f \, d\mathfrak{m} &= \int_0^\delta \frac{d}{ds} \int_M Q_s \varphi \cdot P_{t+s} f \, d\mathfrak{m} \, ds \\
&= \int_0^\delta \left(-\frac{1}{2} \int_M |\nabla Q_s \varphi|^2 P_{t+s} f \, d\mathfrak{m} + \int_M Q_s \varphi \mathcal{L} P_{t+s} f \, d\mathfrak{m} \right) ds \\
&= \int_0^\delta \left(-\frac{1}{2} \int_M |\nabla Q_s \varphi|^2 P_{t+s} f \, d\mathfrak{m} - \int_M \langle \nabla Q_s \varphi, \nabla P_{t+s} f \rangle \, d\mathfrak{m} \right) ds \\
&\le \frac{1}{2} \int_0^\delta I_{\mathfrak{m}}(\mu_{t+s}) \, ds.
\end{aligned}$$

ここで，最後の不等号は平方完成で得られる．これを (5.14) に代入すれば

$$\frac{W_2(\mu_t, \mu_{t+\delta})^2}{\delta^2} \le \frac{1}{\delta} \int_0^\delta I_{\mathfrak{m}}(\mu_{t+s}) \, ds$$

となるので，$\delta \downarrow 0$ として (5.13) を得る．また，別の議論で $I_{\mathfrak{m}}(\mu_t)$ の上からの評価が従い，その評価とここで得た式を組み合わせると，$(\mu_t)_{t \ge 0}$ が絶対連続な曲線と分かる． □

6　熱流, リーマン的曲率次元条件と Bochner 不等式（桒田）

この講演では，測度距離空間上で，(適切に修正された) 曲率次元条件が Bochner 不等式と同値になることと，その応用について紹介する．

これらの条件はいずれも「$\mathrm{Ric}_N \geq K$」($K \in \mathbb{R}$，$N \in (1, \infty]$) に相当する (3.1.1項参照)．まず，次節 (6.1節) で，測度距離空間上でこの問題を考えるための諸概念を導入した上で，前講演の結果がこの枠組での結果の特別な場合であることを紹介する．6.2節では，Bochner の不等式を紹介し，$N = \infty$ の場合の結果を述べる．6.3節では，$N < \infty$ の場合について述べる．6.4節でここで与えた曲率次元条件の特性について触れた後で，6.5節で，測度距離空間上の解析への応用について述べる．

6.1　測度距離空間とリーマン的曲率次元条件

6.1.1　Cheeger 型エネルギー汎関数

$(X, d, \mathfrak{m})$ を測度距離空間とする．すなわち，(X, d) は完備可分な測地距離空間，$\mathfrak{m}$ は $(X, \mathcal{B}(X))$ 上の σ-有限測度で，局所有限 (各 $r > 0, x \in X$ で，$\mathfrak{m}(B_r(x)) < \infty$) とする．また簡単のため，$\mathrm{supp}(\mathfrak{m}) = X$ とする．次項で述べる Bochner 不等式と曲率次元条件の間の関係を導出するため，前講演の，Riemann 多様体上での熱流の話をこの枠組へと拡張したい．そのために，まず，Laplacian と熱流をどう定義するのかが問題になる．Riemann 多様体上では，Dirichlet エネルギー汎関数を通じてこれらの量を定められることを踏まえ，まず Dirichlet エネルギー汎関数を導入する．説明の不充分な部分については，[5] の 4 章を参照のこと．

定義 6.1 (**Cheeger 型エネルギー汎関数**) $f : X \to \mathbb{R}$ に対して，**局所 Lipschitz 定数** $|\nabla f|$ を

$$|\nabla f|(x) := \varlimsup_{y \to x} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x, y)} \left(= \lim_{r \downarrow 0} \sup_{y \in B_r(x) \setminus \{x\}} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x, y)} \right)$$

で定める．また，**Cheeger 型 Dirichlet エネルギー汎関数** Ch を次で定める：

$$\mathsf{Ch}(f) := \frac{1}{2} \inf_{\substack{f_j \in \mathrm{Lip}(X) \\ f_j \to f \text{ in } L^2(\mathfrak{m})}} \varliminf_{j \to \infty} \int_X |\nabla f_j|^2 \, d\mathfrak{m}$$

(つまり，局所 Lipschitz 定数が定める Dirichlet エネルギーの relaxation)．Sobolev 空間の記法により，$D(\mathsf{Ch}) = \{f \in L^2(\mathfrak{m}) \mid \mathsf{Ch}(f) < \infty\}$ を $W^{1,2}(X)$ とも書く．

Cheeger 型エネルギー汎関数の性質として，$f \in D(\mathsf{Ch})$ のとき，ある $L^2(\mathfrak{m})$ の元 $|\nabla f|_*$ で，

$$\mathsf{Ch}(f) = \int_X |\nabla f|_*^2 \, d\mathfrak{m}$$

をみたすものが存在する．この $|\nabla f|_*$ は，「Ch の定義に現れる，ある関数列 $(f_j)_j$ であって $|\nabla f_j|$ が L^2-弱極限を持つようなものに対して，その極限を $\mathfrak{m}$-a.e. の意味で上回る関数

(relaxed gradient という) のうち，L^2-ノルム極小なもの」として特徴付けられる．これを f の **minimal relaxed gradient** という．$|\nabla f|_*$ は，Riemann 多様体上で関数の (Sobolev の意味での) 微分の絶対値が持つ様々な性質と類似の性質を持つ．一例として，以下を挙げておく (あくまで雰囲気を紹介するのが目的なので，一部の性質は簡略化してある)．

命題 6.2 (Minimal relaxed gradient の性質)

(1) 各 $f, h \in D(\mathsf{Ch})$, $c \in \mathbb{R}$ に対して，$(|\nabla f|_* - |\nabla h|_*)1_{\{f-h=c\}} = 0$ $\mathfrak{m}$-a.e. 特に，$|\nabla f|_* 1_{\{f=c\}} = 0$ $\mathfrak{m}$-a.e.

(2) 各 $f, h \in D(\mathsf{Ch})$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対して $|\nabla(\alpha f + \beta h)|_* \leq |\alpha||\nabla f|_* + |\beta||\nabla h|_*$

(3) 各 $\phi \in \mathrm{Lip}(\mathbb{R})$, $\phi(0) = 0$ および $f \in D(\mathsf{Ch})$ に対し $|\nabla \phi(f)|_* \leq |\phi'(f)||\nabla f|_*$．更に，もし ϕ が単調非減少なら $|\nabla \phi(f)|_* = \phi'(f)|\nabla f|_*$．

また，Cheeger 型エネルギー汎関数の基本的な性質として，以下が成り立つ．

命題 6.3 (Cheeger 型エネルギーの性質)

(1) Ch は $L^2(\mathfrak{m})$ 上で下半連続かつ凸.

(2) $W^{1,2}(X)$ は $f \mapsto \{\|f\|_2^2 + \mathsf{Ch}(f)\}^{1/2}$ をノルムとして Banach 空間になる．

Ch の上記の性質により，Hilbert 空間である $L^2(\mathfrak{m})$ 上の Ch の勾配流が構成できる (例えば [4] の 1.4 節 (および，その参考文献) を参照)．初期条件 f に対して時刻 t での関数を対応させる写像を P_t と書き，**熱半群**と呼ぶ．また P_t の生成作用素 (Δ と書く[45]) も，然るべき意味で定義できる．この定義では，一般には P_t も Δ も線形ではないことを注意しておく．一方この場合でも，P_t は各 $p \in [1, \infty]$ に対して L^p-空間上の縮小写像へと一意拡張される．

この項の締めに，微分概念に関する注意を一点加えておく．一般に，滑らかではない空間の場合 (あるいは，関数が滑らかでない場合) には，微分に相当する概念が目的に応じて複数存在する．そのため，それらの概念が一致するかどうかがしばしば問題になる．上で導入した minimal relaxed gradient は Cheeger 型エネルギー汎関数との関係で考えられたものであり，(L^2-) 積分量を考えている時には局所 Lipschitz 定数でうまく近似できる．一方で，曲線に沿った (外) 微分に相当する以下のような概念が測度距離空間上の解析ではしばしば用いられる：$f : X \to \mathbb{R}$ に対して，ある可測関数 $h : X \to [0, \infty)$ で，任意の求長可能な曲線 $\gamma : [0, 1] \to X$ に対して

$$|f(\gamma(1)) - f(\gamma(0))| \leq \int_0^1 h(\gamma(s))|\dot{\gamma}|(s)ds \tag{6.1}$$

をみたす h のことを upper gradient という ($|\dot{\gamma}|$ は，定義 5.2で導入した metric speed)．

[45]重みつき Riemann 多様体の枠組では，この Δ は (5.2) の $\mathcal{L}$ に相当する．(5.2) 直後の脚注参照.

最適輸送理論に関連した解析では，しばしば輸送経路に沿った微分を考える．その際には，upper gradient の概念の方が relaxed gradient よりも使い勝手がよい．実は，考える曲線の族を最適輸送理論に適合する形で制限して (minimal な)upper gradient を考えると，その概念が minimal relaxed gradient と一致することが知られている．

定義 6.4 (minimal weak upper gradient) まず，$\Pi \in \mathcal{P}(\Gamma(X))$ であって以下の条件を満たすものの全体がなす集合を $\mathcal{T}$(試験輸送計画の集合) と定める (記号は3.2.1項を参照)：

$$\Pi\left(\left\{\gamma \in \Gamma(X) \;\middle|\; (\gamma_s)_{s\in[0,1]} \text{ は絶対連続，かつ，} \int_0^1 |\dot\gamma|^2 ds < \infty\right\}\right) = 1, \tag{6.2}$$

$$(e_t)_\sharp \Pi \ll \mathfrak{m} \text{ かつ，各有界集合 } B \subset X \text{ に対して，} \sup_{t\in[0,1]} \left\| \frac{d(e_t)_\sharp\Pi}{d\mathfrak{m}} \right\|_{L^\infty(B,\mathfrak{m})} < \infty. \tag{6.3}$$

可測関数 $f : X \to \mathbb{R}$ と $h : X \to [0,\infty]$ に対して，h が f の weak upper gradient であるとは，各 $\Pi \in \mathcal{T}$ に対して，Π-a.e. γ で (6.1) をみたすことをいう．また，f の weak upper gradient のうち，$\mathfrak{m}$-a.e. の意味で極小となるものが存在する．これを **minimal weak upper gradient** といい，$|\nabla f|_w$ と書く．

Minimal weak upper gradient に関しては，[5] の 5 章を参照のこと[46]．

定理 6.5 (微分概念の一致 [5, Theorem 6.2]) 条件 (V) を仮定する．このとき，各 $f \in D(\mathsf{Ch})$ に対して，$|\nabla f|_* = |\nabla f|_w$ $\mathfrak{m}$-a.e.

証明 考え方の概略を述べる．

まず，$|\nabla f|_* \geq |\nabla f|_w$ について．$f \in \mathrm{Lip}(X)$ に対しては，$|\nabla f|$(局所 Lipschitz 定数) が weak upper gradient になる．従ってこの時は $|\nabla f|_w \leq |\nabla f|$．一般の場合は，Lipschitz 関数列 f_n であって，f_n が f を，$|\nabla f_n|$ が $|\nabla f|_*$ をそれぞれ L^2-近似するものを用いて結論を導く．もう少しだけ詳しく言うと，まず「2 つの関数の a.e. での不等式を出すために，各試験集合上での積分の比較をする」のと類似の発想に基づき，目標となる「$h = |\nabla f|_*$ とした Π-a.e. γ での評価式 (6.1)」を，(6.3) を用いて γ 単位での見方から $\mathfrak{m}$ による積分の評価式に置き換える．その結果，問題を L^2-積分の誤差評価に持ち込むことができ，L^2-近似が有効に機能する状況を作り出せる．

逆向きの証明には，5.4節で見た熱流の同定が有効に機能する．この状況では，f^2 を $\mathfrak{m}$ に関する確率密度関数として一般性を失わない．$\mu_t := P_t(f^2)\,\mathfrak{m}$ とおく．まず，条件 (V) を用いて，$(e_t)_\sharp\Pi = \mu_t$ なる $\Pi \in \mathcal{P}(\Gamma(X))$ が存在し $\mathcal{T}$ の元になるような状況に話が帰着できる．この状況で，Otto 解析で言うところの

$$-\frac{d}{dt}\,\mathrm{Ent}_\mathfrak{m}(\mu_t)|_{t=0} \leq |\nabla \mathrm{Ent}_\mathfrak{m}|(\mu_0)|\dot\mu_0| \tag{6.4}$$

に相当する評価を考える (これが成り立つことは認める)．ここで，P_t が minimal relaxed gradient に対応する Dirichlet エネルギーから定まる熱流であることを踏まえると，

$$-\frac{d}{dt}\,\mathrm{Ent}_\mathfrak{m}(\mu_t) = |\dot\mu_t|^2 = \int_X \frac{|\nabla(f^2)|_*^2}{f^2}\, d\mathfrak{m} = 4\mathsf{Ch}(f)$$

[46] ここでは，[5] の 5 章の一般的な定義よりは，多少話を限定している．

が得られると考えられる (第 3 式は，minimal relaxed gradient による μ_0 の Fisher 情報量である)．実際，$\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu_t)$ の微分は (形式的には) 部分積分公式で計算でき，そこで P_t と (minimal relaxed gradient による) エネルギー汎関数との関係が現れてくる．$|\dot{\mu}_t|$ の計算でも部分積分公式を用いるが，議論はもう少し複雑になる．定理 5.12の証明 ((5.11) と (5.13) の周辺) 参照．ここで，$|\nabla \mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}|$ を W_2 に関する $\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}$ の局所 Lipschitz 定数だと思うと，この量には weak upper gradient を用いた評価が可能であろうと類推できる (最適輸送に沿った，汎関数の微分！；定理 5.9の「(a) $\Rightarrow$ (b)」の証明の後半が，雰囲気を伝えてくれる)．この類推は実現でき，実際にこの量に相当する項として，minimal weak upper gradient による $f^2\,\mathfrak{m}$ の Fisher 情報量を入れた式が成り立つ．その結果，(6.4) から

$$\mathsf{Ch}(f) \le \int_X |\nabla f|_w^2 \, d\mathfrak{m}$$

を得る．この式と前半で示した不等式 $|\nabla f|_* \ge |\nabla f|_w$ を組み合わせると，$|\nabla f|_* = |\nabla f|_w$ が $\mathfrak{m}$-a.e. で成り立つことがわかる． □

6.1.2 無限小ヒルベルト的空間とリーマン的曲率次元条件

前講演で EVI の帰結として得た定理 5.6は，Finsler 多様体上では成り立たないことがある [111] (Riemann 多様体ではない場合には成り立たないと考えられている)．$(X, d, \mathfrak{m})$ に対して，Finsler 多様体的な空間を除外する条件として，以下の概念が [6] で導入された．

定義 6.6 (**無限小ヒルベルト的**) Ch が 2 次形式である (つまり，中線定理をみたす) とき，$(X, d, \mathfrak{m})$ は**無限小ヒルベルト的 (infinitesimally Hilbertian)** であるという．これは，$W^{1,2}(X)$ が前出のノルムで Hilbert 空間になることと同値．

注意 6.7 (**「無限小ヒルベルト的」関連**) ここで紹介する結果は [6] を参照のこと．

(1) $(X, d, \mathfrak{m})$ が無限小ヒルベルト的であれば，(f, f) を $|\nabla f|_*^2$ にうつすような双線形写像 $D(\mathsf{Ch}) \times D(\mathsf{Ch}) \to L^1(\mathfrak{m})$ が存在する．(f, g) のこの写像による像を $\langle \nabla f, \nabla g \rangle$ と書くことにする．つまり，無限小ヒルベルト的の名前の通りに，Ch の密度まで含めて 2 次形式になってしまう．さらに，$\langle \nabla f, \nabla g \rangle$ は通常の chain rule および Leibniz 則をみたすことも分かる．

(2) $(X, d, \mathfrak{m})$ が無限小ヒルベルト的であることと，P_t が線形写像 (特に有界線形かつ対称) であることは同値．

「無限小ヒルベルト的」は，接空間および接空間を内積空間とする計量が (a.e. で) 存在していることの，接空間やその上の計量を用いない定式化と言える．この条件は定理 5.9を測度距離空間で考える時に自然に現れる．すなわち次が成り立つ．

定理 6.8 ($\mathrm{CD}(K, \infty) \Leftrightarrow K$**-EVI on** $(X, d, \mathfrak{m})$) $K \in \mathbb{R}$ に対して，次は同値 [3, 6]．

(A) $(X, d, \mathfrak{m})$ は $\mathrm{CD}(K, \infty)$ をみたし，無限小ヒルベルト的．

(B) $(X,d,\mathfrak{m})$ は条件 (V) をみたし，各 $\mu_0 \in D(\mathrm{Ent}_\mathfrak{m}) \cap \mathcal{P}_2(X)$ に対して μ_0 を初期条件とする K-EVI の意味での $\mathrm{Ent}_\mathfrak{m}$ の勾配流が存在する．

また, (A)(B) いずれかが成り立てば, K-EVI の解は初期値に対して線形になる (凸結合の意味で)．つまり, $(\mu_t^{(0)})_{t\geq 0}, (\mu_t^{(1)})_{t\geq 0}$ が EVI の解ならば, 各 $\lambda \in [0,1]$ で $((1-\lambda)\mu_t^{(0)} + \lambda\mu_t^{(1)})_{t\geq 0}$ も EVI の解になる．また，$f \in L^1(\mathfrak{m})$ が確率密度で $f\,\mathfrak{m} \in \mathcal{P}_2(X)$ のとき，$(P_t f\,\mathfrak{m})_{t\geq 0}$ は K-EVI の解になる．

証明　ここまで準備してきたことがどう活きるのかを伝える，という点に焦点を絞って，概略のみ述べる．(B) $\Rightarrow$ (A) の，無限小ヒルベルト的を導く点のみが非自明 (他の部分の証明 (の概略) は定理 5.9に同じ[47])．

CD(K,∞) が成り立つので，定理 5.12(の，測度距離空間への一般化) より，P_t が定める熱流は EDE の意味での勾配流と一致する．更に注意 5.7 (1)(3) より，EVI の解 (条件 (B) から存在が保証されている) は，P_t が定める熱流に一致する．このことを注意 6.7 (2) と組み合わせると，EVI の解が初期値に対して線形になること (定理の後半部分 !) を示せばよい．この先はここでは割愛する ([6, Theorem 5.1] の証明の (iii) $\Rightarrow$ (i) の部分を参照；ここまで来れば，必要となる追加の知識も含めて，丁寧に書いて 3 頁程度の議論で済む)．□

定義 6.9 (**リーマン的曲率次元条件，その 1**) 定理 6.8の (A) が成り立つとき，$(X,d,\mathfrak{m})$ は **リーマン的曲率次元条件 (Riemannian curvature-dimension condition)** RCD(K,∞) をみたす，あるいは単に「$(X,d,\mathfrak{m})$ は RCD(K,∞) 空間である」という．

実は，RCD(K,∞) 空間は，以前に考えられてきた曲率次元条件よりも様々な意味で「行儀の良い (奇妙な振る舞いをしない)」空間 (族) になっている．このことの実例は 6.4節で述べることとし，先ずは Bochner 不等式との関係に話を移していく．

6.2　リーマン的曲率次元条件と Bochner の不等式

重みつき Riemann 多様体 $(M,g,\mathfrak{m})$ ($\mathfrak{m} = \mathrm{e}^{-V}\,\mathrm{vol}_g$, $V \in C^\infty(M)$) 上では, 次の式 ($V=0$ のときが，Bochner-Weitzenböck 公式) が知られている：$f \in C^\infty(M)$ に対して,

$$\frac{1}{2}\mathcal{L}|\nabla f|^2 - \langle \nabla f, \nabla \mathcal{L} f\rangle = \|\mathrm{Hess}\, f\|_{\mathrm{HS}}^2 + \mathrm{Ric}_\infty(\nabla f, \nabla f)$$

(ただし, $\mathcal{L}$ は (5.2) で与えたもので, Ric_∞ は定義3.1参照)．ここで, $\|\cdot\|_{\mathrm{HS}}^2$ は Hilbert-Schmidt ノルムを表す．すなわち，$\{e_i\}_{i=1}^n$ を T_xM の正規直交基底とすると，$\|\mathrm{Hess}\, f\|_{\mathrm{HS}}(x)^2 = \sum_{i,j} \mathrm{Hess}\, f(e_i,e_j)^2$．簡単な線形代数により，$\|\mathrm{Hess}\, f\|_{\mathrm{HS}}^2 \geq \dfrac{1}{n}(\mathrm{tr}\,\mathrm{Hess}\, f)^2 = \dfrac{1}{n}(\Delta f)^2$ が分かる．これを上記公式と組み合わせると，$K \in \mathbb{R}$, $N \in (n,\infty]$ に対して $\mathrm{Ric}_N \geq K$ のとき,

$$\frac{1}{2}\mathcal{L}|\nabla f|^2 - \langle \nabla f, \nabla \mathcal{L} f\rangle \geq K|\nabla f|^2 + \frac{1}{N}(\mathcal{L} f)^2$$

[47] ただし，議論を厳密化する為には，かなりの (非自明な) 近似が必要である．まず $\mathfrak{m} \in \mathcal{P}_2(X)$ の場合に解決され [6]，後に $\mathfrak{m}$ が σ-有限の場合に拡張された [3].

を得る ($N=\infty$ は $1/N=0$ と解釈する)．これを (K,N)-**Bochner 不等式**と言う[48]．各点毎に, その点の近傍で試験関数をうまく取ることで, Bochner 不等式が成り立てば $\mathrm{Ric}_N \geq K$ となることも分かる．つまり，Bochner 不等式は曲率次元条件の解析的な定式化になっている (歴史的にはこちらの方がずっと古い)．注意 3.3 (a) も参照のこと．

注意 3.3 (a) でも紹介されていたように，この不等式は幾何解析で極めて強力かつ根源的な道具として，その応用が盛んに研究されてきた．一方で，式の形を見ると分かるように，Bochner 不等式における曲率や次元の情報は微分演算から抽出している．そのため, 測度距離空間上で Bochner 不等式が成り立つかどうかは極めて非自明な問題であった (微分の対応物は定義できても，曲率の情報を微分から直接引き出すことは絶望的であろう). 実際，Bakry-Émery の Γ-calculus など，Bochner 不等式を礎として抽象的な枠組で機能する理論が開発・研究されていたにも関わらず，通常の可微分構造を持たない特異空間での Bochner 不等式の検証は，ごく近年まで全くなかったと言ってよい (離散空間上では若干の例がある；[24] 等参照).

以下に見るように，特異空間での Bochner 不等式の証明には，熱流の解析が深く関わっている．特に，熱流の同定により，曲率次元条件が持つ曲率の情報を熱流に伝達できたこと (W_2-収縮性!) が理論展開を一気に加速した．実際に，その研究の歩みは特異空間上での熱流の同定とほぼ時を同じくし，コンパクト Alexsandrov 空間での証明 [62] を出発点として，[3, 6, 7] において $N=\infty$ の理論がほぼ完成し，続いて [47] により $N<\infty$ の場合が補完された.

注意 6.10 (Γ-calculus) Γ-calculus では，まず測度空間とその L^2-空間上の (非有界) 自己共役作用素 $\mathcal{L}$ を与えるところを出発点とする．この文脈では，$\langle \nabla f_1, \nabla f_2 \rangle$ に相当するものとして平方場作用素 (carré du champ)$\Gamma(f_1,f_2)$ を

$$\Gamma(f_1,f_2) := \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}(f_1f_2) - f_1\mathcal{L}f_2 - f_2\mathcal{L}f_1\right)$$

と ($\mathcal{L}$ を用いて) 定める．底空間の距離は，この Γ を用いた内在的距離として定める．また，上記の Γ を作る操作を関数の各点毎の積 f_1f_2 の代わりに $\Gamma(f_1,f_2)$ に対して適用することで，次の定義を得る：

$$\Gamma_2(f_1,f_2) := \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}\Gamma(f_1,f_2) - \Gamma(f_1,\mathcal{L}f_2) - \Gamma(\mathcal{L}f_1,f_2)\right)$$

(勿論，これらの概念を正しく定義するには，然るべき正則性の条件が必要になる)．この枠組では，(K,N)-Bochner 不等式は次のように書ける：

$$\Gamma_2(f,f) \geq K\Gamma(f,f) + \frac{1}{N}(\mathcal{L}f)^2.$$

[48] Bakry-Émery の曲率次元条件 $\mathrm{BE}(K,N)$ あるいは energetic curvature-dimension condition 等とも呼ばれる．Γ-calculus の世界ではこれが先にあったので，わざわざ “Bakry-Émery の” とは断らずに単に曲率次元条件と呼び，記号も $\mathrm{CD}(K,N)$ と書く．歴史的経緯から言えば最適輸送での曲率次元条件の記号は Γ-calculus での記号の流用なので致し方ないが，ややこしい.

以上の詳細は例えば [12] を，Γ-calculus と RCD 空間の橋渡しには [7, 128] 等を，それぞれ参照のこと．ここで見て取れるように，Γ-calculus では若干設定が異なり，また理論の適用に技術的な仮定を要する場合がある．従って，Γ-calculus で既知の結果が全て直ちに RCD 空間に拡張できる，というわけではない．

以下，この節では $\mathrm{RCD}(K,\infty)$ 空間上で (K,∞)-Bochner 不等式が成り立つことを見ていく (逆向きの導出については，この説の最後に少し述べる)．ここで紹介する内容の詳細は，[3, 6] を参照のこと．まず，$\mathrm{RCD}(K,\infty)$ 空間上では，$\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}$ の勾配流と Ch の勾配流との同定は，以下の形まで深められる．

命題 6.11 (RCD **空間上の熱流の性質**) $\mathrm{RCD}(K,\infty)$ 空間上では，P_t は対称な積分核 (熱核密度)p_t を持つ．更に $(\mu_t^x)_{t\geq 0}$ を $\mu_0=\delta_x$ をみたす EVI の解とすると，各 $f\in L^2(\mathfrak{m})$ に対して

$$P_tf(x)=\int_X f\,d\mu_t^x \quad \mathfrak{m}\text{-a.e. } x.$$

更に，$f\in L^\infty(\mathfrak{m})$ に対して上式の右辺は有界かつ $(t,x)\in(0,\infty)\times X$ の関数として連続．

証明　例によって概略のみ述べる．まず $f\in C_0(X)$ とする．$f\,\mathfrak{m}$ を Dirac 測度の有限線形結合で (W_2 の意味で) 近似し，EVI の線形性を用いると，定理 6.8と注意 6.7 (2) より，

$$P_tf(x)\,\mathfrak{m}(dx)=\left(\int_X f\,d\mu_t^x\right)\mathfrak{m}(dx)$$

が得られる (左辺を，初期値 $f\,\mathfrak{m}$ の EVI の解とみる)．従って両辺の密度が一致し，P_tf の表示を得る (一般の f に対しては近似)．EVI の定義より $t>0$ ならば $\mu_t^x\in D(\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}})$．従って μ_t^x は $\mathfrak{m}$ に関する密度を持ち，これが熱核密度 p_t になる．p_t の対称性は P_t の対称性から分かる．なお，連続性の証明は省略する ([6, Theorem 6.1] 参照；この命題の，ここまでで示した結果を用いる)．　□

応用として，以上から，$\mu_0=\mu$ をみたす EVI の解を $(\mu_t)_{t\geq 0}$ とおくと，

$$\int_X f\,d\mu_t=\int_X P_tf\,d\mu$$

が成り立つ．このことから，μ_t を以下では $P_t^*\mu$ と書くことにする．$\mu=f\,\mathfrak{m}$ であれば，$P_t^*\mu=P_tf\,\mathfrak{m}$ になる．

定理 6.12 (RCD $\Rightarrow$ **Bochner**) $(X,d,\mathfrak{m})$ を $\mathrm{RCD}(K,\infty)$ 空間とする．このとき以下が成立．

(C) **(W_2-収縮性)** 各 $\mu_0,\mu_1\in\mathcal{P}_2(X)$, $t>0$ で，

$$W_2(P_t^*\mu_0,P_t^*\mu_1)\leq \mathrm{e}^{-Kt}W_2(\mu_0,\mu_1).$$

(D) **(Bakry-Émery の微分評価)** 各 $f \in W^{1,2}(X)$, $t > 0$ で

$$|\nabla P_t f|_*^2 \le \mathrm{e}^{-2Kt} P_t(|\nabla f|_*^2).$$

(E) **(弱 (K,∞)-Bochner 不等式)** $f \in D(\Delta)$ かつ $\Delta f \in W^{1,2}(X)$ をみたす f と $h \in D(\Delta)$, $h \ge 0$ かつ $\Delta h \in L^\infty(\mathfrak{m})$ をみたす h に対して，次が成立する：

$$\frac{1}{2}\int_X \Delta h |\nabla f|_*^2 \, d\mathfrak{m} - \int_X h\langle \nabla f, \nabla \Delta f\rangle \, d\mathfrak{m} \ge K \int_X h |\nabla f|_*^2 \, d\mathfrak{m}.$$

注意 6.13 (定理 6.12に現れる種々の評価について)

(1) 前定理の (D) の式において，両辺あるいは左辺のみの minimal relaxed gradient を局所 Lipschitz 定数に置き換えた式が成り立つ．そのことから，$f \in \mathrm{Lip}(X) \cup W^{1,2}(X)$ のとき $P_t f$ は Lipschitz 連続になることが分かる．このことを Bakry-Émery 理論と組み合わせることで，次の評価が得られる：各 $x \in X$ で

$$|\nabla P_t f|(x) \le \sqrt{\frac{K}{\mathrm{e}^{2Kt}-1}}\|f\|_\infty, \tag{6.5}$$

ただし，右辺の係数は，$K = 0$ のときは $K \to 0$ の極限すなわち $1/\sqrt{2t}$ とみなす．ここから，$f \in L^\infty(\mathfrak{m})$ であれば $t > 0$ で $P_t f \in \mathrm{Lip}_b(X)$ が従う．

また，別の応用として，

「$f \in D(\mathsf{Ch})$ かつ $|\nabla f|_* \le 1$ であれば，$f \in \mathrm{Lip}(X)$ かつ各 $x \in X$ で $|\nabla f|(x) \le 1$」

が成り立つことも分かる．これを**条件 (L)** と呼ぶことにする．

(2) 然るべき設定のもと，条件 (C) と条件 (D)(あるいは (1) で述べたような (D) の修正版) は，直接的な証明を通じて同値になる ([3, 6] の他，[17, 84] を参照).「(D) $\Rightarrow$ (C)」の証明には，Kantorovich 双対性と Hopf-Lax 半群を用いる．

(3) 条件 (D) と条件 (E) は緩い条件の下で同値になる．このことは，熱半群を Bakry-Émery 理論の枠組で扱う際の最も基本的な結果である (例えば [12] 参照).

大雑把に証明を述べておく．「(D) $\Rightarrow$ (E)」では，(D) の式は $t = 0$ で等号が成立することから，$t = 0$ での微分まで不等式が伝播する．そこで Bochner 不等式が得られる．また「(E) $\Rightarrow$ (D)」では，$\Phi(s) := P_s(|\nabla P_{t-s} f|_*^2)$ の挙動を調べる．(E) の式から $\Phi'(s) \ge K\Phi(s)$ が (少なくとも形式的には) 分かるので，これを積分すれば良い．

(4) 条件 (E) で試験関数 h を用いて書いているのは，$|\nabla f|^2 \in D(\Delta)$[49]が一般には分からないため．一方で，$f$ の条件を，「$f \in D(\Delta) \cap L^\infty(\mathfrak{m})$, $|\nabla f|_* \in L^\infty(\mathfrak{m})$ かつ $\Delta f \in W^{1,2}(X)$」まで強めると，$\Delta|\nabla f|_*^2$ が測度として (すなわち，ある種の超関数的な意味

[49]正確には $D(\Delta)$ は L^1 の意味での定義域．

で) 定まり，条件 (E) を測度に関する不等式として h を使わずに書ける．更に，この見方により，Γ-calculus における技術上の仮定が回避でき，$\mathrm{RCD}(K,\infty)$ 空間上の解析に Bakry-Émery 理論のより深い結果が適用可能になる ([59, 128] 参照)．例えば，その帰結として，(D) の精密化である

$$|\nabla P_t f|_* \le \mathrm{e}^{-Kt} P_t(|\nabla f|_*)$$

が得られる．この不等式は様々な関数不等式の導出に利用できる強力な評価である．例えば Bakry-Émery 理論の基本的な結果として，この不等式から対数 Sobolev 不等式を ($K>0$ の場合に) 導くことができる．

証明　仮定から $(C) \Rightarrow (D) \Rightarrow (E)$ の順に示す．(C) は定理 6.8と定理 5.6から直ちに従う．

次に「(C) $\Rightarrow$ (D)」の証明のおおまかな考え方を述べる．$f \in \mathrm{Lip}(X)$ として，minimal relaxed gradient の代わりに局所 Lipschitz 定数に対する結果として示す．Minimal relaxed gradient の場合は，そこからうまく (最適輸送に沿った) 積分の形に持ち込んで近似する．ここでは [84] の証明を土台とするが，最適輸送を用いた (もう少し洗練された) 証明が [6, Theorem 6.2] で述べられている．$t>0$ を固定し，$x,y \in X$ とする．また，$\pi \in \Pi(P_t^*\delta_x, P_t^*\delta_y)$ を W_2 に関する最適カップリングとする．このとき，

$$|P_t f(y) - P_t f(x)| = \left| \int_X f\, dP_t^*\delta_y - \int_X f\, dP_t^*\delta_x \right| = \left| \int_{X\times X} (f(z)-f(w))\, \pi(dzdw) \right|$$

を得る．$|f(z)-f(w)| \le |\nabla f|(z) d(z,w) +$ (誤差項) と考えられるので，誤差項を無視すると，Schwarz 不等式と (C) から，

$$\begin{aligned}|P_t f(y) - P_t f(x)| &\le \sqrt{\int_{X\times X} |\nabla f|(z)^2\, \pi(dzdw) \int_{X\times X} d(z,w)^2\, \pi(dzdw)} \\ &\le \sqrt{P_t(|\nabla f|^2)(x)} W_2(P_t^*\delta_x, P_t^*\delta_y) \le \mathrm{e}^{-Kt}\sqrt{P_t(|\nabla f|^2)(x)} d(x,y).\end{aligned}$$

ここまで来れば，あとは容易．

最後に，「(D) $\Rightarrow$ (E)」は注意 6.13 (3) から分かる．　□

以下の形で Bochner 不等式から $\mathrm{RCD}(K,\infty)$ が従うことを注意して，この節を締める．

定理 6.14 (Bochner $\Rightarrow$ RCD) $(X,d,\mathfrak{m})$ は条件 (V)，注意 6.13 (1) の条件 (L) をみたし，かつ無限小ヒルベルト的と仮定する．このとき，定理 6.12の (C)(D)(E) いずれかの条件が成り立てば，$(X,d,\mathfrak{m})$ は $\mathrm{RCD}(K,\infty)$ 条件をみたす[50].

証明は省略する ((D) から (A) に至る)．[7] 参照．

[50] この主張はやや不正確なところがある．例えば (C) から話を始める場合には，P_t^* の定義をどのようにするのか，といったことが解決できなければならない．実際にどう問題設定するのかは，[7] 参照．

6.3 エントロピー的曲率次元条件

ここでは，前節の結果を $N<\infty$ の場合に拡張する．先に答を書いてもよいのだが，まず歴史的経緯と難点を説明する．$N<\infty$ の場合の曲率次元条件は，3 章で見たように，相対エントロピー $\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}$ ではなく Rényi エントロピー S_N で記述されていた．結果として熱流との関係がはっきりしないため，前節のような議論は条件から直接は展開できない．この障壁を突破する方法として，少なくとも以下の 2 つのアプローチが考えられる．

- 熱流の代わりに，S_N の勾配流 (多孔媒質方程式) を用いる．
- $\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}$ で $N<\infty$ の場合の曲率次元条件を記述する．

近年，それぞれの方法に基づく結果がほぼ同時期に登場した．前者を採ったのが [8] であり，後者に拠ったのが [47] である．以下では，後者の結果を説明する．なお，**以下で考察する各条件は全て，N が大きく K が小さい方が弱く，$N\to\infty$ とすると，$N=\infty$ での対応する結果 (前節参照) を導くことが (他の条件との言い換えなしで直接) 示せる**．

まず，Otto 解析による発見的考察を紹介する．(K,N)-Bochner 不等式を出発点として，相対エントロピーの 2 階微分 (そこに曲率の情報が詰まっていた) を評価する．$(\mu_t)_{t\in[0,1]}$ は W_2-最短測地線であって，$\mu_t=\rho_t\,\mathfrak{m}$ とする．また，$\dot{\mu}_t=\nabla\varphi_t\in T_{\mu_t}\mathcal{P}_2(X)$ と書くことにする．このとき，命題 4.2および注意 4.3より，φ_t は次の Hamilton-Jacobi 方程式をみたす：

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi_t+\frac{1}{2}|\nabla\varphi_t|^2=0.$$

すべての関数が充分に滑らかだとすると，μ_t の連続方程式から，以下を得る：

$$|\dot{\mu}_t|^2=\int_X|\nabla\varphi_t|^2\,d\mu_t, \tag{6.6}$$

$$\frac{d}{dt}\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu_t)=\langle\!\langle\nabla\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu_t),\dot{\mu}_t\rangle\!\rangle=\int_X\langle\frac{\nabla\rho_t}{\rho_t},\nabla\varphi_t\rangle\,d\mu_t=-\int_X\Delta\varphi_t\,d\mu_t, \tag{6.7}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2}\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu_t)&=\mathrm{Hess}\,\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\dot{\mu}_t,\dot{\mu}_t)=\frac{1}{2}\int_X\Delta|\nabla\varphi_t|^2\,d\mu_t-\int_X\langle\nabla\Delta\varphi_t,\nabla\varphi_t\rangle\,d\mu_t\\&\geq K\int_X|\nabla\varphi_t|^2\,d\mu_t+\frac{1}{N}\int_X(\Delta\varphi_t)^2\,d\mu_t\\&\geq K\int_X|\nabla\varphi_t|^2\,d\mu_t+\frac{1}{N}\left(\int_X\Delta\varphi_t\,d\mu_t\right)^2\end{aligned} \tag{6.8}$$

((6.8) の導出に (K,N)-Bochner 不等式を用いた)．(6.6) および (6.7) を (6.8) に代入すると，次を得る：

$$\mathrm{Hess}\,\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}-\frac{1}{N}\nabla\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}\otimes\nabla\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}\geq K. \tag{6.9}$$

注意 6.15 上記の議論を $N=\infty$ の時に適用すると，4.2節で展開した「$\mathrm{Ric}_\infty\geq K$ ならば $\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}$ は K 凸」の，Bochner 不等式に基づく別証明を与えることができる (いずれも Otto 解析の枠組での形式的な議論ではあるが)．

ここで $U_N := \exp\left(-\frac{1}{N}\,\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}\right)$ とおくと，微分不等式 (6.9) は以下の形の U_N の凹性

$$\operatorname{Hess} U_N \le -\frac{K}{N} U_N$$

と同値であることが容易に分かる[51]．後者は 2 階線形微分不等式であるので，比較定理を用いて，微分を使わない式で言い換えることができる．そうして得られるのが，以下で述べるエントロピー的曲率次元条件 (entropic curvature-dimension condition) である．準備として，関数 σ_κ^t を以下で定める：

$$\sigma_\kappa^t(r) := \frac{\mathbf{s}_\kappa(tr)}{\mathbf{s}_\kappa(r)}$$

($\mathbf{s}_\kappa$ は3.1.1項のもの)．$\sigma_{K/N}^t$ は3.1.3項の $\beta_{K,N}^t$ に類似の起源を持ち，$\beta_{K,N}^t = (\sigma_{K/(N-1)}^t/t)^{N-1}$ という関係をみたす．

定義 6.16 (エントロピー的曲率次元条件) $K \in \mathbb{R}$, $N \in (1,\infty]$ に対して，$(X,d,\mathfrak{m})$ が (K,N)-**エントロピー的曲率次元条件** ($\mathrm{CD}^e(K,N)$ と書く) をみたす，とは，各 $\mu_0,\mu_1 \in \mathcal{P}_2(X)$ に対して W_2-最短測地線 $(\mu_t)_{t\in[0,1]}$ で以下をみたすものが存在することをいう：

$$U_N(\mu_t) \ge \sigma_{K/N}^{1-t}(W_2(\mu_0,\mu_1))U_N(\mu_0) + \sigma_{K/N}^t(W_2(\mu_0,\mu_1))U_N(\mu_1). \tag{6.10}$$

この性質のことを，「$\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}$ は $(\mathcal{P}_2(X),W_2)$ 上で (K,N) 凸」とも言う．

注意 6.17 ((K,N) 凸性への補足) $\mathrm{CD}^e(K,N)$ の定義式の右辺を $\Psi(t)$ と書くと，$\Psi(t)$ は以下の常微分方程式の (一意) 解となっている．

$$\Psi''(t) = -\frac{K}{N}W_2(\mu_0,\mu_1)^2\Psi(t), \quad \Psi(0) = U_N(\mu_0), \quad \Psi(1) = U_N(\mu_1).$$

このことから，定義式は比較定理の形になっていると分かる．

まず，この条件と従来の曲率次元条件との関係を見ておく．そのために，[9] で定式化された，簡約曲率次元条件 (reduced curvature-dimension condition) を導入する．これは，おおまかには，「$\mathrm{CD}(K,N)$ 条件を (曲率次元条件としての特性を充分に残しつつ) 少し弱めて，各種の幾何学的操作でよい振る舞いをするようにしたもの」と言える．

定義 6.18 (簡約曲率次元条件) $(X,d,\mathfrak{m})$ が (K,N)-**簡約曲率次元条件** ($\mathrm{CD}^*(K,N)$) をみたす，とは，各 $\mu_i \in \mathcal{P}(X)$, $\mu_i = \rho_i\,\mathfrak{m}$ で ρ_i は有界な台を持つもの $(i=0,1)$ と μ_0 から μ_1 に至る W_2-最短測地線 $(\mu_t)_{t\in[0,1]}$ に対して，

$$S_N(\mu_t) \le -\int_{M\times M}\left\{\sigma_{K/N'}^{1-t}(d(x_0,x_1))\rho_0(x_0)^{-1/N'} + \sigma_{K/N'}^t(d(x_0,x_1))\rho_1(x_1)^{-1/N'}\right\}\pi(dxdy)$$

が全ての $t \in (0,1)$ と $N' \ge N$ で成り立つこととする．ただし $\pi \in \Pi(\mu_0,\mu_1)$ は μ_0 と μ_1 の最適カップリングとする．

[51] U_N は，情報理論で entropy power と呼ばれる汎関数である [42].

定理 6.19 **($\mathrm{CD}^*(K,N)$ と $\mathrm{CD}(K,N)$ の関係)** $\mathrm{CD}(K',N)$ が全ての $K'<K$ で成り立つとき，$\mathrm{CD}(K-,N)$ 条件をみたす，ということにする ($\mathrm{CD}^*(K-,N)$ も同様)．また，局所的に $\mathrm{CD}(K,N)$ をみたす (正確な定義は省略する) とき，$\mathrm{CD}_{\mathrm{loc}}(K,N)$ 条件をみたす，という ($\mathrm{CD}^*_{\mathrm{loc}}(K,N)$ も同様)．このとき，次の関係が成り立つ．

(1) (重みつき)Riemann 多様体上では，$\mathrm{CD}(K,N) \Leftrightarrow \mathrm{CD}^*(K,N)$.

(2) $K>0$ のとき，$\mathrm{CD}(K,N) \Rightarrow \mathrm{CD}(K^*,N) \Rightarrow \mathrm{CD}((N-1)K/N,N)$.

(3) (X,d) 上の測地線は不分岐とする (その意味は6.4節参照)．このとき，次が成立：

$$\mathrm{CD}_{\mathrm{loc}}(K-,N) \Leftrightarrow \mathrm{CD}^*_{\mathrm{loc}}(K-,N) \Leftrightarrow \mathrm{CD}^*(K,N).$$

注意 6.20

(1) 一般に $\mathrm{CD}(K,N)$ と $\mathrm{CD}_{\mathrm{loc}}(K,N)$ は同値ではない [124]．これは「CD^* 条件の方が CD 条件よりも幾何学的な操作でよい振る舞いをする」ことの例になっている．

(2) 3 章で見た，一般化された Bishop-Gromov の体積比較定理を $\mathrm{CD}^*(K,N)$ 条件 (ただし $N<\infty$) から直接導出しようとすると，定理 6.19 (2)(3) から類推されるように，少し弱い (精密でない) 評価しか従わない[52]．しかし，曲率次元条件の弱い意味での定式化である measure contraction property が $\mathrm{CD}^*(K,N)$ から従い [29]，そこから精密な結果が得られる．

定理 6.21 **($\mathrm{CD}^e(K,N) \Leftrightarrow \mathrm{CD}^*(K,N)$)** 次は同値.

(A′) $(X,d,\mathfrak{m})$ は無限小ヒルベルト的，かつ $\mathrm{CD}^e(K,N)$ をみたす.

(A″) $(X,d,\mathfrak{m})$ は無限小ヒルベルト的，かつ $\mathrm{CD}^*(K,N)$ をみたす.

証明 考え方のみ述べる．この同値性は，それぞれの条件が (各最適輸送経路へと) 局所化された条件と同値であることを通じて得られる．その条件とは以下の通りである (記号は 3.2.1項を参照)：各 $\mu_0,\mu_1 \in \mathcal{P}(X)$ で有界な台を持つものに対して，$\Pi \in \mathcal{P}(\Gamma(X))$ で $(e_t)_\sharp\Pi \ll \mathfrak{m}$ ($(e_t)_\sharp\Pi = \rho_t\,\mathfrak{m}$ と書くことにする) かつ，$((e_t)_\sharp\Pi)_{t\in[0,1]}$ が μ_0 から μ_1 に至る最短測地線となるものであって，

$$\rho_t(\gamma_t)^{-1/N} \ge \sigma^{1-t}_{K/N}(d(\gamma_0,\gamma_1))\rho_0(\gamma_0)^{-1/N} + \sigma^{t}_{K/N}(d(\gamma_0,\gamma_1))\rho_1(\gamma_1)^{-1/N} \tag{6.11}$$

を Π-a.e. γ でみたすものが存在する．実際，(6.11) を積分すれば $\mathrm{CD}^*(K,N)$ が得られる．$\mathrm{CD}^e(K,N)$ の導出はもう少し複雑であるが．うまく Jensen の不等式を用いる．

[52] 少し弱い評価は $\mathrm{CD}^*(K,N)$ と $\mathrm{CD}^e(K,N)$ いずれからも出る．結果として $\mathfrak{m}$ が volume doubling property をみたすことが分かり，そこから (X,d) は局所コンパクトと分かるので，弱い評価でも意味はある (特に閉球はコンパクトになる [21, Proposition 2.5.22])．同様に弱い Bonnet-Myers 型直径評価も出るので，$K>0$, $N<\infty$ なら空間はコンパクト．

逆向きの，$\mathrm{CD}^*(K,N)$ または $\mathrm{CD}^e(K,N)$ からの (6.11) の導出では，「$(X,d,\mathfrak{m})$ 上の測地線が不分岐」に相当する性質が要になる．実は，この条件を測度論的な意味で弱めたもの (今の場合はこれで充分) が $\mathrm{RCD}(K,\infty)$ 空間で成り立つ (6.4節参照)．(A$'$)(A$''$) いずれの条件からも $\mathrm{RCD}(K,\infty)$ 条件が従うので，そこから結論が得られる． □

注意 6.22 (**S_N と U_N の関係**) $\mathrm{CD}^*(K,N)$ と $\mathrm{CD}^e(K,N)$ を記述する汎関数である S_N と U_N の間には，Jensen の不等式に基づく次の関係がある：

$$-S_N(\rho\,\mathfrak{m}) = \int_X \rho^{-1/N}\rho\,d\mathfrak{m} \ge \exp\left(-\frac{1}{N}\int_X (\log\rho)\rho\,d\mathfrak{m}\right) = U_N(\rho\,\mathfrak{m})$$

(この不等式は「もし $\rho\,\mathfrak{m}$ が Dirac 測度であれば」等式になる)．これを見れば，$\mathrm{CD}^*(K,N)$ と $\mathrm{CD}^e(K,N)$ のそれぞれの局所化で同じ式 (6.11) が現れることは，そこまで不思議ではないかもしれない．

定義 6.23 (**リーマン的曲率次元条件，その 2**) 定理6.21の (A$'$) が成り立つとき，$(X,d,\mathfrak{m})$ は**リーマン的曲率次元条件 (Riemannian curvature-dimension condition)** $\mathrm{RCD}^*(K,N)$ をみたす，あるいは単に「$(X,d,\mathfrak{m})$ は $\mathrm{RCD}^*(K,N)$ 空間である」という．

さて，以上で $\mathrm{RCD}^*(K,N)$ 空間を導入した．この空間では，前節と類似の議論を経由して，(K,N)-Bochner 不等式が証明できる．以下，その道筋を紹介しよう．

定義 6.24 (**熱流による曲率次元条件達** ($N<\infty$))

(1) (**(K,N)-EVI**) $\mu_0 \in D(\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}})$ とする．$\mathcal{P}_2(X)$ 上の曲線 $(\mu_t)_{t\ge 0}$ が **μ_0 を初期条件とする (K,N)-EVI の意味での $\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}$ の勾配流**であるとは，$(\mu_t)_{t>0}$ が絶対連続曲線であって，$\lim_{t\to 0} W_2(\mu_t,\mu_0)=0$，かつ，各 $\nu\in\mathcal{P}_2(X)$ に対して以下が成り立つこととする：

$$\frac{d}{dt}\mathbf{s}^2_{K/N}\left(\frac{W_2(\mu_t,\nu)}{2}\right) + K\mathbf{s}^2_{K/N}\left(\frac{W_2(\mu_t,\nu)}{2}\right) \le \frac{N}{2}\left(1-\frac{U_N(\nu)}{U_N(\mu_t)}\right).$$

(2) (**時空間 W_2-収縮性**) 各 $\mu_0,\mu_1\in\mathcal{P}_2(X)$, $t,s\ge 0$ に対して次が成り立つとき，P_t^* は ((K,N) について) **時空間 W_2-収縮性**をみたす，という：

$$\begin{aligned}&\mathbf{s}^2_{K/N}\left(\frac{W_2(P_t^*\mu_0,P_s^*\mu_1)}{2}\right)\\ &\qquad\le \mathrm{e}^{-K(s+t)}\mathbf{s}^2_{K/N}\left(\frac{W_2(\mu_0,\mu_1)}{2}\right) + \frac{N}{2}\cdot\frac{1-\mathrm{e}^{-K(s+t)}}{K(s+t)}\left(\sqrt{t}-\sqrt{s}\right)^2.\end{aligned}$$

(3) (**Bakry-Ledoux の微分評価**) ある関数 $C:(0,\infty)\to(0,\infty)$ で，$C(t)=1+O(t)$ ($t\to 0$) をみたすものがあって，各 $f\in W^{1,2}(X)$, $t>0$ に対して次が成り立つとき，P_t は ((K,N) について)**Bakry-Ledoux の微分評価**をみたす，という：

$$|\nabla P_t f|_*^2 + \frac{2tC(t)}{N}|\Delta P_t f|^2 \le \mathrm{e}^{-2Kt}P_t(|\nabla f|_*^2) \quad \mathfrak{m}\text{-a.e.}$$

(4) **(弱 (K,N)-Bochner 不等式)** $f \in D(\Delta)$, $\Delta f \in W^{1,2}(X)$ なる f と $h \in D(\Delta) \cap L^\infty(\mathfrak{m})$, $h \geq 0$ かつ $\Delta h \in L^\infty(\mathfrak{m})$ なる h に対して次が成り立つとき，$(X,d,\mathfrak{m})$ は**弱 (K,N)-Bochner 不等式**をみたす，という：

$$\frac{1}{2}\int_X \Delta h |\nabla f|_*^2 \, d\mathfrak{m} - \int_X h \langle \nabla f, \nabla \Delta f \rangle \, d\mathfrak{m} \geq K \int_X h |\nabla f|_*^2 \, d\mathfrak{m} + \frac{1}{N}\int_X h(\Delta f)^2 \, d\mathfrak{m}.$$

注意 6.25 (定義 6.24の諸条件に対する補足)

(1) (K,N)-EVI および時空間収縮性は，5.2節で扱ったように，距離空間 (あるいは Riemann 多様体) の枠組で一般の (汎) 関数の勾配流に関する理論として書ける ([47] の 2 章参照)．一方で，滑らかな空間の場合でも，(K,N) 凸性に基づく勾配流の解析はおそらく未知であったと思われる．

(2) (K,N)-EVI の式は，補題 5.5の証明の議論と同様にして (6.9) から Otto 解析で形式的に導くことができる．(6.9) から時空間 W_2-収縮性も Otto 解析で導けるが，少し難しい (2 つの勾配流を考えるところまでは同じだが，時間スケールを変える必要がある．その変え方をうまく見つけなければならない)．

(3) 定義 6.24 (3) で $C(t)$ という関数を導入している理由は，「この式を他の条件から導出する場合，出発点となる条件や議論のやり方によって違う定数が現われる」ことによる．この形から他の条件に移行できるため，情報を損なってはいない．

(4) $N = \infty$ の時と同様に，「(C′) ⇔ (D′)」および「(D′) ⇔ (E′)」には直接的な議論による証明がある (それぞれ，[86]，[7, 14, 47] 参照)．

定理 6.26 (RCD* ⇔ **Bochner)**

(1) 次は同値.

(A′) $(X,d,\mathfrak{m})$ は $\mathrm{RCD}^*(K,N)$ 条件をみたす．

(B′) 各 $\mu_0 \in D(\mathrm{Ent}_\mathfrak{m})$ に対して，μ_0 を初期条件とする (K,N)-EVI の解が存在する．

(2) (B′) が成り立つとする．このとき以下が成立.

(C′) P_t^* は (K,N) について時空間 W_2-収縮性をみたす．

(D′) P_t は (K,N) について Bakry-Ledoux の微分評価をみたす．

(E′) $(X,d,\mathfrak{m})$ は弱 (K,N)-Bochner 不等式をみたす．

(3) $(X,d,\mathfrak{m})$ は条件 (V)，注意 6.13 (1) の条件 (L) をみたし，かつ無限小ヒルベルト的と仮定する．このとき，(2) の (C′)(D′)(E′) いずれかの条件が成り立てば，$(X,d,\mathfrak{m})$ は $\mathrm{RCD}(K,\infty)$ 条件をみたす[53]．

[53]定理 6.14の場合と同様に，この主張はやや不正確.

証明　基本的な考え方は $N=\infty$ の場合に帰するので，要点のみ述べる ($N=\infty$ で省略した話は，こちらでも省略する)．まず，いずれの議論の起点からも $\mathrm{RCD}(K,\infty)$ が従い，前節で述べたような性質が全て利用可能になる点が，様々な議論を展開する上で (技術上) 重要になる[54].

(2) で (C′) を (B′) から導く際には，2 つの勾配流の時間スケールを変えて $N=\infty$ の場合と同様の議論を行う．ただ，Otto 解析の場合に比べると，単純な変換で済む．また，「(C′) $\Rightarrow$ (D′)」についてコメントしておく．(C′) では時間のズレを含んでおり，その結果として，「(C) $\Rightarrow$ (D)」で行った評価の代わりに $|P_t f(x) - P_s f(y)|$ の評価が可能になる．結果として，時間のズレの部分から Bakry-Ledoux の微分評価の $\Delta P_t f$ を含む項が現れる．

(3) では，やはり (D′) から (A′) を導く．考え方の基礎はこの節の冒頭で紹介した Otto 解析にあるが，(E′) から (A′) に至るわけではない (そういう方法もあるかもしれないが，既存の証明ではそうなってはいない).

6.4　リーマン的曲率次元条件に関する補足

$\mathrm{RCD}^*(K,N)$ 空間 (以下，$N=\infty$ の場合もこう書く) は，$\mathrm{CD}(K,N)$ 空間では是非の不明な (あるいは成立しないと既知の) よい性質を持つ．ここまでの話と関係のあるものに絞って，それらのうち幾つかをここに紹介しておく．

(1) **(強 K 凸性)** $(X,d,\mathfrak{m})$ が $\mathrm{RCD}^*(K,N)$ をみたすならば，$\mathcal{P}_2(X)$ の**全ての**最短測地線 $(\mu_t)_{t\in[0,1]}$ に沿って $\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}$ は (6.10) をみたす．

(2) **(保存性)** $\mathrm{RCD}^*(K,N)$ 条件は，測度つき Gromov-Hausdorff 収束で保存される ([6, Theorem 6.11], [47, Theorem 3.22], [63])．この主張の正確な意味は，3.2.4項を参照．この事実の自明な帰結として，$\mathrm{CD}(K,N)$ 条件を一様にみたす完備 Riemann 多様体列の測度つき Gromov-Hausdorff 極限は $\mathrm{RCD}^*(K,N)$ 条件をみたす．

(3) **(測地線の本質的不分岐)** ここで**測地線が不分岐**であるとは，「γ^1, γ^2 が X の最短測地線であって $\gamma^1_0=\gamma^2_0$ のとき，もしもある $t\in(0,1)$ で $\gamma^1|_{[0,t]}=\gamma^2|_{[0,t]}$ ならば $\gamma^1=\gamma^2$ になる」という条件をいう[55]．$\mathrm{RCD}(K,\infty)$ 空間上では「最適輸送を最短測地線に沿った輸送経路に分解した時，分岐する測地線は測度 0 でしか現れない」ことが分かっている [125] (実際には RCD より弱く，上記 (1) の意味での強 K 凸で充分).

(1)-(3) の各々について，以下に補足説明を加えておく．まず (1) について．この性質は，定理 5.9の「(b) $\Rightarrow$ (a)」の証明の議論が全ての W_2-最短測地線に対して適用可能であることに依る (定理 6.21の証明も同じ考え方で遂行される)．証明の技巧上，W_2-測地線に沿って何らかの議論を展開する際に，より良い性質をみたす W_2-測地線上に話を置き換えたい時がある．この性質はそのような場面で威力を発揮する．

[54] 別の言い方をすれば，$N=\infty$ の場合の理論なしでこれらの結果に至ることは，はるかに困難であったろうと思われる．$N=\infty$ の場合の解決を以って，「機が熟した」のだと言えるかもしれない．

[55] 「$\gamma^1|_{[0,t]}=\gamma^2|_{[0,t]}$」は「$\gamma^1_t=\gamma^2_t$」に変えても同値な条件になる (これは不分岐よりは非交差と呼ぶべきものだろう)．こちらの方が見かけ上強いが，交差すれば分岐するものが作れる．

(2) については，かなりきわどいバランスで成り立っている性質だということを注意しておきたい．「無限小ヒルベルト的」は，一般には，それ単独では測度つき Gromov-Hausdorff 収束では保たれない．また，上記 (1) の「強 K 凸性 (または強 (K,N) 凸性)」単独で，測度つき Gromov-Hausdorff 収束で保たれるかどうかは知られていない．なお，この主張は，EVI による条件 ((B) または (B′)) の保存性を示すことによって証明される．この点からも，熱流を考えることの幾何学的意義の一端が垣間見られる．

最後に (3) について，その意義を説明しておく (証明の説明は割愛する)．最適輸送を輸送経路に分解して話を各測地線上に局所化したい場面がしばしばあり，そのような場合には「測地線が不分岐かどうか」が問題になる．実際に，CD 空間上の幾何に関する定理では，「すべての測地線が不分岐」を仮定しているものが少なからずある．また，測地線が分岐し得る空間の族から，様々な「Riemann 多様体の場合に成り立つ『よい』性質」の反例が見つかっている (例えば [124])．上記の結果を適用することで，$\mathrm{RCD}^*(K,N)$ 空間では，従来必要であった「測地線が不分岐」という仮定が外せた定理が幾つかある (例えば [47] 参照；この事実は，前出の定理 6.21の証明でも用いられている)．

測地線が分岐する空間の代表例は ℓ^n_∞ ($\mathbb{R}^n$ に ∞-ノルムによる距離を入れた空間) である (3.2.5項でも言及がある)．(境界のない)Riemann 多様体および Alexandrov 空間では分岐しない．$\mathrm{CD}(K,N)$ 条件をみたす Riemann 多様体の Gromov-Hausdorff 極限については未解決である．

6.5 測度距離空間上の解析への応用

最後に，RCD 空間上の (幾何) 解析のうち，主に解析に関わるものについて幾つか述べる (幾何関連については次章で扱う)．ただ，既に膨大な結果があり，全てに言及するのは難しい．ここまでの話だけでも参考文献は膨大な量となっているが，RCD 空間登場後の進展を述べ始めると，更に多くの文献を追加することになってしまう[56]．ここでは，今まで登場した文献の中でまだ扱っていない話題から重要と思われる幾つかを (私見で) 選んで述べたい．ここで紹介しきれない最新の結果については，私の把握している範囲で，キーワードだけを以下に列挙しておく：

> Sobolev 空間の L^p 理論，有界変動関数，Dirichlet 形式の理論との対応，次元を加味した (時空間的でない)W_2-収縮性の精密化，弱 Bochner 不等式の局所化，F.-Y. Wang の (log-)Harnack 不等式，Li-Yau の微分評価，Cheng の微分評価，調和関数の正則性，多項式増大度を持つ調和関数，最適輸送写像の存在，...

具体的な話に入る前に，少し観念的な話をしておく．6.1.1項で紹介した測度距離空間の微分概念の同定は，その証明方法がもたらす考え方も含めて，非常に強力な解析の土台を提供してくれる[57]．また，熱流 P_t について，注意 6.13で述べたような Lipschitz 正則化

[56] 2015 年 2 月 8 日現在，Google Scholar Citation によると，[6], [47] にはそれぞれ既に 70 件，39 件の被引用がある．中には，Riemann 多様体での結果を (容易かつ安直に) 測度距離空間に拡張した，というものも含まれているであろう．ただ，小さな拡張の積み重ねが本質的な発展の駆動力となることもあるであろうから，無視はできない．

[57] 原論文では，測度距離空間上の別の幾つかの微分概念をも，同時に同定していることが注意してある．

を代表とする各種の正則化効果が判明したことで，熱半群を軟化子として使用することが可能になっている (実際に，これまでに紹介した結果を近似を用いて厳密に証明する際，熱流の力を借りて議論する場面もある)．実際，RCD 空間の理論の近年の爆発的進展は，これらの地盤が固められたことに依るところが大きいと考えられる．

まず，関数不等式に関連する話をしておく．$\mathrm{CD}^e(K,N)$ 空間では[58]，$N<\infty$ の情報を用いて，4 章で扱われた各種関数不等式を精密化できる ([47, 3.4 節] 参照)．まず，HWI 不等式は次の形 (N-HWI 不等式) になる：$\mu_0,\mu_1\in\mathcal{P}_2(X)$ に対して，

$$\frac{U_N(\mu_1)}{U_N(\mu_0)}\le \mathbf{c}_{K/N}(W_2(\mu_0,\mu_1))+\frac{1}{N}\mathbf{s}_{K/N}(W_2(\mu_0,\mu_1))\sqrt{I_{\mathfrak{m}}(\mu_0)}.$$

ここで，

$$\mathbf{c}_\kappa(r):=\begin{cases}\cos(\sqrt{\kappa}r) & (\kappa>0),\\ 1 & (\kappa=0),\\ \cosh(\sqrt{-\kappa}r) & (\kappa<0)\end{cases}$$

であり，$I_{\mathfrak{m}}$ は minimal relaxed gradient で定義された Fisher 情報量とする．ここから，対数 Sobolev 不等式および Talagrand 不等式の $N<\infty$ での対応物が得られる：

(1) N-対数 Sobolev 不等式：$K>0$ とし，$\mathfrak{m}\in\mathcal{P}_2(X)$ とする．このとき，各 $\mu\in\mathcal{P}_2(X)$ に対して，

$$KN\left[\exp\left(\frac{2}{N}\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu)\right)-1\right]\le I_{\mathfrak{m}}(\mu).$$

N-対数 Sobolev 不等式は，logarithmic entropy-energy 不等式とも言われる (例えば [12] 参照)．また，ここから大域的 L^2-Sobolev 不等式が従う [12, Proposition 6.2.3]．

(2) N-Talagrand 不等式：上記と同様の仮定の下，各 $\mu\in\mathcal{P}_2(X)$ で $W_2(\mu,\mathfrak{m})\le\dfrac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{N}{K}}$ であり，

$$\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu)\ge -N\log\cos\left(\sqrt{\frac{K}{N}}W_2(\mu,\mathfrak{m})\right).$$

なお，[116] での対数 Sobolev 不等式から Talagrand 不等式を導く議論をなぞると，上記よりも少し弱い形の N-Talagrand 不等式を得る [47, Proposition 3.32]．

Riemann 多様体の場合，次元の情報を加味することで，$\mathrm{Ric}\ge K$ で既知の不等式の定数を改良できることがある．代表的なものは，大域 Poincaré 不等式の精密化である Lichnerowicz の不等式 (4.14参照) であろう．この不等式は，RCD 空間でも成り立つ：$(X,d,\mathfrak{m})$ を $\mathrm{RCD}^*(K,N)$ 空間で，$K>0$ とする．このとき，$-\Delta$ は非負離散スペクトルのみを持ち，第一非負固有値 λ_1 は $\lambda_1\ge NK/(N-1)$ をみたす ([47, Theorem 4.22])．主張の後半

[58]無限小ヒルベルト的でなくてもよい．

を Rayleigh 商表示で述べると，(4.14) に相当する，次の形になる：各 $f \in W^{1,2}(X)$ に対して

$$\int_X \left| f - \frac{1}{\mathfrak{m}(X)} \int_X f \, d\mathfrak{m} \right|^2 d\mathfrak{m} \leq \frac{N-1}{NK} \int_X |\nabla f|_*^2 \, d\mathfrak{m}.$$

この式を見れば，大域 Poincaré 不等式の精密化であることは一目瞭然であろう．この精密化された不等式については，次章で更に議論する．

最後に，確率論との関係について言及する．$\mathrm{RCD}^*(K,N)$ 空間で考察していた Cheeger 型エネルギー汎関数は，実はこの設定では準正則強局所 Dirichlet 形式になり，Markov 過程の一般論を介して，対応する拡散過程が X 上に定まる．なお，X が局所コンパクトであれば準正則は正則まで強められる[59]．また，この設定では，Dirichlet 形式が定める内在的距離が，もとの距離 d と一致する [6, Theorem 6.10]．これらの結果と，$\mathrm{RCD}^*(K,N)$ 空間上で成り立つ各種関数不等式を組み合わせることで，測度距離空間上の熱核の解析に関する様々な結果 (例えば Gauss 型熱核評価など) が利用可能になる．

[59] 今の設定では Lipschitz 関数が $D(\mathsf{Ch})$ で稠密になっている．従って，例えば $N < \infty$ なら OK(注意 6.20 (2) の脚注を参照).

7　リーマン的曲率次元条件にまつわる最近の進展（太田）

リーマン的曲率次元条件 $\mathrm{RCD}(K,N)$ を満たす測度距離空間を $\mathrm{RCD}(K,N)$ **空間**（または，K,N の値に拘らないときは単に RCD **空間**）と呼ぶことにする．RCD 空間では Dirichlet 形式や Γ-calculus によりエネルギーや熱流についての解析が展開できる（桒田氏の講演参照）．そこで問題となるのが，それを空間の幾何構造の研究とどう結びつけるのか，ということである．この最後の節では，重要で面白い 2 つの理論（分解定理，凸関数）の概略を述べる．本講演では，関数の正則性などの解析的な細部は無視し，議論の幾何学的なアイディアのみに注目する．

7.1　分解定理

Cheeger–Gromoll [34] によって示された**分解定理**とは，リッチ曲率が非負のリーマン多様体 M が**直線**（$\mathbb{R}$ の等長埋め込み）を持つならば，M は $\mathbb{R}$ とあるリッチ曲率が非負なリーマン多様体 N との直積に分解できる：$M=\mathbb{R}\times N$，という定理である．この測度距離空間への一般化を考えるとき，分解が等長的であるためには，空間が何らかの意味で「リーマン的」である必要がある（ノルム空間は直線を含むが等長的には分解されない）．そこで，リーマン的曲率次元条件 $\mathrm{RCD}(0,N)$ が適切な条件となる．

分解定理は剛性定理の一種であり，また空間の局所構造の研究で極めて重要である（Cheeger–Colding の一連のリーマン多様体の極限空間の研究 [31, 32, 33] など）．§§7.2.1, 7.2.2ではそれらの RCD 空間版を紹介する．

7.1.1　リーマン多様体の場合（Cheeger–Gromoll）

まず，リーマン多様体の場合の分解定理の証明を復習する．$\eta:[0,\infty)\longrightarrow M$ を**半直線**（$d(\eta(s),\eta(t))=|s-t|\ \forall s,t\ge 0$）とし，対応する **Busemann 関数** $\mathbf{b}_\eta:M\longrightarrow\mathbb{R}$ を

$$\mathbf{b}_\eta(x):=\lim_{t\to\infty}\bigl\{t-d\bigl(x,\eta(t)\bigr)\bigr\}$$

と定義する．η は 1 リプシッツ関数であり，η 上ではアファイン関数になる（$\mathbf{b}_\eta(\eta(s))=s$）．まず，**ラプラシアンの比較定理**

$$\Delta u\le\frac{n-1}{u}\quad\text{on } M\setminus\{z\}\ \text{(distributional sense)},\quad u:=d(z,\cdot),$$

を用いた評価により，$\mathbf{b}_\eta$ が**劣調和** $\Delta\mathbf{b}_\eta\ge 0$ であることがわかる．

次に $\gamma:\mathbb{R}\longrightarrow M$ を直線（$d(\gamma(s),\gamma(t))=|s-t|\ \forall s,t\in\mathbb{R}$）とすると，2 種類の Busemann 関数

$$\mathbf{b}_\gamma(x):=\lim_{t\to\infty}\bigl\{t-d\bigl(x,\gamma(t)\bigr)\bigr\},\qquad\overline{\mathbf{b}}_\gamma(x):=\lim_{t\to\infty}\bigl\{t-d\bigl(x,\gamma(-t)\bigr)\bigr\}$$

が考えられる．三角不等式より $\mathbf{b}_\gamma + \overline{\mathbf{b}}_\gamma \le 0$ であり，また $\mathbf{b}_\gamma, \overline{\mathbf{b}}_\gamma$ は共に劣調和なので $\Delta(\mathbf{b}_\gamma + \overline{\mathbf{b}}_\gamma) \ge 0$ が成り立つ．これと $(\mathbf{b}_\gamma + \overline{\mathbf{b}}_\gamma)(\gamma(s)) = s - s = 0$ を合わせて，強最大値原理より

$$\mathbf{b}_\gamma + \overline{\mathbf{b}}_\gamma \equiv 0, \qquad \Delta \mathbf{b}_\gamma = \Delta \overline{\mathbf{b}}_\gamma \equiv 0$$

を得る．特に $\mathbf{b}_\gamma = -\overline{\mathbf{b}}_\gamma$ は C^∞ である．

$\Delta \mathbf{b}_\gamma \equiv 0$ と $|\nabla \mathbf{b}_\gamma| \equiv 1$ に注意して，$\mathbf{b}_\gamma$ に Bochner 公式を適用すると，

$$\mathrm{Ric}_g(\nabla \mathbf{b}_\gamma, \nabla \mathbf{b}_\gamma) + \|\operatorname{Hess} \mathbf{b}_\gamma\|_{HS}^2 \equiv 0$$

となる（$\|\cdot\|_{HS}$ は Hilbert–Schmidt ノルム）．仮定 $\mathrm{Ric}_g \ge 0$ より $\operatorname{Hess} \mathbf{b}_\gamma \equiv 0$ となり，$\nabla \mathbf{b}_\gamma$ が平行ベクトル場であることがわかる．従って，de Rham の分解定理より，M は $\mathbb{R} \times N$ と等長的に分解される（各 $t \in \mathbb{R}$ に対し $\mathbf{b}_\gamma^{-1}(t) = \{t\} \times N$ となる）．

7.1.2 重みつきリーマン多様体の場合（Lichnerowicz et al）

重みつきリーマン多様体 $(M, g, \mathfrak{m} = \mathrm{e}^{-V} \mathrm{vol}_g)$ の場合，$N \in [n, \infty)$ について $\mathrm{Ric}_N \ge 0$ ならば重みなしと同じ証明により分解定理が得られる．$N = \infty$ の場合は，$\mathrm{Ric}_\infty \ge 0$ に加えて $\sup_M V < \infty$ を仮定すると，上の議論でラプラシアンの比較定理を用いた部分を微調整して分解定理が得られる（[89, 50, 145]）．

7.1.3 RCD 空間の場合（Gigli）

さて，$(X, d, \mathfrak{m})$ を $\mathrm{RCD}(0, N)$ 空間（$N < \infty$）とし，直線 $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow X$ が存在したとする．Busemann 関数 $\mathbf{b}_\gamma, \overline{\mathbf{b}}_\gamma : X \longrightarrow \mathbb{R}$ をリーマン多様体と同様に定義する．RCD 空間のラプラシアンの比較定理は Gigli [59] により得られており，それを使って $\mathbf{b}_\gamma = -\overline{\mathbf{b}}_\gamma$ かつ $\mathbf{b}_\gamma$ が調和関数であるところまでは同様に進められる．

しかし，平行ベクトル場や de Rham の分解定理といったものは（少なくとも現状では）一般論としては存在しないため，代わりに Busemann 関数とその勾配流の性質を詳しく調べ，分解を具体的に構成する．以下，その構成法の概略を [58] に沿って述べる．

(I) まず，任意の $a \in \mathbb{R}$ に対し

$$a\mathbf{b}_\gamma(x) = \inf_{y \in X} \left\{ \frac{d^2(x,y)}{2} + a\mathbf{b}_\gamma(y) + \frac{a^2}{2} \right\}$$

が成り立つことがわかり，よって $a\mathbf{b}_\gamma$ は $(d^2/2)$ 凹関数である（この $(d^2/2)$ 変換を具体的に書けるところが $\mathbf{b}_\gamma$ の特殊性である）．これを用いて，$\mathbf{b}_\gamma$ を Kantorovich ポテンシャルとする最適輸送写像として $\mathrm{F}_t : X \longrightarrow X$（$\mathrm{F}_0$ は恒等写像）が構成され，

$$\mathbf{b}_\gamma\big(\mathrm{F}_t(x)\big) = \mathbf{b}_\gamma\big(\mathrm{F}_0(x)\big) - t, \qquad \mathrm{F}_{t+s}(x) = \mathrm{F}_t\big(\mathrm{F}_s(x)\big)$$

が $\mathfrak{m}$-a.e. x で成り立ち，更に $\mathfrak{m} \ll (\mathrm{F}_t)_\sharp \mathfrak{m} \ll \mathfrak{m}$ も成り立つ（[58, Proposition 3.15]）．

(II) F_t によって $\mathfrak{m}$ が保存されることを見る（[58, Theorem 3.16]）．$\mathfrak{m}$ に絶対連続な任意の確率測度 $\mu \in \mathcal{P}_2(X)$ と $t \in \mathbb{R}$ に対し，関数 $t \mapsto S_N((\mathrm{F}_t)_\sharp \mu)$ を考える．F_t は $\mathbf{b}_\gamma$ を Kantorovich ポテンシャルとする最適輸送写像であったので，$S_N((\mathrm{F}_t)_\sharp \mu)$ の t 微分には $\nabla \mathbf{b}_\gamma$ が現れる（高津氏の講演参照）．そこで $\mathbf{b}_\gamma$ が調和関数であることと S_N の凸性を使うと，$S_N(\mu) \le S_N((\mathrm{F}_t)_\sharp \mu)$ が得られる．$(\mathrm{F}_{-t})_\sharp \circ (\mathrm{F}_t)_\sharp \mu = \mu$ であることから逆向きの不等式も成り立つので，

$$S_N(\mu) = S_N\big((\mathrm{F}_t)_\sharp \mu\big).$$

$\mu \in \mathcal{P}_2(X)$ が任意の絶対連続な確率測度であったことから，$(\mathrm{F}_t)_\sharp \mathfrak{m} = \mathfrak{m}$ が言える．

(III) 次に F_t によって距離関数が保存されることを見る．そのためには，距離関数そのものではなく，適当な正則性を持つ X 上の関数 f のエネルギー $\mathsf{Ch}(f)$ が F_t の合成で保存されることを示す（[58, Theorem 3.19]）．まず，

$$\int_X \{|\nabla (f \circ \mathrm{F}_t)|^2 - |\nabla f|^2\}\, d\mathfrak{m} = \int_X \{2\langle \nabla f, \nabla (f \circ \mathrm{F}_t - f)\rangle + |\nabla (f \circ \mathrm{F}_t - f)|^2\}\, d\mathfrak{m}.$$

ここで $\int_X |\nabla (f \circ \mathrm{F}_t - f)|^2 \, d\mathfrak{m}$ は熱流を用いた評価により $t \to 0$ では無視でき，

$$\lim_{t \to 0} \int_X \frac{|\nabla (f \circ \mathrm{F}_t)|^2 - |\nabla f|^2}{2t}\, d\mathfrak{m} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \int_X \langle \nabla f, \nabla (f \circ \mathrm{F}_t - f)\rangle \, d\mathfrak{m}$$

が成り立つ．右辺の積分を部分積分を用いて書き換え，更に $(\mathrm{F}_t)_\sharp \mathfrak{m} = \mathfrak{m}$ を使って，

$$\begin{aligned}\int_X \langle \nabla f, \nabla (f \circ \mathrm{F}_t - f)\rangle \, d\mathfrak{m} &= -\int_X \Delta f \cdot (f \circ \mathrm{F}_t - f)\, d\mathfrak{m} \\ &= -\int_X (\Delta f \circ \mathrm{F}_{-t} - \Delta f) f \, d\mathfrak{m}.\end{aligned}$$

F_t の定義より，

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \int_X (\Delta f \circ \mathrm{F}_{-t} - \Delta f) f \, d\mathfrak{m} = \int_X \langle \nabla \Delta f, \nabla \mathbf{b}_\gamma \rangle f \, d\mathfrak{m}.$$

$\mathbf{b}_\gamma$ が調和関数であることを使って変形して，

$$\int_X \langle \nabla \Delta f, \nabla \mathbf{b}_\gamma \rangle f \, d\mathfrak{m} = \int_X \langle \nabla \Delta f, f \nabla \mathbf{b}_\gamma \rangle \, d\mathfrak{m} = -\int_X \Delta f \langle \nabla f, \nabla \mathbf{b}_\gamma \rangle \, d\mathfrak{m}.$$

ここで，$\mathbf{b}_\gamma$ が熱流で不変であることから，

$$\int_X \Delta f \langle \nabla f, \nabla \mathbf{b}_\gamma \rangle \, d\mathfrak{m} = \int_X f \langle \nabla \Delta f, \nabla \mathbf{b}_\gamma \rangle \, d\mathfrak{m}$$

が成り立つ（[58, Proposition 3.18]）．従って

$$\lim_{t \to 0} \int_X \frac{|\nabla (f \circ \mathrm{F}_t)|^2 - |\nabla f|^2}{2t}\, d\mathfrak{m} = -\int_X \langle \nabla \Delta f, \nabla \mathbf{b}_\gamma \rangle f \, d\mathfrak{m} = 0$$

であり，$\mathsf{Ch}(f \circ \mathrm{F}_t) = \mathsf{Ch}(f)$ が成り立つ．

エネルギーが保存されることから，

$$|\nabla(f \circ \mathrm{F}_t)| = |\nabla f| \circ \mathrm{F}_t \qquad \text{a.e. on } X \tag{7.1}$$

が導かれる．稠密な $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset X$ を取って

$$d_{k,m}(x) := \max\bigl\{0, \min\{d(x,x_k), m - d(x,x_k)\}\bigr\}, \qquad k,m \in \mathbb{N}$$

を考え，(7.1) より $d_{k,m} \circ \mathrm{F}_t$ が測度 0 の集合を除いて 1 リプシッツなことを使って，

$$d\bigl(\mathrm{F}_t(x), \mathrm{F}_t(y)\bigr) = \sup_{k,m} \bigl| d_{k,m}\bigl(\mathrm{F}_t(x)\bigr) - d_{k,m}\bigl(\mathrm{F}_t(y)\bigr)\bigr| \le d(x,y)$$

が殆ど全ての $x, y \in X$ で成り立つ．よって $d(\mathrm{F}_t(x), \mathrm{F}_t(y)) \le d(x,y)$ であり，F_{-t} によって同様にすることで $d(\mathrm{F}_t(x), \mathrm{F}_t(y)) = d(x,y)$ がわかる（[58, Theorems 4.2, 4.3]）．

(IV) 分解の構成法を簡単に述べる．$X' := X/\sim$，但し $x, y \in X$ がある $t \in \mathbb{R}$ に対し $\mathrm{F}_t(x) = y$ となるとき $x \sim y$ とする．$\pi : X \longrightarrow X'$ を射影とし，X' の距離関数 d' を

$$d'\bigl(\pi(x), \pi(y)\bigr) := \inf_{t\in\mathbb{R}} d\bigl(\mathrm{F}_t(x), y\bigr)$$

で定義する．するとまず $\pi(x) \in X'$ を $\mathbf{b}_\gamma(\mathrm{F}_t(x)) = 0$ なる点 $\mathrm{F}_t(x)$ に写す写像 $\iota : X' \longrightarrow X$ が等長埋め込みであることがわかる（[58, Theorem 4.7]）．更に，(X', d') の測度 $\mathfrak{m}'$ を

$$\mathfrak{m}'(A) := \mathfrak{m}\bigl(\pi^{-1}(A) \cap \mathbf{b}_\gamma^{-1}([0,1])\bigr)$$

で定義し，

$$X \ni x \quad \longmapsto \quad \bigl(\mathbf{b}_\gamma(x), \pi(x)\bigr) \in \mathbb{R} \times X'$$

が等長写像になることを，(III) と同様にエネルギーが $\mathbb{R}$ 方向と X' 方向へ分解することを見ることで示す．よって，X は $X = \mathbb{R} \times X'$ と等長に分解する（[58, Theorem 4.17]）．

(V) 最後に，$(X', d', \mathfrak{m}')$ が $\mathrm{RCD}(0, N-1)$ 空間（$N \in (1,2)$ ならば 1 点集合）であることを示す（[58, Theorem 4.18]）．

7.2 分解定理の応用

分解定理の応用として，Mondino–Naber [102] による RCD 空間の構造定理と，Ketterer [80, 81] による正曲率の場合の剛性定理を紹介する．

7.2.1 RCD 空間の構造定理（Mondino–Naber）

Cheeger–Colding [31, 32, 33] はリッチ曲率が下から押さえられたリーマン多様体のGromov–Hausdorff 極限の局所構造を詳しく研究した．彼らの研究で重要な役割を果たしたのが，**almost splitting theorem** と呼ばれる分解定理の摂動版である（[30]）．つまり，「殆ど直線」である曲線があれば，空間は「殆ど分解」される．これを極限の手前のリーマン多様体で適用して極限空間の分解定理を示し，それを用いて幾何構造を調べるというのが大雑把なアイディアである．

RCD 空間の枠組みでは，極限空間自体を扱うことができる（特に，Cheeger–Colding の almost splitting theorem を Gigli の分解定理から導くこともできる）．そこで，Gigli の分解定理を用いて Cheeger–Colding の議論を一般化することが考えられる．更に Colding–Naber [36] による近年の進展も合わせて，次の構造定理が得られる（[102]）．

定理 7.1 (RCD **空間の構造定理（rectifiability）**) $(X, d, \mathfrak{m})$ を RCD 空間（$K \in \mathbb{R}$, $N \in (1, \infty)$）とする．このとき，$\mathfrak{m}$ 可測な部分集合の可算族 $\{R_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ で $\mathfrak{m}(X \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i) = 0$ であるものが存在し，R_i は n_i 次元ユークリッド空間の可測集合と双リプシッツかつ $1 \le n_i \le N$ である．

特に，$\mathfrak{m}$ について測度 0 の集合を除けば，点 $x \in X$ の接錐は一意でユークリッド空間 $\mathbb{R}^{n_x}$ と等長になる（次元 n_x は x による）．リーマン多様体の極限の場合には，Colding–Naber [36] により次元 n_x が一意に定まること，つまり定理 7.1で n_i が $i \in \mathbb{N}$ によらず一定になることがわかっている．RCD 空間でも同様の次元の一様性が成り立つことが期待されるが，今のところ未解決である．

定理 7.1は幾何的な構造定理であるが，（弱）微分構造については，Gigli [61] によるある意味での 2 階微分構造の研究がある．これは様々な概念を弱い意味で定義していくもので，例えばリッチ曲率を Bochner 公式を用いて定義する．議論を展開する上では，定義を意味のあるものにするためにテスト関数の扱いが特に重要である．リーマン多様体の極限の場合には，本多 [70, 71] の関連する研究がある．

7.2.2 正曲率空間の剛性定理（Ketterer）

次に，正曲率空間の剛性定理を考える．n 次元リーマン多様体 (M, g) で $\mathrm{Ric}_g \ge n-1$ の場合，Bonnet–Myers の定理の最大直径 π が実現されるのは，球面 $\mathbb{S}^n$ の場合に限ることが知られている．リーマン多様体ではない場合，例えば曲率 1 以上の Alexandrov 空間 (X, d) では，直径が π でも球面を群作用で割った空間（orbifold）が考えられるため球面になるとは限らないが，ある直径 π 以下の距離空間 (Y, d') の **spherical suspension** になることがわかる：

$$X = SY := (Y \times [0, \pi])/\sim, \quad \text{where } (x, 0) \sim (y, 0),\ (x, \pi) \sim (y, \pi)\ \forall x, y \in Y.$$

SY の距離 $d_{SY}((x, s), (y, t))$ は，$\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} \in \mathbb{S}^2$ を $d_{\mathbb{S}^2}(\tilde{z}, \tilde{x}) = s$, $d_{\mathbb{S}^2}(\tilde{z}, \tilde{y}) = t$, $\angle(\tilde{x}\tilde{z}\tilde{y}) = d'(x, y)$ となるように取ったときの $d_{\mathbb{S}^2}(\tilde{x}, \tilde{y})$，と定義する．この spherical suspension による表示は，非負曲率のときの分解定理と密接に関係している．

さて，$(X,d,\mathfrak{m})$ を $\mathrm{RCD}(N-1,N)$ 空間（$N\in(1,\infty)$）とすると，Bonnet–Myers の定理 (3.10) よりやはり $\mathrm{diam}\,X\le\pi$ である．このとき，$(X,d,\mathfrak{m})$ の N-**ユークリッド錐**を考える：

$$\begin{aligned} CX &:= \big(X\times[0,\infty)\big)/(X\times\{0\}),\\ d_{CX}\big((x,s),(y,t)\big) &:= \sqrt{s^2+t^2-2st\cos d(x,y)},\\ d\mathfrak{m}_{CX} &:= t^N\,d\mathfrak{m}dt. \end{aligned}$$

CX は X がリーマン多様体であっても錐の原点 $X\times\{0\}$ で特異点を持ち得るが（例えば $\mathrm{diam}\,X<\pi$ の場合），RCD 空間の枠組みでは特異点はあっても問題ない．次が成り立つ（[80]）．

定理 7.2 $(X,d,\mathfrak{m})$ を $\mathrm{RCD}(N-1,N)$ 空間（$N\in(1,\infty)$）とするとき，その N-ユークリッド錐 $(CX,d_{CX},\mathfrak{m}_{CX})$ は $\mathrm{RCD}(0,N+1)$ を満たす．

証明は Bochner 不等式による特徴づけを通して行う（曲率次元条件の定義そのものから $\mathrm{CD}(0,N+1)$ を満たすことを示すのは難しい）．

定理7.2の $(X,d,\mathfrak{m})$ が最大直径 π を持つとし，$x,y\in X$ を $d(x,y)=\pi$ である点の組とすると，$(CX,d_{CX},\mathfrak{m}_{CX})$ は $(x,1),(y,1)$ と錐の原点を通る直線を持つ．よって分解定理より $CX=\mathbb{R}\times Y$ と直積に分解され，構成を見ると X が $Y\cap(X\times\{1\})$ の spherical suspension になっていることがわかる（[80]）：

定理 7.3 (最大直径定理) $\mathrm{RCD}(N-1,N)$ 空間（$N\in(1,\infty)$）が直径 π を持つとき，それはある $\mathrm{RCD}(N-2,N-1)$ 空間 $(Y,d_Y,\mathfrak{m}_Y)$（$N\in(1,2)$ のときは 1 点集合）の $(N-1)$-spherical suspension になる．

ここで，$(N-1)$-spherical suspension SY の測度は $d\mathfrak{m}_{SY}:=\sin^{N-1}t\,d\mathfrak{m}_Y dt$ と定義される．正曲率の場合のもう 1 つの剛性定理として，小畠の定理の一般化が最近やはり Ketterer により得られた（[81]）．

定理 7.4 (小畠の定理) $\mathrm{RCD}(N-1,N)$ 空間 $(X,d,\mathfrak{m})$（$N\in(1,\infty)$）に対し，Lichnerowicz 不等式

$$\int_X f^2\,d\mathfrak{m}\le\frac{1}{N}\int_X|\nabla f|^2\,d\mathfrak{m},\qquad \int_X f\,d\mathfrak{m}=0$$

で等号を満たす関数 f が存在するとき，X は直径 π を持ち，特に $(N-1)$-spherical suspension として表される．

7.3 RCD 空間上の凸関数

凸関数とその勾配流は，曲率次元条件の理論で大きな役割を果たす．曲率次元条件 $\mathrm{CD}(K,N)$ の定義そのものがエントロピーの凸性で与えられ，その勾配流として導入される熱流の挙動を解析することで，Bochner 不等式などとのつながりが見えてきた．エン

トロピーのような Wasserstein 空間 $\mathcal{P}_2(X)$ 上の凸関数に比べて，底空間 X 上の凸関数の研究は進んでいなかったが，最近面白い進展があったので，それを紹介する．

7.3.1 勾配流の存在と収縮性（Sturm）

$(X, d, \mathfrak{m})$ を局所コンパクト RCD(K,∞) 空間（$K \in \mathbb{R}$），$f : X \longrightarrow (-\infty, \infty]$ をその上の**弱** λ **凸関数**とする．ここで復習すると，f が弱 λ 凸であるとは，任意の $x, y \in X$ に対しその間のある最短測地線 $\gamma : [0,1] \longrightarrow X$ が存在し，

$$f\big(\gamma(t)\big) \le (1-t)f(x) + tf(1) - \frac{\lambda}{2}(1-t)td^2(x,y)$$

が全ての $t \in (0,1)$ で成り立つことである．特に $f(x), f(y) < \infty$ なら $f(\gamma(t)) < \infty$ となる．この定義と，全ての最短測地線 γ に沿って上の不等式が成り立つことを区別するため，前者を弱 λ 凸性，後者を**強** λ **凸性**と呼ぶ．

更に f は下半連続で，ある $x_0 \in X$ と $C_0, C_1 > 0$ について

$$f(x) \ge -C_0 - C_1 d^2(x_0, x) \qquad \forall x \in X \tag{7.2}$$

を満たすとする．$X_0 := f^{-1}(\mathbb{R}) = \{x \in X \mid f(x) < \infty\}$，$X' := \overline{X_0}$ とおく．

定理 7.5 (λ-EVI 勾配流の存在，[134]) $(X, d, \mathfrak{m})$, $f : X \longrightarrow (-\infty, \infty]$ が上で述べた仮定を満たすとき，任意の $x_0 \in X'$ に対し，x_0 を始点とする f の **λ-EVI 勾配曲線** $\xi : [0, \infty) \longrightarrow X'$ が存在する．つまり，$\xi(0) = x_0$ かつ任意の $z \in X_0$ と a.e. $t > 0$ に対し

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[d^2\big(\xi(t), z\big)\right] + \lambda d^2\big(\xi(t), z\big) + f\big(\xi(t)\big) \le f(z)$$

が成り立つ．

ξ, ζ を $x_0, y_0 \in X'$ を始点とする f の λ-EVI 勾配曲線とするとき，λ **収縮性**：

$$d\big(\xi(t), \zeta(t)\big) \le \mathrm{e}^{-\lambda t} d(x_0, y_0) \qquad \forall t \ge 0$$

が成り立つことが容易に確かめられる．従って，$x_0 \longmapsto \xi(t)$ という対応による写像（勾配流）$\Xi_t : X' \longrightarrow X'$ は $\mathrm{e}^{-\lambda t}$ リプシッツである．また，λ-EVI 勾配流の存在は，f が強 λ 凸であることを導く．従って，RCD 空間においては弱 λ 凸性と強 λ 凸性は同値になる．

凸関数の勾配流やその収縮性の研究は，Alexandrov 空間（[117, 94]）や Alexandrov 空間上の Wasserstein 空間（[105, 127]）で空間の局所構造の解析を用いて行われていた．一方，CD(K,∞) 空間での相対エントロピーについては，その特殊な性質に即した研究がある（[57, 5]）．Sturm による定理 7.5の証明は，一度 Wasserstein 空間に持ち上げて，f の勾配流をある意味で近似するエントロピーの勾配流を構成し，始点を Dirac 測度にしたときに勾配流が Dirac 測度に留まることを示して，X の勾配流に落とすという興味深いものである．この議論を走らせるために，(X, d) に局所コンパクト性が課されている．

定理 7.5の証明の概略を述べる．

(I) まず，$i \in \mathbb{N}$ に対し，汎関数 $\mathcal{F}_i : \mathcal{P}_2(X) \longrightarrow (-\infty, \infty]$ を

$$\mathcal{F}_i(\mu) := \frac{1}{i} \operatorname{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu) + \int_X f \, d\mathfrak{m}$$

と定める（f の μ 可積分性は $\mu \in \mathcal{P}_2(X)$ と (7.2) により保証される）．すると測度距離空間

$$(X', d, \mathfrak{m}_i), \qquad \mathfrak{m}_i := \mathrm{e}^{-if} \mathfrak{m}|_{X'}$$

は $\mathrm{RCD}(K + \lambda i, \infty)$ を満たし，その熱流は $(K + \lambda i)$-EVI 勾配流である．$\mathcal{F}_i = i^{-1} \operatorname{Ent}_{\mathfrak{m}_i}$ より，時間を i^{-1} 倍して $\mathcal{F}_i$ の $(Ki^{-1} + \lambda)$-EVI 勾配流 $(\Xi_t^i)_{t \geq 0}$ を得る．

(II) (I) で得た $\mathcal{F}_i$ の $(Ki^{-1} + \lambda)$-EVI 勾配流 $(\Xi_t^i)_{t \geq 0}$ の $i \to \infty$ での極限として，

$$\mathcal{F}(\mu) := \int_X f \, d\mathfrak{m}$$

の λ-EVI 勾配流 $(\Xi_t^\infty)_{t \geq 0}$ を得る（ここで X の局所コンパクト性が必要）．

(III) Dirac 測度を始点とするときの $(\Xi_t^\infty)_{t \geq 0}$ の挙動を調べるため，次の**分散不等式**を示す：$\mu_0 \in \mathcal{P}_2(X')$ に対し $\mu_t := \Xi_t^\infty(\mu_0)$ とおくとき，

$$\mathrm{Var}_2(\mu_t) \leq \mathrm{e}^{-4\lambda t} \mathrm{Var}_2(\mu_0) \qquad \forall t > 0 \tag{7.3}$$

が成り立つ．ここで，

$$\mathrm{Var}_2(\mu) := \int_{X \times X} d^2(x, y) \, \mu(dx) \mu(dy).$$

μ_0 が Dirac 測度であるときは $\mathrm{Var}_2(\mu_0) = 0$ なので，(7.3) より $\mathrm{Var}_2(\mu_t) = 0$．従って μ_t もまたある点 $x_t \in X'$ での Dirac 測度であることがわかる．

さて，(7.3) の証明は難しくないのでここで与える．$\mathcal{F}$ の λ-EVI：

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[W_2^2(\mu_t, \nu) \right] + \lambda W_2^2(\mu_t, \nu) \leq \mathcal{F}(\nu) - \mathcal{F}(\mu_t)$$

は

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\mathrm{e}^{2\lambda t}}{2} W_2^2(\mu_t, \nu) \right] \leq \mathrm{e}^{2\lambda t} \{ \mathcal{F}(\nu) - \mathcal{F}(\mu_t) \}$$

と書き換えられ，2 倍して積分すると $s < t$ に対し

$$\mathrm{e}^{2\lambda t} W_2^2(\mu_t, \nu) - \mathrm{e}^{2\lambda s} W_2^2(\mu_s, \nu) \leq \frac{\mathrm{e}^{2\lambda t} - \mathrm{e}^{2\lambda s}}{\lambda} \{ \mathcal{F}(\nu) - \mathcal{F}(\mu_t) \}$$

となる（$\mathcal{F}(\mu_t)$ は t について非増加であることに注意する）．ここで，$\lambda = 0$ のときは $(\mathrm{e}^{2\lambda t} - \mathrm{e}^{2\lambda s})/\lambda$ を $2(t - s)$ で置き換える．$\nu = \delta_y$ として，

$$\mathrm{e}^{2\lambda t} \int_X d^2(x, y) \, \mu_t(dx) - \mathrm{e}^{2\lambda s} \int_X d^2(x, y) \, \mu_s(dx) \leq \frac{\mathrm{e}^{2\lambda t} - \mathrm{e}^{2\lambda s}}{\lambda} \{ f(y) - \mathcal{F}(\mu_t) \}.$$

y を μ_t, μ_s でそれぞれ積分すると,

$$\mathrm{e}^{2\lambda t}\mathrm{Var}_2(\mu_t) - \mathrm{e}^{2\lambda s}\int_{X\times X} d^2(x,y)\,\mu_s(dx)\mu_t(dy) \le 0,$$

$$\mathrm{e}^{2\lambda s}\int_{X\times X} d^2(x,y)\,\mu_t(dx)\mu_s(dy) - \mathrm{e}^{2\lambda s}\mathrm{Var}_2(\mu_s) \le \frac{\mathrm{e}^{2\lambda t}-\mathrm{e}^{2\lambda s}}{\lambda}\{\mathcal{F}(\mu_s)-\mathcal{F}(\mu_t)\}.$$

$\mathrm{e}^{2\lambda t}, \mathrm{e}^{2\lambda s}$ をそれぞれにかけて，辺々足すと,

$$\mathrm{e}^{4\lambda t}\mathrm{Var}_2(\mu_t) - \mathrm{e}^{4\lambda s}\mathrm{Var}_2(\mu_s) \le \frac{\mathrm{e}^{2\lambda t}-\mathrm{e}^{2\lambda s}}{\lambda}\mathrm{e}^{2\lambda s}\{\mathcal{F}(\mu_s)-\mathcal{F}(\mu_t)\}.$$

従って，$\lim_{s\to t}\mathcal{F}(\mu_s) = \mathcal{F}_t$ より

$$\frac{d}{dt}\left[\mathrm{e}^{4\lambda t}\mathrm{Var}_2(\mu_t)\right] \le 0 \qquad \text{a.e. } t > 0$$

が成り立ち，これから (7.3) が従う．

(IV) (III) により，$\Xi_t : X' \longrightarrow X'$ を $\Xi_t^\infty(\delta_{x_0}) = \delta_{\Xi_t(x_0)}$ として定義すると，f の λ-EVI 勾配流となる．

7.3.2 ヘッシアンの評価による特徴づけ（Ketterer）

Sturm の議論と Bochner 不等式による $\mathrm{RCD}(K,\infty)$ の特徴づけを使って，Ketterer [81] は次を示した．

定理 7.6 (λ **凸** $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Hess} \ge \lambda$) $(X, d, \mathfrak{m})$ を $\mathrm{RCD}(K,\infty)$ 空間（$K \in \mathbb{R}$）とし，$f \in D(H)$ を $\inf_X f > 0$ かつ $\sup_X f < \infty$ を満たす関数とする．このとき，次は同値：

(A) f は連続かつ $\mathrm{Hess}\, f \ge \lambda$.

(B) f は λ 凸.

ここで,

$$D(H) := \{f \in W^{1,2}(X) \,|\, |\nabla f| \in W^{1,2}(X)\}$$

とし，$f \in D(H)$ の**ヘッシアン** $\mathrm{Hess}\, f$ は Γ-calculus の手法により

$$\mathrm{Hess}\, f(\phi,\psi) := \frac{1}{2}\left\{\left\langle\nabla\phi, \nabla\langle\nabla f, \nabla\psi\rangle\right\rangle + \left\langle\nabla\psi, \nabla\langle\nabla f, \nabla\phi\rangle\right\rangle - \left\langle\nabla f, \nabla\langle\nabla\phi, \nabla\psi\rangle\right\rangle\right\}$$

と定義される（一種の polarization）．特に,

$$\mathrm{Hess}\, f(\phi,\phi) = \left\langle\nabla\phi, \nabla\langle\nabla f, \nabla\phi\rangle\right\rangle - \frac{1}{2}\left\langle\nabla f, \nabla(|\nabla\phi|^2)\right\rangle.$$

この定理は, 測地線に沿っての凸性という幾何的な（または Lagrange 的な）性質とエネルギーから来る $\mathrm{Hess}\, f$ という解析的な（または Euler 的な）情報を結びつけるものである．

(A) $\Rightarrow$ (B)：定理 7.5と同じように $(X, d, \mathrm{e}^{-if}\mathfrak{m})$ を考えると，$\operatorname{Hess} f \geq \lambda$ よりこの空間で $(K+\lambda i, \infty)$-Bochner 不等式が成り立ち，従って $\mathrm{RCD}(K+\lambda i, \infty)$ が満たされる．あとは定理 7.5と同様にして，f が λ-EVI 勾配流を持ち，特に（強）λ 凸であることがわかる．

(B) $\Rightarrow$ (A)：$(X, i\cdot d, \mathrm{e}^{-i^2 f}\mathfrak{m})$ は $\mathrm{RCD}(i^{-2}K+\lambda, \infty)$ を満たし，よって $(i^{-2}K+\lambda, \infty)$-Bochner 不等式が成り立つ．ここで，$\nabla$ や Δ などの記号は全てスケーリングする前の $(X, d, \mathfrak{m})$ のままとして ϕ の $(i^{-2}K+\lambda, \infty)$-Bochner 不等式を書き下すと，例えば ∇ は i^{-2} 倍され $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は i^2 倍されるので，

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} i^{-4} \bigl\{ \Delta(|\nabla\phi|^2) - \langle \nabla(|\nabla\phi|^2), \nabla(i^2 f) \rangle \bigr\} - i^{-4} \Bigl\langle \nabla\phi, \nabla\bigl[\Delta\phi - \langle \nabla\phi, \nabla(i^2 f) \rangle \bigr] \Bigr\rangle \\
&\geq (i^{-2}K+\lambda) i^{-2} |\nabla\phi|^2
\end{aligned}$$

（実際には非負のテスト関数をかけて積分した形で計算する）．i^2 をかけて $i \to \infty$ とすると，

$$-\frac{1}{2} \langle \nabla(|\nabla\phi|^2), \nabla f \rangle + \bigl\langle \nabla\phi, \nabla \langle \nabla\phi, \nabla f \rangle \bigr\rangle \geq \lambda |\nabla\phi|^2.$$

これは求める評価 $\operatorname{Hess} f(\phi, \phi) \geq \lambda |\nabla\phi|^2$ である．

7.4　未解決問題など

最後に，未解決問題や今後の課題について述べる．

(I) 講演時点では **Lévy–Gromov 型の等周不等式**を RCD 空間の未解決問題の 1 つとして挙げていた．これは，リッチ曲率が $n-1$ 以上の n 次元リーマン多様体 (M, g) の部分集合 A に対し，その境界の面積の正規化 $|\partial A|/\operatorname{vol}_g(M)$ が，$\mathbb{S}^n$ 内の同じ体積比を持つ球の表面積（の正規化）以上になるというものである：

$$\frac{|\partial A|}{\operatorname{vol}_g(M)} \geq \frac{|\partial B_r(x)|}{\operatorname{vol}(\mathbb{S}^n)} \qquad \text{for } x \in \mathbb{S}^n,\ \frac{\operatorname{vol}(B_r(x))}{\operatorname{vol}(\mathbb{S}^n)} = \frac{\operatorname{vol}_g(A)}{\operatorname{vol}_g(M)}.$$

この幾何学的な不等式は関数不等式に還元されず，従来の証明は $\operatorname{vol}_g(A)$ を固定して $|\partial A|$ を最小化する A の境界の正則性（幾何学的測度論の有名な定理）を用いるもので，リーマン多様体以外に適用することは難しかった．

集会の翌週, Cavalletti–Mondino [28] は Klartag [82] による正則性に依存しない画期的な別証明を更に改良することで, 測地線が本質的に不分岐な $\mathrm{CD}(K, N)$ 空間で Lévy–Gromov 型等周不等式が成り立つことを示した．これは $\mathrm{RCD}(K, N)$ 空間や距離が対称なフィンスラー多様体を含む．

(II) 幾分専門的な問題として，RCD 空間の距離と測度の関係がある．リーマン多様体 (M, g) には標準的な測度 vol_g が存在し, 任意の測度 $\mathfrak{m}$ を vol_g に重みをつけた形 $\mathfrak{m} = \mathrm{e}^{-V} \operatorname{vol}_g$ で表して議論を進めた．RCD 空間では始めから距離空間 (X, d) と測度 $\mathfrak{m}$ の組を考えるため，その間の関係はより不明確である．特に，(X, d) を固定して，$\mathrm{RCD}(K, N)$ の N を（局所的に）最小にする測度 $\mathfrak{m}$ には意味がありそうである（リーマン多様体では vol_g の定数倍

になる）．これは，リーマン多様体の極限空間での，Hausdorff 測度と極限測度の間の関係とも関わる問題である．1 つの試みとして，RCD 空間の「参照測度」の研究 [27] がある．

(III) 近年急激に研究が進んだ RCD 空間と比べて，CD 空間についてはわかっていないことが多い．RCD 空間ではない CD 空間の典型的な例であるフィンスラー多様体では，ある種の Bochner 不等式 [112] や分解定理 [109] が得られている．これらを CD 空間に適切に定式化して一般化できるかは未知数のところが多い．

また，凸関数の収縮性についてはノルム空間でも研究が進んでいない．EVI に対応する通常の収縮性が成り立たないことはわかっており（[111]），それより弱い定量的な評価が成り立つかが重要な問題となっている．

(IV) 最後に大きな問題として，「リッチ曲率を下から押さえたリーマン多様体の列の極限ではない RCD 空間が存在するか？」というものがある．同様の問いは Alexandrov 空間でも未解決である（n 次元リーマン多様体では近似できない n 次元 Alexandrov 空間が豊富に存在することは知られているが，高い次元のリーマン多様体を用いた近似（崩壊）を許した場合はわかっていない）．また，リーマン多様体の極限では，良い性質が成り立たない（ある意味で）面白い例が色々と構成されているが，RCD 空間に一般化したことで更に特異な例が構成できるという結果を筆者は知らない．この辺りは，解析的な評価が次々と拡張されていくなかで，幾何学者に残された課題と言えるかもしれない．

参考文献

[1] S. Amari and H. Nagaoka, Methods of information geometry. Translated from the 1993 Japanese original by Daishi Harada. American Mathematical Society, Providence, RI; Oxford University Press, Oxford, 2000.

[2] L. Ambrosio, *Lecture notes on optimal transport problems.* Mathematical aspects of evolving interfaces (Funchal, 2000), 1–52, Lecture Notes in Math., **1812**, Springer, Berlin, 2003.

[3] L. Ambrosio, N. Gigli, A. Mondino and T. Rajala, *Riemannian Ricci curvature lower bounds in metric measure spaces with σ-finite measure.* Trans. Amer. Math. Soc. (to appear). Available at arXiv:1207.4924

[4] L. Ambrosio, N. Gigli and G. Savaré, Gradient flows in metric spaces and in the space of probability measures (second ed.). Birkhäuser Verlag, Basel, 2008.

[5] L. Ambrosio, N. Gigli and G. Savaré, *Calculus and heat flow in metric measure spaces and applications to spaces with Ricci bounds from below.* Invent. Math. **195** (2013), 289–391.

[6] L. Ambrosio, N. Gigli and G. Savaré, *Metric measure spaces with Riemannian Ricci curvature bounded from below.* Duke Math. J. **163** (2014), 1405–1490.

[7] L. Ambrosio, N. Gigli and G. Savaré, *Bakry–Émery curvature-dimension condition and Riemannian Ricci curvature bounds.* Ann. Probab. **43** (2015), 339–404.

[8] L. Ambrosio, A. Mondino and G. Savaré, *Nonlinear diffusion equations and curvature conditions in metric measure spaces.* In preparation.

[9] K. Bacher and K.-T. Sturm, *Localization and tensorization properties of the curvature-dimension condition for metric measure spaces.* J. Funct. Anal. **259** (2010), 28–56.

[10] D. Bakry, *L'hypercontractivité et son utilisation en théorie des semigroupes.* (French) Lectures on probability theory (Saint-Flour, 1992), 1–114, Lecture Notes in Math., **1581**, Springer, Berlin, 1994.

[11] D. Bakry and M. Émery, *Diffusions hypercontractives.* (French) Séminaire de probabilités, XIX, 1983/84, 177–206, Lecture Notes in Math., 1123, Springer, Berlin, 1985.

[12] D. Bakry, I. Gentil and M. Ledoux, Analysis and geometry of Markov diffusion operators. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften **348**, Springer, Cham, 2014.

[13] D. Bakry, I. Gentil and M. Ledoux, *On Harnack inequalities and optimal transportation.* Ann. Sc. Norm. Super. Pisa (To appear).

[14] D. Bakry and M. Ledoux, *A logarithmic Sobolev form of the Li-Yau parabolic inequality.* Rev. Mat. Iberoam. **22** (2006), 683–702.

[15] D. Bao, S.-S. Chern and Z. Shen, An introduction to Riemann-Finsler geometry, Springer-Verlag, New York, 2000.

[16] P. Billingsley, Convergence of probability measures. Second edition. Wiley Series in Probability and Statistics: Probability and Statistics. A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1999.

[17] S. G. Bobkov, I. Gentil and M. Ledoux, *Hypercontractivity of Hamilton-Jacobi equations.* Markov Process. Related Fields **8** (2002), 669–696.

[18] S. Brendle and R. Schoen, *Manifolds with 1/4-pinched curvature are space forms.* J. Amer. Math. Soc. **22** (2009), 287–307.

[19] Y. Brenier, *Décomposition polaire et réarrangement monotone des champs de vecteurs* (French) [Polar decomposition and increasing rearrangement of vector fields]. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **305** (1987), 805–808.

[20] Y. Brenier, *Polar factorization and monotone rearrangement of vector-valued functions.* Comm. Pure Appl. Math. **44** (1991), 375–417.

[21] D. Burago, Y. Burago, S. Ivanov, A course in metric geometry. Graduate Studies in Mathematics, **33**. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.

[22] Yu. Burago, M. Gromov and G. Perel'man, *A. D. Alexandrov spaces with curvatures bounded below.* (Russian) Uspekhi Mat. Nauk **47** (1992), 3–51, 222; English translation: Russian Math. Surveys **47** (1992), 1–58.

[23] L. A. Caffarelli, M. Feldman and R. McCann, *Constructing optimal maps for Monge's transport problem as a limit of strictly convex costs.* J. Amer. Math. Soc. **15** (2002), 1–26.

[24] P. Caputo, P. Dai Pra and G. Posta, *Convex entropy decay via the Bochner-Bakry-Emery approach* Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat. **45** (2009) 734–753.

[25] P. Cattiaux and A. Guillin, *On quadratic transportation cost inequalities.* J. Math. Pures Appl. **86** (2006), 341–361.

[26] C. Castaing and M. Valadier, *Convex Analysis and Measurable Multifunctions.* Lecture Notes in Mathematics, vol. **580**. Springer, Berlin, 1977

[27] F. Cavalletti and A. Mondino, *Measure rigidity of Ricci curvature lower bounds.* Preprint (2015). Available at arXiv:1501.03338

[28] F. Cavalletti and A. Mondino, *Sharp and rigid isoperimetric inequalities in metric-measure spaces with lower Ricci curvature bounds.* Preprint (2015). Available at arXiv:1502.06465

[29] F. Cavalletti and K.-T. Sturm, *Local curvature-dimension condition implies measure-contraction property.* J. Funct. Anal. **262** (2012), 5110–5127.

[30] J. Cheeger and T. H. Colding, *Lower bounds on Ricci curvature and the almost rigidity of warped products.* Ann. of Math. (2) **144** (1996), 189–237.

[31] J. Cheeger and T. H. Colding, *On the structure of spaces with Ricci curvature bounded below. I.* J. Differential Geom. **46** (1997), 406–480.

[32] J. Cheeger and T. H. Colding, *On the structure of spaces with Ricci curvature bounded below. II.* J. Differential Geom. **54** (2000), 13–35.

[33] J. Cheeger and T. H. Colding, *On the structure of spaces with Ricci curvature bounded below. II.* J. Differential Geom. **54** (2000), 37–74.

[34] J. Cheeger and D. Gromoll, *The splitting theorem for manifolds of nonnegative Ricci curvature.* J. Differential Geometry **6** (1971/72), 119–128.

[35] S. Y. Cheng, *Eigenvalue comparison theorems and its geometric applications.* Math. Z. , **143**(1975), 289–297.

[36] T. H. Colding and A. Naber, *Sharp Hölder continuity of tangent cones for spaces with a lower Ricci curvature bound and applications.* Ann. of Math. (2) **176** (2012), 1173–1229.

[37] D. Cordero-Erausquin, R. J. McCann and M. Schmuckenschläger, *A Riemannian interpolation inequality à la Borell, Brascamp and Lieb.* Invent. Math. **146** (2001), 219–257.

[38] D. Cordero-Erausquin, R. J. McCann and M. Schmuckenschläger, *Prékopa–Leindler type inequalities on Riemannian manifolds, Jacobi fields, and optimal transport.* Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6) **15** (2006), 613–635.

[39] G. Dall'Aglio, *Giorgio Sugli estremi dei momenti delle funzioni di ripartizione doppia*, (Italian) Ann. Scuoloa Norm. Sup. Pisa (3) **10** (1956), 35–74.

[40] S. Daneri and G. Savaré, *Eulerian calculus for the displacement convexity in the Wasserstein distance.* SIAM J. Math. Anal. **3** (2008), 1104–1122.

[41] C. Dellacherie and P.-A. Meyer, Probability and potential, vol. 29 of North-Holland Mathematics Studies, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1978.

[42] A. Dembo, T. M. Cover and J. Thomas, *Information-theoretic inequalities.* IEEE Trans. Inf. Theory **37**(6) (1991), 1501–1518.

[43] R. L. Dobrushin, *Definition of a system of random variables by means of conditional distributions*, (Russian) Teor. Verojatnost. i Primenen. **15** (1970), 469–497.

[44] N. Dunford and J. T. Schwartz, Linear operators. Part I. General theory. With the assistance of William G. Bade and Robert G. Bartle. Reprint of the 1958 original. Wiley Classics Library. A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1988.

[45] M. Erbar, *The heat equation on manifolds as a gradient flow in the Wasserstein space*, Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat. **46** (2010), 1–23.

[46] M. Erbar, *Gradient flow of the entropy for jump processes*, Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Stat. **50** (2014) 920–945.

[47] M. Erbar, K. Kuwada and K.-T. Sturm, *On the Equivalence of the entropic curvature-dimension condition and Bochner's inequality on metric measure spaces.* Invent. Math. (to appear). Available at arXiv:1303.4382

[48] L. C. Evans, Partial differential equations. (2nd ed.) American Mathematical Society, 2010.

[49] L. C. Evans and W. Gangbo, *Differential equations methods for the Monge-Kantorovich mass transfer problem.* Mem. Amer. Math. Soc. **137** (1999).

[50] F. Fang, X.-D. Li and Z. Zhang, *Two generalizations of Cheeger-Gromoll splitting theorem via Bakry-Emery Ricci curvature.* Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **59** (2009), 563–573.

[51] S. Fang, J. Shao and K.-T. Sturm, *Wasserstein space over the Wiener space*, Probab. Th. Rel. Fields **146** (2010), 535–565.

[52] A. Fathi and A. Figalli, *Optimal transportation on non-compact manifolds*, Israel J. Math. **175**, (2010), 1–59.

[53] A. Figalli and N. Gigli, *Local semiconvexity of Kantorovich potentials on non-compact manifolds*, ESAIM Control Optim. Calc. Var. **17**, (2011), 648–653.

[54] M. Fukushima, Y. Oshima and M. Takeda, Dirichlet forms and symmetric Markov processes (2nd ed.) Walter De Gruyter, 2010.

[55] M. Fréchet, *Sur la distance de deux lois de probabilité*, (French) C. R. Acad. Sci. Paris **244** (1957), 689–692.

[56] W. Gangbo and R. McCann, *The geometry of optimal transport*, Acta Math. **177** (1996), 113–161.

[57] N. Gigli, *On the heat flow on metric measure spaces: existence, uniqueness and stability.* Calc. Var. Partial Differential Equations **39** (2010), 101–120.

[58] N. Gigli, *An overview of the proof of the splitting theorem in spaces with non-negative Ricci curvature.* Anal. Geom. Metr. Spaces **2** (2014), 169–213.

[59] N. Gigli, *On the differential structure of metric measure spaces and applications.* Mem. Amer. Math. Soc. (to appear). Available at arXiv:1205.6622

[60] N. Gigli, *The splitting theorem in non-smooth context.* Available at arXiv:1302.5555

[61] N. Gigli, *Nonsmooth differential geometry – An approach tailored for spaces with Ricci curvature bounded from below.* Available at arXiv:1407.0809

[62] N. Gigli, K. Kuwada and S. Ohta, *Heat flow on Alexandrov spaces.* Comm. Pure Appl. Math. **66** (2013), 307–331.

[63] N. Gigli, A. Mondino and G. Savaré, *Convergence of pointed non-compact metric measure spaces and stability of Ricci curvature bounds and heat flows.* Preprint. Available at arXiv:1311.4907

[64] C. Gini, *Sulla misura della concentrazione e della variabilità del caratteri*, Atti del R. Instituto Veneto **73** (1914), 1913–1914.

[65] N. Gozlan, C. Roberto and P.-M. Samson, *A new characterization of Talagrand's transport-entropy inequalities and applications*, Ann. Probab. **39** (2011), 857–880.

[66] A. Grigor'yan, Heat kernel and analysis on manifolds. American Mathematical Society, 2009.

[67] M. Gromov, Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces. Based on the 1981 French original. With appendices by M. Katz, P. Pansu and S. Semmes. Translated from the French by Sean Michael Bates. Reprint of the 2001 English edition. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2007.

[68] M. Gromov, Structures métriques pour les variétés riemanniennes, Textes Mathématiques [Mathematical Texts], **1**, CEDIC, Paris, 1981.

[69] K. Grove and K. Shiohama, *A generalized sphere theorem.* Ann. of Math. **106** (1977), 201–211.

[70] S. Honda, *A weakly second order differential structure on rectifiable metric measure spaces.* Geom. Topol. **18** (2014), 633–668.

[71] S. Honda, *Elliptic PDEs on compact Ricci limit spaces and applications.* Preprint (2014). Available at arXiv:1410.3296

[72] R. A. Horn and C. R. Johnson, *Matrix analysis*, Corrected reprint of the 1985 original. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[73] N. Ikeda and S. Watanabe, *Stochastic differential equations and diffusion processes*, Second edition. North-Holland Mathematical Library, **24**. North-Holland Publishing Co., Amsterdam; Kodansha, Ltd., Tokyo, 1989.

[74] R. Jordan, D. Kinderlehrer and F. Otto, *The variational formulation of the Fokker-Planck equation*, SIAM J. Math. Anal. **29** (1998), 1–17.

[75] N. Juillet, *Geometric inequalities and generalized Ricci bounds in the Heisenberg group.* Int. Math. Res. Not. IMRN 2009, 2347–2373.

[76] N. Juillet, *Diffusion by optimal transport on Heisenberg groups*, Calc. Var. Partial Differential Equations **50** (2014), 693–721.

[77] L.V. Kantorovich, *On the translocation of masses*, Dokl. Akad. Nauk. USSR **37** (1942), 199–201. English translation in J. Math. Sci. **133**(2006), 1381–1382.

[78] L.V. Kantorovich and G. S. Rubinshtein, *On a space of totally additive functions*, Vestn. Leningrad. Univ. **13**, 7 (1958), 52–59.

[79] A. Katsuda, *Gromov's convergence theorem and its application.* Nagoya Math. J. **100** (1985), 11–48.

[80] C. Ketterer, *Cones over metric measure spaces and the maximal diameter theorem.* J. Math. Pures Appl. (to appear). Available at arXiv:1311.1307

[81] C. Ketterer, *Obata's rigidity theorem for metric measure spaces.* Available at arXiv:1410.5210

[82] B. Klartag, *Needle decompositions in Riemannian geometry.* Preprint (2014). Available at arXiv:1408.6322

[83] A. V. Kolesnikov and E. Milman, *Poincaré and Brunn–Minkowski inequalities on weighted Riemannian manifolds with boundary.* Preprint (2013). Available at arXiv:1310.2526

[84] K. Kuwada, *Duality on gradient estimates and Wasserstein controls.* J. Funct. Anal. **258** (2010), 3758–3774.

[85] K. Kuwada, *Convergence of time-inhomogeneous geodesic random walks and its application to coupling methods.* Ann. Probab. **40** (2012), 1945–1979.

[86] K. Kuwada, *Space-time Wasserstein controls and Bakry-Ledoux type gradient estimates* Calc. Var. Partial Differential Equations (to appear).

[87] M. Ledoux, The concentration of measure phenomenon, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.

[88] S. Lisini, *Characterization of absolutely continuous curves in Wasserstein spaces*, Calc. Var. Partial Differential Equations **28** (2007), 85–120.

[89] A. Lichnerowicz, *Variétés riemanniennes à tenseur C non négatif.* (French) C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **271** (1970), A650–A653.

[90] A. Lichnerowicz, Géométrie des groupes de transformations. (French) Travaux et Recherches Mathématiques, III. Dunod, Paris 1958.

[91] J. Lott, *Some geometric properties of the Bakry-Émery-Ricci tensor.* Comment. Math. Helv. **78** (2003), 865–883.

[92] J. Lott and C. Villani, *Weak curvature conditions and functional inequalities.* J. Funct. Anal. **245** (2007), 311–333.

[93] J. Lott and C. Villani, *Ricci curvature for metric-measure spaces via optimal transport.* Ann. of Math. **169** (2009), 903–991.

[94] A. Lytchak, *Open map theorem for metric spaces.* St. Petersburg Math. J. **17** (2006), 477–491.

[95] J. Maas, *Gradient flow of the entropy for finite Markov chains*, J. Funct. Anal. **261** (2011), 2250–2292.

[96] C. L. Mallows, *A note on asymptotic joint normality*, Ann. Math. Statist. **43** (1972), 508–515.

[97] R. McCann, *Polar factorization of maps on Riemannian manifolds*, Geom. Funct. Anal. **11** (2001), 589–608.

[98] A. Mielke, *Geodesic convexity of the relative entropy in reversible Markov chains* Car. Var. Partial Differential Equations **48** (2013), 1–31.

[99] T. Mikami, *Monge's problem with a quadratic cost by the zero-noise limit of h-path processes*, Probab. Theory Related Fields **129** (2004), 245–260.

[100] E. Milman, *Isoperimetric and concentration inequalities: equivalence under curvature lower bound.* Duke Math. J. **154** (2010), 207–239.

[101] E. Milman and S. Sodin, *An isoperimetric inequality for uniformly log-concave measures and uniformly convex bodies.* J. Funct. Anal. **254** (2008), 1235–1268.

[102] A. Mondino and A. Naber, *Structure Theory of Metric-Measure Spaces with Lower Ricci Curvature Bounds I.* Preprint (2014). Available at arXiv:1405.2222

[103] G. Monge, Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais. In Histoire de l'Académie Royale des Sciences de Paris, 1781.

[104] M. Obata, *Certain conditions for a Riemannian manifold to be isometric with a sphere.* J. Math. Soc. Japan **14** (1962) 333–340.

[105] S. Ohta, *Gradient flows on Wasserstein spaces over compact Alexandrov spaces.* Amer. J. Math. **131** (2009), 475–516.

[106] S. Ohta, *Finsler interpolation inequalities.* Calc. Var. Partial Differential Equations **36** (2009), 211–249.

[107] S. Ohta, *Ricci curvature, entropy and optimal transport.* Optimal Transportation, 145–199, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **413**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2014.

[108] S. Ohta, (K, N)*-convexity and the curvature-dimension condition for negative* N. Preprint (2013). Available at arXiv:1310.7993

[109] S. Ohta, *Splitting theorems for Finsler manifolds of nonnegative Ricci curvature.* J. Reine Angew. Math. (to appear). Available at arXiv:1203.0079

[110] S. Ohta and K.-T. Sturm, *Heat flow on Finsler manifolds*, Comm. Pure Appl. Math. **62** (2009), 1386–1433.

[111] S. Ohta and K.-T. Sturm, *Non-contraction of heat flow on Minkowski spaces.* Arch. Ration. Mech. Anal. **204** (2012), 917–944.

[112] S. Ohta and K.-T. Sturm, *Bochner-Weitzenböck formula and Li-Yau estimates on Finsler manifolds.* Adv. Math. **252** (2014), 429–448.

[113] S. Ohta and A. Takatsu, *Displacement convexity of generalized relative entropies.* Adv. Math. **228** (2011), 1742–1787.

[114] Y. Otsu and T. Shioya, *The Riemannian structure of Alexandrov spaces.* J. Differential Geom. **39** (1994), 629–658.

[115] F. Otto, *The geometry of dissipative evolution equations: the porous medium equation.* Comm. Partial Differential Equations **26** (2001), 101–174.

[116] F. Otto and C. Villani, *Generalization of an inequality by Talagrand and links with the logarithmic Sobolev inequality.* J. Funct. Anal. **173** (2000), 361–400.

[117] G. Perel'man and A. Petrunin, *Quasigeodesics and gradient curves in Alexandrov spaces.* Unpublished preprint. Available at http://www.math.psu.edu/petrunin/

[118] A. Petrunin, *Parallel transportation for Alexandrov space with curvature bounded below.* Geom. Funct. Anal. **8** (1998), 123–148.

[119] A. Petrunin, *Alexandrov meets Lott–Villani–Sturm.* Münster J. Math. **4** (2011), 53–64.

[120] G, Perelman, *Alexandrov spaces with curvatures bounded from below II.* preprint (1991).

[121] G, Perelman, *Ricci flow with surgery on three-manifolds.* Available at arXiv:math/0303109

[122] Z. Qian, *Estimates for weighted volumes and applications.* Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **48** (1997), 235–242.

[123] T. Salvemini, Sul calcolo degli indici di concordanza tra due caratteri quantitativi, Atti della VI Riunione della Soc. Ital. di Statistica, Roma, 1943.

[124] T. Rajala, *Failure of the local-to-global property for* $CD(K, N)$ *spaces.* Ann. Sc. Norm. Super. Pisa (To appear). Available at arXiv:1305.6436.

[125] T. Rajala and K.-T. Sturm, *Non-branching geodesics and optimal maps in strong* $CD(K, \infty)$*-spaces.* Calc. Var. Partial Differential Equations **50** (2014), 831–846.

[126] M.-K. von Renesse and K.-T. Sturm, *Transport inequalities, gradient estimates, entropy and Ricci curvature*. Comm. Pure Appl. Math. **58** (2005), 923–940.

[127] G. Savaré, *Gradient flows and diffusion semigroups in metric spaces under lower curvature bounds*. C. R. Math. Acad. Sci. Paris **345** (2007), 151–154.

[128] G. Savaré, *Self-improvement of the Bakry-Émery condition and Wasserstein contraction of the heat flow in* $RCD(K,\infty)$ *metric measure spaces*. Discrete and Contin. Dyn. Syst. **34** (2014), 1641–1661.

[129] T. Shioya and T. Yamaguchi, *Collapsing three-manifolds under a lower curvature bound*. J. Differential Geom. **56**(2000), no. 1, 1–66.

[130] T. Shioya and T. Yamaguchi, *Volume collapsed three-manifolds with a lower curvature bound*. Math. Ann. **333**(2005), no. 1, 131–155.

[131] K.-T. Sturm, *Convex functionals of probability measures and nonlinear diffusions on manifolds*. J. Math. Pures Appl. **84** (2005), 149–168.

[132] K.-T. Sturm, *On the geometry of metric measure spaces. I.* Acta Math. **196** (2006), 65–131.

[133] K.-T. Sturm, *On the geometry of metric measure spaces. II.* Acta Math. **196** (2006), 133–177.

[134] K.-T. Sturm, *Gradient flows for semiconvex functions on metric measure spaces – existence, uniqueness and Lipschitz continuity*. Preprint (2014). Available at arXiv:1410.3966

[135] V. N. Sudakov, Geometric problems of the theory of infinite-dimensional probability distributions. (Russian) Trudy Mat. Inst. Steklov. **141**, 1976.

[136] V. N. Sudakov, *Geometric problems in the theory of infinite-dimensional probability distributions*. Cover to cover translation of Trudy Mat. Inst. Steklov **141** (1976). Proc. Steklov Inst. Math. 1979.

[137] H. Tanaka, *An inequality for a functional of probability distributions and its application to Kac's one-dimensional model of a Maxwellian gas*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete **27** (1973), 47–52.

[138] H. Tanaka, *Probabilistic treatment of the Boltzmann equation of Maxwellian molecules*, Z. Wahrsch.Verw. Gebiete **46**, 1 (1978/79), 67–105.

[139] N. S. Trudinger and X.-J. Wang, *On the Monge mass transfer problem*. Calc. Var. Partial Differential Equations **13** (2001), no. 1, 19–31.

[140] L. N. Vasershtein, *Markov processes over denumerable products of spaces describing large system of automata*, Problemy Peredači Informacii **5** (1969), no. 3, 64–72.

[141] A. M. Vershik, *The Kantorovich metric: the initial history and little-known applications*, Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI) 312, Teor. Predst. Din. Sist. Komb. i Algoritm. Metody. **11** (2004), 69–85, 311.

[142] A. M. Vershik, Ed. J. Math. Sci. 133, 4 (2006). Special issue dedicated to L. V. Kantorovich. Springer, New York, 2006. Translated from the Russian: Zapsiki Nauchn. seminarov POMI, vol. 312: "Theory of representation of Dynamical Systems. Special Issue". Saint-Petersburg, 2004.

[143] C. Villani, Topics in optimal transportation. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.

[144] C. Villani, Optimal transport, old and new. Springer-Verlag, Berlin, 2009.

[145] G. Wei and W. Wylie, *Comparison geometry for the Bakry-Emery Ricci tensor*. J. Differential Geom. **83** (2009), 377–405.

[146] H.-C. Zhang and X.-P. Zhu, *Ricci curvature on Alexandrov spaces and rigidity theorems.* Comm. Anal. Geom. **18** (2010), 503–553.

[147] 會田茂樹, モンジュの最適輸送問題をめぐる話題について, 大阪大学基礎工学研究科公開講座, http://www.math.tohoku.ac.jp/~aida/paper/preprint/monge-final-nooverlays.pdf.

[148] 太田 慎一，確率測度の空間の幾何学．数学 第 63 巻 (2011), 21–42.

[149] 太田 慎一，フィンスラー多様体上の幾何解析，数学 第 64 巻 (2012)，337–356.

[150] 大津幸男，山口孝男，塩谷隆，加須栄篤，深谷賢治，リーマン多様体とその極限．数学メモアール 第 3 巻，日本数学会.

[151] 小谷真一, 測度と確率, 岩波書店.

[152] 酒井隆，リーマン幾何学．裳華房.

[153] 三上敏夫, 確率力学としての最適輸送問題, 数学 **58** (2006), 364–382.

[154] 丸山徹, 関数解析学, 慶応通信, 1980.