

トポロジーの課題探訪

—特性類と不変量を中心として—

森田茂之

2013 年 10 月 9 日-

記録者から

このノートは 2013 年 10 月から中央大学で行われている森田茂之先生の講義をまとめたものです。なるべく講義の雰囲気そのまま伝えるために、講義ノートとしてまとめるというよりは、極力話された内容をそのままに近い形で文字にするようにしています。なお、記号や用語の不統一、誤植などに関しては全て記録者に責任があります。また作図は中央大学の小川竜さんに描いて頂きました。

記録者：北野晃朗

目次

1	葉層の特性類を巡る三つの謎	2
1.1	不連続不変量と実コホモロジー類の謎—葉層の多様性は連続変化を超えられるか?—	2
1.2	C^∞ 葉層と実解析的葉層—人為 vs 天与—	16
1.3	横断的シンプレクティック葉層と有限型不変量	28
2	3 次元多様体の不変量を巡る謎	41
2.1	commutative graph homology と 3 次元多様体の不変量	41
2.2	homology 3 球面の homology 同境界類のなす群	54
3	mapping class group $\mathcal{M}_g$ と Riemann 面の moduli 空間 $\mathbb{M}_g$	67
3.1	非安定コホモロジーと有界コホモロジー	68
3.2	moduli space の tautological algebra の構造	79

1 葉層の特性類を巡る三つの謎

1.1 不連続不変量と実コホモロジー類の謎—葉層の多様性は連続変化を超えられるか？—

新シリーズという事で装いを新たにしたいのですが、実際聞いている方は装いは変わったが中身はどうかと思われる方もおられるかもしれませんが、その辺はどうかご容赦ください。いま三松先生からも紹介がありましたが、新シリーズのタイトル、三回のタイトル、それぞれ長いので、すみません、いきなり始めさせていただきます。今日は不連続不変量と実コホモロジー類の謎—葉層の多様性は連続変化を超えられるか？です。

私は大体1時間半の話だと、6ページを用意しています。若い頃、1,2年生の線型代数を教えていた時はそれで丁度よかったのですが、退職の頃は6ページではなくて4ページくらい、3分の2くらいのスピードになりました。だから内容も、それはこちらの問題だけではなくて、高校までの教育の問題も多少あると思います。それはともかく6ページどんどんやってしまうよりは、途中で変だなと思ったり、あるいは疑問があったら、遠慮なく途中で聞いて下さい。

(1) Characteristic classes of foliations

葉層の特性類という事で、 $\mathcal{F}$ と書いたら今日は少なくとも foliation です。これには breakthrough というものがあります。それは Thurston (1946-2012) です。最近2つの大学で講義をさせてもらっていますが、通常 Gauß から始めて、Gauß, Riemann, Poincaré. それぞれ括弧の中に年代を書いています。Thurston も残念ながら括弧の中に年代を書く事になってしまいました。残念な事に去年2012年の8月に亡くなりました。年を引くと66ですが、誕生日は10月でしたから65歳と10ヶ月。breakthrough が実際に起こったのは1971年、出版は Bulletin of AMS, 有名な論文です。

Theorem 1.1 (Thurston). 3次元球面 S^3 上に $\langle GV(\mathcal{F}_t), [S^3] \rangle = t$ が continuous variation をもつ codimension 1 foliation の1パラメータ族 $\mathcal{F}_t (t \in \mathbb{R})$ が存在する。

定義はさすがに後でちゃんとやります。Godbillon-Vey class $GV(F_t)$, 3次元 cohomology に定義されます。今は3次元球面ですから、これを fundamental cycle $[S^3]$ で evaluate すると実数になりますが、これが連続変化する。特性類というのは通常というか、それ以前の古典的な特性類は、Stiefel-Whitney class は $\mathbb{Z}/2$ -係数ですが、Chern class, Pontrjagin class, Euler class, みんな integral なんですね。integral cohomology というのは、実 cohomology の謎と書きましたが、非常に特別な cohomology です。それでも Chern class, Pontrjagin class, Euler class というのは、integral の範囲ですがもちろんいろいろな cohomology class を取りますから、algebraic variety とか複素多様体の topology, 微分可能多様体の分類でも、本質的な役割を果たしました。topology の立場から言うと1956年のMilnorの仕事ですね、exotic sphere. Θ^7 , これが order 28 の有限巡回群というのは、これは Kervaire-Milnor の仕事ですが、 S^7 に通常とは違う微分構造を発見した1956年のMilnorの仕事、これが breakthrough です。これに匹敵する breakthrough が15年後、Thurston の仕事です。その後の展開でいうと Thurston 自身も認めていますが、非常に対照的な経過を辿りました。Milnor の仕事は differential topology の誕生を告げたわけですが、もちろん、その前に Thom の仕事があったわけですが、Thom, Milnor, Hirzebruch, Atiyah,... と20年くらいの間に大発展を遂げたわけです。

Thurston のこの仕事は Milnor と比べて対照的というのは、これで breakthrough が起こって実 cohomology と

いうものが出て来たわけですが、その後の詳しい事はこの9月に東大数理で開催された foliation の symposium で、Haefliger 先生が reminiscence で話されました。その頃の事、1971 年から 2,3 年の事ですかね、それは今回、坪井先生に Haefliger 先生が送ってきた資料、手紙とか Haefliger 自身の評価とか、普通は出せないもの、時間が大分経っているので問題はないですが、それを見るとわかります。Thurston が関わったのは 1976 年頃までですね。このあとに曲面の微分同相に関する Nielsen-Thurston 理論、その後 1978 年頃から集大成の仕事というか、3 次元の Thurston program の仕事があつて、Perelman とか Agol、こういう人たちの仕事で 2012 年に完結してしまった、多少残っているもの、foliation や数論の関係で残っている問題はありますが、事実上完成しました。特に最初の仕事に関しては、Thurston は長年の懸案だった問題を 4,5 年の間に解いてしまいました。ある意味で解いてしまった。もちろんこれらの foliation の理論は定量的な理論で、一方で定性的な理論もあつて、定性的な研究はずっと連綿と続いていますし、これからもずっと続くと思います。特性類に関して言えばある意味で exodus という言葉があるくらいです。その頃若い人にとっては、私も若かったのですが、はじめ凄く衝撃的だったわけで、では自分たちは何をしたらよいのだらうとなってしまうと、これは Thurston 自身の回想にも書いてありますし、他の人も書いていますが、当時 73,4 年頃に foliation に参入しようとした若い人たちにその頃指導教官たちはちょっとやめた方がいいよ、という事があつたわけです。それを exodus という言葉で形容しました。

それはともかく、しかしそれはちょっと本質を少し外れている面もあつて定量的な理論は終わったのかというとうそうではない。それを 3 つの謎という言葉を使って定量的な理論でもわからない事も沢山あるという事をお話したいと思います。ただちょっと注意するのは、これは 100 年経っても全く解かれない可能性もあるので、若い人たちにこれだけをやるというのは絶対に勧めません。それはやめた方がよいと思います。ただこういう問題もあるという事は知っておいて頂きたい。こういう問題を若い世代に引き継ぐというと、ちょっと大上段にすぎますが、軽い気持ちでそういう問題がある、それを若い人に伝えたい、それが私の motivation です。

1971 年に breakthrough があつたのですが、その前段として基礎となる仕事が 3 つありまして、Haefliger と Bott と Gel'fand-Fuks です。この 3 つの大きな仕事があつて、まず 1968-9 年 Haefliger が Γ_n -structure、後で定義しますが、別名 Haefliger structure と言います、その理論を展開しました。1970 年の Springer Lecture notes にあるのが基本的な文献です。

Bott は Bott vanishing, Bott の消滅定理というものを証明して 1970 年の ICM で発表しました。

Gel'fand-Fuks は Gel'fand-Fuks cohomology という理論があつて、微分可能多様体 M があつたら、その上の C^∞ -vector 場全体、これは無限次元 Lie 代数ですが、この Lie 代数の C^∞ -topology に関する連続 cohomology $H_c^*(X(M))$ を考えて、考える事は誰でもできますがこれを実際に計算してみせました。これがみんなビックリした結果でした。

Godbillon-Vey も 1971 年に Godbillon-Vey class を定義しました。そのすぐ後、2,3 ヶ月のうちに、Gel'fand-Fuks 理論との深い関連が見つかつて、これからちょっと経って Chern-Simons 理論が出てきますが、それとの関連も見つかつて、foliation の特性類の理論が爆発的に発展しました。Thurston がさっき一人でやったような言い方をしましたが、Heitsch とか Hurder も重要な仕事をしました。これが breakthrough とその前の 3 つの基本的な仕事です。

(2) ここで定義をします。この 3 つの問題は 2 つは少なくとも codimension 1 でありますし、3 つ目は codimension 2 ですが、複素では codimension 1 になるので定義は codimension 1 でやります。

微分可能多様体 M とその次元の 1 つ下がつた部分多様体、 $n-1$ 次元の leaf、いま transverse 方向が 1 次元あります。foliation の定義は、多様体の定義と同じようにまず coordinate covering $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ を取ります。多

様体の構造を定義する

$$\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha) = V_\alpha \subset \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$$

があつて、それが leaf 方向と transverse 方向、いま $n-1$ 次元と 1 次元にしたので、 $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ という積構造から、ここに $n-1$ 次元 leaf がある、まっすぐな leaf があります。

a. M 内の $U_\alpha \cap U_\beta$ と leaf の絵

そうすると次に transition function

$$\varphi_\alpha \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

というものがあります。多様体ですから $\mathbb{R}^n$ の local diffeomorphism があつて、ここまでは通常の多様体の定義です。この transition function というものが今どういう形をするかという、

$$\varphi_\alpha \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \ni (x, y) \mapsto (f_{\alpha\beta}^{(1)}(x, y), f_{\alpha\beta}^{(2)}(y)) \in \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta),$$

b. $\mathbb{R}^n$ 内の V_α と V_β と $\mathbb{R}$ 内の変換の絵

ここで $f_{\alpha\beta}^{(1)}(x, y)$ は後ろの y にも依りますが、 $f_{\alpha\beta}^{(2)}(y)$ は y のみに依る。foliation の定義が本質的にここにあるわけです。これが codimension 1 の foliation の定義です。

次にこれが Γ_1 -structure までいくと、leaf 方向は全部つぶしてしまいます。そうすると、 V_α が $\mathbb{R}$ の部分集合 W_α になります。そうするとですね、結局これを

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \Gamma_1^\infty$$

としますと、 Γ_1 -structure, Haefliger-structure というものですが、何も書かなければ C^∞ 。これはもちろん C^r 、すべての r に対して考える事ができますが、この話では C^∞ 級と C^ω 級のどちらかで何も書かなければ C^∞ 級です。ここで Γ_1 というのは、いまは $\mathbb{R}$ の local diffeomorphisms 全体、codimension q のときは $\mathbb{R}^q$ 上の local diffeo の全体、これがまず pseudo group になります。

この pseudo-group の各点における germ、それを全部もってきたものが groupoid になり、topology は sheaf topology を入れて topological groupoid として考え、

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \Gamma_1^\infty$$

いまこういう連続写像が得られます。そして $g_{\alpha\beta}$ が 1-cocycle になって値が Γ_1 になる。これは Haefliger のいわば singular な foliation の定義で Haefliger structure と呼ばれるようになりました。これが homotopy 論とマッチしました。一般に分類空間というものがあつて、vector bundle の分類空間と同じように Haefliger-structure にも分類空間が定義出来ます。

cocycle condition は非常に大事なので書いておきます。任意の点 $p \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ に対して、

$$g_{\alpha\beta}(p)g_{\beta\gamma}(p)g_{\gamma\alpha}(p) = "id" \text{ の germ}$$

左辺全て各点における germ なので、 id にも $"$ を付けています。 id の germ です。これが cocycle condition.

そうすると分類空間 $B\Gamma_1$ というものがあつて、各点で微分をする。各点で $\mathbb{R}$ の local diffeo があるから、各点でその微係数というものがあつて、それはゼロでない実数なわけですが、一般の codimension の事を考えると $\mathbb{R}^q$ ですが、こういう微分が存在しまして

$$d : B\Gamma_1 \rightarrow BGL(1, \mathbb{R}) = K(\mathbb{Z}/2, 1)$$

$BGL(1, \mathbb{R})$, これは結局 Eilenberg-MacLane 空間, 1 次元実 vector bundle の分類空間ですから, 第 1 Stiefel-Whitney class $w_1 \in H^1(BGL(1, \mathbb{R}); \mathbb{Z}/2)$ で完全に分類される. そしてこれは基本群との関係でいうと基本群から $\mathbb{Z}/2$ への準同型写像全体になります. こう書いてしまうと身も蓋もない感じになりますが, vector 束の場合にはいろいろと理論があつて, 特に 1 次元の場合には完全にわかってしまいます.

そして topology は非常に柔軟というか, 特に homotopy 論は柔軟な数学なので, 連続写像があると homotopy 的にはなんでも fiber bundle に出来てしまうわけです. この bundle の fiber が

$$B\bar{\Gamma}_1 \rightarrow B\Gamma_1 \rightarrow BGL(1, \mathbb{R}).$$

但しこの場合は, fiber というよりは, groupoid, 向きを保つ local diffeo だけを考えて groupoid の分類空間ですから, 特に homotopy fiber という必要がなくて $B\bar{\Gamma}_1$ と通常書くわけです. transverse に oriented, 向き付けられた foliation です.

次回と, 今日はこれが主役なのですが, 定義をした関係であと 2 つ, 3 つ, 重要なものを挙げておきます.

$$B\bar{\Gamma}_1, B\bar{\Gamma}_1^\omega, B\Gamma_2^{\text{symp}}, B\Gamma_{2n}^{\text{symp}}.$$

これ $B\bar{\Gamma}_1^\omega$, $\mathbb{R}$ の向きを保つ実解析的な局所微分同相の germ のなす topological groupoid, その次に plane 上で symplectic form というか, 通常的面積を保つ local diffeo の germ のなす $B\Gamma_2^{\text{symp}}$, これは codimension 2 であつて, symplectic form を保つものです.

これらについて第 3 回, 12 月のテーマですけれども, 一般には $\mathbb{R}^{2n}$ 上の symplectic form を保つ $B\Gamma_{2n}^{\text{symp}}$, この 4 つが主役になります. この 4 つに関して何が分かつていて何が分かつていないかを挙げます. 何十年かかかるかわかりませんが, 次の breakthrough が起きると 3 つとも解かれるかもしれません.

Godbillon-Vey を定義しておきましょう. $\mathcal{F}$ を codimension 1-foliation on M とします. これが transversely oriented という事を仮定します. これはどういう条件で書けるかという global な 1-form ω が存在して

$$\{\omega = 0\}$$

という条件で tangent bundle の subbundle がまず定まります. codimension 1 ですから 1-form 1 つで書けます. そしてこれが integrability condition を満たす, codimension q だと, local には q 個の 1-form $\omega_1, \dots, \omega_q$ があつて, それらの外微分が ideal として閉じている, それが integrability condition です. 今の場合簡単で

$$d\omega \wedge \omega = 0.$$

そうすると Godbillon-Vey というのは言われてみると簡単なもので, いま 1-form ですから $\wedge \omega$ してゼロから,

$$d\omega = \eta \wedge \omega$$

となる 1-form η が存在します. これは微分形式の定義だけから出てきます. $\eta \wedge d\eta$ とおくと実はこれは closed

$$d(\eta \wedge d\eta) = 0$$

になる事がわかります. これは大学 3 年くらいで de Rham cohomology を勉強すると非常によい演習問題です. 従つて 3 次元 de Rham cohomology class, 実 cohomology 類が定義できるわけです.

$$[\eta \wedge d\eta] \in H_{DR}^3(M; \mathbb{R})$$

1-form η はいろいろ choice がありますが, $[\eta \wedge d\eta]$ は well-defined になってこれを Godbillon-Vey 類といいます. 今は Godbillon-Vey 類と呼ばれていますが, これは Gel'fand-Fuks, Bott, Haefliger, Thurston, Godbillon-Vey だけが発見したかどうかやや微妙な所はあります. もちろん Godbillon-Vey は発見したのですが, Bott,

Gelfand たちもある意味分かっていた可能性はあると思います。それはともかくこれが定義です。特性類を定義したら次の問題はゼロでない例があるかですが、Roussarie という人が直ちに証明しました。これは 12 月の symplectic との関係でいうと、 $B\Gamma_2^{symp}$ ではこれに対応する Lie 群がありません。 $B\Gamma_1$ では $PSL(2, \mathbb{R})$, ある意味で非可換な Lie 群で一番大事な、2 次元双曲空間の isometry 全体のなす群、あるいは複素解析的な同型写像の全体のなす群、あらゆる数学で一番大事な、 $SO(2)$ はもっと基本にあります。非可換なところで一番大事な Lie 群があつて 3 次元 Lie 群であつてその上の左不変微分形式、Lie 代数を考えると丁度これを実現するものがあつて、それを使って Roussarie は Godbillon-Vey 類が恒等的にはゼロでないという事を証明しました。もちろん $PSL(2, \mathbb{R})$ は canonical ではないが上半平面の unit circle bundle と微分同相でそれを Fuchs 群で割ると compact 多様体を得られて、Heitsch がさらに一般の多様体で定義しました。その前に Thurston の仕事がありますが、Heitsch が一般化しました。そういうものがあります。Thurston は unit circle bundle $T_1\Sigma_g \rightarrow \Sigma_g$, 種数 g の closed oriented surface に hyperbolic metric を入れる Riemann 面と言ってよいですが、これは surface 上の S^1 -bundle, ここには有名な Anosov foliation というものが存在します。Roussarie がこれがあるというのを使って volume form になるので実際 Godbillon-Vey がゼロでない事を証明しました。

そして Thurston はどうしたかといううまく切り貼りして下の surface にうまく S^1 を考えて、その S^1 の所では S^1 -bundle ですから、torus になります。torus 上の linear foliation, これを見つけてそうすると genus 2 ぐらいでこれを見つけて、言われてみればそうですねというしかないですが、Thurston の天才というか、linear foliation ですからここで貼付ける事ができるわけですね、同じ角度にすれば貼付ける事ができるわけです。体積というちょっと語弊がありますが、うまく張り合わせると cycle というか 3 次元多様体が出来て、Anosov foliation というのは rigid なものですから、切ったり貼ったりは出来ないと思われていましたが、微分 topology の伝統的なやり方と rigid な geometry がうまくあつてできました。さっきは 3 次元球面でしたが、種数 2 の曲面上でやると実解析的に実現できます。実解析的に Godbillon-Vey class を連続的に動かす事が出来る事を証明しました。

そこで Thurston の定理を改めて書きます。まず Godbillon-Vey class は $GV \in H^3(B\bar{\Gamma}_1; \mathbb{R})$ を定義するという事になります。 $H_3(B\bar{\Gamma}_1; \mathbb{Z})$, 3 次元の integral homology, これを Godbillon-Vey で evaluate することで次のような全射が得られる。

Theorem 1.2 (Thurston).

1. $\langle GV, \cdot \rangle : H_3(B\bar{\Gamma}_1; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{R}$
2. $\langle GV, \cdot \rangle : H_3(B\bar{\Gamma}_1^\omega; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{R}$

2 番目の $B\bar{\Gamma}_1^\omega$ は実解析的な Γ_1 -structure で、これを Godbillon-Vey class で Kronecker 積を取ったものです。最初のものはさっき上げた Bulletin AMS の論文に書いてあります。2 番目はその論文には 1 行か 2 行か書いてあるだけで詳しい事は何も書いてありません。その後彼は忙しくて結局出版はしませんでした。我々には理解できないというくらいやましい所もあります。何れにしてもこれを証明しました。ここ $B\bar{\Gamma}_1^\omega$ でも非常に難しいですが、実解析的にはさらに難しい。例えばもしも仮に $B\bar{\Gamma}_1^\omega$ に関する問題は 10 年後には解決したとしても、 $B\bar{\Gamma}_1^\omega$ の方はその倍はかかると思います。ただ実解析的は一方では天与のものというか、もしかするとこちらの方が自然かもしれない。何か見つけたときに実解析的を逆手に取ってできるかもしれません。こちら辺は若い人たちにそういう可能性がありますよと伝える事には意味があるかもしれない。この段階では全く同じですが次元が上がっていくとわからなくなります。

(3) Mather-Thurston

Mather-Thurston 理論, 1971,2,3 年くらいの大結果です.

まずは Mather の結果からやります. $\text{Diff}_K^0 \mathbb{R}$, いきなりこういう群がでできます. $\mathbb{R}$ の compact support の微分同相であって, そこに discrete topology を入れて考える.

何も書かなければ C^∞ . $\text{Diff}_K^0 \mathbb{R}$, 本質的には C^∞ でこれは大定理ですが実解析的には何も言っていない. $B\text{Diff}_K^0 \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ というものを考えます. $\text{Diff}_K^0 \mathbb{R}$ は discrete topology ですから flat bundle の構造群であって, $\mathbb{R}$ の微分同相ですから先ほどの Γ -structure で一番最後に言った $\mathbb{R}$ の leaf が別の leaf に行く, 従って $B\text{Diff}_K^0 \mathbb{R}$, これは codimension 1 foliation のある universal な空間です. 分類空間があって $\times \mathbb{R}$ ですから, B 上の trivial な $\mathbb{R}$ -bundle です. その張り合わせ写像が $\mathbb{R}$ の微分同相でしかも discrete topology ですから, これは張り合わせって水平方向のものが leaf になって foliation が出来る.

c. $B \times \mathbb{R}$ と leaf の絵

しかも compact support ですから遠くでは平な foliation, 内部で holonomy がある. しかも fiber には transverse. そうすると全体の構造の中に codimension 1 foliation がありますからその Γ -構造を考えると, 分類写像, classifying map

$$B\text{Diff}_K^0 \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow B\bar{\Gamma}_1$$

ができます. これは Mather が考えました. ここで homotopy 論が出てくる余地があって少し前後しますが Milnor の画期的な仕事の前に Thom が何をしたかという, cobordism という概念を定義して, ほとんど独力で完成というところと言い過ぎでしょうか. そのテクニックは何かというと, 2つの多様体が cobordant であるとは, 次元の 1 つ高い共通の多様体の境界になる, cobordant という relation を入れる.

Thom の偉いのは relation というのがうまく作用して Ω_n , n 次元多様体の cobordism class 全体の abel 群, cobordism 群, この定義は誰でも出来るかもしれませんが. これを計算するために differential topology, vector bundle の理論を使って, そして分類写像を使って, Γ -structure の場合は loop space が出てきますが, cobordism の場合は Thom space というものが出て来て, その Thom space の homotopy 論に帰着しました. 幸いな事に homotopy 論が十分発達していたので, modulo torsion で Ω_n を完全に決定しました. torsion は Milnor とか Wall が完成しました. それが Thom の大結果です. それに少し関係しています. 違いは今度は群がばかでない. Thom の場合は Thom space というものを考えて, stable normal bundle を考えて遠くの方は一点につぶす, トポロジストの一つの得意技ですね. 代数幾何の人からするとそんな乱暴なというかもしれません. 今はそんな事はないですね. 代数幾何, A^1 -homotopy とかありますからかなり認知されてきました. それはうまくいったわけです.

今度の場合はどうなるかという, ここに写像はあるわけですが, $x \in B$ をとるとその上の fiber は $\mathbb{R}$ なわけで, 無限遠では constant, base point にいくわけです. という事は各点 x から fiber $\mathbb{R}$ の行った先は base point から出発する loop になります. 従って adjoint map といいますが,

$$B\text{Diff}_K^0 \mathbb{R} \rightarrow \Omega B\bar{\Gamma}_1$$

が定義されます. loop space, topology で十分発達した, いまでは operad の理論とか, 十分に発達した理論があります. 次が Mather の定理, 驚くべき定理です. それは, これが誘導する写像, 係数は何でもよいです. これが homology isomorphism である.

Theorem 1.3 (Mather).

$$H_*(B\text{Diff}_K^0 \mathbb{R}; \mathbb{Z}) \cong H_*(\Omega B\bar{\Gamma}_1; \mathbb{Z})$$

Mather が証明しました。 $B\text{Diff}_K^0\mathbb{R}$ は基本群が $\text{Diff}_K^0\mathbb{R}$ になる Eilenberg-MacLane space で、ばかでかい空間です。一方で $B\bar{\Gamma}_1$, こちらは単連結。これも Haefliger の理論, 一般の q では q -連結, 今の場合は $q = 1$ で単連結。これも十分発達していた Gromov や Phillips の理論。その後 h-principle というものになって今でも発展中です。これは foliation というか多様体で証明できる。

くどいようですが実解析的な場合は、そもそも $B\bar{\Gamma}_1^0$ が Eilenberg-MacLane space になってしまって、その loop space と言っても連結ではなくなってどうにもならない。それをどう回避するかというのが実解析的な世界にどう切り込むかという問題になるわけです。

この証明は天才としかいいようがない大定理です。この corollary として、 $B\bar{\Gamma}_1$ が単連結で $\Omega B\bar{\Gamma}_1$ は連結になって、 $H_1(\Omega B\bar{\Gamma}_1; \mathbb{Z})$, これが同型である事の $H_1(B\text{Diff}_K^0\mathbb{R}; \mathbb{Z})$ で、これは $\text{Diff}_K^0\mathbb{R}$ の able 化なわけです。今は codimension 1 でやっていますが、Mather は codimension q でやっています。そしてこれが自明、つまり

$$\text{Diff}_K^0\mathbb{R}$$

が群として perfect である事を証明しました。先ほどの Thom の仕事のアナロジーでいうと homotopy 論に帰着させて $\Omega B\bar{\Gamma}_1$ に関する topology の問題、 $\pi_2(B\bar{\Gamma}_1)$, $B\bar{\Gamma}_1$ が 1-連結である事が Haefliger の結果でわかっていて、では $\pi_2(B\bar{\Gamma}_1)$ はどうなるか、 $\pi_2(B\bar{\Gamma}_1)$ は loop をとっているから H_1 , どんどん問題はやさしくなったとはいませんが、homotopy 群がゼロというのは非常に難しい、幾何学的な群があつて abel 化, commutator を計算するのは理論がありますから、topology の脈々としたこの歴史がありますから。homotopy 論, 群の homology に問題を帰着させて発達している所で解く。この corollary として $\pi_2(B\bar{\Gamma}_1)$ がゼロを証明しました。今の場合群の homology に帰着して証明しました。そうすると 2-連結ですから、次は Thurston が全射

$$\pi_3(B\bar{\Gamma}_1) \twoheadrightarrow \mathbb{R}$$

が存在することを証明しました。実際これは同型かというのは問題になりますが非常に難しい問題です。唯一後で述べますが坪井さんの結果があります。その Kernel について幾何学的に定式化したものです。実際同型かどうか、次の Thurston が出ないといけないかもしれない。それはちょっと置くとして、Godbillon-Vey というのは 3 次元の実 cohomology ですから、

$$GV : B\bar{\Gamma}_1 \twoheadrightarrow K(\mathbb{R}, 3)$$

一番楽観的な予想はこれが homotopy 同値か?です。これが一番楽観的な予想でこれが証明できたら大結果です。 π_3 の Kernel があるかは難しいわけですからどうにもならない。これが如何に難しいか。この Kernel を考えるならいろいろな観点から attack するのがよいからおもって、これが 4 番目に出てくる discontinuous invariant を考えました。

(4) これが homotopy 同値だとすると homology 同値なわけですから

$$H_*(B\bar{\Gamma}_1; \mathbb{Z}) \twoheadrightarrow H_*(K(\mathbb{R}, 3); \mathbb{Z})$$

これが全射だろう。homotopy 同値だとすると関係する、実際これが同型になる事が homotopy 同値と必要十分になります。それは Whitehead の定理で、homology 同値ならば homotopy 同値です。そうすると 3 のときに $\mathbb{R}$ より大きい事がわかったわけですが、4,5 ではどうか、全てを忘れて Eilenberg-MacLane space, 3 次元実 homology 類がどれくらいあるか、それが homology 論。それを考えるとこれがものすごくばかでかい homology を持つ事がすぐにわかります。それはこれが $\mathbb{R}$ だからです。もしこれが $\mathbb{Q}$ だとすると、 $K(\mathbb{Q}, 3)$ の $\mathbb{Q}$ -homology というのは 3 次元球面の $\mathbb{Q}$ -homology と同じですから、3 次元だけあってあとはゼロ。 $\mathbb{R}$ という

のは何かというと、これを $\mathbb{Q}$ 上の vector 空間だと思えば、vector space には常に basis が取れますから、これは連続体濃度の直和

$$\mathbb{R} = \bigoplus_i \mathbb{Q}_i$$

になります。仮に考えやすいように、 $\mathbb{Q}$ と $\mathbb{Z}$ は rational homotopy type は同じですから、 $\mathbb{Z}$ が例えば k 個あったとすると、その homology は何かというと、

$$H_*(\mathbb{Z}^k) \cong H_*(T^k) \cong \Lambda_{\mathbb{Z}}^*(\mathbb{Z}^k)$$

こういう風に純粋に代数的に記述できます。そうすると $\mathbb{R}$ というのは $\mathbb{Q}$ 上の vector space としては連続体濃度だけ $\mathbb{Q}$ があるわけですから、 $K(\mathbb{R}, 1)$ 、いまは $K(\mathbb{R}, 3)$ ですが、これはいわば何かというと連続次元のトーラスというべきものです。つまり rank が連続次元だけあるような基本群がものすごくばかどかい。 $K(\mathbb{R}, 3)$ になると次数はシフトしていきいます。無限次元のトーラスだとすると homology は掃いて捨てるほどあります。実際これは簡単な homology 論を勉強して、Kunneth の定理、積空間の homology を考えると次のようになります。

Proposition 1.4.

$$H_*(K(\mathbb{R}, 3); \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & * = 0 \\ \Lambda_{\mathbb{Z}}^k \mathbb{R} & * = 3k \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

$$H_*(K(\mathbb{R}, 2); \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & * = 0 \\ S_{\mathbb{Z}}^k \mathbb{R} & * = 2k \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

$\mathbb{R}$ の $\mathbb{R}$ 上の外積はすぐにゼロになってしまいますが、これは $\mathbb{R}$ を $\mathbb{Z}$ 上の module と思うので rank は無限です。 k 階の外積はいくらでも出てきます。これは前半は Kunneth の定理を使って、cohomology は多少面倒ですが、homology は direct limit と交換可能なのでこのように書けます。あとは Mather の定理を使って、もの凄く難しいものを多少簡単にするのに loop space を取ったのが後半です。今度は通常の cup 積も消えなくなるので $S_{\mathbb{Z}}^k \mathbb{R}$ は $\mathbb{R}$ を $\mathbb{Z}$ 上の module だと思って symmetric product を取ったものです。こういう事がわかります。

そうすると直ちに出てくる問題として、higher Godbillon-Vey class と呼んで

$$GV_k : H_{3k}(B\tilde{\Gamma}_1; \mathbb{Z}) \rightarrow H_{3k}(K(\mathbb{R}, 3); \mathbb{Z}) \cong \Lambda_{\mathbb{Z}}^k \mathbb{R}$$

が得られます。こういう所に準同型写像が得られます。それでこれはいま $\mathbb{Z}$ と書きましたが、実は uniquely divisible という性質があるので $\mathbb{Q}$ 上としても同じです。こうなります。そうすると $k = 1$ のときには、Thurston の定理で GV_1 は全射なわけです。これは Thurston の定理です。問題は $k = 2$ のとき、 $k = 2$ ならば GV_2 は全射か? という問題が出来ます。私はこれを不連続不変量と呼んで、1980 年代はじめに問題として出しました。事実上あとで坪井さんの結果を書きますが、1998 年、その 1 つの結果があるだけでほとんど前進はない。こういう問題が出来ます。これが難しい事を端的に表すと、これがもし全射だとすると、 GV_3 はどうですか? もしそれが全射なら GV_4 はどうかと続いていきます。 GV_2 ですら今の所非自明かどうかはわからない。分かったとしても無限にしかも連続体濃度ですから、証明すべき事はありません。気が遠くなります。

あとで symplectic 多様体の関係でいいますが、もしある l において恒等的に $GV_l \equiv 0$ であるならば、その上は、任意の $k \geq l$ では $GV_k \equiv 0$ になります。これがその不連続不変量、これがその cohomology が連続体濃度ですから不変係数定理は気持ち悪いので書きませんでした。ある事はあるんです。この不連続不変

量が何で detect されるかというとはやっぱり通常の cup 積なんですね、通常の cup 積で detect される、まず Godvillon-Vey class $GV \in H^3$ があって、次は 6 次元の cohomology は、6 次元の GV_2 は何で detect されるかというとは、

$$GV \cup GV^{\sigma_1},$$

GV を σ_1 で twist する、但し $\sigma_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ で $\mathbb{Z}$ 上の automorphism. $\mathbb{R}$ の $\mathbb{Z}$ 上の automorphism はものすごく沢山あります。例えば数論でいうと $\mathbb{R}$ の $\mathbb{Q}$ 上の Galois 群、それですでに大きいです。codimension 2 でやると $\mathbb{C}$ というものが出て来て、こちらの方が数論的には、絶対 Galois 群が出てきます。どちらにしても $\mathbb{Z}$ 上の automorphism ですからものすごく沢山あります。6 次元の場合はこういう形になります。一般の場合は

$$GV \cup GV^{\sigma_1} \cup \dots \cup GV^{\sigma_{l-1}},$$

l 個の cup 積、通常の、但し係数を twist しています。ここでも l 個の cup 積が全部ゼロということは、いわんやその個数を越えた cup 積は全部ゼロです。従って定義からすぐにわかる事です。ある所で全部ゼロだとそこでストップしますが、しかしゼロでない事を証明しようとすると、全部ゼロでない事を証明しないといけな、ずっと続いていきます。

この問題にアタックする一つのものを残りの時間でやります。さっきの Mather の定理に戻ります。Mather の定理は $B\text{Diff}_K^0 \mathbb{R}$ が $\Omega B\bar{\Gamma}_1$ と homology 同値であるとなります。これは Mather の大結果です。元の問題は、 $B\bar{\Gamma}_1$ は $K(\mathbb{R}, 3)$ と homotopy 同値かという問題ですが、そうすると問題は一回 loop を取ってますから、次数がシフトして、もともとは $K(\mathbb{R}, 3)$ かと言っていました、 $\Omega B\bar{\Gamma}_1$ は $K(\mathbb{R}, 2)$ と homotopy 同値かという問題になります。これを使うと、 $B\bar{\Gamma}_1$ の homotopy type を決める問題がほんの少しですが、多少易しくなります。その事をどう易くなるかを最後に説明します。その易しくしたものの事を使って、坪井さんは differentiability が非常に低いのですが、そこで GV_2 がほとんど全射である事を証明しました。但し C^∞ カテゴリーではなくて Lipschitz かつ derivative が bounded variation という、low differentiability の世界です、それはもう彼の独壇場です。それを使って、多少問題を易しくして、loop space をとって Mather の定理をさらにもう 1 回使って、 $\text{Diff}_K^0 \mathbb{R}$ の群論的なある性質にもっていきました。

それを言う前に一つ proposition です。1 個シフトすると $K(\mathbb{R}, 2)$ の homology はさっき言ったように symmetric algebra で沢山あります。それを Godbillon-Vey の、それを 1 回、 S^1 -bundle の場合は、Godbillon-Vey を fiber で 1 回積分したようなもの、fiber 積分なので、 $\overline{GV}$ と書きます。 $\overline{GV}_k$ というこういう写像があります。

Proposition 1.5.

$$\overline{GV}_k : H_{2k}(B\text{Diff}_K^0 \mathbb{R}; \mathbb{Z}) \twoheadrightarrow S_{\mathbb{Z}}^k \mathbb{R}.$$

多少易しくなるという事の一つの証ですが、これが全射である事はすぐにわかります。その問題はこれが同型、つまり Kernel がないという事が、 $B\bar{\Gamma}_1$ が $K(\mathbb{R}, 3)$ と homotopy 同値か、cohomology は Godbillon-Vey だけであるか? という事の必要十分条件です。多少こっちの方が homology が沢山でてくるわけです。この命題の証明は簡単で

$$H_2(B\text{Diff}_K^0 \mathbb{R}; \mathbb{Z}) \cong H_2(\Omega B\bar{\Gamma}_1; \mathbb{Z}) \cong H_3(B\bar{\Gamma}_1; \mathbb{Z})$$

Mather の定理と $\Omega B\bar{\Gamma}_1$ が 2 連結である事を使うとこうなります。そして Thurston の結果で、全射

$$GV : H_3(B\bar{\Gamma}_1; \mathbb{Z}) \twoheadrightarrow \mathbb{R}$$

がありますので, fiber 積分

$$\overline{GV} : H_2(B\text{Diff}_K^0 \mathbb{R}; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{R}$$

は全射となります. 従ってこれは全射なわけです. なぜこれが良いかというと, 次回のテーマ, C^∞ 級と C^ω 級, どちらが自然かという問題になります. C^∞ 級というのは compact support ですから, ここを ω と書いてしまうと何も出てきません. そこが本質的に違う所です. どこが自然か. 多様体の講義をやって, 多様体論で技術的に一番大事なものの 1 つは, 1 の分割です. 1 の分割, そういうものは C^ω 級の多様体ではないわけです. どちらが自然かと言って, もし C^ω 級が自然だとなるとほとんどの大学で多様体の講義は C^∞ 級の多様体から出発していますから, それは自然ではない, 人為的なものという事になります. それは数学というよりは, 哲学の問題というか, もっと言うと趣味の問題になります. ただ C^∞ と C^ω , どちらがきれいかというのは永遠の問題です. 代数幾何の人はもちろん解析的でしょうけど, さてそうすると, なぜこれが良いかというと, $H_2(B\text{Diff}_K^0 \mathbb{R}; \mathbb{Z})$ ですが compact support で実現できるわけですから, $\mathbb{R}$ の有界な開集合を持ってくると, ここに support を持つ diffeo で任意の実数が実現できる.

d. $\mathbb{R}$ 上の開区間と曲面の絵

任意の $s \in \mathbb{R}$ が compact support の diffeo の 2 次元 cycle で実現できる. disjoint な cycle で任意の $t \in \mathbb{R}$ が実現できる. 2 次元ですから surface があって cycle がある. 今 support compact で disjoint ですから, holonomy は交換可能なわけです. それぞれ surface の基本群から $\text{Diff}_K^0 \mathbb{R}$ に準同型があります. それらで s, t が実現できたときに, いま

$$\overline{GV}_k : H_{2k}(B\text{Diff}_K^0 \mathbb{R}; \mathbb{Z}) \rightarrow S_{\mathbb{Z}}^k \mathbb{R}$$

の全射を証明しようとしています. $H_{2k}(B\text{Diff}_K^0 \mathbb{R}; \mathbb{Z})$ で仮に $k=2$ だとすると実数 s を, $\mathbb{R}$ を $\mathbb{Z}$ 上の module と考えて非可換な多項式代数 $S_{\mathbb{Z}}^k \mathbb{R}$ の中で考えたときは, $\hat{s}$ と書くと, 曲面の直積を考えると $\hat{s}\hat{t}$, これが実現できました. 任意の実数 s, t が実現できる. これが実現できるので, 従って

$$\overline{GV}_k : H_{2k}(B\text{Diff}_K^0 \mathbb{R}; \mathbb{Z}) \rightarrow S_{\mathbb{Z}}^k \mathbb{R}$$

が全射になります. $k=3, 4, \dots$ と増えていっても, おなじように disjoint な support を取って, 種数は違うかもしれないけれど 3 個の曲面の直積から foliated bundle が出来て, 任意の値を取る事が証明できます.

ただこれは実解析的な場合には完全に破綻する議論です. だから解析的な場合にはこれではなくて, S^1 の実解析的な diffeo の群の universal cover を考えます. そこからこれが準同型はあるわけですが, 全射かどうかは全くわかりません. それは 11 月にやります.

これは無限になるわけですが, ここでちょっとだけに参考になると思うので 1 個だけやりますと, transversely symplectic foliation を考えて,

$$(d, \omega) : B\Gamma_{2n}^{\text{symp}} \rightarrow BSp(2n; \mathbb{R}) \times K(\mathbb{R}, 2).$$

微分を取ると, symplectic form を保つ微分同相という事から Lie 群 $Sp(2n; \mathbb{R})$ が出来て来て, その分類空間, $B\Gamma_{2n}^{\text{symp}}$ からその分類空間 $BSp(2n; \mathbb{R})$ への写像が得られます. また M 上に $\Gamma_{2n}^{\text{symp}}$ -structure があると, M 上に 2-form が定まります. transverse symplectic form ω がある. よって $H^2(M; \mathbb{R}) \cong [M, K(\mathbb{R}, 2)]$ から $B\Gamma_{2n}^{\text{symp}}$ から $K(\mathbb{R}, 2)$ への写像が得られます. これを組み合わせた写像を考えます.

Theorem 1.6 (Haefliger). (d, ω) は $2n$ -connected.

これはさっきの基本的な仕事, Haefliger の 1970 年 Amsterdam の lecture note の中に既に証明しています. この写像は $2n$ -連結. $2n$ までというのは foliation というより多様体ですから, 具体的には symplectic structure

を与えると、その tangent bundle が複素構造を持ちますから、 $BSp(2n, \mathbb{R})$ は homotopy type が $BU(n)$ と同じ、homotopy 同値ですから、Chern class があるわけです。だから任意の Chern class の system と任意の 2 次元の実 cohomology を与えたときに、そういう多様体があるというのが $2n$ -連結という意味です。Gromov-Phillips の枠組みで出来ます。

今回 foliation の集会の講演のために Haefliger の 1970 年の論文を繰り返し見直しました。ものすごくいろいろな事を書いてあります。ここにある事を知らないでこの事を言おうと思いましたが、やっぱり Haefliger 先生は偉いなと思いました。それはとにかくプラスアルファでちょっとだけ言いますと、 $BSp(2n, \mathbb{R})$ 、こちらは Chern class ですから、transversely symplectic form がどれくらい動けるかというので、

$$H_{2k}(B\Gamma_{2n}^{\text{symp}}; \mathbb{Z}) \rightarrow H_{2k}(K(\mathbb{R}, 2); \mathbb{Z}) \cong S_{\mathbb{Z}}^k \mathbb{R}$$

実は先ほど Godbillon-Vey であれば奇数でしたけれども、ある所で消えたらその上は全部消えると言いました。これは偶数ですけれども全部消えない例。ある所で消えてその後で全部消える例がこの transverse symplectic で、いま $2n$ 次元でこれは n 以下の任意の k で全射、 n より大きい k では恒等的にゼロという事がわかります。それを見ると不連続不変量というのは、大体どんなものかわかると思います。今日来る電車の中で次を証明しようと思ったうまくできなかったの、宿題にします。

$$\pi_{2n+1}(B\bar{\Gamma}_{2n}^{\text{symp}}) \twoheadrightarrow S_{\mathbb{Z}}^{n+1} \mathbb{R}$$

全射があるはずなのですが、証明できなかったのです。あるはずだと思って、球面上に Γ -構造があるのですが、それごとに不連続不変量があるはず。それがどうもうまく分からなかった、もしかしたら自明かもしれません。

それと関連して一つ質問しようと思ってました。三松先生のやっている 5 次元球面上の codimension 1 foliation $(S^5, \mathcal{F})$ で、いろいろな性質を持つものの研究をされています。より一般には $(S^{2k+1}, \mathcal{F})$ 、これは Lawson, Durfee, 田村先生, Reeb もいます。

どちらにしても、この証明は例えば、上で消えるというのはなぜかという、transversely symplectic form, $2n$ 次元多様体上の 2-form, n 回 wedge を取ると volume form, $n+1$ 回 wedge を取ると微分形式として消えてしまいます。たとえ twist したとしてもものがない限りゼロになります。だから上で消えてしまう、これはほとんど明らかです。そこまでの全射だというのは、symplectic 多様体の定義をやれば、例えば $k=2$ のときに $S_{\mathbb{Z}}^2 \mathbb{R}$ へ全射を作るのですが、4 次元トーラスで symplectic form としては、

$$\omega_{ab} = adx_1 \wedge dx_2 + bdx_3 \wedge dx_4 \quad (a, b \in \mathbb{R}, ab \neq 0).$$

これはだから 3,4 年生で線型代数と symplectic 幾何の融合問題で大学院の試験とかになりますね。 a, b は両方ともゼロでない実数とすると、4 次元 torus で symplectic form が出来ます。2 乗すると volume form になります。

これの不連続不変量を計算すると、

$$w_2 : H_4(B\Gamma_4^{\text{symp}}; \mathbb{Z}) \ni [T^4, \omega_{ab}] \mapsto \hat{a}\hat{b} \in S_{\mathbb{Z}}^2 \mathbb{R}$$

ここに 4 次元トーラスで $[T^4, \omega_{ab}]$ がどこに行くかという、 $\hat{a}\hat{b}$ に行きます。 a, b を動かせばいくらでも出来ますね。途中で切れるのが transverse symplectic を考えると自然に出てくる。

最後に後 10 分くらいやります。

Problem 1.7. $B\bar{\Gamma}_1$ は $K(\mathbb{R}, 3)$ と homotopy 同値か？

この問題は

Problem 1.8. $\Omega B\bar{\Gamma}_1$ は $K(\mathbb{R}, 2)$ と *homotopy* 同値か?

と同値です. これが Mather の定理を使って,

Problem 1.9. $B\text{Diff}_K^0 \mathbb{R}$ は $K(\mathbb{R}, 2)$ と *homology* 同値か?

という問題とも同値です. これが多少易しいということを最後に言います.

homotopy 論を使って reduce します. 問題は何かというところ最初の $B\bar{\Gamma}_1$ で homotopy 論的に, 2 つの homotopy 群の元があったときに, Whitehead product というものがある,

$$[\cdot, \cdot]: \pi_3(B\bar{\Gamma}_1) \otimes \pi_3(B\bar{\Gamma}_1) \rightarrow \pi_5(B\bar{\Gamma}_1)$$

ここで $5 = 3 + 3 - 1$ です. これがゼロか? これがもし $K(\mathbb{R}, 3)$ だとすると, どの元を取っても Whitehead 積はゼロ. つまり S^5 の Γ -構造を拡張する事ができるはずですが, Thurston の作ったやつは Anosov foliation ですが, その Whitehead 積を取ると Γ -構造を書き下す事は出来るけれども, それが 6 次元 disk に拡張するかというとそれは今の所ほとんどどうにもならないと考えられます.

これを Mather の定理を使って homology の問題にします.

$$H_2(B\text{Diff}_K^0 \mathbb{R}; \mathbb{Z}) \otimes H_2(B\text{Diff}_K^0 \mathbb{R}; \mathbb{Z}) \rightarrow H_4(B\text{Diff}_K^0 \mathbb{R}; \mathbb{Z})$$

次数が 1 つ下がってしかも homology の問題になります. この写像は何かという問題です. 2 つ 2 次元の cycle があったときに, それがゼロかどうか. ここで homology operation, Samelson という homotopy の大家がいますが, 次のように翻訳できる. これは Samelson の古典的な結果を使って 1985 年の論文に書きました. Whitehead 積は群の $\mathbb{R}$ の幾何学を使うと, 幾何学というほどのものではありませんが, $*$ -product になります.

$$\text{Diff}_K^0 \mathbb{R} \times \text{Diff}_K^0 \mathbb{R} \rightarrow \text{Diff}_K^0 \mathbb{R}$$

これは準同型で injection になります.

e. $\mathbb{R}$ 上の開区間 2 つの絵

左側と右側の support を disjoint に取ると交換可能で, inject します. この準同型を homology に落としますと $*$ -product. p 次元と q 次元の homology があつたら $p + q$ 次元の homology になります.

$$x \in H_p, y \in H_q \Rightarrow x * y \in H_{p+q}.$$

予想は何かというと,

Conjecture 1.10. $*$ -product は *graded commutative*.

つまりひっくり返すと, $\pm$ の差はあるが基本的には変わらない. proposition は次のようになります.

Proposition 1.11 (Morita). もし $*$ -product が *degree 2* で *commutative* ならば GV_2 は *almost surjective*, ほとんど全射. すなわち *Cokernel* は *torsion*.

ものすごくばかどかい *able* 群ですから, ほとんど全射. これを証明しました.

そして最後に 1 つだけ, 坪井さんの 1998 年の定理です, これが今の所唯一のこれを使ってくれた結果です. C^∞ で出来たらよかったのですが, Lipschitz で derivative が bounded variation の場合です.

Theorem 1.12 (Tsuboi). 予想は $C^{Lip, bdd \text{ variation derivative}}$ 級で正しい.

こういう category の $\mathbb{R}$ の local diffeo に対して, graded commutative を証明して, さらにこの category で Godbillon-Vey class が定義できる事を証明しました. 従ってこの category で GV_2 はほとんど全射である事を証明しました.

問題は何かというと,

Problem 1.13. C^∞ 級ではどうか?

そしてもう 1 つ remark は,

Remark 1.14. C^ω 級では Mather-Thurston 理論がない.

Thurston はまだ取り上げていません. 次回取り上げます. しかし Mather-Thurston がないので loop space は考えられますが, ほとんど情報がつかめない.

最後に付け加えて下さい. 予想の根拠ですけれども $\mathbb{R}$ 上の compact support の diffeo は一方で

$$i: \text{Diff}_K^0 \mathbb{R} \rightarrow \text{Diff}_+^0 S^1$$

と S^1 の diffeo の subgroup と思えます. 一つの予想は前の予想とほとんど同値な予想ですが,

Conjecture 1.15. i_* は H_* 上 injective.

もし topology を discrete, δ ではなくて, C^∞ -topology にしてしまうと, 良く知られているように $\text{Diff}_+ S^1$ の homotopy type は $SO(2)$ で, Euler class だけがある. $\text{Diff}_K \mathbb{R}$ は可縮ですから自明. 自明な群ですが, それが Euler class だけがあるところに入っている. discrete だと全くアナロジーでは行かないのです. それでもこれが正しいと思う理由ですけれど, remark は次の事です.

Remark 1.16. もし $\mathbb{Q}$ 上 injective ならば $*$ -product は graded commutative.

これは多分必要十分だと思います. graded commutative の必要十分が, homology が injective. torsion はちょっと難しいですが, $\mathbb{Q}$ 上では必要十分. これが最後の remark で, それはどうしてかということ S^1 というのは理想郷なんですね. 永遠に多様体の中で一番きれいなもの, 最後はここに回帰したい.

f. 埋め込まれた $\mathbb{R}$ と S^1 の絵

$\mathbb{R}$ を S^1 に入れたとすると, 最初と次の factor があって, support が入っている. もし S^1 で $-\infty$ と ∞ がつながるとすると順番は関係なくなります. つまりひっくり返す写像, $\mathbb{R}$ 上ではひっくり返せない. しかし S^1 上では順序を変えろというものが互いに共役になります. S^1 上では共役になる. 共役な subgroup の homology はもちろん同型です. S^1 上で互いに共役. いまのところこれだけなのですが, 別の言葉で言うと, 逆にこれが成り立たない, π_5 がゼロでないとか. もし graded commutative ではないとすると, 直ちに出てくる事は $H_4(B\text{Diff}_K^0; \mathbb{Z}) \ni x * y - y * x$, こういうものを考えると Godbillon-Vey, fiber 積分したものは消える. 非可換なように見えますが, cup 積したものですから, もの凄く沢山あるようですがこの差はない. detect できない. もし graded commutative でないならこれを計る何か characteristic class があるという事が必要十分. この群の 4 次元 cohomology でこの差を計るものがある. この差は連続 cohomology では絶対はない. だからこの Godbillon-Vey の値が例えば $\sqrt{2}$ と π で, 数論的には性質の違うものが沢山ある. この差を detect するような特性類でなければならない. しかし幾何学では今までそういうものはない. ないからないというのはよくない

ですが、どちらにしてもないならない事を証明する。あるなら一個も見つけたら凄い結果です。私は graded commutative だと、つまりこれを計るものはないと思っています。次回は別の方向からやります。

第2回 11月13日

それでは始めさせていただきます。新シリーズはトポロジーの課題探訪というタイトルを付けさせていただきました。今日はその2回目です。

1.2 C^∞ 葉層と実解析的葉層 –人為 vs 天与–

実解析的というのは C^ω 級。葉層というのは漢字で書くのに時間が掛かるので段々省略して foliation, あるいは単に fol と書くかもしれません。副題の、人為 vs 天与は、 C^∞ 葉層は人為的なものか、実解析的葉層は天与のものか、という事です。topology は大体は $\mathbb{R}$ 上で、普通 C^∞ -多様体を考える事が多いです。葉層を考える前に多様体がありますね。多様体は葉層の一番基本的な例です。少なくともトポロジストは C^∞ で考えます。例えば代数幾何学、 $\mathbb{C}$ 上の代数幾何学とかやりますと、解析的です。それはどちらが人為的か、天与か。これは数学というよりは哲学というか、超数学というか。でも実際の数学にとってもどちらが自然な対象か、問題を選んだときに考える事があります。

(1). 葉層の前に多様体からいきます。もちろん多様体は Riemann にまでさかのぼるわけです。ずっと遡れば古代ギリシャですが、現代流の多様体の提唱をしたのは Riemann の 1854 年 Göttingen 大学への就職講演だと言われています。その Riemann の前には Gauß, Riemann の後には, Poincaré と続きます。そして現代的な多様体の定義は、Whitney の有名な 1936 年 Annals of Mathematics の論文です。そこで C^∞ -多様体の定義が与えられて現在でもほとんどそのまま使われていると言っても過言ではありません。

もちろん C^r -多様体という形で定義されて、数学科では一般に C^r で定義して、 $r = 0, 1, 2, \dots, \infty, \omega$ とします。これ以外の種々の微分可能性を考えることも、とくに foliation ではありますが、ここでは深入りしません。

Whitney は 1936 年の論文で多様体を定義しただけではなくて、有名な Whitney のいわゆる embedding theorem を証明しました。

Theorem 1.17 (Whitney). 任意の n 次元 C^∞ -多様体 M は、充分大きな N に対して $\mathbb{R}^N$ に C^∞ に埋め込まれる。但し $N = 2n + 1$ で取れる。

その後に question, Whitney の question ですが、この embedding theorem は C^ω ではどうか？というものをこの論文で提出しています。

これは解決されました。1958 年にまず Morrey という人が Yes である事を証明しました。但し条件は多様体 M は compact です。1958 年の論文。この講義では年代は論文が出版された年か、または実際仕事をした年です。両方とも使います。これは論文の出た年です。次に同じ年、これは非常に有名な仕事ですが、1958 年 Grauert, これも Yes で M は任意。compact でなくてもよい。paracompact は仮定します。これは基本的な仕事だと言われています。Grauert の仕事からは、実際にはもっと強く、任意の多様体 M に対して、実解析的な微分同相群から C^∞ の微分同相群へ写像 $\text{Diff}^\omega M \hookrightarrow \text{Diff}^\infty M$ がありますが、これは Whitney topology で weak homotopy 同値、homotopy 論的には差がないという事が従うようです。これは非常に深い結果です。

ここら辺りは 2005 年夏の高知大でのトポロジーシンポジウムで、Diff M -bundle, Diff M に絡んだそのときまでの結果について講演しました。そのとき、解析的と C^∞ の差、坪井さんがその当時も今も日本では第一人者ですが、坪井さんに教えてもらいました。いずれにしても普通の topology, 自然な topology に関しては同じなわけです。diffeotopy group というものがあります。微分同相全体を単位元の連結成分で割った discrete

group を diffeotopy group と言います. 特に M の解析的な diffeotopy group は C^∞ の diffeotopy group と同型

$$D^\omega M \cong D^\infty M$$

になります. M が surface のときはこれは通常 mapping class group と呼ばれます. homotopy と diffeotopy は次元が上がってくると全然違います. 一般には diffeotopy group と呼ばれます. 微分同相全体を単位元の連結成分で割った商, これが同型になります.

次には単位元の連結成分がどうなるか, これが問題になります.

$$\text{Diff}_0^\omega M \hookrightarrow \text{Diff}_0^\infty M.$$

これは weak homotopy 同値で連結になります. そうすると次の問題はこれの代数的な構造です. まずは 1974 年の Thurston の定理です. foliation について次々仕事していた丁度真ん中の時期です. Thurston がこれに関して foliation 絡みで次を証明しました.

Theorem 1.18 (Thurston). *closed* 多様体 M に対して $\text{Diff}_0^\omega M$ は *perfect* で, さらに *simple*.

perfect から simple が従う事は Epstein の結果です. これは C^∞ という事を本質的に使っています. 任意の closed C^∞ -多様体 M に対して perfect. C^ω 級では perfect から simple の部分がうまくいきません. 部分群を作るときに support が例えば小さな座標近傍に入るように作っていきます. それが C^ω 級ではできないですね. support が小さな座標近傍に入る解析的な元は identity しかないですから. 証明の本質的な部分は perfect です. これを Thurston が任意の closed M に対して証明しました. これは non-compact でも, 例えば $\mathbb{R}$ とかなり OK ですね. Thurston より少し前, Mather が証明しました. Mather-Thurston の理論です.

それでは C^ω ではどうか? という問題になります. これは坪井さんの仕事までは唯 1 つだけあったと言ってよいと思います. torus について $\text{Diff}_0^\omega T^n$, これが perfect かつこの場合は C^∞ のテクニックは通用しないのだけれども, かつ simple という事を証明しました. 1971 年の Herman の大定理ですね.

Theorem 1.19 (Herman). $\text{Diff}_0^\omega T^n$ は *perfect* でさらに *simple*.

この前には Arnold の small denominator の理論があつてこれが密接に関係しています. これも坪井さんに教えてもらった事です.

これ以後ほとんど何の動きもなかったわけですが, 2000 年頃以降に坪井さんが一連の素晴らしい仕事をしました. そしてある大きなクラスに属する M について $\text{Diff}_0^\omega M$ が perfect である事を証明しました. 任意の多様体で予想されていますが, まだ一般にはなっていません.

Theorem 1.20 (Tsuboi). M が nice S^1 -action をもつとき $\text{Diff}_0^\omega M$ は *perfect*.

一般の M ではなくて iterated S^1 -bundle, ここでは nice S^1 -action をもつときと省略して書かせてもらいます. 詳しくは坪井さんの論文を見て下さい. これを証明しました. 但し simple まではいかない. simple というのは open なんですよ. simple まで分かっているのは torus のときだけ. 多分 Herman と坪井さんのこの 2 つの仕事が, 今の所全てと言ってよいのではないかと思います.

それで例えばどういうものがわからないかという, 曲面, 種数 2 の closed surface の場合, $\text{Diff}_0^\omega \Sigma_2$ は perfect か? これはすでに分からない. というか, これがわからない多様体の中で一番簡単な多様体です. genus 2 の closed surface の実解析的な微分同相写像で identity に isotopic なもの全体のなす群は perfect か, commutator で書けるか. genus 2 で出来ればおそらく 3 以上で出来ると思います. なかなかどうにもならな

いですね、 S^1 -action もないし、坪井さんのテクニックはうまくいかない。1つのものに対する、これが1番目の話です。

(2). 2番目で

$$\mathrm{Diff}^{\omega,\delta} M \hookrightarrow \mathrm{Diff}^{\infty,\delta} M$$

があつて、ここで C^∞ -topology では weak homotopy 同値、homotopy 論的には同じです。foliation ではよくやる discrete topology, 何も書かなければ C^∞ -topology. discrete topology を入れるときは上に δ と書きます。そうすると抽象的な群になるわけですが、algebraic property に差があるか、という事が問題になります。最初にここにゼロを書いて

$$\mathrm{Diff}_0^{\omega,\delta} M \hookrightarrow \mathrm{Diff}_0^{\infty,\delta} M$$

としてもこれの algebraic な性質に差があるか。 $\mathrm{Diff}_0^{\omega,\delta} M$ がもし perfect でないと証明されたら、abel 化が違が出てくるかもしれない。しかし多分出てこないことが予想されます。さらには $\mathbb{Z}$ 上や $\mathbb{Q}$ 上で homology 群に差が出てくるか。

foliation の方でいうと Haefliger の Γ_n^ω , これは groupoid of germs of local C^ω -diffeomorphisms of $\mathbb{R}^n$, これは前回出しました。同じように Γ_n^∞ は, groupoid of germs of local C^∞ -diffeomorphisms of $\mathbb{R}^n$ で, この2つの差がどうなるか。特に

$$B\bar{\Gamma}_n^\omega \rightarrow B\bar{\Gamma}_n^\infty$$

という写像がありますが、これが H_* 上どうか？ Γ の上の $\bar{}$ は normal bundle が自明化されているという事です。定義は前回やったので今日は省略します。 C^ω と C^∞ で foliation の特性類に差が出るかどうか、これが大きな問題です。問題は言う事は簡単ですが、今の所どうにもならないし、若い人に勧める事はできません。今日取り上げる $n=1$ の場合で、近い将来、10年くらいの間は、 $n=1$ で大問題と思われます。

会場から: Γ -構造に行く前に M が S^1 の場合はどうなっているのでしょうか？

その場合は Herman の仕事があるので実解析的な方も perfect かつ simple です。 C^∞ の方は Mather-Thurston です。

会場から: S^1 の場合の次元が高い homology はどうなんでしょうか？

それは全くわかりません。それが全然わかっていないというのを今からやります。これが今日のメインです。すでに大問題です。

具体的に書きますと、向きを保つ実解析的な微分同相写像全体に discrete topology をいれた群と向きを保つ C^∞ な微分同相写像全体に discrete topology をいれた群の間の写像、

$$\mathrm{Diff}_+^{\omega,\delta} S^1 \hookrightarrow \mathrm{Diff}_+^{\infty,\delta} S^1$$

これが今日のメインです。これの homology に差があるかどうか、ないだろうというのが、非常に楽観的というか悲観的というか、いわく言い難いです。どちらにしても面白いですね。もし違いがあつたら面白いですね。そこから大きな理論の展開があります。これについてはいろいろな人に聞いていますが、違いがあると思う人も結構いて、違いはないという人も結構います。私はないと思っている方です。繰り返しになりますが、あるとすれば凄い事になります。今の所その違いは S^1 に限らず、1つも見つかりません。坪井さんもないという方向で予想して仕事をしていると思います。simple, これは非常に難しいですが、少なくとも perfect は予想している。

Γ -構造でいうと、

$$\bar{\Gamma}_1^\omega \hookrightarrow \bar{\Gamma}_1^\infty$$

さっき書きましたが groupoid で $\bar{\Gamma}_1^\omega$ はこの場合には germs of orientation preserving local C^ω -diffeomorphisms of $\mathbb{R}$. codimension 1 の場合は $\bar{\cdot}$ を付けるのと orientation preserving が同じになります. homotopy fiber とか言わなくてよい. codimension が上がってくると $\bar{\cdot}$ と orientation preserving は違います. そして germs of orientation preserving local C^∞ -diffeomorphisms of $\mathbb{R}$. これに差があるかどうか. 分類空間で書くと自然な写像

$$B\bar{\Gamma}_1^\omega \rightarrow B\bar{\Gamma}_1^\infty$$

があつてこれらの homology に差があるか? これが大きな問題です.

Haeffliger と Mather の仕事で, Haeffliger がまず一般の n について $B\bar{\Gamma}_n^\infty$ が n -connected を証明しました. つまり $B\bar{\Gamma}_1^\infty$ は 1-connected です. さらに Mather がこの場合 2-connected を証明しました. 3 次元の所に何があるかという Godbillon-Vey です. 前回は少し復習しますと

$$GV : B\bar{\Gamma}_1^\infty \rightarrow K(\mathbb{R}, 3)$$

と連続写像があるわけです. これが前回のテーマだったわけですが, 大きな問題はこれが homotopy 同値か?, でした. 100 年経ってもわからないかもしれません. いずれにしてもドラステイックなアイデアが出てこないとうようになりません.

一方で実解析的な $B\bar{\Gamma}_1^\omega$, これは後で詳しくやりますが, Haeffliger が

$$B\bar{\Gamma}_1^\omega = K(\Gamma_H, 1)$$

である事を証明しました. この $\Gamma_H = \pi_1(B\bar{\Gamma}_1^\omega)$ を Haeffliger 先生に敬意を表して Haeffliger group と呼ぼうとこの前の $B\Gamma$ の集会で propose しました. まだ Haeffliger 先生の承諾は取っていませんが. これはミステリアスな group で, 今日はこの群について知られている事をお話します. ただ Haeffliger+ α くらいです. この前 $B\Gamma$ -school の準備をしているとき, 少しだけ進展がありました. そしてどういう事が問題かをお話します. homotopy 同値とはほど遠い状況ですが, Mather-Thurston の理論を考えると homology 同値はあり得るわけです. homology 同値か. 特に Godbillon-Vey は

$$B\bar{\Gamma}_1^\omega \rightarrow K(\mathbb{R}, 3)$$

があるわけですが, Thurston が実解析的に Godbillon-Vey の連続変化を証明していますから, これは本質的な写像になるわけです.

そうすると $B\bar{\Gamma}_1^\omega$, この 1 次元 homology 群がゼロ; $H_1(\Gamma_H; \mathbb{Z}) = 0$ というのは後で言いますが, Haeffliger の定理です. そうすると C^∞ と C^ω の差で H_2 はどうかというと, この前の foliation の集会, 坪井さんと Hurder さんの還暦の集会で, 坪井さん自身が講演で,

$$H_2(\Gamma_H; \mathbb{Z}) = 0?$$

を問題に挙げていました. この方面では最初に出てくる大きな問題です. これは 2 次元 homology ですから, Σ_2 上の Γ_1^ω -structure で実現されるのですが, それが bound するかどうか. 坪井さんがどう考えているかは知りませんが, これは少し研究をし出すと working hypothesis としてどちらの方向をねらうかです. 一方 Jekel という人がいて, ある所で彼はゼロでないだろうと予想を述べている. 解析的に結ぶ 1 つの方法は jet で切って近似する. 有限で切るとゼロでない cycle の候補が沢山できる. それは実解析的にも生きるだろうと. だからこれはゼロでないだろう, と彼の論文の中に書いてあります. しかし解析的にはちゃんと収束しているものが, jet できるとなくなってしまう事があるので, これは難しいですね. 私が今日取り上げる問題はこれとは独立に attack できる問題です.

(3). smooth topology はよく知られているように

$$SO(2) \hookrightarrow \text{Diff}_+^\infty S^1$$

これは homotopy 同値です. 1 次元の特殊性です. これは differentiable な oriented circle-bundle は, いつでも principal $SO(2)$ -bundle と思える. ここで $SO(2) = U(1)$ ですから, oriented S^1 -bundle の分類空間は complex line bundle の分類空間になって, 無限次元の複素射影空間 $\mathbb{C}P^\infty$ となります. その cohomology を考えると

$$H^*(B\text{Diff}_+^\infty S^1; \mathbb{Z}) \cong H^*(BSO(2); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[\chi]$$

ここで χ は Euler class でそれが生成する多項式代数になります. ω にしても同じです. そうすると特に $\pi_1(\text{Diff}_+^\infty S^1) \cong \mathbb{Z}$ と同型ですから, その universal covering group

$$\widetilde{\text{Diff}}_+^\infty S^1 \rightarrow \text{Diff}_+^\infty S^1$$

が定義できます. ちょっと notation が重いですが, $\widetilde{\text{Diff}}_+^\infty S^1$ と書きます. S^1 の良い所は universal covering group が, $\mathbb{R}$ の微分同相群の部分群として次のように実現されます. $\widetilde{\text{Diff}}_+^\infty S^1$ の要素 f は向きを保つ $\mathbb{R}$ の C^∞ -微分同相であって, $\mathbb{R}$ の translation, $\mathbb{R}$ には translation というもの $T(x) = x + 1$ があって, これと可換になるというものです.

$$\widetilde{\text{Diff}}_+^\infty S^1 = \{f \in \text{Diff}_+^\infty \mathbb{R}; fT = Tf \text{ i.e., } f(x+1) = f(x) + 1 (\forall x \in \mathbb{R})\}$$

と具体的に書けます. universal covering group が具体的に $\mathbb{R}$ の微分同相群の部分群として実現できる. これはちょっと考えると分かります.

同じ事が実解析的な方もあって, $\text{Diff}_+^\omega S^1$ の $\pi_1 \cong \mathbb{Z}$ で, その universal covering group $\widetilde{\text{Diff}}_+^\omega S^1$ は向きを保つ $\mathbb{R}$ の実解析的な微分同相で T と交換可能,

$$\widetilde{\text{Diff}}_+^\omega S^1 = \{f \in \text{Diff}_+^\omega \mathbb{R}; fT = Tf \text{ i.e., } f(x+1) = f(x) + 1 (\forall x \in \mathbb{R})\}$$

となります. これで大体準備が終わります.

universal cover, これは群でいうと中心拡大

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \widetilde{\text{Diff}}_+^\infty S^1 \rightarrow \text{Diff}_+^\infty S^1 \rightarrow 1$$

になります. この $\mathbb{Z}$ は何かというと T の生成する discrete subgroup

$$\mathbb{Z} = \{T^n; n \in \mathbb{Z}\}$$

これが中心になります. 同じ事が実解析的にもあって中心拡大

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \widetilde{\text{Diff}}_+^\omega S^1 \rightarrow \text{Diff}_+^\omega S^1 \rightarrow 1$$

となります. こういう風になっていて大事な問題は, discrete topology でこれらの homology がどうなるか. discrete topology ですから, 問題を幾何学的に言うと, 多様体上の S^1 -bundle で fiber に transverse に foliation が入っている foliated S^1 -bundle の特性類に C^∞ と C^ω で差があるか, という問題になります.

それでですね, その特性類ですが, それが一般論として Gelfand-Fuks cohomology, これは理論は 1967 年頃からで, 論文は 1969 年くらいから 1972,3 年に掛けて出て, 一世を風靡してみんなビックリしました. 1971 年に Godbillon-Vey class が出て, Gelfand-Fuks cohomology と密接に関係する事が直ちに分かって, これは Bott とか Thurston とか, おそらく Gelfand 自身も知っていたでしょう. Godbillon-Vey というのはもっと身

近な所で、微分形式を使って codimension 1 foliation に対して、3 次元の cohomology class を定義したわけです。それより前にすでにこれはあるわけです。具体的に言いますと、 C^∞ -多様体 M があったときに

$$H_{GF}^*(M) := H_c^*(X(M))$$

M 上の C^∞ -vector 場全体のなす Lie 代数のある topology, Krull topology に関する continuous cohomology. これが定義です。定義はだれでもできますが、これを計算しちゃったわけです。特に $\mathbb{R}$ とか S^1 . 一般の $\mathbb{R}^n$, これが foliation との関係から大事でこれを計算した。みんなが一番ビックリしたのはこれが有限次元であるということです。 $\mathbb{R}^n$ の Gelfand-Fuks cohomology の次元は有限なのです。

具体的に $\mathbb{R}$ の場合、これは Gelfand-Fuks の定理ですが、

$$H_{GF}^*(\mathbb{R}) = E_{\mathbb{R}}(\beta)$$

$\mathbb{R}$ 上の degree 3 の元 β で張られる外積代数になります。これを証明しました。この β が Godbillon-Vey class になります。また S^1 については

$$H_{GF}^*(S^1) = \mathbb{R}[\alpha] \otimes Ext_{\mathbb{R}}(\beta)$$

多項式代数と外積代数の tensor 積になります。ここで degree は、 $|\alpha|=2, |\beta|=3$ です。 α は何かというと、fiber は S^1 になっていますから、foliated S^1 -bundle の特性類に結局なりますが、これの fiber 積分に対応するもので、通常 α と呼ばれるものです。次は Bott-Haefliger の定理で、一般論で

$$\Psi : H_{GF}^*(S^1) \rightarrow H^*(B\widetilde{\text{Diff}}_+^{\infty, \delta} S^1; \mathbb{R})$$

という写像が存在します。これは一般論でこの写像は任意の compact 多様体 M に対して存在します。Bott-Haefliger の一般的な構成があります。今は S^1 の場合、 S^1 の場合の良い所は、

$$\widetilde{\text{Diff}}_+^{\infty, \delta} S^1 = \widetilde{\text{Diff}}_+^{\infty, \delta} S^1$$

となり、

$$\Psi : H_{GF}^*(S^1) \rightarrow H^*(B\widetilde{\text{Diff}}_+^{\infty, \delta} S^1; \mathbb{R})$$

これが得られます。そしてこれは元々 foliated S^1 -bundle の特性類が欲しいわけですが、 S^1 の場合はうまくいって、つまり $\text{Diff}_+^{\infty} S^1$ の homotopy 型がわかっているのです、maximal compact group が S^1 の場合はあります。 S^2 の場合も Smale の定理で $SO(3)$, S^3 の場合も Hatcher の定理で $SO(4)$ がある事がわかります。一般の場合はわかりません。

そうするとこれが

$$\Phi : H_{GF}^*(X(S^1), SO(2)) \rightarrow H^*(B\widetilde{\text{Diff}}_+^{\infty, \delta} S^1)$$

があつて、Bott-Haefliger の一般論を S^1 の場合に適用とするとこうなります。これは On characteristic classes for Γ -foliations という Bulletin AMS の論文です。

$$\begin{array}{ccc} H_{GF}^*(X(S^1), SO(2)) & \xrightarrow{\Phi} & H^*(\text{Diff}_+^{\infty, \delta} S^1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_{GF}^*(S^1) & \xrightarrow{\Psi} & H^*(B\widetilde{\text{Diff}}_+^{\infty, \delta} S^1; \mathbb{R}) \end{array}$$

これがどうなるか、この relative cohomology を具体的に書いたのは Haefliger ですが、relative ですから β はなくなってその代わり Euler class が出てきます。

$$H_{GF}^*(X(S^1), SO(2)) = \mathbb{R}[\alpha, \chi]/(\alpha\chi)$$

となります。unique な relation です。そういうものになります。 α と β は Godbillon-Vey で、 χ は Euler class. これは全部知られた特性類になるわけです。

この 1980 年、個人的な事になって恐縮ですが、次は 1979 年の秋から 1 年間 Bonn に行つてその頃にした仕事です。

Theorem 1.21 (Morita). Ψ, Φ はともに *injective* (C^∞ で).

特性類は全部非自明になります。本質的に C^∞ を使っています。今日の問題はこの証明をスケッチして、なぜ C^ω ではできないのか、そこをなんとかしてクリアして、 C^ω と C^∞ で差があるかどうかを、関心を持って頂きたいと思います。 injective だけではなく、前回やった discontinuous invariant, 実 cohomology class があると、そこから派生する higher な cohomology が出てくるわけですが、全て non trivial. だから homology から、 $\mathbb{R}$ を $\mathbb{Z}$ 上の module と思ったとき、その symmetric algebra に全射がある。こういうものがあるわけです。特に今日問題にしたいのは特に

$$\chi^n \neq 0 \in H^{2n}(B\text{Diff}_+^{\omega, \delta} S^1; \mathbb{Z}) \quad (\forall n = 1, 2, \dots)$$

これを問題にしたい。一言で言うとう foliated S^1 -bundle の Euler class のベキは C^∞ -category ではゼロでない。実解析的にするとどうなるか、構造群が非常に小さくなりますから、わからなくなります。それがどうなるかというのが今日の問題です。私の証明はどうして実解析的にはだめかという事、ここの所を詳しくやります。

問題としては

Problem 1.22. C^ω で Ψ, Φ は *injective* か? 特に

$$\chi^n \neq 0? \in H^{2n}(B\text{Diff}_+^{\omega, \delta} S^1; \mathbb{Z}) \quad (\forall n = 2, 3, \dots)$$

問題の中で特に取り上げたい部分です。 α のベキの方は χ よりももっと難しくなりますから、まずは χ の方で考えます。

Remark 1.23. $n = 1$ について $\chi \neq 0$ は Roussarie の定理です。 $\alpha \neq 0$ は Thurston の定理です。

C^∞ -category での証明でそのままでは C^ω 級ではうまくいかない所も、クリアできる可能性もあるかなと思つて今日はお話をしたいと思います。 C^∞ のときの証明のポイントは 2 つあって、

(A): Mather-Thurston theory

(B): free loop space $\Lambda X = \text{Map}(S^1, X)$ の rational homotopy theory です。

free loop space は最近これは非常に重要な役割が、数理物理とかあらゆる所で出て来ています。 S^1 上の基点を固定すると、その点の行き先を考える事で、evaluation map $\Lambda X \rightarrow X$ があって、その homotopy fiber が loop space ΩX . しかも S^1 を全て 1 点 $x \in X$ に写す事で、これは section があって、section 付きの fibration になります。これは homotopy 論的にはわかりやすいものです。これの rational homotopy theory. 具体的には Sullivan の minimal model のこれ版です。Sullivan の有名な論文, Infinitesimal computations in topology に数行書いてあります。より具体的には、Riemann 多様体上の closed geodesic の存在問題に関係し、Vigué-Sullivan の論文に詳しく書いてあります。この 2 つを組み合わせるのがポイントです。

(A)の方は本質的に C^∞ の定理です．実解析的にはならない．ところが，(B)の方は C^ω -級でもあります．
Mather-Thurston の定理は，Thurston は Mather の定理を一般化して今は Mather-Thurston 理論と呼ばれます．これは compact support の微分同相群の分類空間からの classifying map

$$B\text{Diff}_K^{\infty,\delta}\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow B\bar{\Gamma}_1^\infty$$

これが誘導する adjoint map というもの

$$B\text{Diff}_K^{\infty,\delta}\mathbb{R} \rightarrow \Omega B\bar{\Gamma}_1^\infty$$

これは Mather が考えたもので，Mather の定理は，これが homology 群上同型であるという事です． $B\bar{\Gamma}_1^\infty$ が 2-connected というのはこれを使って Mather が証明しました．まず $B\bar{\Gamma}_1^\infty$ の π_2 が消えるという事は， $\Omega B\bar{\Gamma}_1^\infty$ の π_1 が消えている事に対応します．左辺でみるとこれは perfect となります．従って 2-connected が証明されました．

Thurston はこれを一般化しました．compact support ですから C^ω では何もない．ただここで向きを保つ C^∞ の微分同相で

$$B\text{Diff}_+^{\infty,\delta}S^1 \times S^1$$

を考えます．ただこうやるとこれは Euler class があるので， S^1 -bundle はねじれているものはかけ算ができない．だから Thurston は一般の多様体 M で $\cdot$ を使ったわけです． S^1 の場合，具体的にこれは universal cover で実現できるので，

$$\widetilde{B\text{Diff}_+^{\infty,\delta}S^1} \times S^1 \rightarrow B\bar{\Gamma}_1^\infty$$

という写像がある．こうやる事で S^1 ですから， S^1 の C^ω -微分同相にしてもこの写像自身

$$\widetilde{B\text{Diff}_+^{\omega,\delta}S^1} \times S^1 \rightarrow B\bar{\Gamma}_1^\omega$$

はちゃんとある．Thurston の定理は Mather の定理の一般化で adjoint map を誘導して，掛ける S^1 から写像があるわけですから，adjoint を取ると free loop space への写像

$$\widetilde{B\text{Diff}_+^{\infty,\delta}S^1} \rightarrow \Lambda B\bar{\Gamma}_1^\infty$$

が誘導されます．Thurston の大定理はこれが homology isomorphism になる事です．

それでさっき言ったように，この Thurston の adjoint map は実解析的にしても写像自身はあるわけです．だけれども， $B\bar{\Gamma}_1^\omega$ は Haefliger 群 Γ_H を基本群にする $K(\pi, 1)$ -space で，その free loop space を考えると空間は連結ではなくなります．しかも Haefliger 群は uncountable な群ですから，連結成分が連続体濃度あって，これは考えてもどうにもならないですね．でも写像自身はあります．

これを2つをどう組み合わせたかといいますと，以下沢山でてくるので簡単のために

- $G := \text{Diff}_+^{\infty,\delta}S^1$
- $\tilde{G} := \widetilde{\text{Diff}_+^{\infty,\delta}S^1}$

と書く事にします．そうすると中心拡大

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \tilde{G} \rightarrow G \rightarrow 1$$

があって，問題はこれの Euler class がべきを取ったときにゼロでないのだけれども，この部分群である実解析的な微分同相の群 $G^\omega \subset G$ の中心拡大

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \tilde{G}^\omega \rightarrow G^\omega \rightarrow 1$$

の Euler class のべきが消えるかどうかという事です。ここにある証明のある部分は使えるのですが、全体としてどうなるかという事です。

これは $\mathbb{Z}$ による中心拡大ですから、幾何的には principal S^1 -bundle

$$\begin{aligned} S^1 &\rightarrow B\tilde{G} \rightarrow BG \\ S^1 &\rightarrow B\tilde{G}^\omega \rightarrow BG^\omega \end{aligned}$$

が対応しています。こちらの Euler class のべきがどうなるか、ゼロでないか。Gysin sequence というものがありまして、全部 integral homology でそれを書きます。

$$\cdots \rightarrow H_m(B\tilde{G}) \xrightarrow{\pi_*} H_m(BG) \xrightarrow{\cap \chi} H_{m-2}(BG) \xrightarrow{\mu} H_{m-1}(B\tilde{G}) \rightarrow \cdots$$

μ は今は S^1 -bundle ですから、ある次元の cycle があると、その全逆像を取ると次元の 1 つ上がった cycle になります。これが homology の Gysin sequence です。Kronecker 積を取るなのでこれの dual になる cohomology の方も書きますと、

$$\cdots \rightarrow H^n(BG) \xrightarrow{\pi^*} H^n(B\tilde{G}) \xrightarrow[\text{fiber}]{\pi_*} H^{n-1}(BG) \xrightarrow{\cup \chi} H^{n+1}(BG) \rightarrow \cdots$$

となります。こういうものがあって帰納的に cycle を作っていきます。

$\sigma_n \in H_{2n}(BG)$ で $\langle \sigma_n, \chi^n \rangle \neq 0$ というものがあつたら、次の $\sigma_{n+1} \in H_{2n+2}(BG)$ を作るわけです。 σ_n を少し取りかえて、ここに (B) を使って、 $\sigma'_n \in H_{2n}(BG)$ として、これは $\langle \sigma'_n, \chi^n \rangle \neq 0$ を保ったまま、かつ $\mu(\sigma'_n) = 0$ となるものを作ります。帰納法、ここが一番基本的な所です。 χ^n 上で測ってゼロでないものがあるわけですが、次数が 2 個上がったところ χ^{n+1} 上でゼロでないように作りたいわけです。ここに $\sigma_n \in H^{2n}(BG)$ があって、これを σ'_n と取りかえて $\mu(\sigma'_n) = 0$ 。

そうすると、次元が 2 個上がったところに、Gysin sequence の完全性から、 $\sigma_{n+1} \in H_{2n+2}(BG)$ が存在して

$$\begin{aligned} &\langle \sigma'_n, \chi^n \rangle \\ &= \langle \sigma_{n+1} \cap \chi, \chi^n \rangle \\ &= \langle \sigma_{n+1}, \chi^{n+1} \rangle \neq 0 \end{aligned}$$

となり、帰納法が完成します。だから問題は底空間に cycle があつたときに全空間の cycle としてこれがゼロになるようにしたい。そのときに使うこの (B) なのです。(B) といふか自由 loop 空間の一番大事な operation があって、

$$\psi_k : \Lambda B\tilde{\Gamma}_1^\infty \ni (f : S^1 \rightarrow B\tilde{\Gamma}_1^\infty) \mapsto (\psi_k(f) := S^1 \ni z \mapsto z^k \in S^1 \rightarrow B\tilde{\Gamma}_1^\infty) \in \Lambda B\tilde{\Gamma}_1^\infty$$

これは f という S^1 から $B\tilde{\Gamma}_1^\infty$ への写像があつたときに、 $z \mapsto z^k$ 、これは S^1 から S^1 への写像になるわけですが、絶対値 1 の複素数だと思って k -fold cover です、その後 f を合成します。見るからに自然な operation で連続写像になります。そうすると次の命題が得られます。さっきの Mather-Thurston で

$$\begin{array}{ccc} B\tilde{G} & \longrightarrow & \Lambda B\tilde{\Gamma}_1^\infty \\ \varphi_k \downarrow & & \downarrow \psi_k \\ B\tilde{G} & \longrightarrow & \Lambda B\tilde{\Gamma}_1^\infty \end{array}$$

これが homotopy commutative になるような operation φ_k を群レベルで作りたいわけです。実解析的なものがあるのですが、群はずっと小さくなっています。図式が homotopy 可換になるように、 $B\tilde{\Gamma}_1^\infty$ の自由 loop 空間

でこちらにある自然な operation を群レベルで作る事はできます.

$$\varphi_k : \tilde{G} \rightarrow \tilde{G}$$

というのは

$$\varphi_k : \tilde{G} \ni f \mapsto ((\phi_k f)(x) := \frac{1}{k} f(kx)) \in \tilde{G}$$

と定義します. これは準同型で injective な endomorphism になります. これは簡単な考察でこうやればよい事がわかります. つまり kx というのは k 倍する, $\text{Diff}_+^\infty \mathbb{R}$ の中では相似拡大で, translation と可換なものという所に入っていない. いわば外部自己同型. 時間の関係で少し端折って, Sullivan の $\Lambda B\bar{\Gamma}_1^\infty$ の cohomology の計算法をつかうと, 元々 Sullivan の議論は rational homotopy, 次の命題を得ます.

Proposition 1.24. operation $(\psi_k)_* : H_m(\Lambda B\bar{\Gamma}_1^\infty; \mathbb{Q}) \rightarrow H_m(\Lambda B\bar{\Gamma}_1^\infty; \mathbb{Q})$ は $\mathbb{Q}$ 上対角化可能で, その固有値は k^e ($e = 0, 1, 2, \dots$).

こういう事が証明できます. これを使うとさっきの帰納法の仮定で, σ_n から σ'_n が構成できて, Gysin sequence から σ_{n+1} が構成できます. 帰納法が進行して χ^n がゼロでないことが証明できるという寸法です.

実解析的な場合は何が困るかという点, Mather-Thurston の理論で写像自身はあるのですが, homology 同値ではない. 行った先の連結成分が非可算無限個になってしまいますから. しかし可能性として homology が injective な可能性はある. 先の命題で使った homotopy operator は群レベルである. そうするともし解析的にしたときにどうなるか, 問題にして書いておきます. 中問題くらいでしょうか. $k=2$ でよいですね, 2 でも 3 でも何でも良いですが.

Problem 1.25.

$$\varphi_k : \widetilde{G}^\omega \ni f \mapsto (\phi_k f)(x) = \frac{1}{k} f(kx) \in \widetilde{G}^\omega$$

が誘導する homology 群上の写像

$$(\varphi_k)_* : H_m(B\widetilde{G}^\omega; \mathbb{Q}) \rightarrow H_m(B\widetilde{G}^\omega; \mathbb{Q})$$

は $\mathbb{Q}$ 上対角化可能で固有値が k^e ($e = 0, 1, 2, \dots$) を示せ.

C^∞ の場合は isomorphism になります. C^ω の場合には injective にはなりませんが, 全射ではありません. S^1 の外部共役, 外部共役なんだけど簡単なもので共役を取っています. k 倍する. そうするとこれが $\mathbb{Q}$ 上対角化可能か. これはそんなに望み過ぎではないと思います. そしてその固有値は k のべきである事を示せという問題です. 純粋に群の homology の言葉だけで書けています. もしこれが $m=3$ で正しいとすると $\chi^2 \neq 0$ が示せる. $m=5$ で正しいとするとさっきの Gysin sequence で $\chi^3 \neq 0$ という事がわかります. これは微妙な問題です. 私は全ての n でゼロではないと思っていますが, 差がもし本当に出て来たら凄い事になります. 最後駆け足ですが, こういう問題があるという事です.

最後に Haefliger group の説明をして終わります. これは具体的には 1971 年の Springer の lecture notes, 有名な 1970 年の Amsterdam での研究集会の proceedings にある基本的な論文の中の最後の定理です.

Theorem 1.26 (Haefliger). $B\bar{\Gamma}_1^\omega = K(\Gamma_H, 1)$ で

- Γ_H は perfect.
- Γ_H の全ての非自明な元が無限 order.

- Γ_H は *uncountable*.

その証明は解析性をフルに使っていますが、そんなに難しいものではありません。興味を持った人は是非 Haefliger の論文を読んで下さい。それから 40 年以上、Haefliger を超えて分かった事は本質的に何もありません。1 つの問題は

$$H_2(\Gamma_H) = 0?$$

これは大問題です。ゼロでもゼロでなくても *Annals* に論文が載るでしょう。

最後に、この定理のプラス α くらいは言えているかなというのは、次の事です。Thurston の定理の $B\widetilde{\text{Diff}}_+^{\omega, \delta} S^1 \times S^1 \rightarrow B\bar{\Gamma}_1^\infty$ 、この分類写像の adjoint map は homology 同値。これは Thurston の大定理です。

adjoint map は実解析的な場合もあるけれど、さっきも言ったように自由 loop 空間が連結ではなくなりどうにもなりません。しかし基本群を考えると

$$\widetilde{\text{Diff}}_+^{\omega, \delta} S^1 \times \mathbb{Z} \rightarrow \Gamma_H$$

という準同型があります。これは $B\Gamma$ -school で話すチャンスがあったときに考えた事です。準同型があるからこの image は何か、kernel は何か。この $\times \mathbb{Z}$ の $\mathbb{Z}$ は何かというと、 S^1 は自分自身実解析的な多様体ですから、 Γ_1^ω -構造をもち、無限 order でそれはつぶれない。

一方 $\widetilde{\text{Diff}}_+^{\omega, \delta} S^1$ の中には center の $\mathbb{Z}$ がいます。これは translation です。ちょっと考えればわかる事はこの両方の 1 は Γ_H の中で同じ所に行きます。だから Kernel はあります。ここで Herman の定理を使うと Kernel は $\mathbb{Z}$ と同型という事がわかります。本当にこのような大定理を使う必要があるのか、ちょっとわかりません。これは中心拡大ですからちょっとした elementary な群の議論を使うのですが、Kernel はこれだけである事はわかります。

そうすると Haefliger 群と名前を付けたものが、部分群として

$$\widetilde{\text{Diff}}_+^{\omega, \delta} S^1 \hookrightarrow \Gamma_H$$

を持ちます。言われてみればそうですが、injective というのは、 Γ -構造ですから、concordance で分類しているからそれほど明らかではない。

ところがここにもっと大きく $\text{Diff}_+^{\omega, \delta} \mathbb{R}$ がいて、この分類写像を考えると、 $\times \mathbb{R}$ からこれを拡張する連続写像

$$B\widetilde{\text{Diff}}_+^{\omega, \delta} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow K(\Gamma_H, 1)$$

があります。 $\mathbb{R}$ はもちろん単連結ですから、準同型写像

$$\text{Diff}_+^{\omega, \delta} \mathbb{R} \rightarrow \Gamma_H$$

が得られます。問題はこの準同型の kernel は何か。一番安直なのはこれも injective という事です。簡単にはわかりませんでした。 $\Gamma_H = \pi_1(B\bar{\Gamma}_1^\omega)$ ですから、Haefliger の論文を見ても分かるように、議論として base point をどうするかという事が面倒です。これは injective な方が自然のように思いますが、わかりません。これの kernel もともかく、問題はこれの image の補集合がどうなるかです。

ω を ∞ にすると、

$$B\widetilde{\text{Diff}}_+^{\infty, \delta} \mathbb{R} \rightarrow B\bar{\Gamma}_1^\infty$$

これは homology 同値なんですね。 C^∞ 級では homology 同値。 C^ω 級では Godbillon-Vey はあるけれども、ここで実現できるというのが Thurston です。丁度時間になりました。つまりさっきも言ったように Haefliger 群

に関しては 40 年前の基本的な仕事を越えて、ちょっとだけ進展がありました。これが injective, これが何か取っ掛かりになるか。この辺りはもう少し elementary ですから、少し手は動かせるかなと思っています。今回はここまでにします。

C^∞ の時の証明が少し分かりにくかったかもしれませんが、今回は transversely symplectic foliation と Kontsevich の graph homology の commutative version との関係、逆井さん、鈴木さんとの仕事の一部、そして Gelfand-Kalinin-Fuks class の 40 年以上わからない問題、Godbillon-Vey と非常に対照的です。これを取り上げたいと思います。ちょっと駆け足ですみません。まとめると問題は、 χ^2 がゼロでないか、 $H_2(\Gamma_H)$ がゼロか、この最後の写像の image の補集合は何か、大きく言うとその 3 つです。

会場から: $B\bar{\Gamma}_1^\omega$ が $K(\pi, 1)$ である事は球面上の Γ_1^ω -structure が disk に拡張する事を証明するのですか?

はい、そうです。これも Haefliger の証明した事ですが、実解析的な事の基本的な事を使えば、もちろん Haefliger さんにして証明できる事ですが、我々から見れば理解しやすい。Haefliger の定理の中では簡単な部分です。3 つの性質も foliation とか Γ -structure とかあまり知らなくても、codimension 1 ですから、理解できます。解析的な微分同相の基本的な事を使えばできます。 Γ -structure は foliation と homotopy 論を併せたものなので、幾何的な所が、leaf 方向がどうなってもよい、foliation の normal 方向が解析的であとはどうでもよいと言われると Γ -structure という normal 方向しか見ていないので、そこが実解析的といわれても最初はよくわからないかもしれません。実解析的だと C^∞ に現れるような特異点が出てこない。それが基本的な事です。特異点を解消していく、 $H_1(\Gamma_H) = 0$ というのはそういう事です。disk には拡張しないが、genus を付ければ拡張するという事です。

第3回 12月11日

新シリーズの3回目です。

1.3 横断的シンプレクティック葉層と有限型不変量

これがタイトルですが、今日は横断的シンプレクティック葉層についてお話をし、3次元多様体の有限型不変量については来年4回目にお話をします。

(0). Lie 代数の cohomology

まず準備として Lie 代数の cohomology, これをちょっと復習します。知っている人は聞き流して下さい。Lie 代数の cohomology について歴史も含め少し復習します。

G を Lie 群, 有限次元の普通の Lie 群とします。するとその Lie 代数 $\mathfrak{g}$ があります。よく知られているように Lie 代数の定義をするとすぐに出てきます。 $\mathfrak{X}(G)$ は G 上の vector 場全体, 後で Gelfand-Fuks cohomology を考えるときは, Lie 群ではなく C^∞ -多様体 M となります。多様体 M 上のベクトル場全体を $\mathfrak{X}(M)$ と書きます。Lie 代数 $\mathfrak{g}$ は多様体としての左不変ベクトル場全体ですね,

$$\mathfrak{g} \cong \mathfrak{X}(G)^G = \{\text{left invariant vector field on } G\}.$$

G 上の vector 場全体 $\mathfrak{X}(G)$ は無限次元ですね, その右肩に G と書くと左不変ベクトル場全体 $\mathfrak{X}(G)^G \cong \mathfrak{g}$ と同一視できます。そうするとこれの cohomology を考える事ができて, G の de Rham cohomology の有限次元の subcomplex と思えます。

$$\mathfrak{X}(G)^G \hookrightarrow \Omega_{DR}^*(G).$$

これを定義だと, Lie 代数の cohomology の定義だと考える事ができます:

$$H^*(\mathfrak{g}) = H^*(\mathfrak{X}(G)^G)$$

歴史的にはこういう事を考えて, Chevalley-Eilenberg, 1948 年の仕事です。通常 Chevalley-Eilenberg cochain complex と呼ばれます。モチベーションとしてはどうも Lie 群 G に対して, それを多様体と思ったときにその G の cohomology を代数的に計算しようというものだったようです。Lie 代数から代数的にできるだろうと, これが有名な論文ですが, 1948 年, 第2次世界大戦直後の仕事です。この有限次元 Lie 群に対応する Lie 代数のときに, この cochain complex を de Rham complex の subcomplex として具体的に realize できるわけです。具体的には次のように $C^*(\mathfrak{g}; \mathbb{R})$ が定義できます。これは constant cohomology ですが, 一般に twisted cohomology を考えて, V を $\mathfrak{g}$ -module としたときに twisted cohomology $H^*(\mathfrak{g}; V)$ が定義できます。

$$C^k(\mathfrak{g}; V) := \{c : \Lambda^k \mathfrak{g} \rightarrow V\}$$

これが定義で, alternating ですから k 次, k 階の $\mathfrak{g}$ の外積から V への線型写像です。trivial の場合は $V = \mathbb{R}$ です。今日は twisted は使いませんが, k 重 multi-linear な alternating form が cochain です。coboundary map は

$$\delta : C^k(\mathfrak{g}; V) \rightarrow C^{k+1}(\mathfrak{g}; V)$$

となりまして, これは Chevalley-Eilenberg が通常の de Rham complex の普通の外微分を経由して, Lie 代数の言葉で coboundary map を書いたわけです。 $\delta c \in C^{k+1}$ ですから, $\delta c(X_1, \dots, X_{k+1})$ の値を決めればよいわけですが, これを具体的に計算すると, 一般の無限次元でもよい, de Rham complex の場合はもちろん2回やる

とゼロです。ただ Lie 代数というだけで 2 回繰り返したらゼロという事が成り立ち、Lie 代数の cohomology が定義できる。それが Chevalley-Eilenberg です。

$$\delta c(X_1, \dots, X_{k+1}) := \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} X_i c(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{k+1}) + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} c([X_i, X_j], X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_{k+1})$$

constant 係数の場合は $\sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} X_i c(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{k+1})$ の前半部分はないですが、twisted の場合は作用が非自明です。後半が本質的です。

これが定義です。有名な Chevalley-Eilenberg cochain complex の、Lie 代数の cochain complex の coboundary が定義できました。そうすると $\mathcal{G}$ の V に係数をもつ cohomology は定義で、

$$H^*(\mathcal{G}; V) := H^*(C^*(\mathcal{G}; V), \delta)$$

となります。こうやって定義したわけです。

そしていろいろな事が起こったわけです。Hochschild-Serre とか、これについて spectral sequence など基本的な仕事があります。近年この Lie 代数の cohomology がさらに重要になってきました。最近、逆井さん、鈴木さんと仕事をしていますが、その半分以上は Lie 代数の計算をしているとも言えます。重要になってきた一つの理由は Kontsevich の 2000 年以降の graph homology, もう一つ transversely symplectic foliations の特性類理論、これらが契機になってさらに重要になりつつあると思います。

会場から: $k = 0$ のときは C^0 はどう定義するのでしょうか?

$k = 0$ のときは $\mathbb{R}$ 上の Lie 代数なら $C^0(\mathcal{G}, V) = \mathbb{R}$, 基礎体とします。

- Gelfand-Fuks theory 1967-1973.
- Kontsevich
 - 1993 graph (co)homology
 - 1999 transversely symplectic foliations

まず言うべきは Gelfand-Fuks 理論です。Lie 代数の cohomology が重要性をましたのはこの仕事です。論文は 1969 年頃から 1973 年に出ています。Gelfand はずっと関わっています。Fuks も関わっています。これはいわゆるメインの仕事がこの頃という意味です。

そして Kontsevich の graph homology, 1993 年頃とその後 1999 年頃に transversely symplectic foliation の仕事があります。これらは有名な 2 つの論文に出ています。これがまた、何度読んでも、なかなか全部は分からない。あまり証明が書いていないというと Kontsevich は怒るでしょうね。この graph homology が我々、逆井さん、鈴木さんとの仕事のモチベーション、出発点の 1 つです。もう 1 つは写像類群の研究です。こういう仕事が契機になって Lie 代数の cohomology が重要性を増しています。さらに言うと、Kontsevich の graph homology は絶対 Galois 群にまで関係しています。これはいろいろな人が関わっています。我々もそれは目指してはいますが、これはもし機会があれば、トポロジーの課題というよりは、トポロジーと数論の課題という事でお話したいと思います。

その前に foliation の理論が、Gelfand-Fuks の後、Godbillon-Vey が 1971 年、そしてそれを一般化する foliation の特性類の理論が発達しました。その back ground の 1 つが Gelfand-Fuks cohomology theory で、もう 1 つが Chern-Simons invariant です。この foliation の特性類の非自明性を証明するのに、有限次元 Lie 代数の cohomology が大活躍します。この事をちょっとお話します。

まず最初のモチベーション, Chevalley-Eilenberg で Lie 群の de Rham cohomology を代数的に調べたい, というのが目標でした. Lie 群 G が compact connected Lie 群ならばまずこれは簡単な議論で, 多様体としての de Rham complex の cohomology が Lie 代数の cohomology と等しい.

$$H_{DR}^*(G) \cong H^*(\mathcal{G}).$$

これが出てきます. これは compact なので Haar measure によって有限次元の model に押し込める, homotopy を作ることができる. compact でないとすると, 例えば abelian な Lie 群, $G = \mathbb{R}^n$ で abelian Lie 代数 $\mathcal{G} = \mathfrak{r}^n$ ならば, この cohomology はどうなるか. もちろん $\mathbb{R}^n$ の多様体としての cohomology は自明ですが, abelian な Lie 代数の cohomology は

$$H^*(\mathfrak{r}^n) \cong H^*(T^n),$$

torus の cohomology と同型になります.

もっと一般にこれは Borel の仕事ですが, Lie 群 G が semi-simple connected Lie 群ならば何が言えるかというと, uniform lattice と呼ばれる cocompact discrete subgroup $\Gamma \subset G$ が存在します. しかもこれは torsion free にできます. ここは Selberg の仕事です. この商を取ると $\Gamma \backslash G$ は compact C^∞ -manifold になります. この事を使って, Lie 代数の cohomology にある意味付けができます. つまり Lie 代数の cohomology が inject する,

$$H^*(\mathcal{G}) \hookrightarrow H_{DR}^*(\Gamma \backslash G)$$

この事がわかります. 今日は多様体の cohomology は全部 de Rham cohomology で $\mathbb{R}$ -係数です. これが inject する事がわかって, さらに foliation の特性類の観点からすると, G の maximal compact subgroup $K \subset G$ に対して, Lie 代数の relative cohomology の定義はしなかったけれども, K -basic という cochain, 概念があつて, relative cohomology を考えると

$$H^*(\mathcal{G}, K) \hookrightarrow H_{DR}^*(\Gamma \backslash G/K)$$

これが inject します. ここで $G \supset K$ は maximal compact subgroup です. この $\Gamma \backslash G/K$ が foliation でよく出てくる locally homogeneous な多様体で, $\Gamma \backslash G \rightarrow \Gamma \backslash G/K$ は principal K -bundle です. そういうものです.

この単射性はどこから出てくるかというと Koszul という人が証明したのですが, $H^*(\mathcal{G}, K)$ は Poincaré duality を満たす, こういう事を代数的に証明しました. G がもし semi-simple だったら $H^*(\mathcal{G})$ も Poincaré duality を満たす事がわかります. Poincaré duality を満たすという事は, cup 積が, 定義していませんが, cup 積が perfect pairing になります. top cohomology がもし消えなければ, 下の方の cohomology は消えない, という事があります. 一方 top form は volume form になります. もし compact ならゼロにはなりません. それから Poincaré duality と組み合わせると injective になって, Γ -構造が自然に入る G と K の組をいろいろ考えると特性類の非自明性が証明できます. universal な space でいうと, Heitsch とか Hurder の仕事ですが, $B\Gamma_n$ でこういう非自明性が証明できました. これが有限次元の Lie 代数の cohomology, foliation の特性類の理論では重要な役割を果たしました. これを基に今日は次に行きます.

(1). Gelfand-Fuks cohomology theory

これはさっきも言いましたが, 1967 年くらいからメインは 1972,3 年くらいまでです. Gelfand と Fuks, あと symplectic foliation の観点で Kalinin という人がいます. Gelfand-Fuks cohomology に関してはこの後, 爆発的に論文が出ました. これについて少しお話しします.

ちょっと思い出というか, Gelfand は 20 世紀の偉大な数学者, 十指に入ると思います. Gelfand は 1913 年生まれて 2009 年 10 月 5 日に亡くなりました. 非常に長生きでしたが, なぜこれを覚えているかというところ,

個人的な事ですが、2009 年の 10 月 1 日から München 大の Kotschick さんの所に行っていました。共同研究、後でいう話もこのときの研究で、毎日会っていました。このときある朝、Gelfand が亡くなったよと Kotschick さんから聞いて驚いた事があります。

この滞在中でもう一つ、次回か次次回、3 次元多様体の不変量との関係でお話すると思いますが、Cha-Friedl-Kim の仕事が出ました。これもこの滞在中に、Kotschick さんからこういうのが出たよと言われて驚きました。写像類群は perfect です。homology cylinder の homology 同境界群は perfect か?abel 化は自明か? という問題がこの頃ありました。彼らの仕事はその abel 化が $\mathbb{Z}_2$ の無限個の直和を直和因子にもつという結果です。これが出たのも 2009 年の 10 月です。

それはともかく、Gelfand はもちろん沢山仕事がありますが、Gelfand-Fuks cohomology は topology に重要な貢献をしました。これは何をしたかといいますが、Lie 代数の cohomology というものがありますが、多様体にとって無限次元にはなりませんが、vector 場全体のなす Lie 代数があります。これを計算しようという事を Gelfand-Fuks は考えました。どうしてそれを考えたのかはわかりません。ある意味多様体にとって一番自然に出てくる Lie 代数ではあります。ただこれはものすごい次元ですから、代数的な Lie 代数と思って cohomology を取るとこのままではこれはさすがに意味がない。Gelfand-Fuks が偉いのは、continuous という条件を入れました。これは C^∞ -topology によって、 C^∞ -多様体 M の compact 集合上高階の偏微分が一様に抑えられるという、そういう topology で連続なものを考えました。これが Gelfand-Fuks cohomology の定義です。

$$H_c^*(\mathfrak{X}(M)) = H_{GF}^*(M).$$

それで驚くべき事は、具体的な計算もさる事ながら、 M が finite type, つまり coordinate neighborhood が有限個で取れる、そういう場合に彼らの Main theorem の 1 つは、 M が finite type ならば Gelfand-Fuks cohomology の各 degree part の dimension は有限というものです。一番簡単な多様体として $\mathbb{R}^n$ があります。さらに驚くべき事は、もっとも基本的な多様体 $\mathbb{R}^n$ に対して、具体的に計算を始めて、最終的には Vey の仕事まで行きました。

これ自身有限次元で最初の reduction は

$$H_{GF}^*(\mathbb{R}^n) \cong H_c(\mathfrak{a}_n)$$

です。 $\mathfrak{a}_n$ は何かというと、 $\mathbb{R}^n$ 上の形式的な vector 場全体のなす Lie 代数です。具体的には、 $\mathbb{R}^n$ の座標を $(x_1, \dots, x_n)$ とすると、形式的べき級数 $\mathbb{R}[[x_1, \dots, x_n]]$ を係数とする

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_n &= \{\text{formal vector field on } \mathbb{R}^n\} \\ &= \mathbb{R}[[x_1, \dots, x_n]] \left\langle \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\rangle \end{aligned}$$

です。具体的には

$$\mathfrak{a}_n \ni \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (f_i \in \mathbb{R}[[x_1, \dots, x_n]]),$$

こういう形のもので、bracket は通常の vector 場の bracket と思ってやります。これを実際に計算してしまいました。改めて書きますと、これは total な次元がまず有限次元

$$\dim H_c^*(\mathfrak{a}_n) < +\infty.$$

そして具体的には W_n と書かれる有限次元の cochain complex の cohomology と同型です。

$$H_c^*(\mathfrak{a}_n) \cong H^*(W_n)$$

この W_n のコホモロジーは Vey が具体的な基底を構成して foliation の特性類に使われました。その一番大事なものが $h_1 c_1^n$ と書かれる $2n+1$ 次元の cohomology class であって、これが Godbillon-Vey class に対応しています。これで大成功を取めたわけです。

これが計算できるという事が大成功ですが、大成功には2つ意味があつて、まず理論的に計算できるというのがものすごい結果だったわけです。そしてその次に具体的に計算ができる。それで topology に取って大事な foliation の特性類を測る事ができるわけです。具体的に実現する foliation も有限次元 Lie 群を用いて具体的に構成しました。1970 年代に爆発的に foliation の理論が進展して、最終的には Thurston がいわば時代の寵児として颯爽と登場して大活躍をしました。そういう風に流れていったわけです。

有限次元性とか foliation の特性類の理論として Gelfand-Fuks cohomology は大成功を取めるわけですが、この当時から問題になったのは、これらが $\mathfrak{a}_n$ のいくつかの重要な Lie subalgebra ではどうなるかということです。最初は

$$\mathfrak{a}_n \supset \mathfrak{v}_n = \{ \text{volume preserving vector fields on } \mathbb{R}^n \}$$

です。こういう Lie subalgebra, volume を保つ, divergence free とも言えます。

その次に偶数次元 $\mathfrak{a}_{2n}$ のとき、 $\mathbb{R}^{2n}$ の通常の座標で $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ 。写像類群でもよく出てくるわけですが、standard symplectic vector space を考えます。 ω_0 は standard な座標で

$$\omega_0 = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i$$

と表されます。写像類群のときは添字は g と書きますが、通常 standard symplectic vector space の場合は n と書いた方が自然なので n と書きます。これがあると、この Lie subalgebra でこれは Kontsevich の notation ですが、

$$\mathfrak{a}_{2n} \supset \text{ham}_{2n} = \{ \text{Hamiltonian formal vector fields on } (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0) \}$$

infinitesimal にこの symplectic form を保つ vector 場全体です。この2つが重要な Lie subalgebra です。

大問題、Gelfand-Fuks 理論は40年前ですがそれ以来ほとんど進展がない大問題、それはこれらの continuous cohomology も有限次元かというものです。大方の人はそうではない、無限次元を予想しているので

$$\dim H_c^*(\mathfrak{v}_n) = \infty?$$

$$\dim H_c^*(\text{ham}_{2n}) = \infty?$$

と書いておきます。こういう大問題が出てきます。なぜ無限次元と予想されるか、その1つの理由、逆に言うとも $\mathfrak{a}_n$ の場合になぜ有限次元が証明されるかというと、そのキーポイントは Euler vector field

$$\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \in \text{linear part of } \mathfrak{a}_n$$

の存在です。この vector 場は数学だけではなく、物理でも重要です。これが重要な役割を果たして、微分作用素と考えて固有分解をすると cohomology が1カ所だけが自明にならない、後は全部自明になる。そういうテクニックです。一方これが $\mathfrak{v}_n$ にも ham_{2n} にも入らない。これは $\mathfrak{a}_n$ の linear part に入っています。constant part, linear part, 2次, 3次と続いていきます。linear part は connection form になります。これが subalgebra の linear part には入れない事はそれは linear term を比べると分かります。 $\mathfrak{a}_n$ の場合 linear part は

$$\mathfrak{a}_n(1) \cong \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$$

です。そして

$$\begin{aligned}v_n(1) &\cong sl(n, \mathbb{R}), \\ ham_{2n}(1) &\cong sp(n, \mathbb{R})\end{aligned}$$

こういう風になってどんどん linear part は小さくなります。従って Euler vector 場は linear part には入らない。特に ham_2 の場合、それは $\mathbb{R}^2$ 上の話ですが、linear part は $gl(2, \mathbb{R})$ は 4 次元、 $sp(2, \mathbb{R}) \cong sl(2, \mathbb{R})$ で 3 次元になります。一方で Sp -加群としては $sp(2, \mathbb{R})$ は $S^2 H_{\mathbb{R}}$ と同型です。その $S^2 H_{\mathbb{R}}$ の基底としては 2 次の多項式で $x^2, xy + yx, y^2$ がとれます。Hamiltonian vector 場は Hamilton 関数に associate した vector 場です。具体的にその対応は

$$\begin{aligned}x^2 &\mapsto x \frac{\partial}{\partial y} \\ xy + yx &\mapsto y \frac{\partial}{\partial y} - x \frac{\partial}{\partial x} \\ y^2 &\mapsto y \frac{\partial}{\partial x}\end{aligned}$$

これが Hamiltonian vector 場で 3 次元の linear part の基底になります。特に Euler vector 場は入らない。Euler vector field は

$$x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \notin ham_2$$

です。Gelfand-Fuks cohomology の有限性の証明のキーポイントは Euler vector 場を使って分解するという事です。これは無限次元ではないかと当初からいわれていました。

foliation の研究をしていた頃からこれは頭にあった事です。当時はまだ computer もあまり使っていませんでした。ある時 2000 年頃だと思いますが、いろいろな所をネットで探していたら、ロシアのある大学の研究グループがヒットして、そこは Gelfand-Fuks cohomology, 無限次元 Lie 代数の連続 cohomology を computer を使い計算し、また理論的に研究していました。その HP には Gelfand-Fuks cohomology は ham_2 の時に、ある exotic な特性類が発見され、そしてそのようなものが無限個ある事が予想されている。これは元々ロシアで始められたものであるから、是非ロシア内で解決したいと書いてありました。それにしても 40 年ほとんど進展はないわけです。

(2). Gelfand-Kalini-Fuks の仕事.

論文は 1972 年に出版されています。Gelfand はさっきいいましたが、数学の巨人で、Fuks はこの後アメリカ西海岸の大学に移り、活躍しています。Kalinin のこの後の事はよくわかりません。この仕事を紹介するために ham_{2n} をもう少し詳しく説明します。

これは Hamiltonian vector 場全体ですが、それは Hamiltonian 関数で書けるので、座標を symplectic vector space のように $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$ と取ります。そうすると

$$ham_{2n} \cong \mathbb{R}[[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n]]/\mathbb{R}$$

ここで $\mathbb{R}$ は constant term です。vector 場ですが、関数で書けるというのが良い所です。これが同型である。具体的には、定数を modulo にした関数、これに対して具体的な vector 場がどうなるかというと、 $h \in \mathbb{R}[[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n]]$ に対して

$$X_h = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial h}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_i} - \frac{\partial h}{\partial y_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \right\}$$

となります。さっきやったやつです。さっきは linear term を計算するために、この 2 次の part, $x^2, xy+yx, y^2$ に計算しました。こうなるわけです。これで同型になるわけです。この bracket は hamilton 関数の方では関数の Poisson bracket に対応している、Lie 代数の方では Lie 代数の通常の bracket で対応しています。Hamiltonian の場合は vector 場でいろいろやるのが、全部 Hamiltonian 関数、こっちは $\frac{\partial}{\partial x}$ とかはないので計算は簡単になります。これが Kontsevich, graph cohomology との関連でみると、 $S^k H_{\mathbb{R}}, x_i, y_i$ たちの k 次の symmetric algebra の直和の完備化

$$ham_{2n} = (\oplus_{k=1}^{\infty} S^k H_{\mathbb{R}})^{\wedge},$$

constant term がないから、 $k = 1$ から ∞ 、ここで $H_{\mathbb{R}}$ と書いたら $H_{\mathbb{R}} = (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ です。これは多項式 vector 場ですから、これを完備化したものが形式的 hamiltonian vector 場になります。ここに weight というものを書くわけです。ここで k 次の part の weight は $k-2$ です。hamilton 関数の方で見ると、1 次の part, 2 次の part, 3 次の part とありますが、それはそれぞれ weight -1, 0, 1 となります。それが vector 場でいうと constant part が weight -1, linear part が weight 0, そして 2 次の part が weight 1 です。以下続いてこのようになります。そうするとその cohomology ですから、 $H_c^*(ham_{2n})$, これは bigraded で、grading は通常の cohomology の degree と weight によって入ります。bi-graded な vector space ですね。linear part は Lie 代数でいうと $sp(2n, \mathbb{R})$, これは Lie 群でいうと $Sp(2n, \mathbb{R})$ です。この relative な cohomology が定義できます。

この準備の下に、Gelfand-Kalinin-Fuks の 1972 年の定理は何かというと、まず、この論文、特にイントロダクションを見ると面白い事が書いてあります。論文のメインパートはもちろん面白いのですが、モチベーションとか計算機でどう計算したとか面白い事が書いてあります。まず一般論で連続 cohomology $H_c^*(ham_{2n}, Sp(2n, \mathbb{R}))$, relative な cohomology, relative はあまり気にする必要はありませんが、特性類の観点から言うとも $Sp(2n, \mathbb{R})$ がないと normal bundle が自明でかつ自明化されているカテゴリーになります。これがあると通常の normal bundle は何でもよいというものになります。通常これの cohomology を計算をする事が大事になります。技術的にはそんなに大差はありません。

この maximal compact は unitary 群ですから、本当は $U(n)$ -relative な cohomology を計算したいのですが、これはなかなか難しいです。 $Sp(2n, \mathbb{R})$ -relative にすると Sp という群の表現論が使えて computer にものやすくなります。 $U(n)$ -relative というのは難しい。

少なくとも $2n = 2, 4, 6$ ぐらいでもし意欲のある人がいたら $U(n)$ -relative で挑戦して下さい。Gelfand-Kalinin-Fuks の最初の定理は、一般の $2n$ で、 $H_c^*(ham_{2n}, Sp(2n, \mathbb{R}))_{\leq 0}$, 特性類でいうと unitary 群ですから Chern class が出て来て、これは難しい。 $Sp(2n, \mathbb{R})$, こっちでいうと Pontrjagin class がでてきますが、transversely symplectic foliation で normal bundle の Pontrjagin class がでてきます。そういう通常の特性類は weight ゼロの所にあります。一方 symplectic form がありますがその weight は -2. これで最初に計算しました。ここまでは通常 smooth と同じです。

Theorem 1.27 (Gelfand-Kalinin-Fuks, 1972).

$$H_c^*(ham_{2n}, Sp(2n, \mathbb{R}))_{\leq 0} \cong \mathbb{R}[\omega_0, p_1, \dots, p_n]/I.$$

ここで I というのは ideal であって Bott vanishing で出てくる ideal です。

$$I = \langle \omega_o^k p_1^{k_1} \cdots p_n^{k_n}; k + k_1 + \cdots + k_n > n \rangle$$

symplectic form がありますが、この ideal の条件は Bott vanishing の条件です。ここまでは Gelfand-Kalinin-Fuks はこれで全部じゃないか、weight が positive なものはないと考えました。これ以外は存在しないとすれ

ば有限次元になり、symplectic form があるだけで理解できると期待した。そういう working hypothesis で進めました。実際 weight が non positive な所ではそうだった。実際 weight positive の所はないと証明しようとしたわけですが、Euler vector 場がないから証明は難しい。仕方がないからと論文には書いてありませんが、一番簡単な場合、 ham_2 の weight positive のところに cohomology は出るか？出ないのではないかと予想して computer で計算をしました。具体的に bigraded というわけですが、cochain level で weight に関して直和分解できる。weight を固定する毎に cohomology が計算できる。それは有限次元なので computer にのるわけです。

そうすると最初の内はずっとゼロだったんです。ずっと computer を走らせていって、今から 40 年前ですが、weight を 1 つ増やすだけでもものすごく大変だという事は実感できます。1,2 とどんどん、ずっとゼロだなと思ったようですが、7 までいってゼロでした。

$$H_c^*(ham_2, sp(2, \mathbb{R}))_w = 0 \quad (w = 1, 2, \dots, 7).$$

その次、weight 8 の所に、

$$H_c^*(ham_2, sp(2, \mathbb{R}))_8 = \begin{cases} \mathbb{R} & (* = 7), \\ 0 & \text{others.} \end{cases}$$

ちなみに表現論を使うと奇数の所は全部ゼロです。cochain complex がなくなるのでゼロです。8 の所で 1 カ所だけゼロでなくなります。その 1 カ所の degree は 7 です。それが Gelfand-Kalinin-Fuks の有名な特性類です。我々が最初かどうか知りませんが、Gelfand-Kalinin-Fuks class と名付けて 2009 年頃に Kotschick さんと共著の論文を書きました。

$$\text{GKF-class} \in H_c^7(ham_{2n}, Sp(2, \mathbb{R}))_8.$$

ここに出て来たわけですが、論文は続くわけです。すぐにこれが出たとする一般の cohomology, $H^*(ham_{2n}, sp(2, \mathbb{R}))$, この幾何学的な意味ですが、codimension 2 foliation, 前回までやった Haefliger structure の言葉を使えば、 Γ_2^{symp} -structure の特性類になります。これはどうなるかというと、

$$H^*(ham_{2n}, sp(2, \mathbb{R})) \rightarrow H^*(B\Gamma_2^{symp})$$

一般には Γ_{2n}^{symp} , ここでは Γ_2^{symp} は groupoid of germs of local diffeomorphisms of $\mathbb{R}^2$ preserving ω_0 です。 $\mathbb{R}^2$ の symplectic form を保つような微分同相全体の germ からなる groupoid. この場合は Γ_2^{symp} ですから symplectic form は volume form ですから、volume preserving と一緒です。その分類空間 $B\Gamma_2^{symp}$ へこういう特性類写像があるわけです。Haefliger structure は定義はこの頃に定義されていますから、この言葉では書いてはいませんが、transversely symplectic foliation の特性類として GKF-class は $H^7(B\Gamma_2^{symp})$ で非自明か、という問題を考えたのです。考えたけれどわからなかった。これが 40 年前で 40 年たってもわかりません。ちなみに Gobillon-Vey との比較をします。Godbillon-Vey の場合は、前回、あるいは BGamma-school とかでも話をしましたが、codimension 1 で定義は Godbillon-Vey で 1971 年です。そして Gelfand-Fuks, Bott, Thurston, こういう人たちによって、ほとんど同時に、前後関係はよくわかりませんが、Gelfand-Fuks cohomology との関係を見て、研究が始まりました。そして Godbillon-Vey の幾何学的な非自明性を Roussarie, そしてさらに Thurston が連続変形する事を証明しました。

$$GV \neq 0 \in H^3(B\Gamma_1, \mathbb{R})$$

そこに出てくるのがさっき言った Lie 代数の cohomology であって

$$PSL(2; \mathbb{R}) = \text{Isom}_+(\mathbb{H}^2)$$

hyperbolic geometry ではもっとも重要な Lie 群 $PSL(2; \mathbb{R})$, これは自然ではありませんが, base point を決めると

$$T_1\mathbb{H}^2 \cong PSL(2; \mathbb{R})$$

が出てきます. そして左から cocompact discrete subgroup $\Gamma \subset PSL(2; \mathbb{R})$ で割ると negatively curved な surface $\Sigma = \Gamma \backslash \mathbb{H}^2$ 上の unit circle bundle $T_1\Sigma \cong \Gamma \backslash PSL(2; \mathbb{R})$ という compact な 3 次元多様体が出て来て, その volume form はノンゼロです. この 3 次元多様体に自然な codimension 1 foliation が存在し, その volume form が Godbillon-Vey のファイバー積分に対応しています. それで非自明性があつと言う間に証明できます. Thurston の天才的な idea で切り貼りすると, さらに Godbillon-Vey は実解析的に連続的に変化する事まで証明されました. あつという間です. 定義から 1 年も経っていません. これに比べて Gelfand-Kalinin-Fuks class は 1972 年に発見されて, 約 40 年経っていますが, ほとんど何の進展もないですね.

こういう問題があるわけですが, 目時さんの仕事, Kotschick さんとの共同研究, そして最近三上さんの仕事があつて, この大問題よりもちょっとだけ易しい, leaf cohomology class の問題, 元々の問題が解ければよいのですが, ちょっとだけ易しい問題について述べます. それは原点を固定する area preserving diffeomorphism の cohomology になります. これよりはちょっとだけ易しい, 元の問題よりは先に非自明性が証明できるのではないかと, でも 50 年くらいかかるかもしれませんが... 元の問題が 40 年くらいほとんど進展のない, 1 つの理由はつぎのようなことです. Godbillon-Vey の場合は 3 次元の Lie 群がこういう所に入っています. 対応する性質をもつ 7 次元の Lie 群が symplectic な無限次元 Lie 群に入ればよいのですが, 多分そういうものは望めないという事です. smooth な場合のように, locally homogeneous な構成ではできないと思います.

(3). Perchik の公式.

Perchik は多分 Bott の弟子だと思いますが, Euler 数を与える公式を考えました. weight に付いて足し上げる. w は weight です. weight w part は有限次元の cohomology になるので, Euler 数が定義できます. 通常の Euler 数を weight に関して足し上げる. generating function ですから, Euler 数を係数にして t^w を足し上げます.

$$\sum_{w=0}^{\infty} \chi(H_c^*(ham_{2n}, sp(2n, \mathbb{R})))_w t^w$$

これを computer で具体的に計算しました. $n = 1$ のとき t^{-2} から始まって, symplectic form が偶数次元の所に 1 個だけあるので係数は 1.

次が t^8 . t^8 の係数が -1, weight 8 のときの class が 1 個だけ. それが Gelfand-Kalinin-Fuks class です. これが t の 100 乗くらいまで書いてあります.

$$t^{-2} + 2 - t^8 - t^{14} - t^{22} - t^{28} + t^{30} - t^{32} - \dots$$

どんどんマイナスが出てきます. こうなっていて, これを見るとどうも規則性は見えない. 規則性はみえないが, しかしこれが有限で止まるとは思えない. それが無限次元だろうという一つの experimental な根拠です.

そして t^{14} の所に -1 があるのが, 坪井さんの学生だった目時さんの 2000 年の博士論文です. Metoki-class と呼ばれている $H_c^9(ham_{2n}, sp(2; \mathbb{R}))_{14}$ の元を見つけました. 9 次元の weight 14 の所です. 目時さんは元を 1 つ見つけただけではなく,

$$H_c^9(ham_{2n}, sp(2; \mathbb{R}))_{14} \cong \mathbb{R},$$

1 次元であることも証明しました. これは Euler 数だけですが, ここまでは cohomology もありません. 我々

の computer での計算は、2007 年頃にこれの foliated cohomology version の計算を鈴木さんに頼んだのが最初だと思います。

この次に出てくるのが Kontsevich の仕事です。

(4). Kontsevich の new view point

これまで述べたように、懸案の問題は非常に難しいものですが、Kontsevich はここに新しい視点を導入しました。graph homology に密接に関連するものですが、その論文には書いてはありません。graph homology は第 4 回で取り上げます。これから述べるのが書いてある論文は 1999 年です。Rozansky-Witten 不変量に関する論文で、良く読むと foliation に関する応用が書いてあります。foliation の人には余り読まれていないと思います。この論文で ham_{2n} の Lie subalgebra

$$ham_{2n} \supset ham_{2n}^0 \supset ham_{2n}^1$$

を定義しました。これは Kontsevich の notation で ham_{2n}^0 は constant term のないもの全体、さらに ham_{2n}^1 は linear term まででないもの全体です。そうするとこれは hamilton 関数の方でいうと ham_{2n} は対称関数の完備化ですが、 ham_{2n}^1, ham_{2n}^2 は

$$ham_{2n} = (\oplus_{k=1}^{\infty} S^k H_{\mathbb{R}}) \frown ham_{2n}^0 = (\oplus_{k=2}^{\infty} S^k H_{\mathbb{R}}) \frown ham_{2n}^1 = (\oplus_{k=3}^{\infty} S^k H_{\mathbb{R}}) \frown$$

となります。これが次回からやる Kontsevich の Lie 代数でいうと、 $\mathbb{Q}$ 上にすると $\oplus_{k=2}^{\infty} S^k H_{\mathbb{Q}}$ は commutative graph homology というもので、 c_g と書くものになります。graph homology は 1993 年の論文で、これは 1999 年の論文で奇妙な事に自分の commutative graph homology の事は一言も書いていないのです。引用もしていません。その言葉でいうと、ある derivation, 多項式代数の derivation の作る Lie 代数です。 $\oplus_{k=3}^{\infty} S^k H_{\mathbb{Q}}$ は c_g^+ となります。

3 種類 graph homology があって、 a, c, l です。その中ではある意味で計算は c が簡単とも言えます。簡単という語弊がありますが、だけど何も分からない。ある意味 a, l はずっと計算は難しいのですが、ある部分そちらの方がわかっている事が多いです。特に a は Riemann 面の moduli に関係する。 l の場合は $Out(F_n)$ と関係があって、そちら側から攻める事はできます。 c はこれはなかなか難しい。

計算的には、我々の立場からすると一番簡単。weight が 20 まで計算しました。今 22 をやろうとしています。4,5 年掛かりです。

どういう視点だったかと言いますと、まず foliation が出てきます。 $\mathcal{F}$ を M 上の codimension $2n$ transversely symplectic foliation とします。そうすると leaf cohomology という理論があります。これは三松-松元という論文があります。foliated cohomology。これは何かと言いますと、多様体 M 上に foliation があつたとすると、de Rham complex の中にこの foliation を定義する微分形式の作る ideal $I(\mathcal{F})$ があります。

$$\Omega^*(M) \supset I(\mathcal{F})$$

これは differential ideal ですから、商を考える事ができます。これを foliation の微分形式と言います。

$$\Omega_{\mathcal{F}}^* := \Omega^* M / I(\mathcal{F})$$

そうするとその cohomology を考える事が出来ます。それを foliated cohomology と呼んで

$$H^*(\Omega_{\mathcal{F}}^*) = H_{\mathcal{F}}^*(M; \mathbb{R})$$

と表します。これは一般には計算は非常に難しくなります。ideal で割っているのですが、symplectic form があって、codimension 方向の volume form です。これで wedge を取ると

$$\Lambda\omega_0^n : H_{\mathcal{F}}^*(M; \mathbb{R}) \rightarrow H_{DR}^{*+2n}(M; \mathbb{R})$$

と普通の de Rham cohomology へ準同型が得られます。こういう準同型があつて Kontsevich が何をしたかという、連続 cohomology $H_c^{*+2n}(\text{ham}_{2n}, \text{sp}(2n, \mathbb{R}))$ と、Gelfand-Kalinin-Fuks の Hamiltonian foliation の特性類があつて、ここは難しいのですが、Kontsevich は下の図式が可換図式になるように $H_c^*(\text{ham}_{2n}^1; \text{sp}(2n, \mathbb{R}))$ を考え

$$\begin{array}{ccc} H_{\mathcal{F}}^*(M; \mathbb{R}) & \xrightarrow{\Lambda\omega_0^n} & H_{DR}^{*+2n}(M; \mathbb{R}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ H_c^*(\text{ham}_{2n}^0; \text{sp}(2n, \mathbb{R})) & \longrightarrow & H_c^{*+2n}(\text{ham}_{2n}, \text{sp}(2n, \mathbb{R})) \end{array}$$

$H_c^*(\text{ham}_{2n}^0; \text{sp}(2n, \mathbb{R}))$ からの写像を作りました。constant term を除きました。これを Kontsevich は作りました。これを作つて Gelfand-Fuks cohomology level で $\Lambda\omega_0^n$ が well-defined になります。この merits が 2 つあります。1 つは計算がやさしい。まず表現論を使うと、

$$H_c^*(\text{ham}_{2n}^0; \text{sp}(2n, \mathbb{R})) \cong H_c^*(\text{ham}_{2n}^1)^{Sp}$$

となります。表現論が使えます。こうなる。こちらの方が計算は易しい。元々の cochain complex で Sp -不変なものをもってくればよい。 $H_c^{*+2n}(\text{ham}_{2n}, \text{sp}(2n, \mathbb{R}))$ は weight が -1 のものもあるので難しい。 $H_c^*(\text{ham}_{2n}^1)^{Sp}$ は weight 1 以上ですから ordinary なやつはもうないんですね。計算が易しい、これが merit 1 です。

merit の 2、こちらの方が大きいと言えますが、 ham_{2n}^0 は commutative graph homology なんですよ。従つて Kontsevich の new view point から transversely symplectic foliation の foliated cohomology class を与えるのですが、これも Kontsevich ですが、これは characteristic classes for odd-dimensional manifold bundles、奇数次元多様体、特に 3 次元多様体から始まりますが、3 次元以上の奇数次元多様体バンドルの特性類の役割を果たします。これも Kontsevich です。さらに、1 月に詳しくやりますが、この graph homology の中に、Vassiliev invariant に始まる knot の finite type invariant、それを 3 次元多様体に一般化した Ohtsuki 不変量、さらに LMO-invariant、いわゆる quantum invariant、が sub として入っています。具体的には Garoufalidis-Nakamura の結果を使って、逆井さん、鈴木さんとの論文の中に書きました。LMO invariant が一つ core の所にあつて、tensor 積のもとに、わけのわからない complementary な algebra に split する。その complementary な所がどうなるかという、奇数次元の多様体バンドルの特性類の役割も果たすし、symplectic foliation の leaf cohomology class の役割も果たす。凄い問題というか大海原があります。我々はまだ非自明な元を 5,6 個しか見つけていません。もちろん、これも無限次元が予想されますが、その予想、この続き、これは来年やります。commutative graph homology と 3 次元多様体の不変量との関係ですね。

2000 年頃の大槻さんの問題集、quantum invariants for knots and links in 3-manifolds の中でも、Kontsevich の Lie 代数に言及されています。この 10 年で少し取っ掛かりが出来ました。沢山問題があるという事を来年お話ししたいと思います。今日は最後に三上さんの結果について述べます。

$n = 1$ のとき、7 次元のところに Gelfand-Kalinin-Fuks-class がいて、9 次元のところに Metoki-class がいま

す。ここは wedge で $n = 1$ ですから $\wedge \omega_0$ です。

$$\begin{array}{ccc} H_{\mathcal{F}}^*(M; \mathbb{R}) & \xrightarrow{\wedge \omega_0} & H_{DR}^{*+2}(M; \mathbb{R}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ H_c^*(ham_2^0, sp(2, \mathbb{R})) & \longrightarrow & H_c^{*+2}(ham_2, sp(2, \mathbb{R})) \end{array}$$

まず, Kotschick さんとの共同研究で, さっき言った 2009 年に München に行った時に $\gamma \in H_c^5(ham_2^1)_{10}^{Sp}$ を構成して $\gamma \wedge \omega_0$ が Gelfand-Kalinin-Fuks-class になる事を証明しました。Gelfand-Kalinin-Fuks-class は leaf cohomology と transversely symplectic form の積で書ける。

そして三上さんが $\gamma' \in H_c^7(ham_2^1)_{16}^{Sp}$ を構成して $\gamma' \wedge \omega_0 = \text{Metoki class}$ となる事を証明しました。volume form で weight が 2 個下がるから 8 と 14 で, ここにいます。これは computer で沢山計算したわけですね。Metoki-class は leaf cohomology と transversely symplectic form の積で書ける。

そうすると最後に一言, その 40 年来の問題で, Gelfand-Kalinin-Fuks class, Metoki-class が幾何学的に非自明かという問題の foliated version を考える事ができます。

$$H^*(ham_2^1)^{Sp} \rightarrow H^*(BSymp_0^{\delta}(\mathbb{R}^2, \omega_0); \mathbb{R})$$

ここで $Symp_0^{\delta}(\mathbb{R}^2, \omega_0)$ は原点を固定する $\mathbb{R}^2$ の area preserving diffeomorphisms, これで discrete topology. これは global diffeo ですが, 問題をさらに易くしようとすれば, germ にすればよい, その原点における germs. discrete topology で考えた分類空間の特性類が, $H^*(BSymp_0^{\delta}(\mathbb{R}^2, \omega_0); \mathbb{R})$ でこの写像で, γ, γ' の像は非自明か? となります。具体的には, 原点を固定する area preserving diffeomorphism の分類空間に exotic な特性類があるか, という極めて重要な問題になります。

普通の foliation の言葉で言おうと思うと, 一枚 leaf が指定されているという事でしょうか?

はい, その通りです。leaf 上の 5 次元 cohomology とも言えます。これが元々の Gelfand-Kalinin-Fuks-class, Metoki-class と比べればこの方が少しは易しいのではないかと思います。

最後に石田君の結果について触れます。 $\alpha_1 \subset \alpha_1^1$ の中に, この cohomology で Gelfand-Fuks cohomology 自体は Goncharova が完全に与えています。それは Massey 積で書けます。石田君が証明したのは,

$$H_c^2(\alpha_1^1) \rightarrow H^2(BDiff_0^1(\mathbb{R}^2))$$

という写像に関して, 原点を固定する diffeomorphism で原点で C^1 -tangent to id. という概念がありますが, そのような diffeo の群の 2 次元の整数係数 homology が $\mathbb{R}^2$ を含むというのが彼の結果です。germ にすると少し簡単ですが, 石田君はこれの global でやりました。これにちょっと似た所があります。area preserving という条件がありますが, 5 次元, 7 次元 cycle です。ただやろうとするとほとんど気の遠くなるような話です。元々の Gelfand-Kalinin-Fuks class だともっと難しいですから, ちょっとは易しくなっていると思います。なおかつ germ にする, ほんの少しだけですが, 易くなっていると思います。

実際これは何かというと, exotic の定義は何かという事はいついませんでした。exotic の定義は何かというと, 通常特性類は curvature で記述される。さっきいったように weight が non positive の所に全部現れます。higher jet も含んだ特性類になっている。それが exotic class の定義です。通常の Chern-Weil 理論からはみ出ている。higher jet も含んだ形になっていて, 意味も全くわからない。この意味を理解するためには, cohomology が 1 個あるんですが, 自然な cocycle を見つけようとしています, transverse 方向に計量を入れてその計量に関する symplectic, harmonic representative を計算しようという 2 年くらい前からの project ですが,

なかなか進みません。今の所元々の Gelfand-Kalining-Fuks-class の論文でも computer を使った representative ですから、こういうものがあるという存在だけが知られているという事です。Gelfand-Kalining-Fuks や目時さんの仕事では cocycle level では wedge 積になっていません。Kotschick さんとの仕事では cocycle を coboundary で補正して、cocycle level で wedge 積にしました。三上さんの仕事もそうです。今度は γ, γ' は cohomology があるというだけです。それに canonical な representative なものを構成して、そうすると higher jets ですがちょっとは見えるかもしれません。今日はこれでおしまいにします。foliation についての側面です。次回は 4 回目は Kontsevich の新しい view point で 3 次元多様体の不変量、奇数次元多様体バンドルの特性類、これについてもわからない事だらけです。それはまた来年にします。

2 3次元多様体の不変量を巡る謎

2.1 commutative graph homology と 3次元多様体の不変量

新シリーズの4回目で commutative graph homology と 3次元多様体の不変量というタイトルでお話します。まず復習から入るのですが、これを準備していた頃、先週の火曜日1月21日、最近、逆井さん、鈴木さんと研究していて、その中に commutative graph homology もあるのですが、最初はびっくりの論文がアーカイブに出ました。それは今日の一番最後に少し言いますが、Willwacher という homotopy 代数とか、物理掛かった数学というか、最近の若手のホープです。この人はチューリッヒ大学の教授になっています。まだ若い人です。チューリッヒというと ETH が思いだされませんが、そちらではありません。この若い人、Willwacher-Živković の論文がアーカイブに出ました。アーカイブの番号を書き忘れたのですが、1月21日ですね。タイトルは The dimensions and Euler characteristics of M. Kontsevich's graph complexes. 我々が研究しているテーマの一つに深く関連する内容です。commutative の場合に我々は weight 20 まで計算したのですが、こちらはぱっと見たら、weight 60 まで計算してあります。初めびっくりしたのですが、今は落ち着いてきました。graph homology というのは Kontsevich の 1993 年頃の有名な 2 つの論文にあります。後でやりますが、Kontsevich 自身、3 種類の Lie 代数、commutative, lie, associative, それぞれについて個性があって、比較するとそれぞれ面白い。今日はその一部分だけですがお話します。ますますおもしろくなってきました。問題だらけですね。その辺の所をおいおい紹介しようと思います。きょうは commutative の場合を扱うわけですが、他の場合もちょっとだけ言うと、我々は lie の場合は weight 18 まで、associative の場合には weight 500 まで計算できました。後者がなぜそんなに weight の大きなところまで計算できたかという、Gorsky という人、最初は代数幾何、最近は quantum topology の若手のホープで、Columbia 大学に就職しました。彼の論文の結果は強力なのですが、それをうまく computer に載せられる良いプログラムが作れたからです。背景にあるのは、リーマン面のモジュライ空間全体のつくる世界が、驚くほど美しい構造を持っていることです。

まずは復習から始めます。前回までは foliation の事をやってきました。

(0) Kontsevich 1999

commutative graph homology と transversely symplectic foliation の特性類との関係です。Hamiltonian formal vector field の全体、これはまず standard な symplectic vector space 上の Hamiltonian vector field の全体です。

$$\begin{aligned} ham_{2n} &= \{\text{Hamiltonian formal vector field on } (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)\} \\ &\cong \mathbb{R}[[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n]]/\mathbb{R} \\ &= \left(\bigoplus_{k=1}^{+\infty} Sym^k H_{\mathbb{R}}\right)^{\vee} \\ &\supset ham_{2n}^0 = \left(\bigoplus_{k=2}^{+\infty} S^k H_{\mathbb{R}}\right)^{\vee} \\ &\supset ham_{2n}^1 = \left(\bigoplus_{k=3}^{+\infty} S^k H_{\mathbb{R}}\right)^{\vee} \end{aligned}$$

具体的には vector 場ですから、 $\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_i}$ たちの 1 次結合になります。係数が x_i, y_i 達の形式的べき級数です。しかし、良く知られているように Hamiltonian 関数というものがありますから、 $\mathbb{R}$ 上の形式的べき級数で表すことができます。ただし定数は微分して自明な vector 場に行くので、定数は modulo します。さらにその下に

書いたのは表現論的な記述で、これは何かと言うと、直和であって、 k が 1 から ∞ までの symmetric algebra $Sym^k H_{\mathbb{R}} = S^k H_{\mathbb{R}}$ の直和になります。ここで

$$H_{\mathbb{Z}} = H_1(\Sigma_g; \mathbb{Z}), H_{\mathbb{Q}} = H_1(\Sigma_g; \mathbb{Q}), H_{\mathbb{R}} = H_1(\Sigma_g; \mathbb{R}).$$

表現論を使うときは $\mathbb{Q}$ 係数のものとします。foliation をやるときは $\mathbb{R}$ 上でやります。数論的にやるときは $\mathbb{Z}$ 上でやります。具体的にはこういうものです。但しこれらは多項式ですから、それを完備化したものです。

この ham_{2n} の部分 Lie 代数で ham_{2n} の上に 0 と書いたら、表現論的には k が 2 から ∞ で without constant term の vector 場のなす部分 Lie 代数 $ham_{2n} \supset ham_{2n}^0$, この差は定数 vector 場です。これのさらに subalgebra があって $k = 3$ から ∞ で linear part を取って、without constant and linear term のなす vector 場全体が ham_{2n}^1 . ham_{2n}^0 と ham_{2n}^1 の差は線型 vector 場です。こういう風になりまして Kontsevich は、これを考えて次のような foliation の特性類を構成しました。

まず $H_c^*(ham_{2n}^0, sp(2n, \mathbb{R}))$ があって、relative cohomology です。ここから多様体 M 上に $\mathcal{F}$, transversely symplectic foliation があったときに、leaf cohomology, foliated cohomology, $H_{\mathcal{F}}^*(M; \mathbb{R})$ が定義できます。ここに特性類を定義しました。元々の transversely symplectic foliation. そして $H_c^*(ham_{2n}, sp(2n, \mathbb{R}))$. これが研究したいものです。

$$\begin{array}{ccc} H_{\mathcal{F}}^*(M; \mathbb{R}) & \xleftarrow{\text{Kontsevich}} & H_c^*(ham_{2n}^0, sp(2n, \mathbb{R})) \\ \downarrow \wedge \omega_0^n & & \downarrow \wedge \omega_0^n \\ H_{DR}^{*+2n}(M; \mathbb{R}) & \xleftarrow{\text{GKF}} & H_c^{*+2n}(ham_{2n}, sp(2n, \mathbb{R})) \end{array}$$

ここに $\wedge \omega_0^n$ という写像があって、元々知りたいのは $H_{DR}^{*+2n}(M; \mathbb{R}) \leftarrow H_c^{*+2n}(ham_{2n}, sp(2n, \mathbb{R}))$ で、これは Gelfand-Kalinin-Fuks が考えたものです。特に $n = 1$ のときに computer で計算して, exotic class, Gelfand-Kalinin-Fuks-class, さらに目時さんが formal なレベルで発見して Metoki-class, それらを幾何学的に実現する foliation があるか、それが大問題でした。これが前回やった 3 回目の内容です。

問題としてはまず $n = 1$ のときに $H_c^*(ham_2, sp(2, \mathbb{R}))$ が無限次元かというのが大問題であって、具体的には weight が 100 くらいまで、オイラー数だけですが、Perchik が計算しました。今なら 500 くらいまでは出来るでしょうか、やってはいませんが。具体的には Gelfand-Kalinin-Fuks と Metoki が見つかっていて、それらを幾何学的に実現する foliation があるか、前回紹介した Kotschick さんの仕事や三上さんの仕事で、Gelfand-Kalinin-Fuks-class と Metoki-class は $H_c^{*+2}(ham_2, sp(2, \mathbb{R}))$ にあるのですが、 $H_c^*(ham_2^0, sp(2, \mathbb{R}))$ にそれぞれある unique に定まる元があって、そこから来るという事を説明しました。そうすると少し易しい問題は、対応する leaf cohomology を実現する foliation があるか、というのが元々のよりは少しは挑戦し易い問題になります。これが前回の復習です。

ここから今日に入ります。まず $H_c^*(ham_{2n}^0, sp(2n, \mathbb{R}))$, without constant term の relative ですから、まず表現論を使って $H_c^*(ham_{2n}^0, sp(2n, \mathbb{R})) \cong H_c^*(ham_{2n}^1)^{Sp}$ となります。relative ではなく、こうなります。単に Sp と書いたら $Sp(2g; \mathbb{R})$. Sp 上の module で Sp -不変 part を取ると同型になります。これは spectral sequence を使うとわかります。そんなに難しくはありません。ここまで来ると graph homology が現れます。Kontsevich の commutative graph (co)homology です。

これの一つの役割は、transversely symplectic foliation の leaf cohomology としての特性類です。もう一つは、3 次元多様体の finite type invariants です。関連して knot の Vassiliev 不変量, Kontsevich 積分ですね。それを一般化した大槻さんの homology 3-sphere の不変量, LMO 不変量, そして quantum invariant が出てきます。こういう二本柱です。3 を超える次元については、まだほとんど知られていなくて、渡辺忠之さんが球面

の場合に得た結果くらいですが,

$$H^*(B\text{Diff}M^{\text{odd}}; \mathbb{Q}), H^*(B\text{Diff}M^{\text{odd}}; \mathbb{R})$$

奇数次元多様体を fiber とする fiber bundle の特性類, こういうものに役割がある. graph homology はこういう大きな意味が出てきます. この計算は重要です. いろいろな人が目指していますが, 具体的な仕事をしている人は余りいません. ただ, さっき言ったように, Willwacher-Živković たちは最近びっくりする結果を出しました. ただし方法は全く違って, 彼らは graph の数え上げをしています. ある意味で正当的な方法です. 我々は表現論を使います. それぞれメリット, デメリットがあつて, 方法は全く違うわけです. 我々は先をこされたのですが, 幸いな事に方法は全く違うのに, 答えは全く同じです. もちろん, 数学ですから, 全く同じでないと困ります. でも, そこは非常にうれしかったです. そしてその根底にあるのは Kontsevich の idea です. 定義は symplectic 幾何の枠組みでやるけれど, その計算は graph でやる. symplectic を全部除いて graph だけで書いたのが graph homology です. 組合せ的な理論, そういう風になります. Kontsevich もどこまで偉大なのか, とやればやる程思います.

(1) Kontsevich

notation は c_g , foliation だから今まで n と書いていましたが, これからは g と書きます. ものとしては全く同じで, $\mathbb{Q}$ 上で考える graded Lie algebra で

$$c_g = \bigoplus_{k \geq 0} c_g(k)$$

g と書いたら曲面の種数です. これは graded Lie algebra で, 直和である事の degree k part を $c_g(k)$ と書きます. $c_g(0)$ から出発して c_g の degree k -part は何かというと

$$c_g(k) = S^{k+2} H_{\mathbb{Q}}.$$

$H_{\mathbb{Q}}$ の $k+2$ 階の symmetric power です. 全部 $\mathbb{Q}$ 上でやりますので $H_{\mathbb{Q}}$. 見方を変えると, $x_1, \dots, x_g, y_1, \dots, y_g$ に関する次数が $k+2$ の homogeneous な多項式全体, そういう Sp -module です. この ideal を考えるのが大事なのですが,

$$c_g^+ = \bigoplus_{k \geq 1} c_g(k)$$

これは単に $k \geq 1$ であつて degree 0 の所を除きます. これが定義です. そうすると

$$0 \rightarrow c_g^+ \rightarrow c_g \rightarrow c_g(0) \rightarrow 0$$

ここ c_g から degree 0, $c_g(0)$ に落とす, これは Lie 代数の homomorphism です. これは定義で $S^2 H_{\mathbb{Q}}$, 2 次の symmetric part, これはよく知られているように, これが base にある linear part $sp(2g; \mathbb{Q})$ です. この

$$c_g \rightarrow c_g(0)$$

は Lie 代数の全射であつて, これは split する. これは Lie subalgebra でもあります. 元々は quotient で, それの kernel が c_g^+ で, これは ideal であつて c_g, c_g^+ に tensor $\mathbb{R}$ して完備化したものが, ham_{2g}^0, ham_{2g}^1 です.

$$0 \rightarrow c_g^+ \rightarrow c_g \rightarrow c_g(0) = S^2 H_{\mathbb{Q}} = sp(2g; \mathbb{Q}) \rightarrow 0$$

これは Lie 代数といったのですが、括弧積は

$$\begin{array}{ccc} c_g(k) \otimes c_g(l) & \xrightarrow{[\cdot, \cdot]} & c_g(k+l) \\ \parallel \downarrow & & \parallel \downarrow \\ S^{k+2}H_{\mathbb{Q}} \otimes S^{l+2}H_{\mathbb{Q}} & \xrightarrow{\{\cdot, \cdot\}} & S^{k+l+2}H_{\mathbb{Q}} \end{array}$$

となります。 $S^{k+2}H_{\mathbb{Q}} \otimes S^{l+2}H_{\mathbb{Q}} \rightarrow S^{k+l+2}H_{\mathbb{Q}}$ 、これは多項式ですが、 $k+2$ 次の多項式と $l+2$ 次の多項式だとするとこれは Poisson bracket, symplectic の場合の普通の Poisson 積になる。定義は前回やったので省略しますが、これが foliation と関係します。これは関数と思うと普通の symplectic の場合の Poisson 積になります。これを微分して vector 場と思うと、通常の vector 場の bracket になります。これを計算するという訳です。

graph homology, Lie 代数には homology が定義されます。前回やりました。 g を無限大に飛ばします。 stable homology, これは定義で

$$H_*(c_{\infty}) = \lim_{g \rightarrow +\infty} H_*(c_g).$$

homology は direct limit と相性がよいのです。これが Kontsevich の commutative graph homology というもので、これを計算しなさいという事が Kontsevich 自身の論文の中に書いてあります。いつも壁にぶつかったときはこれを見るようにしていますが、論文の中に書いてあるのは、It is a challenging problem to compute... と書いてあります。これは非常に計算は難しい。Willwacher たちは我々より先の計算をしましたが、但し後で言うように我々は内部構造を研究しています。また、homology はほとんど分かっていません。何を計算したかという、Euler 数を計算しています。Euler 数の計算は boundary を計算しなくてよいので簡単なんです。これは Euler-Poincaré の topology の一番 basic な idea です。Euler 数は、それを計算しました。Euler 数を計算すると homology 類の存在がわかります。しかし具体的な homology はほとんどわかっていません。graph homology の dual を取って commutative graph cohomology と pairing にするのが topology の手段。これは cohomology ですからやや注意が必要です。projective limit になって

$$H_c^*(c_{\infty}) = \varprojlim_g H_c^*(c_g)$$

これは continuous を付けて、continuous cohomology であって、この二つを計算して、continuous を付けたので、答えとしてはこれは単に dual で graded vector space, 同じものと言えば同じものですが、両方計算して攻めながら pairing を取る、これが戦略です。計算は多少違う。両方必要です。ただ Poincaré duality があるので本質的に同じです。

これを具体的にどうやって計算するか。その戦略はなにか。若い人が手で計算しようと思ったら出来るようにやります。そうすると chain complex は何か。その前に graph homology $H_*(c_{\infty})$ がどうなるか、 c_g^+ の split extension, さっきの split extension,

$$0 \rightarrow c_g^+ \rightarrow c_g \rightarrow c_g(0) \rightarrow 0$$

この extension から定まる spectral sequence が degenerate するという事があります。これが Lie 代数の cohomology に関する古典的な事からできます。

$$H_*(c_{\infty}) \cong H_*(sp(2\infty; \mathbb{Q})) \otimes H_*(c_{\infty}^+)^{Sp}$$

これに同型になる。退化するので、spectral sequence の議論から、古典的な結果からこうなる。この cohomology を知りたいのです。

sp の stable homology はよく知られていて、次元が mod 4 で 3 の球面の直積の homology です。古典的によく知られた部分、

$$\begin{aligned} H_*(sp(2\infty; \mathbb{Q})) &= H_*(S^3 \times S^7 \times S^{11} \times \cdots) \\ &= E(\gamma^3, \gamma^7, \gamma^{11}, \cdots) \end{aligned}$$

外積代数で degree が 3, 7, 11, ... と 1 つずつ生成元があるものになる。問題は、 $H_*(c_\infty^+)^{Sp}$ が何か、問題といつか大問題です。これを計算しなさい。それからもう一つ古典的に、 K 理論では c_∞ の代わりに $BGL(n; \mathbb{R})$ とか $BGL(n; \mathbb{C})$ などの stable homology をやります。そうするとこれらは Hopf 代数になります。それは stabilization という事をやると、例えば GL を考えるとわかります。 $GL(k), GL(l)$ -bundle があると、bundle の Whiteny sum とか tensors 積とかの演算があります。bundle の直和に対応して、 $GL(k) \times GL(l)$ から $GL(k+l)$ に準同型があります。そういうものが誘導する分類空間上の写像は k, l を無限大に飛ばしていくと、可換な Hopf 代数の構造を定義します。そうすると Milnor-Moore の知られた定理から可換な Hopf 代数は多項式代数と外積代数の tensor 積になる。同様に $H_*(c_\infty)$ は可換な Hopf algebra になり、多項式代数と外積代数の tensor 積の形: $P(\cdots) \otimes E(\cdots)$ になります。 $H_*(sp)$ はすべて外積代数の部分に行きますが、それ以外の commutative graph homology の生成元はどうなるか、primitive element と呼ばれますが、 $H_*(c_\infty^+)^{Sp}$ にどういう生成元が出てくるか、という問題になります。graph の場合でいうと primitive element は連結な graph に対応しています。これらは一般論で lie version, associative version でも同じです。

それでは chain complex はどうなるか。Chevalley-Eilenberg, 定義で k 次の chain は k 階の外積, Lie 代数の homology は k 階の外積。 g は後で無限大に飛ばします。そうするとどうなるかというところ

$$\begin{aligned} C_k &= \Lambda^k c_g^+ \\ &= \bigoplus_{i_1 + \cdots + i_l = k} (\Lambda^{i_1} S^3 H_Q \otimes \Lambda^{i_2} S^4 H_Q \otimes \cdots \otimes \Lambda^{i_l} S^{l+2} H_Q)^{Sp} \end{aligned}$$

これが chain group. 表現論的にやっているのですが、こういう多項式, symmetric power の、ちなみに Sp -表現として既約という事が知られていますが、その外積を計算しなくてはいけません。その tensor 積をしてさらに Sp -invariant part を取る。気の遠くなるような作業です。任意の k について書くとよくわからなくなるので、 k が 1 くらいからやってみます。graph がどうやって出てくるかがわかるようになります。これは無限和です。無限和になるのですが、weight w というもう一つの grading を入れると有限次元になる。これは Gelfand-Kalinin-Fuks 以来知られている事です。 $S^3 H_Q$ は weight 1, $S^4 H_Q$ は weight 2, ..., $S^{l+2} H_Q$ は weight l です。逆に言うと weight l の part は $l+2$ 次の symmetric power です。そうすると何がわかるかというと、weight を w と書きますが、 i_1 は weight 1, i_2 は weight 2, ... で

$$w = i_1 + 2i_2 + \cdots + li_l.$$

これが各 chain の weight です。boundary operator ∂ が weight を保つ事がわかります。boundary が weight を保つので chain complex は直和であって

$$\begin{aligned} C_k &= \bigoplus_w C_k^w \\ C_k &\xrightarrow{\partial} C_{k-1} \xrightarrow{\partial} \cdots \xrightarrow{\partial} C_1 \end{aligned}$$

大事な事は w -part の所は weight の条件が入るので、直和分解

$$C_k = \bigoplus_w C_k^w$$

でき、weight w の所は有限 chain complex になります.

$$C^w : 0 \xrightarrow{\partial} C_w^w \xrightarrow{\partial} C_{w-1}^w \rightarrow \cdots \xrightarrow{\partial} C_1^w \rightarrow 0$$

top が C_w^w から始まって、 $C_{w-1}^w, \dots$, となって、 C_k^w の定義は何かというと、

$$C_k^w = \bigoplus_{\substack{i_1 + \cdots + i_w = k, \\ i_1 + 2i_2 + \cdots + wi_w = w}} (\Lambda^{i_1} S^3 H_{\mathbb{Q}} \otimes \cdots \otimes \Lambda^{i_w+2} S^{w+2} H_{\mathbb{Q}})^{Sp}$$

これの tensor 積の Sp -不変 part のこういう直和です. C_0^w はゼロ、これは relative homology であって、それを c_g^+ の Sp -invariant part をとっていますから、constant part はない. constant part は全体で $\mathbb{Q}$ ですから、これを定義だと思えば良いですね、大事な事は有限 chain complex が得られます. これが weight w part の有限 chain complex であって、 $w = 0$ の homology の部分は知られているので、取ってしまって

$$H_*(c_{\infty}^+)^{Sp} = \bigoplus_{w=1}^{\infty} H_*(c_{\infty}^+)_w^{Sp}$$

こうなります. そして $H_*(c_{\infty}^+)_w^{Sp}$ は有限次元. 有限次元 chain complex の homology ですから有限次元. この辺りは一般論です. 具体的に進めていくとどう graph が出てくるかがわかります. 有限次元 complex の homology ですから、これは有限次元. 我々はこの Euler 数を計算するとき、 $H_*(c_{\infty}^+)^{Sp}$ だと無限次元なので困ってしまいますが、weight を考えると有限次元ですから、weight と次元、bigrading にすると Euler 数がちゃんと定義できます. そして weight w の Euler 数を考えると、homology の存在がわかります. graph homology と Sp の表現論の対応、これは Kontsevich, 元々は Weyl に遡ります. genus 1 の $SL(2; \mathbb{Q}), SL(2; \mathbb{R})$ の表現を数え上げるのに使っています.

具体的にやっていきましょう.

$w = 1$:

まず weight 1 の場合、 $w = 1$ ですから C_1^1 , 1 個しかありません.

$$\begin{aligned} C_1^1 &= (\Lambda^1 S^3 H_{\mathbb{Q}})^{Sp} \\ &= (S^3 H_{\mathbb{Q}})^{Sp} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$S^3 H_{\mathbb{Q}}$, これは既約です. Young 図形で書くと箱が横に 3 つ. この場合 symmetric part は GL でも Sp でも既約です. weight 1 part はない. 不変量がないので、だからゼロ. weight 1 はない.

$w = 2$:

次は weight 2 です. weight 4 ぐらいまでいくと段々わかってきます.

$$0 \rightarrow C_2^2 \rightarrow C_1^2 \rightarrow 0$$

C_2^2 から始まります.

$$C_2^2 = (\Lambda^2 S^3 H_{\mathbb{Q}})^{Sp}, C_1^2 = (\Lambda^1 S^4 H_{\mathbb{Q}})^{Sp}.$$

$S^3 H_{\mathbb{Q}}$ の 2 階の外積、 S^3 がもしないと、 $\Lambda^2 H_{\mathbb{Q}}$ でそこには symplectic form というものがあります. 表現論をやると段々わかってきますが、奇数次の symmetric power の外積、そこには 1 個ずつ、いわば Jacobi 多様体の

symplectic form のようなもの、1 次元だけ Sp -不変なものがあります。

$$\begin{aligned} C_2^2 &= (\Lambda^2 S^3 H_{\mathbb{Q}})^{Sp} \\ &\cong \mathbb{Q} \\ C_1^2 &= (\Lambda^1 S^4 H_{\mathbb{Q}})^{Sp} \\ &= (S^4 H_{\mathbb{Q}})^{Sp} \\ &= 0 \end{aligned}$$

従って weight 2 の homology が計算できて、

$$H_*(c_g^+)_2^{Sp} = \begin{cases} \mathbb{Q} & * = 2 \\ 0 & \text{others} \end{cases}$$

となります。これを、graph で表すというのを先取りしますと、3 階の外積ですから、homology が 3 個並んでいるようなものです。 Sp -module の Sp -不変なものは、Weyl に戻りまして全部 intersection number から来る。 tensor が、曲面の homology が 6 個ある。それが 3 個、3 個に分かれている。

図 4-a: trivalent な頂点の 2 個の図

Sp -不変なものを取るというのは pairing しなさいという事です。ここでまず θ -graph が出てきます。

図 4-b: θ -graph の図

もう 1 つあるのは、鉄アレイですね。これは何と呼ぶのでしょうか。

図 4-c: 鉄アレイ-graph の図

これは自分自身で contract します。しかしこれは既約ですからゼロ、これはない。 graph で表すときは θ -graph が生成元です。これが Kontsevich の graph homology の生成元です。 symplectic の表現論を全部忘れて、 commutative graph homology は全部 graph で書ける。

$w = 3$: 段々ここに何が表れるかが分かってきます。 weight 3 でやってみましょう。

これは weight 3 の partition, (1,1,1), (1,2) と (3). (1,1,1) に対応するのは 3 次の chain で、 $(\Lambda^3 S^3 H_{\mathbb{Q}})^{Sp}$. 2 つに分ける partition (1,2) に対応するのが $(S^3 H_{\mathbb{Q}} \otimes S^4 H_{\mathbb{Q}})^{Sp}$. 1 が $S^3 H_{\mathbb{Q}}$, 2 が $S^4 H_{\mathbb{Q}}$. そして C_1^3 が (3) という partition で $(S^5 H_{\mathbb{Q}})^{Sp}$. これ 1 個だけ。 Sp の表現論を勉強すると、さっきの Weyl の理論でもよいですが、 intersection number から全て出てくるという事を考えると全部ゼロ。 Sp -不変なものはない。

$$\begin{aligned} C_3^3 &= (\Lambda^3 S^3 H_{\mathbb{Q}})^{Sp} \\ &= 0 \\ C_2^3 &= (S^3 H_{\mathbb{Q}} \otimes S^4 H_{\mathbb{Q}})^{Sp} \\ &= 0 \\ C_1^3 &= (S^5 H_{\mathbb{Q}})^{Sp} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Sp の表現論、一般に weight が odd ならば、 C_*^w は自明。 Sp 不変なものは何もない。これは基本的に Weyl です。 曲面の homology 群上に Sp 不変なものがあるかないかは intersection で出てくる。 それを使うと weight が奇数の所には Sp 不変なものはない。

$w = 4$: weight 4 だと 4 の partition. weight 4 の所をやると段々わかってきます. weight w のところの chain complex に現れるのは w の partition の分だけ. Chern 数をやるときに n の partition の分だけ出てきます. それと同じです.

まずは 4 の partition としては (1,1,1,1).

$$C_4^4 = (\Lambda^4 S^3 H_{\mathbb{Q}})^{Sp} = \mathbb{Q}^3$$

逆井さん, 鈴木さんたちとやっているのも, まずは Mathematica に入っている partition の数をみます. 最初は少ないですが, weight が 18 くらいになってくると何百となってきます. それは, 一方で表現論的には character は全部分かっているんで式はある. お金と時間に制約がなければいくらでも計算できます. しかし幸か不幸かお金だけではなく, もっと大事な時間が足りません. この辺は小さいから簡単には見えますが, weight 20 だるとんでもない数になります. 各項の次元を決定するだけでも表現論の Adams operation とか駆使しなくてはできません.

$$\begin{aligned} C_3^4 &= (\Lambda^2 S^3 H_{\mathbb{Q}} \otimes S^4 H_{\mathbb{Q}})^{Sp} \\ &= \mathbb{Q} \end{aligned}$$

これは (1,1,2) という partition.

次は (1,3) と (2,2) という partition. 4 の partition で 2 個に分けるものは 2 つ. これに対応して直和が出てきます. (1,3) が $S^3 H_{\mathbb{Q}} \otimes S^5 H_{\mathbb{Q}}$, (2,2) が $\Lambda^2 S^4 H_{\mathbb{Q}}$,

$$\begin{aligned} C_2^4 &= (S^3 H_{\mathbb{Q}} \otimes S^5 H_{\mathbb{Q}})^{Sp} \oplus (\Lambda^2 S^4 H_{\mathbb{Q}})^{Sp} \\ &= 0 \end{aligned}$$

最後に (4) という partition です.

$$\begin{aligned} C_1^4 &= (S^6 H_{\mathbb{Q}})^{Sp} \\ &= 0 \end{aligned}$$

ここまでくると weight w が w の partition の個数の分だけあって, 丁度 Chern polynomial のように partition に対応して, Sp -不変 part が出てきます. これくらいだと手計算で出来ます. これは表現論を使って,

$$C_4^4 = \mathbb{Q}^3, C_3^4 = \mathbb{Q}$$

で, 後はゼロ. そうすると今度は boundary operator の計算です. $\partial : C_4^4 \rightarrow C_3^4$ を計算しないといけません.

まず $S^3 H$ の元が 4 個あってその外積 $\xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \xi_3 \wedge \xi_4$, Lie 代数の boundary $\partial(\xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \xi_3 \wedge \xi_4)$ ですが, それは Chevalley-Eilenberg で bracket を使って表されます. bracket は 2 個元を取って, poisson bracket で具体的に計算できます. $\Lambda^2 S^3 H \rightarrow S^4 H$ は全射ですから, 従って

$$\partial : C_4^4 \rightarrow C_3^4$$

は全射になります. そうすると homology が分かります.

$$H_*(c_{\infty}^+)_4^{Sp} = \begin{cases} \mathbb{Q}^2 & * = 4 \\ 0 & \text{others} \end{cases}$$

これを段々と続けていって, さっきから言っている commutative な場合, 各成分が全部既約な表現なのである意味一番易しいのですが weight 20 まで. これを全て graph の方で書いたのが graph homology で, さっき

言った Willwacher-Živković は graph の方で graph の数え上げをして、表現論は一切出てきません。generating function, それを捕まえて weight 60 までやりました。これを全部 graph の言葉にしたのが、Kontsevich の graph homology です。graph がどう出てくるか、表現論との絡みで graph による記述, Sp -不変 part の記述です。

まず top homology を知りたいと思ったら、weight が偶数, weight $2n$,

$$C_{2n}^{2n} = \Lambda^{2n} S^3 H_{\mathbb{Q}}$$

これは partition で言うと $(1, 1, \dots, 1)$. top の所は trivalent graph で 3 次の tensor が $2n$ 個あるわけですから、

図 4-d: $2n$ 個の trivalent vertices の図

各頂点から homology が 3 本出ている。これを contract するやり方ですから、対応する頂点を結んで trivalent graph が出てきます。逆に trivalent graph があると、 Sp -不変 part が出てきます。ordering とか関係ない事がわかります。trivalent graph で with $2n$ vertices がある毎にこれが記述できる。

次は

$$C_{2n-1}^{2n} = (\Lambda^{2n-3} S^3 H_{\mathbb{Q}} \otimes S^4 H_{\mathbb{Q}})^{Sp}$$

こちらはどうかということ、下は $2n-2$ 個 trivalent の頂点があつて 1 個だけ valency が 4 の頂点がある。これを contract する。

図 4-e: $2n-2$ 個の trivalent vertices と valency=4 の頂点の図

以下 partition ごとに valency がいろいろと出てきます。graph があつて、Kontsevich は c_{∞} の homology と trivalent 以上の graph の homology を定義しました。 Sp -module の homology と graph homology. graph に orientation が定まり、oriented graph の生成元から、boundary operator, poisson bracket から誘導されるものを graphical にした。これは全部 Kontsevich です。こういうのをやって symplectic を全部忘れて、これを commutative graph homology と名前を付けました。これを計算するというのが challenging problem. 分かっているのは Euler 数で、先ほども言いましたが、本当に分かっている homology, それは数える程しかありません。それを数え上げるというのは、foliation の特性類だけではなく、3 次元多様体の有限型不変量、そして奇数次元多様体の bundle の特性類に寄与するだろうというのが、Kontsevich の perspective. graph homology の定義はいろいろな人が書いていますし、Kontsevich 自身も書いていますので、詳細は今日はやらない事にします。ただ top のところだけ表現論との関係が完全に付きますので、そこだけ $(\Lambda^{2n} S^3 H_{\mathbb{Q}})^{Sp}$ について説明します。我々の計算で言うと top の所、これが一番難しい。module としては一番簡単ですが、weight 1 の所の解析ですから一番簡単に見えますが幾何学的には一番難しい。Adams operation などを動員してやります。

時間の都合で、突然ですが、有限型不変量に出てくる代数, $\mathcal{A}(0), \mathcal{A}(S^1)$, これとの関係をちょっと言います。これらの定義から言います。定義は、この notation はそもそも誰かは私はわかりません。これは元々は Vassiliev の 1990 年頃の仕事からです。それを受けて 1992,3 年に Kontsevich 積分というものが導入されました。その各項から Vassiliev の意味の finite type invariant が出てきます。これが Kontsevich の Fields 賞の授章業績の一つです。もう一つは Witten 予想の解決です。 $\mathcal{A}(0)$, こちらは 3 次元多様体の方です。こちらは大槻さん、1996 年頃 homology 球面全体の不変量を定義し、homology 球面全体の生成する空間に filtration を入れました。そして 1998 年有名な LMO 不変量、そして 3 次元多様体の量子不変量。そういうものがあつて、これと graph homology が密接に関係して、というか top の homology とほとんど同じ。定義は何かということ、

流儀はいろいろありますが、 $\mathbb{Q}$ 上の多項式代数であって

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\emptyset) &= \mathbb{Q}[\text{vertex oriented, connected trivalent graphs}]/(AS)(IHX) \\ &= \mathbb{Q}[\text{connected trivalent graphs without an orientation reversing isomorphism}]/(IHX)\end{aligned}$$

modulo AS relation, IHX relation, とします。これが定義です。 $\emptyset$ は何かというと、ここには 1 次元多様体が入るのですが、それが空集合。 $\mathcal{A}(S^1)$ の方は S^1 上に chord を付けるものです。vertex oriented とは何かというと、trivalent ですから、平面への local な embedding を定義する。AS relation というのは、orientation は各頂点 2 種類あるのですが、ひっくり返すとゼロ。これが AS relation.

図 4-f: AS relation の図

ついでに IHX を書きますと、

図 4-g: IHX relation の図

ちなみにこれは Jacobi identity に対応します。これが定義ですね。連結な trivalent graph で vertex oriented, 但し mod AS relation, IHX relation というわけです。Kontsevich の graph homology は vertex oriented にしないで、commutative の場合は全体の orientation を定義して、Kontsevich 流に書くとなると、without orientation reverse isomorphism. graph の orientation は各点で 2 通りあります。orientation reverse isomorphism は、orientation を何か 1 つ固定したとき、それを逆にする isomorphism があるか。これが AS relation に対応します。こういうものが出てきて、これに沿って Gauss の linking number を大幅に一般化した Kontsevich 積分が出てくるわけです。それを大槻さんは 3 次元多様体の不変量へ拡張し、そして葉廣さんの clasper surgery, どこで surgery するかで graph が出てきます。

これは今日の後半でやります。と言っても後 20 分ですが、top だけやります。ここで commutative でやっています、lie や associative は今日はやらないのですが、比較のため少し述べます。これは symmetric product ですが、3 階の外積にしたらどうなるか、 $(\Lambda^2 \Lambda^3 H)^{Sp}$, これは非常に面白い。これは何に出てくるかということ Riemann 面 (1 点付き) の moduli の tautological algebra $\mathcal{R}^*(\mathbb{M}_{g,*})$ と呼ばれるもので、1990 年代に河澄さんと一連の仕事をしました。そこに出て来たものです。symmetric power と違うのは、 $\Lambda^3 H$ は既約にならない。 $\Lambda^3 H \supset \omega_0 \wedge H$ が submodule として入るので、それで割ると既約になります。 $(\Lambda^2(\Lambda^3 H / \omega_0 \wedge H))^{Sp}$ でこれは $\mathcal{R}^*(\mathbb{M}_g)$ が対応していて、graph homology では Lie graph homology というものが対応しています。これも Kontsevich です。これは top homology ですが、自由群の外部自己同型群の cohomology $H^*(\text{Out} F_n; \mathbb{Q})$ と 1 対 1 というのが、Kontsevich のびつくり定理 (lie version) です。Kontsevich の graph homology の立場からすると自由群の外部自己同型群と関連しますが、一方でこれは Johnson 準同型の丁度 target です。第 1 Johnson 準同型の target で、その生成する lowest weight homology と写像類群の cohomology が対応していて、この差というもの面白い。

それはともかく top homology と graph homology との関係はこの 3 つでやります。一番難しいのは commutative. ある意味一番易しいのは lie. (ただし、あくまで今考えている観点からだけのもので、全体としてはこれが一番難しいものだと思いますが) graph 論的には難しい、 $(\Lambda^* S^3 H_{\mathbb{Q}})^{Sp}$ が何次元になるかというのが大問題です。

1. $(\Lambda^* \Lambda^3 H)^{Sp}$
2. $(\Lambda^*(\Lambda^3 H / \omega_0 \wedge H))^{Sp}$
3. $(\Lambda^* S^3 H_{\mathbb{Q}})^{Sp}$

さっきのように trivalent graph であって、3 階の外積、同じ trivalent graph が $(\Lambda^* \Lambda^3 H)^{Sp}$ 、ここでも使われています。上の 2 つについては 1990 年代、graph を使って同型対応を示しました。これは基本的に Weyl の表現論を使って

$$(\Lambda^* \Lambda^3 H)^{Sp} \cong \mathbb{Q}[\text{connected trivalent graphs}]$$

一番簡単、連結な trivalent graph の生成する多項式代数と同型です。

次のやつがどうなるかというと、

$$(\Lambda^*(\Lambda^3 H/\omega_0 \wedge H))^{Sp} \cong \mathbb{Q}[\text{connected trivalent graphs without loops}]$$

これらは graded algebra になります。これらは易しいというわけでは全くありませんが、数列を調べるサイトに、次数が小さい方の次元を計算して入れてみるとヒットします。二つとも名前がついている数列です。ところが commutative は、

$$(\Lambda^* S^3 H_{\mathbb{Q}})^{Sp} \cong \mathbb{Q}[\text{connected trivalent graphs without orientation reversing isomorphism}]$$

と同型と思われまふ。ここで orientation reverse isomorphism というものですが、そこからどうなるか、まず without loops が出ます。なぜならば、loop が 1 個でもあると、そこで反転する事ができます。orientation reverse isomorphism ができます。だから次元は小さくなります。

図 4-h:loop の図

次元を計算していくと、頂点の数が 2, 4, 6 くらいまで書きます。まず連結な trivalent graph を考えましよう。loop があるものはやりません。

- 頂点数=2 図 4-i:θ-graph の図
- 頂点数=4 図 4-j:2 つの graph の図
- 頂点数=6 図 4-k:6 つの graph の図

頂点数 2 は θ-curve. 頂点数 6 になると新しいものがシリーズで出てきます。

頂点の数が増えれば増える程 graph の数は、べらぼうに増えていく事がわかると思います。そうすると次元が計算できます。 $(\Lambda^2 \Lambda^3 H_{\mathbb{Q}})^{Sp}$ の次元、 $(\Lambda^2(\Lambda^3 H_{\mathbb{Q}}/\omega_0 \wedge H_{\mathbb{Q}}))^{Sp}$ の次元、 $(\Lambda^2 S^3 H_{\mathbb{Q}})^{Sp}$ の次元、です。それぞれ 2, 4, 6 くらいまで計算しようとする graph を見るとわかります。

頂点数	2	4	6	8	10	12	...
$(\Lambda^{2k} \Lambda^3 H_{\mathbb{Q}})^{Sp}$	2	8	31	140	722	4439	...
$(\Lambda^{2k}(\Lambda^3 H_{\mathbb{Q}}/\omega_0 \wedge H))^{Sp}$	1	3	9	32	135	709	...
$(\Lambda^{2k} S^3 H_{\mathbb{Q}})^{Sp}$	1	3	7	24	86	426	...

$(\Lambda^2 \Lambda^3 H)^{Sp}$ で頂点数 2 の所は、θ-graph に加えて鉄アレイがあるから 2 次元。

$(\Lambda^2(\Lambda^3 H/\omega_0 \wedge H))^{Sp}$ 、ここは 1 次元。loop があるかないかです。

$(\Lambda^2 S^3 H_{\mathbb{Q}})^{Sp}$ 、ここはどうなるかというと、without orientation reverse isomorphism なので、θ-graph だけで 1 次元。

頂点数 4 の所です。連結ですと、graph は 2 個ですが、これも多項式代数ですから θ を disjoint に 2 つ並べたものも入ってきます。だから $(\Lambda^4(\Lambda^3 H/\omega_0 \wedge H))^{Sp}$ は 3 次元。orientation reverse iso がなさそうだというの

は直感的には明らかですし、これぐらいなら具体的に全部数え上げれば自己同型は計算できます。 $(\Lambda^4 S^3 H_Q)^{Sp}$ も 3 次元あります。

6 頂点の trivalent graph で without loop が何個あるか。新しい元が 6 個あって、ですから $6+2+1=9$ で 9 次元。それで今度、 $(\Lambda^6 S^3 H_Q)^{Sp}$ にすると、今の数え上げの中で orientation reverse iso を持つものを取り除く。 graph 理論の人にとって是非常に難しい。今の数え上げの中である自己同型（今は orientation reverse isomorphism ですが）があるかないかを確認してはまずというのは非常に難しい。ちょっと実験をします。 $(\Lambda^6(\Lambda^3 H/\omega_0 \wedge H))^{Sp}$ と $(\Lambda^6 S^3 H_Q)^{Sp}$ 、ここですでに差が出てくるのですが、6 個で orientation reverse iso があるかないか、これは数学科というよりは情報の学科でしょうか。 orientation reverse iso をもつものを見つけるという問題で、答えをいうと、

図 4-1

これが orientation reverse isomorphism がある。書いたらすぐ納得すると思います。 reverse isomorphism が出てきます。2 個出てくるから 7 次元になります。どんどん自由度が上がって、graph としての同型、これは数え上げが、興味と時間のある人は、computer でプログラムを組んでみて下さい。これは難しいんですよね。

我々は表現論を使っています。特別な graph の自己同型があるかないか、それは非常に難しいのです。頂点数が大きくなってくると、特別な自己同型を持たない方が圧倒的で、graph の数え上げは厳密な答えを得るためには必要ですが、asymptotic な動向の決定には必要ないだろう、ということが期待されますが、厳密な証明がある訳ではありません。

さっきの数列のサイトにいれると、 $(\Lambda^* \Lambda^3 H)^{Sp}$ と $(\Lambda^*(\Lambda^3 H/\omega_0 \wedge H))^{Sp}$ 、graph と言っていましたが、graph 論の人は multi-graph と、単体複体にならないので、trivalent multi-graph で、こっちは multi graph without loops。これらの次元は数列のサイトでヒットしますが、 $(\Lambda^{2k} S^3 H)^{Sp}$ はヒットしません。weight 20 まで計算してありますが、その先どうなるか、ちょっと舌足らずになりました。具体的な homology で知られている事を言おうかとおもいましたが、最後にもうちょっとだけで、3 次元多様体の有限型不変量でこの $\mathcal{A}(\emptyset)$ の次元を決定する事は大問題です。大槻さんの 2002 年の GT monograph の問題集でも取り上げられています。ここまで分かっているという事を言うておきます。ちなみにこれは何に依っているかという、Garoufalidis-Nakamura の仕事を使って、我々の論文の中に詳しく書いてあります。これは同型である事の top の homology,

$$\mathcal{A}(\emptyset) \cong \bigoplus_{g=1}^{\infty} H_{2n}(C_*^{2n})$$

さっきの chain complex の homology, 一番最初のやつを全部加えたもの、これが 3 次元多様体の有限型不変量の空間です。これは大槻さんの問題集、これは GT monograph 2002, 大槻さんの HP に行くと update されています。これは多項式代数、生成元の個数を決定する事が重要です。valency, weight の半分ですが、 $k = \frac{1}{2}w$ に関して、知られている所まで書いておきます。

$\mathcal{A}(\emptyset)$ の次元：

$k = \frac{1}{2}w$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
生成元の個数	1	1	1	2	2	3	4	5	6	8	9	?
次元	1	2	3	6	9	16	25	42	65	105	161	?

生成元の個数が分かれば、多項式代数の次元はすぐにわかります。これが 2002 年のものなので、2014 年

に入ってもう 12 年も経っていますが、どうやら、161 の次は未だにわかっていないようです。T. Willwacher and M. Živković, は weight 60 まで計算したから、これが延びたかという Euler 数しか計算していないので、残念ながら top homology については情報は延びません。ここで次の同型が成り立ちます。

Theorem 2.1 (Morita-Sakasai-Suzuki).

$$H_*(c_\infty^+)^{Sp} \cong \mathcal{A}(\emptyset) \otimes \mathcal{E}.$$

あとは繰り返しになりますが、Kontsevich が言っているように graph homology, これ自身が mysterious です。graph 論的には trivalent graph の生成する多項式代数を (AS)(IHX) で割った代数の次元を計算しなさい。E については具体的な計算、構成がありません。全くわかっていませんが、確実に正しいと思われる予想は、E は無限生成という事です。これが有限生成で終わるとは思えない、この Euler 数が、我々の計算したところでは、ずっとマイナスですが、 $\mathcal{A}(\emptyset)$ と E, どっちが強いのか、asymptotic にはどうなるか。実験的に正しいように見えるのかわかりません。3 次元多様体の量子不変量, LMO 不変量が betti 数が上がっていくと、威力がやや減ってくるようですが、homology 球面の場合はどうか。foliation の特性類については, unstable ですが, Gelfand-Kalinn-Fuks と Metoki が E から出てきました。unstable な場合にも意味があるわけです。

ちょっと超過しましたが、あそこら辺りの計算は、大槻さんの論文を見ればわかります。どうも一番最初にやったのは D. Bar-Natan and B. McKay のようです。McKay 対応の McKay とは違う人です。2001 年 Bar-Natan の HP に書いてあります。次にやったのは, Gerlits の博士論文, この人は Vogtmann さんの学生。次が J. Conant, F. Gerlits and K. Vogtmann, これが自明でない事を示してきて, 2012 年 Morita-Sakasai-Suzuki, 2014 年 T. Willwacher and M. Živković, これが知られている結果の全てです。Kontsevich にして challenging problem として具体的に構成することをあげているし、さらにその意味、これは 3 次元多様体にとって意味があるのかどうか。Kontsevich, 彼自身は具体的な計算には興味はなさそうですが、foliation, 3 次元多様体の不変量の双方にとって知りたいのは

$$H_*(c_\infty^+) \cong \mathcal{A}(\emptyset) \otimes \mathcal{E}$$

この homology です。

2.2 homology 3 球面の homology 同境界類のなす群

新シリーズの 5 回目という事で, homology 3 球面の homology 同境界類のなす群, というタイトルでお話します. いきなり中身に入ります.

(1)

$$\Theta_{\mathbb{Z}}^3 = \{\text{homology 3-sphere } W^3\} / H\text{-cobordism } C^\infty(\text{Top})$$

homology 3 球面, $\mathbb{Z}$ は省略する事もあります. closed oriented integral homology 3-sphere, W^3 と書く事にします. その全体を H-cobordism という relation で割ります. smooth category と topological category があります. 何も言わなかったら smooth category, smooth な homology cobordism です.

定義を念のため書きます. 2 つの homology 3-spheres W, W' に対して,

$$W \sim_H W'$$

であるとは, 4 次元 compact oriented C^∞ -manifold M が存在して, M は homology $S^3 \times I$ であり, かつその境界が

$$\partial M^4 = W \cup -W'.$$

こういうときに homology cobordant と言い, W の homology cobordism class を $[W]$ と書きます. 群構造は connected sum, 単位元は $[S^3]$, 逆元は orientation reverse したもの. この群については, 微分 topology で, 前のシリーズで歴史的な事をお話しましたが, ある時期から非常に大事な群である事が認識されています.

後で詳しく言いますが, 2013 年の Manolescu の研究 [85], 大きな breakthrough があって, 謎が 1 つ解けたのですが, まだまだこの群に関しては mysterious, 分からない事も数えきれない程あります.

それで歴史的に少し言います. この群について最初に分かった事は, Rohlin 不変量というものがあって, それが全射準同型

$$\text{Rohlin} : \Theta_{\mathbb{Z}}^3 \rightarrow \mathbb{Z}/2$$

を与えるという事です. homology 球面 W^3 があったとき, 3 次元の cobordism は自明ですから M^4 で $\partial M = W$ となるものは存在します. さらに M は単連結, そして spin に取れます. そうすると M の signature は 8 で割れて, その mod 2 を取ります. これが M の取り方に依らず, W の Rohlin 不変量 $\mu(W)$ です. これは homology cobordism 不変であり $\Theta_{\mathbb{Z}}^3$ からの全射準同型を与えます. 具体的に $\mu = 1$ になるものは Poincaré homology 球面があります.

ある時期, これは同型ではないかと, 予想というより淡い希望のようなものがありました. しかし, そうではないという事がわかりました. Casson 不変量もそういう中で出てきたものです. それは一番 drastic な可能性: homotopy 球面で Poincaré 予想の反例があるかという問題に否定的な解決を与えたのですが, 最近の Thurston の program の完成, 最終的には Perelman の仕事により, 結局は homotopy 3 球面は S^3 である事になりました.

その次の breakthrough は 1990 年 Furuta さん, やや遅れて Fintushel-Stern. 彼らは何を証明したかというところ, gauge 理論を使って $\Theta_{\mathbb{Z}}^3$ は ∞ -rank である事を証明しました. そして淡い期待は消えてしまいました. ∞ -rank です.

それよりも前に問題としては、全射 $\Theta_{\mathbb{Z}}^3 \rightarrow \mathbb{Z}/2$ がある訳ですが、これが split するかというものがありました。Rohlin が split するという事は $\Theta_{\mathbb{Z}}^3$ に order 2 の元があるという事になります。この split するための必要十分条件が、任意の compact topological manifold が三角形分割可能、但し closed の場合は 5 次元以上、境界のある場合は 6 次元以上、というのが、松本堯生さん、Galewski-Stern の、ほとんど同時の仕事です。松本堯生さんの方は Siebenmann の所での Doctor 論文、位相多様体の三角形分割可能性については、Kirby-Siebenmann の 1969 年の仕事が triangulation の obstruction theory を確立しました。ただし、これは piecewise linear な triangulability に関する障害理論だったのです。これで残されたのは combinatorial な条件を除いての triangulability. 結局は位相多様体は単体複体になるのではないかという問題でした。微分 topology の最後まで残った大問題です。

これが決定的に解かれたのが 2013 年 Manolescu, そして答えは No, Rohlin は split しない。ただ一番理解しやすい形では Rohlin 不変量が非自明な 2-torsion はない事がわかったのです。しかし一般の 2-torsion も含めて、torsion がないかどうかまではわかりません。これは mystery のままです。その corollary として、non-triangulable topological manifolds は豊富にある、全ての次元で存在する。さらに、acyclic な多様体で non-triangulable なものも豊富にあることが、Manolescu の仕事の系として、他の人によりすぐに示されました。non triangulable な多様体があれば、それらにいろいろな性質を持たせることができるということは、いろいろな人が仕事をしていました。

最初の問題は大きな breakthrough があって解決して、これらは分かったけれど、それでもこの群 $\Theta_{\mathbb{Z}}^3$ はほとんどわからないと言ってもよい。具体的には全射準同型 $\Theta_{\mathbb{Z}}^3 \rightarrow \mathbb{Z}$ は存在するか。これは大問題です。naive に考えると ∞ -rank ですから無限にある事が期待されます。だけど全然分からない。 $\mathbb{Q}$ みたいになっていたら存在しないわけです。今の所一つだけ Froyshov が $SO(3)$ -gauge 理論を使って全射を構成しました。 $\mathbb{Z}$ は free ですから全射があれば split し、direct summand として $\mathbb{Z}$ を持っています。

一方で最近の強力な Ozsváth-Szabó の理論があって、corollary としてこの人たちも $\mathbb{Z}$ への全射を作りました。ただこの 2 つは同じではないかと予想されています。従って、2 つは独立な準同型である可能性はありますが、確定しているのは 1 個だけです。

さてこの群は abel 群で、さらに ∞ -rank が分かっていますから、大問題として次が上げられます。

大問題:

- $\Theta_{\mathbb{Z}}^3$ に torsion element は存在するか。
- $\mathbb{Z}$ への全射は沢山存在するか。
- あるいは逆に divisible element があるか。

こういう問題が何も分かっていません。たとえば最後の問題について naive に考えると、多様体の cobordism ですから、割れるというのは考え難いですが、しかし何もわかっていません。どうやっていいかわかりません。

$\mathbb{Z}$ への全射としては candidate はもう 1 個あって、大分前の仕事ですが Saveliev の不変量 $\nu(W)$, 彼の論文に従ってこう書きます。

$$\nu(W^3) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^8 (-1)^{\frac{i(i+1)}{2}} \text{rank} HF_i(W^3).$$

上記の総和の部分を通常の $+, -, +, -$ に替えると、Taubes の仕事から Casson 不変量の 2 倍が出てくることを使うと、上記の総和の部分は 2 で割れます。ここで最近 Floer homology というと Heegaard Floer, Lagrangian Floer ですが、これは Instanton Floer homology です。もう一度詳しくいうと、符号は Euler 数は $++-$ ですがこの場合は $++-$ です。2 で割れるというのは Taubes の仕事で、mod 2 で Casson 不変量と同じになる。 $++-$ で

やると Casson の 2 倍になるというのが Taubes の仕事です。これは $++-$ ですから mod 2 で同じ。

Saveliev は、 ν は homology cobordism 不変ではないか、つまりそれは全射準同型

$$\Theta_{\mathbb{Z}}^3 \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$$

を与えるのではないかと予想しています。ところで Poincaré homology 球面の値は 1 になります。したがって、もしこれが正しければ Manolescu の結果の極めて分かりやすい別証明となるわけです。ただ homology cobordism 不変かどうかはわかりません。

そしてこれは古典的な微分 topology の手法を使って定義される Neumann-Siebenmann 不変量, 1970 年代の仕事です。gauge 理論を使って, Fukumoto-Furuta-Ue 不変量, これらは homology 球面全体には定義されていません。Seifert homology 球面に対して定義されています。難しいのは hyperbolic な homology 球面で定義されていない。Seifert homology 球面上は一致していて、予想としてはここら辺りがうまくかみ合っただけで $\mathbb{Z}$ へ全射が出来るのではないかと、これが 1 つの可能性です。まだ解決されていません。gauge 理論は強力なわけですが、我々は gauge 理論ではなくて algebraic topology で、しかも無限個、これを作ろうというのが目標です。それを後半でお話します。

これと関係する knot の concordance group $\mathcal{C}$ について Levine の 1969 年, Invent. Math. に出た基本的な仕事があって、それから 40 年以上経ちました。連綿と順調に研究が続いて、最近の大定理, J. Hom のプレプリント [81] が 2013 年 10 月に出了。一言で言うと、 $\mathcal{C}$ も able 群で、極最近まで direct summand は $\mathbb{Z}$ が 3 個まででしたが、 $\mathbb{Z}^\infty$ を direct summand として含む事を証明しました。 $\mathcal{C}$ と比較して $\Theta_{\mathbb{Z}}^3$ は難しいですが、機が熟しつつあると思います。

古典的には knot cobordism, knot concordance, 定義は簡単であって、これも smooth category と topological category とありますが、まず smooth でやります。

$$\mathcal{C} = \{\text{knots}\}/C^\infty\text{-concordance}.$$

向き付けられた結び目 $K, K' \subset S^3$ が knot concordant であるとは、 $K \subset S^3 \times \{0\}$, $K' \subset S^3 \times \{1\}$ と考えて、 $S^3 \times I$ の中に $S^1 \times I$ が埋め込まれて $\partial(S^1 \times I) = K \times \{0\} \cup -K' \times \{1\}$ となる事です。

群構造は connected sum で入ります。逆元は mirror image です。knot の topological category での concordance では locally flat を仮定します。

1969 年に Levine の仕事があると言いましたが、そもそも一番最初は Fox で figure eight knot の knot concordance class は非自明で order 2。最初から 2-torsion がある事がわかっています。そして Fox-Milnor というのがあります。1966 年、これが knot concordance を定義した。そして $\mathcal{C}$ は $\mathbb{Z}/2$ と同型というのが一瞬はあったかもしれませんが、そうではないと示したのは村杉先生です。knot の signature を使って、trefoil は ∞ -order であることを証明しました。すぐに無限群である事がわかりました。

それで歴史的に、1969 年 Inventiones に出た有名な Levine の論文、彼も残念ながら亡くなってしまいました。今古典的な knot concordance の話をしていますが、彼は一般の codimension 2 の knot で Seifert 曲面、Seifert 形式の理論を展開して、代数的な不変量を研究した第一人者です。そしてその理論は古典的な classical な knot でも通用します。彼の大定理は、

$$\mathcal{C} \rightarrow \mathbb{Z}^\infty \oplus (\mathbb{Z}/2)^\infty \oplus (\mathbb{Z}/4)^\infty$$

という全射を定義して、高次元の奇数次元ではこれが同型という事です。古典的な所だけが例外です。differential topology では位数 2 というのは他と比べて特異というのが常識で、特別な所です。代数的に Seifert

form から定義される $\mathbb{Z}^\infty$ への全射は signature, $(\mathbb{Z}/2)^\infty$ への全射は Arf invariant. $(\mathbb{Z}/4)^\infty$ へは一言では言いがたいのですが, 全体として $\mathbb{Z}$ の Witt 群というのを考えると $\mathbb{Z}^\infty$ が出てきて, $\mathbb{Q}$ の Witt 群というのを考えると $(\mathbb{Z}/2)^\infty, (\mathbb{Z}/4)^\infty$ が出てきます. こうなりましたけれどもしばらくの間, classical な場合にも同型かというのが期待されました. それがそうではないというのが, 有名な Casson-Gordon の仕事, Casson-Gordon 不変量です. これも Witt 群の言葉で言うと, $\mathbb{C}(t)$ の Witt 群に対応しています. Levine というのは人の名前ですが, この講義ではしばらくこの準同型も Levine と呼ぶ事にします.

1975 年 Casson-Gordon は準同型写像

$$Levine : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{Z}^\infty \oplus (\mathbb{Z}/2)^\infty \oplus (\mathbb{Z}/4)^\infty$$

は isomorphism ではない事を証明しました. その Ker を detect するのが Casson-Gordon invariant です. その後, Jiang という人が

$$\text{Ker}(Levine) \supset \mathbb{Z}^\infty$$

を証明し, さらに Livingston が Ker に torsion が存在する事

$$\text{Ker}(Levine) \supset (\mathbb{Z}/2)^\infty$$

を証明しました.

古典的な場合と高次元の奇数次元の場合と決定的に違うという事が, Casson-Gordon 不変量でわかったわけです. しばらくの間はこれで尽きるのではないかという予想がありました. これが例によって Freedman 1982 年, Donaldson 1983 年の革命的な仕事で, 革命的な展開を迎えたわけです. 特に knot concordance について, Freedman は何をしたかという, Alexander 多項式, knot theory で一番最初に出てくる不変量. 最近 twisted Alexander 多項式, 3 次元多様体にとってなくてはならないものになっています. Freedman が証明した事は,

Theorem 2.2 (Freedman). *Alexander polynomial が自明ならば, topological category では slice. すなわち knot concordance 群の中で自明になる.*

また次も Freedman の大定理です.

Theorem 2.3 (Freedman). *任意の homology 3-sphere W^3 は compact contractible topological 4-manifold M の境界になる.*

従って topological category では

$$\Theta_{\mathbb{Z}}^3(Top) = 1$$

となります. これは今日の最後に smooth category で不変量を沢山構成するときの足がかりになります.

私は結び目の専門家ではありませんが, しかし $\Theta_{\mathbb{Z}}^3$ の研究を進めていく上で, $\mathcal{C}$ と比較する事は非常に大事です. 技術的というより概念の上で大事です. Livingston が非常に良い survey を書いています. 彼自身が何を証明したかという

$$\text{Ker}(Levine) \rightarrow \mathbb{Z}$$

つまり direct summand として $\mathbb{Z}$ が 1 個ある事を証明しました. これは革命の後で gauge 理論を使います. Levine の仕事は algebraic ですから,

$$Levine : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{Z}^\infty \oplus (\mathbb{Z}/2)^\infty \oplus (\mathbb{Z}/4)^\infty$$

は topological category を factor

$$Levine : \mathcal{C}^{Top} \rightarrow \mathbb{Z}^\infty \oplus (\mathbb{Z}/2)^\infty \oplus (\mathbb{Z}/4)^\infty$$

します.

$$\mathcal{C} \twoheadrightarrow \mathcal{C}^{Top}$$

は定義から全射ですが, この Ker を $\mathcal{C}_{TS}$, TS は topologically slice, と書いて

$$0 \rightarrow \mathcal{C}_{TS} \rightarrow \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^{Top} \rightarrow 0,$$

topological には locally flat な disk を bound するような smooth knot concordance の群です. 一方 $\Theta_{\mathbb{Z}}^3(Top) = 1$ ですから,

$$\Theta_{\mathbb{Z}}^3 \rightarrow \Theta_{\mathbb{Z}}^3(Top)$$

の Ker は全体です. これは Freedman の仕事です. knot concordance の場合は差が出てきます.

ここら辺りで使われる理論は Donaldson, Seiberg-Witten, Thurston-Bennequin, Ozsbáth-Szabó. 革命的な事があって, どんどん新しい事がわかってきました. Livingston の $\text{Ker}(Levine)$ から $\mathbb{Z}$ へ全射がある. これが最初ですが, さらに最近 Cochran-Orr-Teichner の一連の仕事があります. 目覚ましい進展で Ann. Math. に出版されています. smooth knot concordance group に filtration を入れました. これはなぜそうなったかは知りませんが, half-integer の filtration です. 最初 0,1,2 とやったら間に出てきたのでしょうか. 1.5 までいくと Casson-Gordon が消えます.

$$\mathcal{C} \supset \mathcal{F}_0 \supset \mathcal{F}_{0.5} \supset \mathcal{F}_1 \supset \mathcal{F}_{1.5} \supset \mathcal{F}_2 \supset \mathcal{F}_{2.5} \supset \cdots$$

$$\mathcal{F}_0 = \text{Ker}(\text{Arf}), \mathcal{F}_{0.5} = \text{Ker}(Levine), \text{Ker}(\text{Casson-Gordon}) \supset \mathcal{F}_{1.5}, \cdots$$

von Neumann η -invariant というものがあって, これを使って定義します. 彼らの主定理は, この filtration の任意の graded quotients, これは無限個ありますが, これらは全て ∞ -rank だということです. こういう大定理を証明しました. Casson-Gordon がなくなってもさらに無限個の不変量がある. 極最近です. これでかなり分かって来たように思うのですが,

$$0 \rightarrow \mathcal{C}_{TS} \rightarrow \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^{Top} \rightarrow 0$$

がありますが, $\mathcal{C}_{TS}$ について何か分かったかと言いますと, 実はほとんど何もわかっていません.

$$Levine : \mathcal{C}^{Top} \rightarrow \mathbb{Z}^\infty \oplus (\mathbb{Z}/2)^\infty \oplus (\mathbb{Z}/4)^\infty$$

は $\mathcal{C}_{TS}$ 上ゼロです. 他の不変量はどうかというと, Casson-Gordon もゼロです. Cochran-Orr-Teichner もここでは自明になります.

これについて最初に分かったのは, この群はそもそも自明でない

$$\mathcal{C}^{Top} \neq 0,$$

1988 年 Akbulut-Casson の仕事です. 何を使ったかというとは Donaldson の gauge 理論. 何をしたかと言うと, Alexander polynomial $\Delta_K(t) = 1$, 従って Freedman の結果から topologically slice だが, smooth には slice ではない結び目 K が存在する, これを証明しました. 次にわかったのは, 1995 年, Endoさんの仕事で, この群は mysterious な群だったのですが,

$$\mathcal{C}_{TS} \supset \mathbb{Z}^\infty,$$

特に ∞ -rank である事を gauge 理論を使って証明しました。これは $\Theta_{\mathbb{Z}}^3$ における古田さんの仕事に対応しています。

ちなみに $\mathcal{C}_{TS}$ がゼロでないという事が exotic $\mathbb{R}^4$ の存在と対応しています。絶対的空間であることを信じて来た $\mathbb{R}^n$ に exotic $\mathbb{R}^4$, ここだけ exotic があるというのは嘘でしょうという気が最初しました。これは数学が非常に深い所まで到達できるという事を示していると思います。

これでは終わらなくて、2004 年、再び Livingston, これは Froyshov に対応していて、split する全射準同型

$$\mathcal{C}_{TS} \rightarrow \mathbb{Z},$$

が存在し direct summand として $\mathbb{Z}$ が入っています。ここで使ったのが Ozsváth-Szabó invariant τ です。これは 10 年前ですが、2007 年に Manolescu-Owens, 独立に 2008 年に Livingston が, 独立な 3 個の不変量が存在し、split する全射準同型

$$\mathcal{C}_{TS} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}^3$$

が存在する事を証明しました。3 個というのは、

- Ozsváth-Szab τ -invariant
- Rasmussen: s -invariant
- Manolescu-Owens: δ -invariant

です。全部 gauge 理論を使っています。この 3 個が独立にある。 $\mathcal{C}_{TS}$, これは多様体から来る abel 群なので divisible なんていう事はないと思いますので、 $\mathbb{Z}^\infty$ への全射が存在する事が期待されていました。それを 2013 年に Jennifer Hom が Knot Floer complex, これは彼女の言い方ですが、元々は Ozsváth-Szabó theory から来る理論を使って次を証明しました。

Theorem 2.4 (Hom). *split* する全射

$$\mathcal{C}_{TS} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}^\infty$$

が存在し、 $\mathbb{Z}^\infty$ は *direct summand* になる。

これが Hom の定理です。論文にはこれの corollary と書いてありますが、直接の corollary というよりは、このテクニックを使うという意味だと思いますが、次が証明できます。

Corollary 2.5. $\text{Ker}(\text{Levine})$ は $\mathbb{Z}^\infty$ -summand を含む。

$\text{Ker}(\text{Levine})$ の方がこの部分群より大きいわけですが、 $\text{Ker}(\text{Levine})$ ですでに $\mathbb{Z}^\infty$ -summand がある。これで非常に分かってきました。この辺りは Livingston の survey を見て下さい。これを念頭にある程度似た展開になっているのではないかと思います、 $\Theta_{\mathbb{Z}}^3$ に戻ります。

さっき書きましたが、もう一度改めて書きます。

大問題：

- torsion は存在するか。
- (沢山) 全射準同型 $\Theta_{\mathbb{Z}}^3 \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$ は存在するか。
- divisible 元は存在するか。任意の数、あるいは 2 のべきでどんどん割れるような元は存在するか。

torsion は非常に難しい問題ですが、knot concordance の研究の流れをみると全射準同型 $\Theta_{\mathbb{Z}}^3 \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$ の構成が

次に来る問題だと思います。gauge 理論の人は当然 attack しているでしょう。そして非常に難しい問題であるが、機は熟してきたのではないかという事です。ここで homology cylinder の理論を使おうというわけです。

(2) これを踏まえて $\Theta_{\mathbb{Z}}^3 \subset \mathcal{H}_{g,1}$ を調べる。homology cylinders は元々逆井さんに教わった理論です。Garoufalidis-Levine が始めて、その根底には Habiro さんの 1999 年、GT に出た大論文があります。これとは独立に Goussarov さんの理論があります。Goussarov も残念ながら亡くなりました。この $\mathcal{H}_{g,1}$ を定義したのは、Garoufalidis-Levine, Levine さんも残念ながら亡くなりました。亡くなる 10 年くらい前からかなり頻繁にメールのやりとりをしました。

改めて書きます。homology cylinder は何かというと、cylinder ですから homological には $\Sigma_{g,1} \times I$ 、但し写像類群の場合もそうですが、技術的な理由で基本群を free にするとよいので、 Σ_g ではなく $\Sigma_{g,1}$ で考えます。homological には $\Sigma_{g,1} \times I$ となる多様体です。但し境界は 2 つの $\Sigma_{g,1}$ です。それを homology cobordism で割ったもの全体のなす群です。だから smooth と topology と 2 つあります。これを比べる所から全てが始まります。何も書かなければ smooth です。ここには abel 群の構造が入ります。

genus 毎にあります。genus 0 のときどうなるかというと、これはほとんど定義から

$$0 \rightarrow \mathcal{H}_{0,1} = \Theta_{\mathbb{Z}}^3 \rightarrow \mathcal{H}_{g,1} \rightarrow \overline{\mathcal{H}}_{g,1} \rightarrow 1$$

と入っていて、大事な事は $\mathcal{H}_{0,1} = \Theta_{\mathbb{Z}}^3$ は central、全ての元と交換可能という事です。connected sum の自由さから交換可能。中心は正規部分群ですから、 $\overline{\mathcal{H}}_{g,1}$ はそれで割った群、これは定義です。ちなみにさっきの knot concordance group $\mathcal{C}$ もここに入っています。

$$\mathcal{C} \subset \mathcal{H}_{g,1} \ (g \geq 1)$$

です。わからないものがさらにわからないものに入っています。g = 0 だと入りませんが、g = 1 で入っているの、後は全部の g で入っています。さらに、これがそもそもの Garoufalidis-Levine の motivation でしたが、

$$\mathcal{M}_{g,1} \subset \mathcal{H}_{g,1}$$

です。敢えて言うと、homotopy $\Sigma_{g,1} \times I$ と homology $\Sigma_{g,1} \times I$ 、3 次元多様体の中で homotopy と homology がどれくらい差があるか、それを surface bundle の枠組みで考えている事になります。絶対的な 3 次元多様体の level では homology と homotopy の違いは、全てのと言う言い過ぎですが、ほとんど全ては homology 球面というのがありますから、Poincaré もびっくりする状況です。その差がこの中にあります。それを逆手に取ってやります。古典的な algebraic topology の手法を使って不変量を構成します。

さっきの Freedman の定理で、任意の homology 球面は topological には compact で contractible な 4 次元多様体を bound します。つまり

$$\Theta_{\mathbb{Z}}^3(top) = 1$$

が成り立ちます。従って

$$0 \rightarrow \Theta_{\mathbb{Z}}^3 \rightarrow \mathcal{H}_{g,1} \rightarrow \overline{\mathcal{H}}_{g,1} \rightarrow 1$$

ですが、topological には $\Theta_{\mathbb{Z}}^3(top) = 1$ ですから、この自然な写像

$$\mathcal{H}_{g,1} \rightarrow \mathcal{H}_{g,1}^{top}$$

は

$$\overline{\mathcal{H}}_{g,1} \rightarrow \mathcal{H}_{g,1}^{top}$$

を factor します.

ちなみにこれは非常に難しいのですが, 逆井さんの理論があつて, さっきの Levine もそうですが, algebraic な homology cylinder の理論を展開しています.

$$\mathcal{H}_{g,1}^{top} \rightarrow \mathcal{H}_{g,1}^{alg} \rightarrow 1$$

ここで中心拡大

$$0 \rightarrow \mathcal{H}_{0,1} = \Theta_{\mathbb{Z}}^3 \rightarrow \mathcal{H}_{g,1} \rightarrow \overline{\mathcal{H}}_{g,1} \rightarrow 1$$

に注目します. 現代幾何学の革命は, Gauss から始まります. その前に Euler ですね. bundle のねじれ具合, 今流にいうと, 定曲率曲面の unit circle bundle を考えると, 曲面上に circle が一杯あるわけです. それが曲率と共に曲がっていくわけです. それが Euler 類です. $\mathbb{Z}$ による中心拡大があると商の群の $\mathbb{Z}$ -係数の 2 次元 cohomology に Euler class が定まります.

$$0 \rightarrow \mathcal{H}_{0,1} = \Theta_{\mathbb{Z}}^3 \rightarrow \mathcal{H}_{g,1} \rightarrow \overline{\mathcal{H}}_{g,1} \rightarrow 1$$

これは abel 群による中心拡大ですから, extension class

$$\chi(\Theta_{\mathbb{Z}}^3) \in H^2(\overline{\mathcal{H}}_{g,1}; \Theta_{\mathbb{Z}}^3)$$

が定まります. これが大問題の attack の 1 つの方向と思われます.

大問題: extension class

$$\chi(\Theta_{\mathbb{Z}}^3) \in H^2(\overline{\mathcal{H}}_{g,1}; \Theta_{\mathbb{Z}}^3)$$

を研究しなさい.

これが大問題です. そもそもわけのわからない群のわけのわからない係数の 2 次元 cohomology と言ってしまふと, 何もわからない, そういうと実も蓋もありません. でもメリットはあります.

Rohlin 不変量 $\Theta_{\mathbb{Z}}^3 \rightarrow \mathbb{Z}/2$ を係数に作用させると

$$\chi_2(\Theta_{\mathbb{Z}}^3) \in H^2(\overline{\mathcal{H}}_{g,1}; \mathbb{Z}/2)$$

これが得られますが, これは何か. これに関しては予想があつて一部分証明を付けました. 4 次元 cohomology に Kirby-Siebenmann class

$$ks \in H^4(\mathcal{EH}_{g,1}^{Top}; \mathbb{Z}/2)$$

というのが定まります. $\mathcal{EH}_{g,1}^{Top} \rightarrow \mathcal{BH}_{g,1}^{Top}$ は universal bundle です.

これを fiber 積分

$$\pi_* : H^4(\mathcal{EH}_{g,1}^{Top}; \mathbb{Z}/2) \rightarrow H^2(\mathcal{H}_{g,1}^{Top}; \mathbb{Z}/2)$$

すると, 2 次元落ちて次のようになるというのが予想です.

Conjecture 2.6.

$$\pi_*(ks) = \chi_2(\Theta_{\mathbb{Z}}^3)$$

Kervaire-Milnor から始まって一連の仕事, Kirby-Siebenmann, 最後は Freedman-Kirby まで. characteristic surface の self intersection number と Arf invariant の関係を与える仕事を使って, ある部分は証明したのですが, まだ予想としか言えないのは, spectral sequence を考えますと, (4,0), (3,1), (2,2), (1,3), (0,4) となり, (2,2)

だと surface 上の surface bundle でできるのですが, base で 4 次元になったり, fiber が絡んできたりすると, Cha-Friedl-Kim の仕事もあって, 難しいです. どうやっていいかわからない. 予想です. 幾何的に fiber 積分が適用できる場所では証明できました. 証明はどこにも書いていませんが, 機会があればお話ししたいと思います.

$\mathcal{H}_{g,1}$ を研究するために写像類群の場合の Johnson 準同型の理論, 自由群の automorphism の場合の Andreadakis の理論を使います. 写像類群の場合, どのような方法があったかと言うと, 自由群の自己同型群の部分群になる

$$\mathcal{M}_{g,1} \subset \text{Aut}\pi_1(\Sigma_{g,1})$$

というのが Dehn-Nielsen-Zieschang の定理です. 今日は定義は言いませんが, symplectic な自己同型に制限すると, 0 を付けますが,

$$\mathcal{M}_{g,1} = \text{Aut}_0\pi_1(\Sigma_{g,1})$$

Aut_0 に制限すると等号になります. これは自由群の自己同型群なので簡単でしょうと思うからかもしれませんが, とんでもない事でこれは組合せ群論の一番重要なテーマの一つです. 日本では佐藤隆夫さんの一連の仕事があります.

$$\Theta_{\mathbb{Z}}^3 \subset \mathcal{H}_{g,1} \rightarrow \overline{\mathcal{H}}_{g,1} \rightarrow \mathcal{H}_{g,1}^{\text{top}} \rightarrow \mathcal{H}_{g,1}^{\text{alg}}$$

それでどうするかというと, このままでは難しいので Malcev completion, ベキ零群で近似する. $\pi_1\Sigma_{g,1}$ は自由群ですけれども k 階のベキ零商で近似していきます. $k=1$ のときは able 化ですから 1 次元 homology. $k=2$ のときは 2-step ベキ零群, 以下, 続きます.

そして Johnson, Andreadakis の仕事は何かというと, ここに projective limit, こども symplectic にすると,

$$\rho_{\infty} : \mathcal{M}_{g,1} \rightarrow \varprojlim_k \text{Aut}_0 N_k$$

ここに表現すると injective という事です. そして Garoufalidis-Levine が構成し, Habiro さんや Habegger の仕事もありますが,

$$\tilde{\rho}_{\infty} : \mathcal{H}_{g,1} \rightarrow \varprojlim_k \text{Aut}_0 N_k$$

ここに拡張します. ここで使うのは Stallings の定理です. ベキ零商について最初聞くと嘘でしょうという感じの定理です. 写像類群と違うのは central な群 $\Theta_{\mathbb{Z}}^3$ がありますが, $\Theta_{\mathbb{Z}}^3$ 上 $\tilde{\rho}_{\infty}$ は自明で, 構成は全部 algebraic ですから, $\mathcal{H}_{g,1} \rightarrow \mathcal{H}_{g,1}^{\text{top}} \rightarrow \mathcal{H}_{g,1}^{\text{alg}}$ を全部 factor します. そしてどういう事になるかということ, 完全系列

$$H_2(\mathcal{H}_{g,1}) \rightarrow H_2(\overline{\mathcal{H}}_{g,1}) \rightarrow H_1(\Theta_{\mathbb{Z}}^3)_{\overline{\mathcal{H}}_{g,1}} \rightarrow H_1(\mathcal{H}_{g,1}) \rightarrow H_1(\overline{\mathcal{H}}_{g,1}) \rightarrow 0$$

があって, 係数は全部 $\mathbb{Z}$ です. これは中心拡大ですから spectral sequence を使うと, homology がいろいろ出てくる. 簡単のために Hochschild-Serre を考えて 2 次元 cohomology を一杯作りたい. candidate はあります. coinvariant ですが中心拡大ですから, $H_1(\Theta_{\mathbb{Z}}^3)_{\overline{\mathcal{H}}_{g,1}} = \Theta_{\mathbb{Z}}^3$ で, この群が mystery です. わかっている事は ∞ -rank, ばかどかい abel 群です. そうするとまず, $H_1(\mathcal{H}_{g,1})$ 辺りがわかりたいのです. それで写像類群との関係で言うと, $H_1(\mathcal{M}_{g,1}; \mathbb{Z}) = 0$ ($g \geq 3$), perfect です. ある時期まで $\mathcal{H}_{g,1}$ も perfect ではないかという淡い期待がありました. しかし direct summand として,

$$(\mathbb{Z}/2)^{\infty} \subset H_1(\mathcal{H}_{g,1}).$$

これは Cha-Friedl-Kim, 2009 年に München に滞在していたときに arxiv に出ました. だから $\mathcal{H}_{g,1}$ が perfect という期待は消えて, では rational にはどうか, abel 化 $H_1(\mathcal{H}_{g,1})$ は torsion である事を期待しています. $H_1(\mathcal{H}_{g,1})$

に ∞ -order の元がある事を証明したら大定理です. ない事を証明しても大定理です. いろいろな人が狙っています. $H_1(\overline{\mathcal{H}}_{g,1})$ は $H_1(\mathcal{H}_{g,1})$ の quotient ですから, わかりません. $\Theta_{\mathbb{Z}}^3$ は ∞ -rank で $H_2(\overline{\mathcal{H}}_{g,1}), H_1(\mathcal{H}_{g,1})$ の両方に影響するかもしれません. もし torsion しかないとすれば, $\Theta_{\mathbb{Z}}^3$ というばかりでかいのが $H_2(\overline{\mathcal{H}}_{g,1})$ に効いてきます. 期待としては 2 次元 cohomology は沢山あるでしょうと. もしも $\Theta_{\mathbb{Z}}^3 \cong \mathbb{Z}^\infty$ だとすると, $H_2(\mathcal{H}_{g,1}; \Theta_{\mathbb{Z}}^3)$ は無限にある. 今は無限にあると想定しています. そうすると一歩ずつ computer が使える. この Lie 代数 version を考えると computer が使えて, 無限個構成するわけです.

それで何を使うかといいますと,

$$\overline{\mathcal{H}}_{g,1} \rightarrow \varprojlim_k \text{Aut}_0 N_k$$

symplectic automorphism group Aut_0 , これは定義が大事なのですが, どう定義するか解答を与えたのが Garoufalidis-Levine です. 言われてみると自然な定義です. この Ker は分からないのですが, $\Theta_{\mathbb{Z}}^3, \mathcal{C}$ はこの Ker に入っています. つまりこの写像では $\Theta_{\mathbb{Z}}^3, \mathcal{C}$ は detect できない. Garoufalidis-Levine はこの Ker は何かという問題を挙げています.

最初に observe する事は線型代数群の議論を使うと各々の N_k はベキ零群ですから, $\mathbb{Q}$ を tensor すると, $\mathbb{Q}$ 上のベキ零 Lie 群になり, N_k はその lattice になります. symplectic auto にしても線型代数群になることが証明できます. 線型代数群というのは行列に表現して algebraic な equation で定義できる群です. ここで Levi-Chevalley の基本定理を使うと, この線型代数群は nilpotent part と semi-symple part の半直積に分解されます.

$$\text{Aut}_0 N_k \otimes \mathbb{Q} \cong I\text{Aut}_0(N_k \otimes \mathbb{Q}) \times Sp(2g; \mathbb{Q})$$

k が動いても semi-simple part は動かない, こういう半直積です.

Garoufalidis-Levine のやった事は k が大きくなっていくとどうなるか.

$$I\text{Aut}_0 N_{k+1} \rightarrow I\text{Aut}_0 N_k,$$

これは全射になります. これがこの定義の良い所です. 逆に言うと全射になるように定義しました. そうするとその定義が非常に良かったので線型代数群になることが証明できたという事です. そしてここに出てくるのが Johnson 準同型に出てくる Lie 代数の degree k -part.

$$1 \rightarrow \mathfrak{h}_{g,1}(k) \rightarrow I\text{Aut}_0 N_{k+1} \rightarrow I\text{Aut}_0 N_k \rightarrow 1$$

I があってもなくてもその差は Sp ですから,

$$1 \rightarrow \mathfrak{h}_{g,1}(k) \rightarrow \text{Aut}_0 N_{k+1} \rightarrow \text{Aut}_0 N_k \rightarrow 1,$$

完全列はあります. I がいない場合 $\text{Aut}_0 N_k \otimes \mathbb{Q}$ は $\mathfrak{h}_{g,1}^{\mathbb{Q}}$ へ作用しますが, その作用は $Sp(2g, \mathbb{Q})$ を factor します. $\mathbb{Z}$ 上で factor します. homology への作用です.

$\mathfrak{h}_{g,1}(k)$, これは Johnson 準同型の研究で重要な Lie 代数の degree k -part で, Sp -module としてあらわれる. この全体 $\oplus_k \mathfrak{h}_{g,1}(k)$ が Johnson 準同型に関係する Lie 代数になります. k が上がっていくごとに微妙な問題があるというのは filtration の問題です. 多分 Hain さんの深い結果を使わないといけません. ベキ零群の cohomology, 野水先生の定理を使って

$$H^*(I\text{Aut}_0 N_k \otimes \mathbb{Q}) \cong H^*(\mathfrak{h}_{g,1}^{\mathbb{Q}})$$

はある stable range では同型で, かつ Sp -module として同型. しかしこれは非常に微妙な所があつて, 今計画中の鈴木さん, 逆井さんとの論文に書く予定です.

この cohomology, Lie 代数としての cohomology $H^*(\mathfrak{h}_{g,1}^{\mathbb{Q}})$, これが非常に大事になって、特に

$$\overline{\mathcal{H}}_{g,1} \rightarrow H_1(\varprojlim_k \text{Aut}_0 N_k \otimes \mathbb{Q})$$

ここからさらに全射

$$\overline{\mathcal{H}}_{g,1} \rightarrow H_1(\varprojlim_k \text{Aut} N_k \otimes \mathbb{Q}) \twoheadrightarrow H_1(\mathfrak{h}_{g,1}^{\mathbb{Q}})_{Sp}$$

があります。我々がやっているのは Lie 代数 level で topological category ではさっきの Cha-Friedl-Kim で 2-torsion を持つ事が知られています。多分 algebraic なこれも torsion を持つのではないかと思います。perfect は期待できません。これは $\mathbb{Q}$ 上の話ですから、もし $H_1(\mathfrak{h}_{g,1}^{\mathbb{Q}})_{Sp} \neq 0$ ならばさっきのプロジェクトには大きな変更が必要になります。 $H_1(\overline{\mathcal{H}}_{g,1})$ は torsion かという問題でしたので、これは予想としては

Conjecture 2.7.

$$H_1(\mathfrak{h}_{g,1}^{\mathbb{Q}})_{Sp} = 0$$

です。我々の論文にも何度か書きました。ここまで行くと homology cylinder を離れて純粋に写像類群の Johnson 準同型の枠組みで展開してきたのですが、4 次元多様体の topological と smooth の差にもろに関係してきます。これを証明しようと日夜努力しています。これは $H_1(\mathfrak{h}_{g,1}^{\mathbb{Q}})_{Sp} = 0$ なら 1-step になりますが、もし 0 でなくても非常にうれしいです。 Sp を取ると昔やった trace とか Vogtmann さんたちの仕事に関係します。able 化には進展があります。

もう 1 つだけ、 H_2 を構成します。

$$H_2(\mathcal{H}_{g,1}) \rightarrow \Theta_{\mathbb{Z}}^3 \rightarrow \overline{\mathcal{H}}_{g,1}$$

最後に無限個の準同型、ここでは $g = \infty$ とします。そして写像

$$\mathbb{Q}[e_1, t_3, t_5, t_7, \dots] \rightarrow H^2(\mathfrak{h}_{\infty,1})^{Sp}$$

をある方法で構成しました。 e_1 は Riemann 面の moduli の第 1 特性類, MMM class で、写像類群の場合は H_2 は rank 1 で Hodge bundle の c_1 で生成される、これは Harer の結果で、これだけですが、homology cylinder では $\tilde{t}_3, \tilde{t}_5, \tilde{t}_7, \dots$ と一杯でできます。そして

$$\mathbb{Q}[e_1, \tilde{t}_3, \tilde{t}_5, \tilde{t}_7, \dots] \rightarrow H^2(\overline{\mathcal{H}}_{g,1}; \mathbb{Q})$$

が構成できます。 $H^2(\overline{\mathcal{H}}_{g,1}; \Theta_{\mathbb{Z}}^3)$ にすると identity に対応する $\chi \in H^2(\overline{\mathcal{H}}_{g,1}; \Theta_{\mathbb{Z}}^3)$ があります。universal な extension class です。それが $\mathbb{Q}$ にすれば無限個あるだろうと、 $H^2(\overline{\mathcal{H}}_{g,1}; \mathbb{Q})$ は ∞ -rank だろうと想像できます。そしてそれを Gauge 理論ではなく algebraic topology で作ろうというわけです。予想は何かというと、

Conjecture 2.8.

$$\mathbb{Q}[e_1, \tilde{t}_3, \tilde{t}_5, \tilde{t}_7, \dots] \rightarrow H^2(\overline{\mathcal{H}}_{g,1}; \mathbb{Q})$$

が injective

さらに、あわよくば同型かという予想です。群があったときにその 2 次元 cohomology 群を決定するというのは最も大事な問題です。今時の言い方をすれば moduli 空間の quantization を決める。

写像類群の場合は rank 1 で signature に対応しています。ここ $H^2(\overline{\mathcal{H}}_{g,1}; \mathbb{Q})$ に来たとき、文字は決めてあるのですが、 $t_{2k+1} \mapsto \tilde{t}_{2k+1} \in H^2(\overline{\mathcal{H}}_{g,1}; \mathbb{Q})$ は 0 ではないだろう。幸か不幸か、今の所やりようがありません。

Kontsevich が、前回も言いましたが、Kontsevich の定理で Lie 代数の cohomology と全く関係のないように見える $H_*(\text{Out } F_k; \mathbb{Q})$ と graph homology, lie version の graph homology とが等価である事を証明しました。これを元に我々は研究しています。Kontsevich の定理を使うと t_{2k+1} が $\mu_k \in H_{4k}(\text{Out } F_{2k+2}; \mathbb{Q})$ と対応します。これを Conant-Vogtmann が特性類として、Morita classes と呼んでくれました。 t_{2k+1} が Lie 代数 level で 0 でないことと μ_k が群 level で 0 でないことが等価です。これが Kontsevich の定理です。今わかっている事、現状は $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \neq 0$. μ_4 以降はわかりません。 μ_1 は computer を使って 1998 年頃に μ_k を定義したときにすぐに 0 でないことを証明しました。 $\mu_2 \neq 0$ は Conant-Vogtmann が 2004 年に証明しました。 $\mu_3 \neq 0$ は 2012 年の Gray の仕事です。これは全部 computer を使って証明しました。 μ_4 以降はわかりません。 μ_4 までは super computer を使えばわかるでしょう。これがもしどこかで打ち止めになってしまうと $H^2(\overline{\mathcal{H}}_{g,1}; \mathbb{Q})$ の方もそうなります。 $H^2(\overline{\mathcal{H}}_{g,1}; \mathbb{Q})$, こちらは群ですからいわんや 0 です。例え t_{2k+1} が Lie 代数 level で全部 0 でない事がわかったとしても $H^2(\overline{\mathcal{H}}_{g,1}; \mathbb{Q})$ にいくまでは壁があります。 $\tilde{t}_3 \neq 0$ もわかりません。 $\tilde{t}_3 \neq 0$ だけでも大問題です。

最後に Kontsevich の予想があつて、graph homology について一般的な形で彼の論文に書いてありますが、全ての version で degree を固定するとホモロジーは有限次元だろうというものです。特にその一部として次が出ます。

Conjecture 2.9 (Kontsevich).

$$\dim H^2(\mathfrak{h}_{\infty,1})^{Sp} < \infty.$$

これが正しくて本当に有限次元だとすると、無限個が同じ所にいますから途中で終わってしまいます。これは associative の場合には、Riemann 面の moduli 空間の cohomology について、Harer ではない上からの stability を与え大きな application があります。commutative の場合に $H_2(\mathfrak{c}_{\infty}) \cong \mathbb{Q}$ は Kontsevich の論文に書いてあります。lie version については私は無限次元ではないかと思っています。そしてさらに先があり、もしそれが証明されたとしても群の level で理解できるのは遙かな将来のことでしょう。

e_1 というのは signature. 4 次元多様体の H^2 の cup 積の signature. こら辺りは幾何学的にちゃんと意味がある。surface 上の homological surface bundle があつたときには、higher Massey 積を考えると沢山でてきて、その言わば高次の intersection number の signature. 幾何学的には自然だと思います。そしてこれは smooth の場合は 0 を予想しています。これは非常に大胆な事を言っています。4 次元多様体の Massey 積について、もし smooth ならその Massey 積のある高次の intersection number は 0、つまり smooth かどうかの obstruction だと。しかし、今の所そういうものは全く知られていないですね。Kähler 多様体について Massey 積が uniform に消えるというのが、Deligne-Griffiths-Morgan-Sullivan の結果です。非常に深い Massey 積の intersection number についてではありますが、smooth structure だけで消えるという予想です。どうやっていいか全然わかりません。topological には Freedman が algebraic topology の条件さえ満たせば、4 次元多様体は一杯あるという事を証明しています。だから Massey 積のそういう深い条件を満たす位相多様体はあるでしょう、実現できることが期待されます、しかし smooth structure が入るとできない、と予想しています。

質問:symplectic structure を入れるとどうなるのですか?

symplectic structure を入れるとその obstruction がどうなるか。symplectic と complex は初めは差がないのではないかと昔は思われていたようですが、4 次元ではその差はどんどん大きくなっています。Kähler なら uniform vanishing. symplectic でどうでしょう。まずはそこかもしれません。symplectic structure を仮定して、この higher Massey 積 (の intersection number) の消滅が示せるか。

実は μ_k は Borel regulator class, $\mathbb{Z}$ の代数的 K 理論とも関係があるはずなのですが、数学ですから証明しな

ければ意味がないですね。具体的な事についてはまた面白い事が分かってきたのですが、それはまた改めてお話ししたいと思います。

3 mapping class group $\mathcal{M}_g$ と Riemann 面の moduli 空間 $\mathbb{M}_g$

新シリーズ：トポロジーの課題探訪の6回目です。前回までは3次元多様体の不変量、その前は foliation についてお話ししました。新シリーズのテーマとしては3番目であって、テーマとしては写像類群, mapping class group $\mathcal{M}_g$ と Riemann 面の moduli 空間 $\mathbb{M}_g$ です。また元に戻るといふか、自分の専門に戻ります。この2つについて、topology の課題探訪ですから、これを巡っていろいろな結果が得られてきていますが、まだわからない事が沢山ありますので、6つのサブテーマで、どういう問題があるかをお話します。

1. 非安定 cohomology と有界 cohomology
2. moduli 空間の tautological algebra の構造
3. Torelli 群の cohomology
4. 写像類群の構造と3次元多様体の不変量
5. 写像類群と数論との関わり
6. 高次元への一般化

今日は非安定 cohomology と有界 cohomology をやります。これが1つ目のサブテーマです。安定 cohomology という概念があつて、そうでないもの、非安定 cohomology。これはほとんどわかっていません。つぎに有界 cohomology, bounded cohomology, という概念は Gromov が1982年の仕事で導入し、衝撃を与えました。Gromov は何度も衝撃を与えていますが、この論文が出た時は本当にみんなビックリしました。Gromov は geometric group theory を創始しましたが、その柱の1つです。

2番目のサブテーマは Riemann 面の moduli 空間と tautological algebra の構造について。tautological algebra も重要なテーマで、Faber 予想という予想があります。これは1992年頃に出て、20年くらい経っています。非常に大きな進展はありますが、一言でいうと今も mysterious なままです。

3番目は写像類群の極めて重要な部分群の Torelli 群について、これもわからない事が非常に多い。何が分かっていて、何がわかっていないかをお話します。

4番目は写像類群 $\mathcal{M}_g$ の構造と3次元多様体の不変量。これについては何度かこの新しいシリーズでも、前のシリーズでもお話ししましたが、これは永遠のテーマなので、改めて写像類群のテーマの下でどういう問題があるかをお話します。

5番目は、数論の人との議論といふか、ほとんど一方的に教わっている段階ですが、数論との関わり。これについてもこのシリーズで何度かお話をしています。絶対 Galois 群、数論にとっても究極の研究テーマです。絶対 Galois 群が写像類群の研究に出てくるよ、と言ったのが友人の織田孝幸さん、彼は数論が専門ですが、topology にも造詣が深く、彼が我々が研究していた Johnson 準同型に絶対 Galois 群が現れますよ、と言って、それを具体的に1994年に中村博昭さんと松本真さんがそれぞれ独立に証明しました。機が熟しつつあつてもう20年経ちました。前々回 Willwacher の仕事について言及しましたが、homotopy 代数、あるいは Kontsevich の仕事との関連もあります。

6番目についてですが、5番目辺りまでは2次元の bundle の特性類ですが、最近の1つの新しい傾向として高次元への一般化があります。曲面は2次元ですが、これを高次元に一般化しようと。具体的には、曲面は多様体の分類からすると簡単で、球面は別として torus の connected sum, g 回 connected sum すると genus g

の曲面 $\Sigma_g = g(T^2)$ になります。これを一般化して $S^k \times S^k$ を g 回 connected sum するとこれは $2k$ 次元の多様体です。これを fiber とする fiber bundle の特性類、曲面で分かったことがどこが一般化されて、どこが新しいのか。最近非常に活発に、特にデンマークとイギリス、アメリカで研究されています。日本ではほとんど誰もやっていません。

これらの 6 つのサブテーマを紹介していきます。記号は何度も出ていますが、改めて書きます。

$$\mathcal{M}_g = \pi_0 \text{Diff}_+ \Sigma_g$$

曲面 $\Sigma_g = g(T^2)$ の向きを保つ微分同相全体の連結成分。位相は普通は C^∞ -位相を入れますが、 C^0 -位相でも、どの位相でも 2 次元の特殊性で同じになります。mapping class group, 非常に重要な群です。これは Teichmüller 理論では Teichmüller modular group という名前が付いています。これはこの群が大変重要だという事を表しています。1937 年に Teichmüller は Teichmüller space $\mathbb{T}_g$ を定義して、歴史に名を残しました。この空間はますます重要さを増しています。元々は複素解析、代数幾何、微分幾何、topology, ですが、数理物理、数論、いろいろな分野において重要になっています。定義は Σ_g 上の複素構造の isotopy 類全体ということです。そして $\mathbb{T}_g$ に写像類群が作用して

$$M_g = \mathbb{T}_g / \mathcal{M}_g,$$

Riemann moduli space, 種数 g の Riemann 面の moduli 空間。非常に由緒正しい空間です。こういう形に書かれたのは Fenchel の時代だと思いますが、moduli 空間の考えは Riemann の 1850 年代の仕事にまで遡ります。すなわち moduli というのは Riemann から始まります。local に、ある程度は global にも考えていたかもしれませんが、local に $3g-3$ 次元の複素多様体であることを知っていました。多様体というものを考えたのも Riemann です。

ここでいろいろな問題があるわけです。残されたというところちょっと語弊があります。わかった所が非常に少ない、ほとんどわかっていないというのも語弊がありますね。

今日はサブテーマの 1 番目です。

3.1 非安定コホモロジーと有界コホモロジー

(1) 安定 (co)homology

まず出て来たのは、安定 cohomology という概念です。stable (co)homology, これは非常に重要な概念です。これがいつ頃から出て来たかと言いますと、群の series があって、その群の homology の series, 考えている群は、まずは $GL(n, \mathbb{Z})$ という重要な群があって、rank n の自由 abel 群の同型写像全体。行列としては n 行 n 列の整数行列で可逆なもの全体。そうすると、これが部分群としてサイズが 1 つ大きい所に入ります。

$$\cdots \hookrightarrow GL(n, \mathbb{Z}) \hookrightarrow GL(n+1, \mathbb{Z}) \hookrightarrow GL(n+2, \mathbb{Z}) \hookrightarrow \cdots$$

という群の系列が出てきます。これは行列群です。写像類群との関係では n ではなく、 $2g$ と書きますが、 $GL(2g, \mathbb{Z})$ の部分群に写像類群にとって重要な

$$GL(2g, \mathbb{Z}) \supset Sp(2g, \mathbb{Z})$$

があります。同じように今度は 2 個ずつサイズが増えていきます。

$$\cdots \hookrightarrow Sp(2g, \mathbb{Z}) \hookrightarrow Sp(2g+2, \mathbb{Z}) \hookrightarrow Sp(2g+4, \mathbb{Z}) \hookrightarrow \cdots$$

こういう風に群の系列が出てきます。

歴史的に安定 homology というものは、有限群ですが、 n 次対称群というものがあって、対称群の系列

$$\hookrightarrow \cdots \hookrightarrow \mathfrak{S}_n \hookrightarrow \mathfrak{S}_{n+1} \hookrightarrow \mathfrak{S}_{n+2} \hookrightarrow \cdots$$

があり、そこで出てきました。

ここで安定 homology の方が考えやすいので、まず homology で考えます。一般に群の系列

$$\cdots G_n \hookrightarrow G_{n+1} \hookrightarrow G_{n+2} \hookrightarrow \cdots$$

があったときに、群の homology というものが非常に大事なわけです。それはこの群を基本群にするような Eilenberg-MacLane space の homology 群です。重要な moduli 空間というのは、基本群だけがあって高次の homotopy 群がない、特異点のある場合もありますが、Eilenberg-MacLane space になる事が多い。群の homology を難しいと思う人、慣れていない人は空間の homology と思って下さい。この群の系列に対して k 次元 homology の系列

$$\cdots \rightarrow H_k(G_n) \rightarrow H_k(G_{n+1}) \rightarrow H_k(G_{n+2}) \rightarrow \cdots$$

ができます。これが stabilize する、その意味は何かというと、ある自然数 $n_k \in \mathbb{N}$ が存在して、群が変わっていくので homology が変わっていく事が多いのですが、添字が n_k まで来るとその先は、

$$\cdots \rightarrow H_k(G_{n_k}) \xrightarrow{\cong} H_k(G_{n_k+1}) \xrightarrow{\cong} H_k(G_{n_k+2}) \xrightarrow{\cong} \cdots$$

homology の同型が成り立つ、これは仮定です。系列があるからいつでも安定化するというわけではありません。このとき stabilize するといいます。そして

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H_k(G_n)$$

と書きまして、群の系列 $\{G_n\}$ の k 次の安定 homology という。問題はまず安定化するかどうかの問題です。そういう現象があるというのがいろいろな例で見つけられて、安定 (co)homology の概念が出てきました。

その最初の例は先ほど述べた有限群ですが、日本の topology の大先輩である中岡稔先生が、 $H_k(\mathfrak{S}_n)$ は安定化することを証明し、その stable homology を決定しました。中岡先生の有名な仕事です。ただ、これは有限群なので、テーマから少し離れますので、ここではこれ以上は触れない事にします。

無限群に関していうと、 $GL(n, \mathbb{Z})$ や $GL(n, \mathbb{Q})$, $GL(n, \mathbb{R})$, $GL(n, \mathbb{C})$ など、数論的に重要な環上の GL に対して、van der Kallen の一般論があります。存在はいろいろな人の仕事がありますが、van der Kallen、この人が一番有名な仕事をしました。

実際の計算は stable cohomology, cohomology だから、定義するときに矢印の向きが逆になって、ちょっと注意する所もあります。出てくる cohomology が有限次元のときは問題ありませんが、無限次元になると注意が必要ですが、stable cohomology も同様に定義できます。

大きな仕事は、A. Borel が arithmetic group の stable cohomology を組織的に決定しました。

arithmetic group、これも定義もやりませんが、 $GL(n, \mathbb{Q})$ や $GL(n, \mathbb{R})$ など行列群のその部分群として重要な群。この群について決定的な仕事をしたのが A. Borel で 1974 年の有名な論文です。これは大定理です。一般的な形としてあって、 $\mathbb{R}$ や $\mathbb{C}$ に入れて普通の Lie 群にすると Lie 代数の cohomology と関連して、それは松島与三先生や日本人数学者の寄与も沢山あります。

Theorem 3.1 (Borel).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H^*(GL(n, \mathbb{Z}); \mathbb{R}) \cong \Lambda_{\mathbb{R}}(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k, \cdots).$$

cohomology の次数とともに安定域は変わっていきますので、省略した形で書きます。この辺りは topologist については大変難しい所ですが、 $\mathbb{R}$ 上 transcendental に cohomology class を定義しました。それらに依って生成される $\mathbb{R}$ 上の外積代数に同型です。生成元 Borel cohomology class $\beta_k \in H^{4k+1}(GL(n, \mathbb{Z}); \mathbb{R})$ は $\mathbb{R}$ 上でしか定義できないというところと語弊があります。 $GL(n, \mathbb{Z})$ はよい有限表示をもつ可算群ですので、その $\mathbb{R}$ 上の cohomology は $\mathbb{Q}$ 上の cohomology に tensor $\mathbb{R}$ したものですから、Borel cohomology class を適当に normalize すると $\mathbb{Q}$ 上定義されます。しかし自然に定義するものはありません。topologist には難しいですね。 Pontrjagin class や Chern class とは異なります。こういう primary class に対して secondary class です。これが数論や代数的 K 理論に関係します。

この定理の系として Borel の大定理ですが、高次元の i 次 K-theory というものがあって、これは非常に大事で K-theory は元々は topology ではなく Grothendieck, そして Borel-Hirzebruch で topological K-theory, そして algebraic K-theory が定義されて、Daniel Quillen が algebraic K-theory を homotopy 群であると喝破しました。今はあらゆる所で重要な概念です。この高次の代数的 K 群、これを計算するのが大問題です。

Theorem 3.2 (Borel). 任意の $i > 0$ に対して

$$K_i(\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q} = \begin{cases} \mathbb{Q} & i \equiv 1 \pmod{4} (i > 1) \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

これは数論にとっても非常に大きな結果です。torsion はどうかというと、確か torsion は $i = 7$ ぐらいまで計算されていたと思います。 $GL(n, \mathbb{Z})$ の unstable cohomology の計算が関係しています。 topology でいうと球面の homotopy 群が永遠に分からないのと言わば parallel です。 こういう非常に深い結果があります。 あるとき torsion は球面の安定 homotopy 群と同型かという予想（希望？）もありましたが、そんなに簡単なものではないことが分かりました。

写像類群との関係で $Sp(2g, \mathbb{Z})$ にすると、これはわかりやすい。これも torsion は非常に難しいので $\mathbb{Q}$ を tensor すると多項式代数になり、ずっとやさしくなります。

Theorem 3.3 (Borel).

$$\lim_{g \rightarrow \infty} H^*(Sp(2g; \mathbb{Z}); \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}[c_1, c_3, c_5, \dots].$$

これも Borel の定理です。写像類群の研究からはこちらが大事になります。実は GL と Sp , この 2 つは関連しています。それが数論と写像類群の関係まで行くとこの関係も見えてくると思います。

ここで β_k は任意の n に対して定義されます。任意の n に対して定義され、inclusion で制限すると一致します。 $BU(n)$ で考えると Chern class も同様ですが Chern class よりもずっと難しい。

β_k がどこまで生き残るかというのが大問題です。 n に関係なく定義されますが、 n がある程度小さくなると zero になります。生き残る限界に関してはある予想を持っています。そして、限界の所に outer automorphism の特性類が現れるのではないかと予想しています。 stabilize する k と n の関係は、例えば、

$$\beta_1 \neq 0 \in H^5(GL(5, \mathbb{Z}); \mathbb{R})$$

ですが、

$$\beta_1 = 0 \in H^5(GL(4, \mathbb{Z}); \mathbb{R}).$$

$$\beta_2 \neq 0 \in H^9(GL(7, \mathbb{Z}); \mathbb{R})$$

ですが、

$$\beta_2 = 0 \in H^9(GL(6, \mathbb{Z}); \mathbb{R}).$$

これは Soulé さん達 (Gangl, Elbaz-Vincent) が証明しています. これが zero なので, Borel class がすでに secondary なので, 言わば thirdary として $\mu_2^* \in H^8(\text{Out } F_6; \mathbb{Q})$ という特性類が定義されます. 一般の β_k に対してどこまで消えるかには, 上述のように予想を持っていますが, その 1 つ下まで消えるというのは, Bismut-Lott の JDG に出た論文, flat bundle の特性類の vanishing で証明されています. もう 1 つ延ばせるというのが予想です. stable range も大分わかってきています. stable range の決定も大事になります. それもどんどん詰められています. 安定 cohomology も mysterious ですが, 非安定 cohomology はもっと mysterious です.

それで $\Lambda_{\mathbb{R}}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k, \dots)$ は難しいですが, $\mathbb{Q}[c_1, c_3, c_5, \dots]$ は Chern class ですからわかりやすい. $Sp(2g, \mathbb{Z})$, Siegel という巨人がいますが, 彼が考えた保型形式, 数論で重要な Siegel modular group

$$Sp(2g, \mathbb{Z}) \hookrightarrow Sp(2g, \mathbb{R}) \supset U(g)$$

$Sp(2g, \mathbb{R})$ は Lie 群ですから maximal compact が存在して, それは今の場合 unitary 群 $U(g)$ です. Lie 群とその maximal compact では, cohomology は同型で

$$H^{2k}(BU(g); \mathbb{Q}) \cong H^{2k}(BSp(2g, \mathbb{R}); \mathbb{Q}) \rightarrow H^{2k}(Sp(2g, \mathbb{Z}); \mathbb{Q}).$$

$$H^{2k}(BU(g); \mathbb{Q}) \ni c_k \mapsto c_k \in H^{2k}(Sp(2g, \mathbb{Z}); \mathbb{Q}).$$

unitary 群の cohomology にある Chern class, それを discrete subgroup に制限したものが Chern class $c_k \in H^{2k}(Sp(2g, \mathbb{Z}); \mathbb{Q})$ です. その Chern class で生成される多項式代数です. c_k は $c_1, c_2, \dots$ と一杯あるのに, 偶数次はどこへ行ったかという, 実は $Sp(2g, \mathbb{Z})$ -bundle は $\mathbb{R}$ 上 flat なので, よって Pontrjagin class は全部 zero になります. そうすると, Pontrjagin class は Chern class で書けます. 例えば一般に

$$p_1 = c_1^2 - 2c_2.$$

これが zero ですから, $Sp(2g, \mathbb{Z})$ 上では $c_2 = \frac{1}{2}c_1^2$ という relation が出てきます. だから c_2 がないのは c_2 が zero だからではなくて, c_2 は c_1 で書けるからです. 同様に c_4 は c_1, c_3 で書けて, 一般に偶数次の Chern class は奇数次の Chern class で表される. 偶数次の Chern class が全て消えるというわけではない. stable には, この他の relation はありません. 古典的な意味での特性類はわかっています. これが Borel の大定理です.

この後 topologists が誇るべき Topology での新しい展開が始まった訳です. 古典的な arithmetic group の安定 cohomology は 1970 年代でしたが, 今は topology を超えて代数幾何, 数論でも名前が出てくる Harer の大定理, 1983 年 Annals に出た論文です. Harer stability theorem と呼ばれています. さっきまでは GL とか Sp とか行列の群ですから, 言わば見に見える群で, それに比べると写像類群はずっと難しい群です. 写像類群は線型群かどうかは未解決ですが, 明らかな形で行列群には入っていません. g があるから群の系列がありそうですが, 残念ながら包含写像

$$\mathcal{M}_g - \dots \rightarrow \mathcal{M}_{g+1}$$

はなく, 部分群にはなりません. topology の自由な構成で Σ_g に basepoint を付けて, base point preserving な写像類群 $\mathcal{M}_{g,*}$ を考えます.

$$\mathcal{M}_{g,*} = \pi_0 \text{Diff}_+(\Sigma_g, *).$$

$\mathcal{M}_{g,*}$ と $\mathcal{M}_g$ の関係はわかっていて basepoint があると取っ掛かりは出来ませんが, ここでも包含写像

$$\mathcal{M}_{g,*} - \dots \rightarrow \mathcal{M}_{g+1,*}$$

はなく, 部分群にはなりません. この上の中心拡大で $\mathcal{M}_{g,1}$ を定義します.

$$\mathcal{M}_{g,1} = \pi_0 \text{Diff}_+(\Sigma_g, D^2),$$

base point * を太らせて disk D^2 にして disk 上で identity にすると,

$$\mathcal{M}_{g,1} \rightarrow \mathcal{M}_{g+1,1}$$

のように, ここには自然に準同型が定まります. disk 上 identity ですから, 曲面を貼付けて g から $g+1$ の mapping class group を構成できます. genus を一つ加えて $\mathcal{M}_{g,1}$ は $\mathcal{M}_{g+1,1}$ の部分群になれます. 代数幾何や数論は由緒正しいのでこういう操作はありませんが, これは topology の強みなわけです. ここで stabilize が考えられて, Harer は topology の technique を駆使して研究をしました. 結局 $\mathcal{M}_{g,1}$ は stabilize して, さらに写像はないのだけでも最終的に $\mathcal{M}_g$ の cohomology も stabilize する, stable (co)homology

$$\lim_{g \rightarrow \infty} H^*(\mathcal{M}_g; \mathbb{Q})$$

が存在する事を証明しました. これが Harer の大定理です. さっきの Van der Kallen の結果以降, 少なくとも canonical には線型ではない群の stability theorem です. これは大定理です.

それでは stable cohomology は何かというと, 私は 1981,2 年に写像類群の研究を始めて運良くというか, 特性類を定義する事ができました. 今では Mumford-Morita-Miller class, あるいは. MMM-class, tautological class などと呼ばれています. これを元に stable cohomology を完全に決定したのが Madsen-Weiss. 2007 年, これも Annals に出た論文で, stable cohomology を決定しました. どうなるかというと, MMM-class で生成される $\mathbb{Q}$ 上の多項式環と同型になります.

$$\lim_{g \rightarrow \infty} H^*(\mathcal{M}_g; \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}[\text{MMM-classes}]$$

これが決定的な結果です. Chern class のように 1 番目, 2 番目と私は $e_1, e_1, \dots$ と書きましたが, Mumford は κ_i という notation を使いました. Mumford は rational cohomology より深い Chow algebra の元として定義しました. rational cohomology にすると (符号を除いて) 同じものです.

写像類群でいうと $\mathcal{M}_g$ から $Sp(2g, \mathbb{Z})$ へ全射があつて, これは古典的な準同型でその Kernel が Torelli group です.

$$I_g \rightarrow \mathcal{M}_g \twoheadrightarrow Sp(2g, \mathbb{Z})$$

$Sp(2g, \mathbb{Z})$ の stable cohomology が Borel でわかっていて, $\mathcal{M}_g$ の stable cohomology が Madsen-Weiss でわかって, I_g はどうかというと, 全くわかっていません. これに関しては 3 番目のサブテーマの話です.

$GL(n, \mathbb{Z})$ はどうか, これはもちろん難しいです. ここで

$$\text{Out}F_n \twoheadrightarrow GL(n, \mathbb{Z}),$$

rank n の自由群

$$F_n = \mathbb{Z} * \mathbb{Z} \cdots * \mathbb{Z}$$

を考え, その外部自己同型群

$$\text{Out}F_n = \text{Aut}F_n / \text{Inn}F_n$$

です. 群 F_n があるとその自己同型群 $\text{Aut}F_n$ がありますが, それを内部自己同型群 $\text{Inn}F_n$ で割る, 今の場合自由群なのでこれは F_n 自身で割る事になります. この Kernel は写像類群の Torelli 群に対応するもので

$$I\text{Out}F_n \rightarrow \text{Out}F_n \twoheadrightarrow GL(n, \mathbb{Z})$$

と書きます. Harer の stability theorem がこの場合どうなるか, 存在するのか, 存在するなら何になるのか, それは問題です. これは写像類群の少し後に解決しました.

まず, stable cohomology の存在について,

$$\lim_{g \rightarrow \infty} H^*(\text{Out}F_n; \mathbb{Q})$$

は存在する. 存在は Hatcher で, これは Aut でもよくて, 基本的には Hatcher で一部 Hatcher-Vogtmann の仕事です. その基本テクニックは Harer のテクニックです. 写像類群と自由群の外部自己同型群は似ている, 比喩的に兄弟だと言われますが, 大分性質の違う兄弟です. arithmetic group のような他人から見ると兄弟ですが, 親戚から見ると随分違います. M_g の研究にはテクニックが一杯, 函数論や代数幾何が使えますが, 自由群の方では使えません. 何れにしても Harer のテクニックを使いますが, 工夫も必要です. 単なるアナロジーとはいきません.

そしてこの stable cohomology, これを決定したのが, Galatius の仕事です. さっきの Madsen-Weiss の Madsen の弟子で今は Stanford の教授です. 結果は Out でも Aut でも同じですが, 0 次元はあるけれどもそれ以外なものもない.

$$\lim_{g \rightarrow \infty} H^*(\text{Out}F_n; \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}$$

2011 年 Ann. Math. に出版されました. 実際アナウンスされたのは 2006 年です. 自明という事で, ちなみにこれは $\mathbb{Z}$ 上 stable になります. $\mathbb{Z}$ 上で考えると自明ではなくて, 中岡先生の対称群の stable cohomology がそこに現れます.

(2) unstable cohomology

これらを元に unstable cohomology を研究します. stable でない cohomology は全部 unstable ですから, 大問題として

大問題: unstable cohomology class を具体的に構成せよ. 構成できたらその性質を研究せよ

があります. unstable cohomology の構成や性質は, ほとんどわからない. しかし存在そのものについては沢山分かっています. そういうものがありますよ, という事は分かりますが, 構成はほとんどありません. 存在は何を使うかという点, Euler 数を使います. 言うまでもなく, Euler 数は図形の大域的の不変量で永遠に最も重要なものです. Euler-Poincaré の定理で Euler 数が 1 でなければ homology が存在します. Euler 数の計算から homology の存在が言えます. ただしここでは orbifold Euler 数, 普通の Euler 数とちょっと違っていて, Euler 数の定義の特異点を込めて一般化したものを使います. これの $Sp(2g, \mathbb{Z})$ はわかっていて, ここで Riemann zeta 関数が突然出てきます.

$$\chi_o(Sp(2g, \mathbb{Z})) = \zeta(-1)\zeta(-3)\cdots\zeta(1-2g).$$

これは Harder の結果です. 古典的にあったのですが, それでは写像類群はどうなるか. まず写像類群の方で言えば, さっきの安定 cohomology で Madsen-Weiss の結果で MMM-classes で生成され, 全て偶数次元の cohomology です. 偶数次の cohomology は多項式環の order で出てきますが, 奇数次元には何も出てきません. そうすると Euler 数は正でしょうということになります. 従ってもし Euler 数が負になれば, 奇数次元の不安定 cohomology の存在が言えます. 写像類群の場合どうなるかというと

$$\chi_o(M_g) = \frac{\zeta(1-2g)}{2-2g}.$$

これは Harer-Zagier, 1986 年の Invention, Penner, 1987 年 JDG, の独立な仕事です. ちなみに g がどんどん大きくなっていくときに, これがどれくらいの order でどうなるかというと,

$$\chi_o(M_g) = \frac{\zeta(1-2g)}{2-2g} \sim \frac{1}{2-2g} (-1)^g \frac{(2g-1)!}{2^{2g-1}\pi^{2g}}$$

下の 2 ペキがあるから大きいのですが、上は階乗ですから、上の方がずっと強い、大きくなります。 g がどんどん大きくなっていくと、これはどうなるかという g が偶数だとすると、これは負になり、負の非常に大きな数です。 g が奇数だと非常に大きな正の数、exponential order で大きくなります。一方でわかっている stable cohomology は MMM-classes で生成される多項式代数ですから、これは MMM-class だけではとても賄いきれません。ずっとそれより大きい exponential order です。 g が偶数の場合は Euler 数が負ですから、奇数次元の方が強いわけです。但しこれは orbifold Euler 数ですが、Harer-Zagier は asymptotic には

$$\chi_o \sim \chi(g \rightarrow +\infty)$$

となる事も証明しています。これは写像類群では成り立ちます。自由群の自己同型の方ではわかりません。結論として Harer-Zagier の系として unstable cohomology はものすごく沢山ある、特に g が偶数のとき奇数次元の unstable cohomology が沢山ある事がわかります。これが 1986 年の段階です。

問題として存在は分かったけれど、それはどういうものがあるのか。構成が知られている具体的な unstable cohomology はあれだけ沢山あるのにたった 2 つです。今の所 2 つしかありません。その内の 1 つは

$$H^6(\mathcal{M}_3; \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}$$

で、これは Looijenga の仕事です。これは MMM-class で書けない事がわかっています。

またもう 1 つはここで奇数次元が出てきます。 g が偶数でどんどん大きくなると奇数次元 cohomology が一杯ある。その一番最初に現れるものです。未だにこれしかありません。

$$H^5(\mathcal{M}_4; \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q},$$

これは Tommasi というオランダの有名な人の仕事です。ここで奇数次元が出てきます。この 2 つしかありません。

問題として具体的に unstable cohomology を作りたいという問題が出てきます。存在が分かっているからやれば出来るでしょうという生易しい問題ではありません。

時間もなくなってきましたので、有界 cohomology は次回にしたいと思います。

最後に自由群の自己同型の話をします。Galatius の結果から $H^*(\text{Out}F_n; \mathbb{Q})$ の元は全て非安定です。従って構成できたら非安定。非自明性が少しでも分かって構成されたものは 1 つしかありません。

$$\mu_k \in H_{4k}(\text{Out}F_{2k+2}; \mathbb{Q}) \quad (k = 1, 2, \dots)$$

こういう series だけです。Conant-Vogtmann が Morita-class と名前を付けてくれました。最近 Conant-Kassabov-Vogtmann は elliptic modular form の理論を使って新しい無限の系列を作りましたが、非自明性については全く分かっていません。

但し存在については、orbifold Euler 数 χ_o を Smillie-Vogtmann が 1980 年代に計算しています。公式はあるのですが、写像類群のときのように、asymptotic な振る舞いがあるかはわかっていません。彼らの予想としては負の数でどんどん大きくなっていく。

予想: $\chi_o(\text{Out}F_n) < 0$.

つまり、 n をどんどん大きくしていくと、ずっと負で $-\infty$ に近付いていく。

これは未解決。大問題です。写像類群のときになぜ分かったかという、Riemann 面の構造があるので、全部足し上げたものに全体としてきれいな構造があるからです。

ここで逆井さん、鈴木さんと integral Euler 数の計算を computer と表現論を使って続けていて、極最近、 $\chi(\text{Out}F_{11})$ が決定できました。

$$\chi(\text{Out}F_{11}) = -1202$$

今の所、ぎりぎりだと思います。この次は当面無理でしょうという感じです。computer のメモリーの問題があります。

Adams operation は有理数係数にして外積を分解するので、computer に載せると有理数上の計算になります。そのメリットがあつて、最終的な答えは整数なので、有理数が出てくるとどこかに間違いがあります。そのミス無くすのが大変だけれども、逆に安心感があります。

この前は、

$$\chi(\text{Out}F_{10}) = -124$$

です。orbifold Euler 数の方が小さくて orbifold Euler 数は

$$\chi_o(\text{Out}F_{11}) = -1690.70\dots$$

です。orbifold Euler 数が integral Euler 数より小さいのは、例えば、quotient singularity があると、 $\mathbb{Z}$ 上では 1 ですが、orbifold の方は cyclic singularity だとすると $\frac{1}{n}$ として数えます。この考察も、我々の計算結果が正しいという感じを与えます。写像類群の場合は Harer-Zgier で asymptotic には近付きますが、自由群の場合にはわかっていません。多分 1 に近づくのではないかと予想していますが、どう証明すればよいのかわかりません。Rimann 面の方は genus を落としても曲面になります。自由群の場合も graph の operation になるのですが、うまく閉じないのです。

もう一つだけ、非自明性が少しでも分かって構成された無限系列があります。それは Aut についてのものです

$$\epsilon_k \in H_{4k-1}(\text{Aut}F_{2k+1}; \mathbb{Q}) \quad (k = 2, 3, \dots)$$

$k = 2$ のときに Gerlits が、 $k \geq 2$ のときに、Conant-Kassabov-Vogtmann. が定義した系列です。初めの二つだけ非自明性が分かっています。ところで Kassabov も今度の ICM の speaker です。彼らが定義したこの無限の series は、数論と深い関係があつて Eisenstein class と呼んでいます。genus 1 の elliptic modular form から出てくる Eisenstein series に起源があるのでそう呼ばれます。ここら辺りはサブテーマの 5 番目で取り上げようと思います。有界 cohomology については次回にしたいと思います。

第7回 2014年5月21日

前回からまたテーマを元に戻して、写像類群 $\mathcal{M}_g$, それから Riemann moduli 空間 $\mathbb{M}_g$. これに戻って6つの観点から、主観的になると思いますが、topology の課題についてお話しします。今回は unstable cohomology をやりました。

そして前回の続きという事で、今日は有界 cohomology をやります。前回にここまでお話しする予定でしたが、時間が来てしまったので、今日はまずそこからやってその後に tautological algebra の話に入ります。

(3) 有界 cohomology

有界 cohomology というのは Gromov の有名な仕事の1つで1982年, IHES から出た論文ですが、その前に世界中に preprint が出回って、みんなビックリしました。Gromov の仕事は breakthrough が多くて、pseudo-holomorphic curve もそうですが、bounded cohomology についても衝撃がありました。論文の一行目の定義から、初めは意味がよくわからなかったのですが、その後どんどん発展しています。ここでは Gromov の bounded cohomology を写像類群の観点に絞ってお話しします。とは言っても、定義からやります。

X を topological space とします。通常の singular homology は

$$H_*(X; \mathbb{R}) = H_*(S_*(X; \mathbb{R})).$$

singular chain complex を $S_*(X; \mathbb{R})$ と表します。係数は実数、今日は、係数は全部 $\mathbb{R}$ です。singular cohomology は

$$H^*(X; \mathbb{R}) = H^*(S^*(X; \mathbb{R})).$$

これは homology, cohomology の定義なのですが、Gromov は何を考えたかという、 $S^*(X; \mathbb{R})$ の subcomplex として、右下に b , bounded の b を書いて、

$$S^*(X; \mathbb{R}) \supset S_b^*(X; \mathbb{R}).$$

この中の k -cochain, cochain ですから chain 上の function です。 k 次の bounded cochain というのは

$$S_b^k(X; \mathbb{R}) = \{f : S_k(X; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \text{ linear map}; \text{singular } k\text{-simplex } \sigma_k \in S_k(X; \mathbb{R}) \text{ 全体に対して } |f(\sigma_k)| \text{ は bounded}\}$$

$S_k(X; \mathbb{R})$ は singular chain complex なわけですから、 k -chain は singular k -simplex の1次結合になります。bounded というのは、 $|f(\sigma_k)|$, これが bounded. X がもし finite complex で simplicial cochain だけを考えればもちろん bounded ですが、これを singular でやる。この bounded cochain complex の cohomology が bounded cohomology です。

$$H_b^*(X; \mathbb{R}) = H^*(S_b^*(X; \mathbb{R})).$$

この論文に書かれた Gromov の基本定理は、

Theorem 3.4 (Gromov).

1. $H_b^*(X; \mathbb{R}) \cong H_b^*(K(\pi_1 X, 1); \mathbb{R}) \cong H_b^*(\pi_1 X; \mathbb{R})$.
2. $\pi_1 X$ が amenable ならば $\tilde{H}_b^*(\pi_1 X; \mathbb{R}) = 0$.

まず bounded cohomology, これが基本群のみによる。基本群の $K(\pi_1 X, 1)$, 分類空間への分類写像を考えると、それが誘導する写像で同型になる。基本群のみによる。

そして今度群の bounded cohomology があって、ここでは定義はしませんが、群の cochain complex, 群の cohomology があって、そこに bounded という条件を入れて考えます。そうすると純粋に代数的になる。

これが Gromov の基本定理であって、2 番目に基本群が単連結のときというのは、幾何学的に最初に研究すべきものですが、bounded cohomology は自明になる。より強く基本群が amenable ならば自明になる。こういう基本定理を証明しました。群に関するある cohomology 理論ということができます。

この idea が出てからいろいろな人が研究を始めました。特に hyperbolic 群の hyperbolicity, これも Gromov の hyperbolic group という概念がありますが、元々の幾何学的な場合、多分 Thurston だと思いますが、bounded cohomology から通常の cohomology への自然な comparison 写像に関して空間 X が compact negatively curved ならば surjective:

$$H_b^*(X; \mathbb{R}) \twoheadrightarrow H^*(X; \mathbb{R})$$

になります。これは Thurston だと思います。negatively curved な空間の任意の cohomology class は bounded cohomology class で実現される。証明の idea は negatively curved という事を使って geodesic simplex を使います。

一般的な大問題としては、 X , あるいは基本群が与えられたときに、bounded cohomology はどういう部分を表しているか、hyperbolic な所を表していると大雑把には言えますが、

問: $H_b^*(X; \mathbb{R}) \rightarrow H^*(X; \mathbb{R})$ の Kernel, Cokernel について調べなさい。

という問題が挙げられます。沢山の結果がありますが、Lie 群やその discrete subgroup について、いろいろ調べて大きな仕事をしてきたのは Burger, その弟子筋の Monod, スイスのスクールですね。Monod のある survey には、bounded cohomology が完全にわかっているのは amenable 群等の自明な場合だけである、と書かれています。完全にわかっているものは自明な場合以外に 1 つもない。今もそれは変わっていません。

自由群についてわかっているのは、

- $H_b^2(F_2; \mathbb{R})$ は ∞ -dimension.

これは Brooks の極く初期の有名な仕事です。1 次元というのは何もない。じゃあ 3 次元はどうか、ちなみに F_2 であったら F_3, F_4, F_5 , ずっと有るのですが、3 次元は

- $H_b^3(F_2; \mathbb{R})$ は ∞ -dimension.

これは相馬さんの結果です。

comparison 準同型

$$H_b^*(X; \mathbb{R}) \rightarrow H^*(X; \mathbb{R})$$

これは先ほど全くわかっていないといいましたが、写像類群の場合に問題を早めに挙げておきます。comparison map に関して

問: $H_b^*(M_g; \mathbb{R}) \rightarrow H^*(M_g; \mathbb{R})$ の Kernel, Cokernel は何か。

これは大問題です。解決からはほど遠くて具体的な問題で 1 つ結果を出したとしても良い結果だと思います。

写像類群の兄弟みたいなもの、自由群の外部自己同型群、こちらについてはもっとわかっています。一応書いておきます。

問: $H_b^*(\text{Out}F_n; \mathbb{R}) \rightarrow H^*(\text{Out}F_n; \mathbb{R})$ の Kernel, Cokernel は何か。

どの cohomology class が bounded cohomology から来るか、もちろん、 $\text{Out}F_n$ の cohomology がほとんどわかっていますから、いまやっても時期尚早かもしれません。非自明な元の存在はわかっていますが、具体的な形がわかっています。それにしてもこういう問題があります。

さらに Bavard の基本定理というものがありますが、その前に l_1 -homology theory というものがあります。これは bounded cohomology の相棒です。そして、特に simplicial volume というものがあります。任意の space X に対して

$$H_k(X; \mathbb{R}) \ni \alpha \mapsto \|\alpha\| \in \mathbb{R},$$

k 次元 cycle に対して simplicial volume が定義できます。これも bounded cohomology とならんで幾何学的に重要なものです。定義は k -cycle は singular k -simplex の和として表す事ができますが、その係数の絶対値の和を考えます。homology class に対してはそれを実現する cycle の係数の絶対値の和の inf を取ります。そして hyperbolic 多様体の基本類の simplicial volume は hyperbolic volume に proportional という事が、その定数も込めてわかっています。

それと群 Γ があるとその準同型、別の群への準同型 $\Gamma \rightarrow G$ は研究の重要な手段ですが、quasi-homomorphism というのは bounded error を許した準同型。 Γ から $\mathbb{R}$ への Quasi-homomorphism 全体を bounded function で割ったものを

$$QH(\Gamma) = \{f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \text{ quasi-homomorphism}\} / \{\text{bounded function}\}.$$

と書きます。次の系列

$$0 \rightarrow H^1(\Gamma; \mathbb{R}) \rightarrow QH(\Gamma) \rightarrow H_b^2(\Gamma; \mathbb{R}) \rightarrow H^2(\Gamma; \mathbb{R}).$$

これが exact であるというのが、Bavard の定理です。bounded cohomology を勉強するとき、一番最初に勉強すべき事です。

それでちょっとだけ個人的な話をします。1984 年、Gromov の論文が出て 2 年後くらい、月に 1 回くらい松元さんと駒場でテニスをした後に、議論をよくしていました。当時 foliation の事をしていましたが、 $\mathbb{R}^n$ の compact support の homeomorphism 全体の群の homology が自明、

$$H_*(\text{Homeo}_K \mathbb{R}^n; \mathbb{R}) = \mathbb{R}$$

を Mather が証明しました。証明も面白い定理です。

これは b を付けるとどうなるか、bounded にしても成り立つのではないか。30 分くらい議論して証明できてこれを論文にしました。

Theorem 3.5 (松元-森田).

$$H_b^*(\text{Homeo}_K \mathbb{R}^n; \mathbb{R}) = \mathbb{R}.$$

後にも先にも Hahn-Banach の拡張定理を使ったのはこのときだけです。

そのときに群 Γ が uniformly perfect, こういうものを考えました。perfect は任意の元が commutator の積で書ける、ですが、uniformly perfect はある数以下の commutator の積で任意の元が書けるというものです。そしてもし uniformly perfect ならば 2 次の bounded cohomology と通常の cohomology の間の comparison map

$$H_b^2(\Gamma; \mathbb{R}) \rightarrow H^2(\Gamma; \mathbb{R})$$

は inject するという事が証明できました。

そして自由群の次に大事というか、ある意味もっと大事な closed surface の基本群。 $g = 1$ のときは基本群が abel 群で自明ですが、 g が 2 以上のときにどうかという事もいろいろな人の仕事があります。

- $H_b^2(\pi_1 \Sigma_g; \mathbb{R})$ が ∞ -dimension.

これは三松さんの仕事です。3次元ではどうか。

- $H_b^3(\pi_1 \Sigma_g; \mathbb{R})$ も ∞ -dimension.

これは吉田朋好さんの仕事です。これは幾何学的な事を使っています。Thurston の仕事ですが、 Σ_g 上の pseudo-Anosov map による mapping torus を考えます。 Σ_g は 2 次元多様体ですから通常の 3 次元以上のコホモロジーは何もない。comparison map ではなにも引っかかりません。群のある 3 次元的な構造の反映です。 S^1 上の pseudo-Anosov bundle, $\mathbb{Z}$ と $\pi_1 \Sigma_g$ の semi-direct product で $\mathbb{Z}$ は bounded cohomology は自明ですが、一方で幾何学的にはあります。

そのあと相馬さんの仕事。相馬さんはこれは metric が入るのですが、一般には zero の closure が zero ではない、topology が非常に wild だという事を証明しました。

写像類群についてだけ述べます。Endo-Kotschick, 彼らは何を証明したかという、 $\mathcal{M}_g$ は not uniformly perfect. $g \geq 3$ で $\mathcal{M}_g$ は perfect ですが、uniformly perfect ではない。その証明は Gauge 理論を使う深いものです。

その後この方面では藤原耕二さんが独壇場で、藤原さん自身の単著と Fujiwara-Bestvina の共著の仕事が沢山あります。一言で言うと

- $H_b^2(\mathcal{M}_g; \mathbb{R})$ が ∞ -dimension.

その後自明係数だけでなく、twisted 係数など非常に大きな組織的な研究になっています。

写像類群の場合に bounded cohomology から通常の cohomology への

$$H_b^*(\mathcal{M}_g; \mathbb{R}) \rightarrow H^*(\mathcal{M}_g; \mathbb{R})$$

これは藤原さん達の仕事から、injective からはほど遠い。次には image はどうなるかが問題になります。tautological class $e_i \in H^*(\mathcal{M}_g; \mathbb{Q})$ はどうなるか。特性類ですから $H_b^*(\mathcal{M}_g; \mathbb{Q})$ から来るのか来ないのか。奇数次の MMM-classes は $Sp(2g, \mathbb{Z})$ の cohomology から来ますから、Gromov の一般論を使うと奇数次の class e_{odd} は bounded cohomology に lift します。では残りの even ではどうか。これは unknown です。これは面白い問題です。最初は e_2 がどうなるか、 e_2 でできても面白い。 e_2 は Riemann moduli 空間の幾何学の立場からいうと Riemann moduli 空間の第 1 Pontrjagin class です。Riemann moduli 空間の Pontrjagin class が bounded class で書けるかどうか。

bounded cohomology は Lie 群の理論とも絡んでスイスで大きなスクールになっています。興味のある方はいろいろ調べてみるとよいと思います。ここから 2 番目のサブテーマに移ります。

3.2 moduli space の tautological algebra の構造

定義から始めます。写像類群の rational cohomology, 係数は $\mathbb{Q}$ でやります, $H^*(\mathcal{M}_g; \mathbb{Q})$ の subring であって、

$$H^*(\mathcal{M}_g; \mathbb{Q}) \supset \mathcal{R}^*(\mathcal{M}_g)$$

最近 $\mathcal{R}$ で書く事が定着しています。subring であって MMM-classes で生成されるものを tautological algebra と言います。一番最初に考えたのは Mumford で Chow algebra

$$A^*(\mathbb{M}_g)$$

を定義しました。一般に非常に難しい対象ですが, algebraic variety があつたら Chow algebra は定義されます。algebraic な構造を忘れると rational cohomology への準同型

$$A^*(\mathbb{M}_g) \rightarrow H^*(\mathbb{M}_g; \mathbb{Q}) \cong H^*(\mathcal{M}_g; \mathbb{Q})$$

が定まります。右の同型は moduli 空間と写像類群の rational cohomology が同型であることによります。代数幾何の人は $H^*(\mathbb{M}_g; \mathbb{Q})$ で考えます。さて tautological algebra $\mathcal{R}^*(\mathbb{M}_g)$

$$A^*(\mathbb{M}_g) \supset \mathcal{R}^*(\mathbb{M}_g)$$

の定義は $A^*(\mathbb{M}_g)$ の subring で, ここで MMM-classes というこれは rational cohomology ですから, Chow algebra では, kappa classes κ_i で生成されるものです。これは cohomology に落とすと

$$A^*(\mathbb{M}_g) \ni \kappa_i \mapsto (-1)^{i+1} e_i \in H^*(\mathbb{M}_g; \mathbb{Q}).$$

符号だけの問題です。位相的に考えた surface bundle では tangent bundle を考えるのが自然ですが, 代数幾何的にはその dual を考える方が自然です。

Mumford は Chow algebra の構造はどうなるかという問題を提出しました。

$$\mathcal{R}^*(\mathbb{M}_g) \rightarrow \mathcal{R}^*(\mathcal{M}_g),$$

これは定義から全射ですけれども, Kernel がどうなるか。後で Faber 予想というものを出しますが, これが正しいければ同型です。

ある意味簡単ですが, 根本にある Grassmann 多様体の場合に状況を後で説明します。一般の場合には Kernel が無限生成になることもあるようです。一般には wild な空間です。

これについて Faber conjecture というものがあります。1993 年頃からいろいろな集会でしゃべっていて, 実際出版されたのは 1999 年です。詳しくは次回になりますが, tautological algebra $\mathcal{R}^*(\mathbb{M}_g)$ というものが, 非常にきれいな構造をしている。大雑把に言うと

$$\mathcal{R}^*(\mathbb{M}_g) \cong H^*(V^{(g-2)}; \mathbb{Q}),$$

複素 $g-2$ 次元のある仮想の, virtual な projective manifold $V^{(g-2)}$ が存在して, その rational cohomology ring と同型になるだろう。一言で言うとそういう予想です。これはもの凄く強い事を言っていて, projective manifold ですから, Poincaré duality, Hard Lefschetz の性質, κ_1 に関する Hodge の positivity property. これも大きな性質です。こういうものが成り立つだろうという予想です。

1991 年に Bötigheimer という人に招聘してもらって Göttingen に行きました。そのとき Faber, この人は元々 Mumford の弟子で, 彼は Amsterdam にいて, わざわざ Amsterdam から Göttingen まで車で会いに来てくれました。そして三日三晩, Macsyma というソフトでいろいろ g が小さい所から moduli の cohomology に関して実験してました。私は見ているだけでしたが, いろいろな話をして, それから 1,2 年経ったときに, 大変美しいこういう予想を出してきました。

それから 20 年経ちました。20 年 Faber, 彼自身はずっとこれを研究テーマのメインに挙げています。彼と会う度に computer の実験がどんどん進んで来て, $g \leq 23$ まで computer と Faber-Zagier relation を用いて Faber 予想は OK という事を証明しました。Zagier は数論や代数幾何, zeta value など幅広い仕事をしている人です。Faber-Zagier relation というものを提唱しました。これは結構複雑なので, 今日は省略します。Poincaré duality が一番大事ですが, 実際に Faber は $g = 23$ までは Faber-Zagier relation は本当の relation であって,

そこから Faber のフル予想が出てくる事を証明しました。 $g = 23$ というと小さいと思うかもしれませんが、computer の計算からいうともの凄い大きさです。

ここら辺までの動きは全部代数幾何です。ある意味最近の発展はもの凄いのでここで話す事はその氷山の一角、10 分の 1 くらいと思って頂くとよいでしょうか。最近では Gromov-Witten theory, stable map など Faber 予想の一般化がある。あるいは代数幾何では Deligne-Mumford の compact 化や rational tail とか、compact type とか、Faber 予想のいろいろなバージョンがあります。

V というのは 1 番良いのは Riemann moduli 空間の subvariety としてあれば良いのですが、全くわかりません。こう書くと本当に variety があるように思いますが、書かない方がよいのかもしれない。

後で詳しくやりますが、abelian variety の場合、そこでも V の存在はわからない。Grassman 多様体の場合は完全にわかっています。それは Bott-Tu に書いてあります。abelian variety の場合にも tautological algebra の構造は完全にわかっています。しかしその場合も subvariety の存在はわかりません。van der Geer の証明は正標数の代数幾何を使わないと証明できません。ただ Poincaré duality や intersection matrix, top degree での characteristic number, それは次回にお話しします。

その流れで言うと、さらに 2012 年頃に大きな仕事があつて、Pandharipande-Pixton, Pandharipande は Princeton の教授でしたが、最近では ETH にいます。Pixton は初期の仕事で、鈴木正明さんの Torelli 群の Magnus 表現が injective ではないという有名な仕事がありますが、それを一般化して Kernel の元を沢山作るという仕事をしました。今は Clay Research Fellow です。Pandharipande-Pixton は何を証明したかというところ、Faber-Zagier relation が本当の relation である、しかも、それを Chow algebra の段階で証明しました。これは大きな仕事です。まだ出版はされていないようですが、一流のジャーナルに掲載されると思います。

あと topology の方で言いますと、河澄さんと 1990 年代にいろいろな仕事をしました。写像類群のある表現から誘導される cohomology が tautological algebra と完全に一致すること、そしてその具体的な形などが分かりました。tautological algebra を topological な立場から研究したという事ができます。

Oscar Randal-Williams, この人は Tillmann さんのお弟子さんだと思います。この人は topology の立場から、あと Ebert, この人は Bödigheimer の弟子で、topology の観点から仕事をしています。これらのトポロジーの観点からの仕事は Chow algebra ではなく、rational cohomology のレベルです。

一方、2010 年頃から Faber 予想の一番大きな部分、Poincaré duality が本当かなという雰囲気が出てきました。 $g = 24$ のときに、彼らは何を示したかというところ、Faber-Zagier relation だけからは Faber conjecture は出ないという事を実際の計算で示しました。この頃は Faber 予想を信じる立場から、relation が少ない、relation が足りない、と思っていた人も多かったようです。しかし、いろいろな人が努力しましたが一向に見つかりません。そうすると、Faber-Zagier relation が完全だとすると Faber 予想が正しくない、という事が出てきます。

Faber 予想の背景にあるものとして、Grassmann 多様体と abelian variety の場合に、実際には、この場合は Faber 予想とはいいませんが、完璧な形で成り立っています。Grassmann 多様体の場合は Bott-Tu の教科書の後ろの方で、de Rham cohomology, flag manifold を勉強して、Faber 予想が念頭になくても、Grassmann 多様体が如何にきれいかわかり、非常によい勉強になります。私自身もう一度勉強しました。

Grassmann 多様体、 n 次元複素線型空間の k 次元部分空間の全体、

$$G_{n,k} = \{V \subset \mathbb{C}^n; \mathbb{C} - \text{linear subspace, } \dim V = k\},$$

こういうものを Grassmann 多様体といいます。等質空間

$$G_{n,k} \cong GL(n-k, \mathbb{C}) \backslash GL(n, \mathbb{C}) / GL(k, \mathbb{C})$$

の構造も入り、こう言わなくてもわかりますが、複素多様体の構造をもっていて、その実次元は $\dim_{\mathbb{R}} G_{n,k} = 2k(n-k)$ です。特に $k=1$ の時は複素射影空間 $\mathbb{C}P^{n-1}$ です。

この上に tautological bundle

$$\xi \rightarrow G_{n,k}$$

というものがあります。 ξ は k -dimensional vector bundle. これは $V \subset \mathbb{C}^n$ に対して、 V のベクトルを考えれば k 次元 vector bundle になります。それは全体 $\mathbb{C}^n$, $G_{n,k}$ 上の trivial $\mathbb{C}^n$ -bundle に subbundle として入っていて、 quotient bundle が取れる。

$$\xi \rightarrow \mathbb{C}^n \rightarrow Q \rightarrow 0$$

$$c_1(\xi), \dots, c_k(\xi) \in H^*(G_{n,k}; \mathbb{Z})$$

そうすると Chern classes, これは k 次元ですから c_1 から c_k まで、本当は $\mathbb{Z}$ 上で定義できます。 de Rham cohomology でやるときはまず $\mathbb{R}$ でやって、実は $\mathbb{Q}$ 上で OK となります。

言わば tautological class, 特性類なので、Chern class が生成する algebra を Grassmann の tautological algebra とします。すぐにわかる事はこれが全体の cohomology を生成しています。実際どうなるかというと、

$$H^*(G_{n,k}; \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}[c_1(\xi), \dots, c_k(\xi)] / \text{relations}.$$

問題は relation は何か。これが何になるのか、tautological algebra, これは canonical な generator で生成されるものを tautological algebra と言いますので、これは何もしていないようなものです。大事な事は relation を書くという事です。これが非常に簡単に書けてしまう。それは Bott-Tu に書いてある通りで、moduli の cohomology は本当にきれいな module になっています。これも K 理論というか、Atiyah-Hirzebruch, Grothendieck, vector bundle の短完全系列があると、両端を直和すると真ん中になる。

$$\xi \oplus Q \cong \mathbb{C}^n.$$

そして今真ん中は自明な bundle です。Chern classes の定義、Whitney の sum formula から

$$c(\xi)c(Q) = 1.$$

ここで

$$c(\xi) = 1 + c_1(\xi) + c_2(\xi) + \dots + c_k(\xi)$$

です。これが完璧な relation を与えます。すなわち

$$\begin{aligned} c(Q) &= \frac{1}{c(\xi)} \\ &= \frac{1}{1 + c_1(\xi) + \dots + c_k(\xi)}. \end{aligned}$$

formal に展開して右辺をベキ級数で表します。そうすると Chern class が現れますが、完璧な relation はどうなるかというと、relation:

$$\begin{aligned} c_i(Q) &= c_j(\xi) \text{ の polynomial} \\ &= 0 \quad (\forall i > n - k). \end{aligned}$$

こういう有限個の多項式の relation が出ます。これの証明というのはそんなに易しいというわけではありませんが、flag bundle を帰納的に考えていけばできます。Bott-Tu に書いてあります。これは de Rham cohomology を講義したらその後にやると良いと思います。rank を超えたら 0, 非常に自然な relation です。

例えば Euler 数はどうなるかというと,

$$\chi(G_{n,k}) = \binom{n}{k}.$$

Poincaré 多項式は relation の形から

$$P(G_{n,k}) = \frac{(1-t^2) \cdots (1-t^{2n})}{(1-t^2) \cdots (1-t^{2k})(1-t^2) \cdots (1-t^{2n-2k})}$$

分類空間の言葉で言うと, n を無限大に飛ばしますと,

$$G_{n,k} \rightarrow G_{\infty,k} = BU(k),$$

k -次元 vector bundle の分類空間です. これの cohomology はよく知られているように

$$H^*(G_{\infty,k}; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[c_1, \dots, c_k]$$

この分類写像の pullback が

$$H^*(G_{\infty,k}; \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(G_{n,k}; \mathbb{Z})$$

この cohomology になります. この場合は全てがうまく行っています. 残りの時間でちょっとゆっくりと, Riemann moduli 空間の場合が難しいという事が際立ってくる motivation にもなると思うので, abelian variety の場合をやります.

(2) principally polarized abelian variety の moduli 空間.

これは Riemann moduli 空間よりもある意味テクニックが沢山ある. けども非常に難しい. ただ 15 年前に van der Geer が証明しています. それをご紹介します. Riemann moduli との違いをお話します. 先ほども言いましたが van der Geer の証明は正標数の代数幾何を使っていて topological な証明はまだない. ここで 1 つの問題があるという事をご紹介します. 写像類群があると homology への作用を見て,

$$\mathcal{M}_g \rightarrow Sp(2g, \mathbb{Z})$$

ここに全射があります. 群の立場からいうと $Sp(2g, \mathbb{Z})$ を扱っていると言えばよいわけです. abelian variety の moduli の立場から言うと, $\mathcal{M}_g$ は $\mathbb{T}_g$ に働きますが, $Sp(2g, \mathbb{Z})$ は Siegel upper half space $\mathfrak{h}_g$ に働きます. これは matrix のある空間の上半空間です. $\mathcal{M}_g$ の方は $\mathbb{T}_g/\mathcal{M}_g$, こちらの方は通常 $\mathbb{A}_g$ と書いて,

$$\mathbb{A}_g = \mathfrak{h}_g/Sp(2g, \mathbb{Z}),$$

商は代数幾何的にはいろいろありますが, 我々は naive にこれの商だと考えましょう. そうすると rational cohomology はどうなるか. 写像類群の場合と同じで,

$$H^*(\mathbb{A}_g; \mathbb{Q}) \cong H^*(Sp(2g, \mathbb{Z}); \mathbb{Q})$$

tautological class というのは $\mathbb{M}_g$ の場合は MMM-class ですが, この場合の特性類は Chern class が出てきます. principally polarized abelian variety の moduli の特性類としては,

$$Sp(2g, \mathbb{Z}) \rightarrow Sp(2g, \mathbb{R})$$

に入れると maximal compact は unitary 群 $U(g)$. 従って分類空間に移行すると

$$BSp(2g, \mathbb{Z}) \rightarrow BU(g)$$

という写像があって cohomology としては $BU(g)$ には $c_1, \dots, c_g$ があります. これを pullback して

$$c_i \in H^{2i}(Sp(2g, \mathbb{Z}); \mathbb{Q}) \quad (i = 1, \dots, g)$$

となります. 元々 Chern classes は Grothendieck の定義は cycle として与えられているので

$$c_i \in A^{(i)}(\mathbb{A}_g)$$

$\mathbb{A}_g$ の i 次元 cycle の形で定義されます. まず topology の方では

$$H^*(Sp(2g, \mathbb{Z}); \mathbb{Q}) \supset \mathcal{R}^*(Sp(2g, \mathbb{Z}))$$

は $c_1, \dots, c_g$ で生成される $H^*(Sp(2g, \mathbb{Z}); \mathbb{Q})$ の subalgebra. 分類空間 $BU(g)$ 上の universal bundle の pull back, これは通常 Hodge bundle と呼ばれるもので, この Chern class になります. これで生成された rational cohomology の subring をこの場合の tautological algebra と言います.

代数幾何の立場ではこの上に abelian variety の moduli 空間の Chow algebra $A^*(\mathbb{A}_g)$ があって, その subalgebra として定義されます. これがどうなるかというのが, 興味ある所ですが, 調べてみると 15 年前に van der Geer, この人はオランダの有名な代数幾何の人ですが, van der Geer によって解決されています. この論文がどこに出ているかというときさっきの Faber 予想が出ている論文の載っている同じ本の中にあります.

Theorem 3.6 (van der Geer, 1999). $\mathbb{A}_g$ の tautological algebra は

$$\mathcal{R}^*(\mathbb{A}_g) \cong \mathbb{Q}[c_1, \dots, c_g]/relations$$

であって relations は

- $(1 + c_1 + \dots + c_g)(1 - c_1 + c_2 + \dots + (-1)^g c_g) = 1,$
- $c_g = 0.$

こういう 2 つの relations で完全に定まる. van der Geer の Chow algebra レベルでの結果です. rational cohomology のレベルでは次のように言えます. 同じように $\mathbb{Q}$ 上の多項式代数で relation は次のようになります.

$$\mathcal{R}^*(Sp(2g, \mathbb{Z})) = \mathbb{Q}[c_1, \dots, c_g]/relations$$

- $p_i = 0 \quad (\forall i),$
- $c_g = 0.$

こういう 2 つの relation です. 特性類を勉強すると複素 vector bundle の Pontrjagin class はまさに最初の relation の各項になります.

$Sp(2g, \mathbb{Z})$ の rational cohomology は完全には永遠にわからないと思います. いわんや写像類群ではわかりません.

これが 2 つの relation であって, この corollary がものすごいのです. これはもうちょっと古典に属する Borel-Hirzebruch の仕事から始めるのがよいと思います. $p_i = 0$ の部分は位相的にわかるのは, $Sp(2g, \mathbb{Z})$ は, discrete 群です. なので複素 g 次元 vector bundle として考えていますが, $\mathbb{R}$ 上の bundle としては flat です. だから Pontrjagin class が消えるのは当たり前です.

Borel-Hirzebruch は一般論, 松島先生とかいろいろな仕事があつて, relative Lie algebra の cohomology を考えて,

$$H^*(sp(2g, \mathbb{Q}), u(g)) \rightarrow H^*(Sp(2g, \mathbb{Z}); \mathbb{Q})$$

こういう写像があるというのは一般論です. 一般に semi-simple Lie group と discrete subgroup, arithmetic なもの, このときに cohomology を構成しようというものです. もし Lie 群が compact だとすると injective です. しかし今, compact ではありません. end があるので消える可能性があります.

Borel Hirzebruch はこれを計算して

$$H^*(sp(2g, \mathbb{Q}), u(g)) \cong \mathbb{Q}[c_1, \dots, c_g]/(p_i = 0)$$

を証明しています. 具体的に実験してみると面白いと思いますので, 後で時間の許す限りやってみます. そして (会場から指摘のあった通り) これはある compact 多様体の cohomology と同型, additive には $H^*(S^2 \times S^4 \times \dots \times S^{2g})$ と同型であることが示されています (cup 積は違いますが). そして, これから Poincaré duality を満たすという事がすぐにわかります. 例えば Euler 数は $\chi = 2^g$ となり, 次元は $\text{top dim} = g(g-1)$ となります. こういう事が出てきます.

残りの $c_g = 0$ という relation はどこから出てくるかという, それをやったのは Sullivan の一般論です. Sullivan は何をしたかと言いますと, Euler class

$$e = 0 \in H^{2n}(GL_+(2n, \mathbb{Z}); \mathbb{Q}).$$

$2n$ 次元の実 vector bundle で構造群が $GL_+(2n, \mathbb{Z})$ のものの Euler class は torsion はあるかもしれないが, rational には 0. 一方で c_g はよく知られているように Euler class ですから, 2 番目の relation は Sullivan です.

これが実際 tautological algebra の構造を与えるというのが, van der Geer の仕事です. これで尽きるという事はわからない, まだ relation があるかもしれない. これで尽きるという事は, 彼の証明を見ると abelian variety の moduli 空間, $A_g \otimes \mathbb{Z}/p$, 標数 p 上の moduli というものがあつて, ここに $\frac{1}{2}g(g-1)$ 次元の complete subvariety がある. 当たり前のように書いてあつて引用もないのでこれは代数幾何の人には非常にわかりやすいもののようです. 標数 0 で $\frac{1}{2}g(g-1)$ 次元の complete subvariety があるというのは望みが薄い, それは難しい. だけど標数 p にすると存在するということのようです. もう一つは c_1 が ample. ample ですから最高次のベキまで持っていくと 0 ではない. subvariety があれば c_1^{g-1} は 0 ではない. 全ての p に関してあるから, $\mathbb{Q}$ 上でも正しい.

何れにしてもここで一つ問題として出てくるのは, subvariety の存在はというのはできないが,

問: topology でこれ以上 relation がない事を証明できないか?

です. 実際 rational cohomology でやっているわけですから, topology の一般論であつて, subvariety は望めないが, rational な cycle はある. あまりきれいな形はしていないでしょうが, 例えば g が小さいときには出来るのではないか. $g = 2$ のとき, Dupont さんや Ronnie Lee さんの仕事があります. 写像類群の場合 $g = 2$ では torsion ですが, $g \geq 3$ で c_1 は stable ですからずっと 0 ではないですが, ベキがどこまで 0 でないか, $c_1^{\frac{1}{2}g(g-1)}$ が 0 でないかということを証明しなくてはなりません. $g = 3$ のときは $c_1^3 \neq 0$ を証明しなくてはなりません. 段々難しくなってきます. abelian variety の場合には van der Geer の定理で, 代数幾何的にはわかっていますが, 写像類群のときはどうか. Faber 予想が出たときには abelian variety の場合はまだ出来ていなかったと思います. Faber 予想は同じ本に出ていますが, 予想自体は前からありますので.

最後に $g = 4$ でどんな感じになるか, やってみます. $\mathcal{R}^*(Sp(8, \mathbb{Z}); \mathbb{Q})$ の元で generators は

$$c_1, c_2, c_3, c_4$$

とあって、まず Sullivan の結果から

$$c_4 = 0.$$

残りの relation は唯 1 つで

$$(1 + c_1 + c_2 + c_3)(1 - c_1 + c_2 - c_3) = 1.$$

左辺を展開すると

$$1 + 2c_2 - c_1^2 + c_2^2 - 2c_1c_3 - c_3^2 = 1.$$

各次数でみると

- degree=4: $2c_2 - c_1^2 = 0 \Leftrightarrow p_1 = 0.$
- degree=8: $c_2^2 - 2c_1c_3 = 0$
- degree=12: $c_3^2 = 0.$

一般の g で $c_g = 0$ という relation を取る前の段階で additive basis は

$$c_1^{\epsilon_1} c_2^{\epsilon_2} \cdots c_{g-1}^{\epsilon_{g-1}} c_g^{\epsilon_g} \quad (\epsilon_i = 0, 1)$$

これは elementary ですが、おもしろい計算です。そうすると top cohomology は $c_1 c_2 \cdots c_{g-1}$ で生成されて、Poincaré duality が成り立つ。また top の所で intersection number の公式も出ます。

これの Riemann 面の moduli 空間の場合にどうなっているか、relation は大変難しくなって、Faber-Zagier relation と呼ばれる relation の族が提示されて、これを中心に研究が進んで来ました。これがすべての relation を与えているのではないか、という期待が一時あったようですが、最近はそうではないかもしれないという流れが出ている。具体的には $g = 24$ で崩れている可能性が Faber や Pandharipande によって指摘されています。代数幾何の立場では上の Chow algebra で考えていますが、topology の立場で rational cohomology だけで考えると、可能性としては

$$\mathcal{R}^*(\mathbb{M}_g) \rightarrow \mathcal{R}^*(\mathcal{M}_g)$$

が $g = 24$ で inject しないかも知れません。そうすると我々 topology にはチャンスで、代数幾何的には relation にならないが、topological にはなるのではないか、kappa-classes のある多項式が rational cohomology としては 0 なのだけれども、algebraic cycle としては 0 にならない、そういう事があるのではないか。そこら辺りは代数幾何にとっても 2 年くらい前から大きな mystery になっています。これに対して位相的にもかしたら approach があるかもしれません。

第8回 2014年6月18日

moduli space の tautological algebra の構造の 2 回目です。前回 (1),(2) とやりましたので今日は (3) からです。

(3) tautological algebras of $\mathbb{M}_g, \mathcal{M}_g$.

Riemann 面の moduli 空間 $\mathbb{M}_g$ は代数幾何的設定, 写像類群 $\mathcal{M}_g$ は topological な設定です。Notation からやしましょう。tautological algebra は $\mathcal{R}$ で書く事が定着しています。これは定義で

$\mathcal{R}^*(\mathbb{M}_g) := \text{subalgebra of } A^*(\mathbb{M}_g) \text{ generated by } \kappa_i \in A^i(\mathbb{M}_g), i = 1, 2, \dots$

これは Mumford が定義した Chow algebra, 元々 non-singular な場合は Chow が定義して, mild な singularity がある場合にも Mumford が Chow algebra の定義を拡張しました。algebraic cycle をある relations で割ったものです。代数幾何的には余次元 i の cycle, topological には余次元 $2i$ の cycle です。

topological な analogy というか, 代数幾何の人も考えていますが,

$\mathcal{R}^*(\mathcal{M}_g) := \text{subalgebra of } H^*(\mathcal{M}_g; \mathbb{Q}) \text{ generated by } e_i \in H^{2i}(\mathcal{M}_g), i = 1, 2, \dots$

従って cohomology への forgetful map, 全射

$$\mathcal{R}^*(\mathbb{M}_g) \rightarrow \mathcal{R}^*(\mathcal{M}_g)$$

があつて, $A^*(\mathbb{M}_g)$, こちらは難しいですが, $H^*(\mathcal{M}_g; \mathbb{Q})$, こちらは我々にはなじみのある cohomology の subalgebra になります。

$$\kappa_i \mapsto (-1)^{i+1} e_i$$

で対応します。 e_i は $\mathbb{Z}$ 上定義されていますが, tautological algebra は通常 $\mathbb{Q}$ 上で考えます。topological には次数が 2 倍になります。符号だけの違いです。この構造を調べるというのが問題です。

歴史的には Mumford が tautological classes を定義して, 今日のテーマは Faber 予想がどのように提出されて何がわかってきたのか, survey してそれに topological な approach があるのではないかという事をお話します。前回の内容をちょっと復習します。

(1) では Grassmann 多様体 $G_{n,k}(\mathbb{C}), \mathbb{C}^n$ 中の k 次元部分空間全体を考えました。

分類空間を考えると $G_{n,k}(\mathbb{C})$ 上に k 次元複素 vector bundle, tautological bundle $\xi \rightarrow G_{n,k}(\mathbb{C})$ があつて, 分類空間 $BU(k)$ へ写像

$$G_{n,k}(\mathbb{C}) \rightarrow BU(k)$$

があります。cohomology に移ると全射が存在して, これは $\mathbb{Z}$ 上でやると

$$H^*(G_{n,k}(\mathbb{C}); \mathbb{Z}) \leftarrow H^*(BU(k); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[c_1, \dots, c_k].$$

$H^*(BU(k); \mathbb{Z})$ は Chern classes で生成される多項式代数です。この image がどうなっているか, 具体的に generators と relations で書くとうなるか。答えは, generators は明らかに $c_1, \dots, c_k$ ですが, relation が完全にわかっていて, tautological bundle $\xi \rightarrow G_{n,k}(\mathbb{C})$ は自然に trivial bundle の subbundle ですから, その quotient bundle を Q とします。ここから出てくる relation が完全で

$$c(\xi)c(Q) = 1$$

です。relation を具体的にどう書くかというと,

$$c(Q) = \frac{1}{c(\xi)}$$

を formal に展開するとべき級数になりますが, quotient bundle の Chern classes が消える,

$$c_i(Q) = 0 \ (\forall i > n - k)$$

これが完全な relation になる. 古典的なプロトタイプになるきれいな結果です. Bott-Tu の教科書にも書いてあります. これは標準的なプロトタイプです.

2 番目 (2) はもう少し難しくて, principally polarized abelian variety の moduli $\mathbb{A}_g$ の場合です. この場合は答えから言うと, 1999 年. 後で Faber 予想を出しますが, その Faber の論文が載っている有名な本, moduli of curves, その中の論文に書いてある van der Geer の定理です.

orbifold fundamental group は $Sp(2g, \mathbb{Z})$ ですから,

$$\mathcal{R}^*(\mathbb{A}_g) \rightarrow \mathcal{R}^*(Sp(2g; \mathbb{Z})) \leftarrow H^*(BSp(2\infty; \mathbb{Z}); \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}[c_1, c_3, c_5, \dots].$$

無限 rank の symplectic 群の cohomology から全射があるというのは定義で, Borel の定理によって $H^*(BSp(2\infty; \mathbb{Z}); \mathbb{Q})$ は多項式代数 $\mathbb{Q}[c_1, c_3, \dots]$ になります. Borel の基本定理です. ここで c_2 や他の偶数次がないのは, zero になるのではなく, Pontrjagin classes がゼロである事から, 他の奇数次の Chern classes で書けてしまいます.

この image がどうなるかというと,

$$\mathcal{R}^*(\mathbb{A}_g) \cong \mathcal{R}^*(Sp(2g; \mathbb{Z})) \cong \mathbb{Q}[c_1, c_2, c_3, \dots] / \text{two relations}$$

2 つの relation を与えたのが van der Geer です.

1 番目の relation は topological に言うと, まず Pontrjagin class が zero.

$$(1). (1 + c_1 + \dots + c_g)(1 - c_1 + c_2 - \dots + (-1)^g c_g) = 1.$$

Chern class というのは元々 algebraic cycle ですから, Grothendieck の定理でこういう relation があります.

2 番目が top の Chern class がゼロ.

$$(2). c_g = 0.$$

この 2 つの relation で完全に見える. topological には rational cohomology ですが, van der Geer はもっと強く Chow algebra level でこれを証明しました. 従って,

$$\mathcal{R}^*(\mathbb{A}_g) \cong \mathcal{R}^*(Sp(2g; \mathbb{Z})).$$

これが結局どういう compact な多様体の cohomology algebra と同型かというと, 前回河澄さんからコメントがあり, その後高倉さんが調べてくれました. 結局これは $H^*(Sp(g-1)/U(g-1); \mathbb{Q})$ と同型で, 従って, もちろん Poincaré duality が成立します. これが復習です.

3 番目に Riemann 面の moduli についてはどうなるか, これについて Faber 予想が提出されました. 1993 年に提出し, ちゃんと書かれた, publish されたのは 1999 年で先ほど挙げた本の中に書かれました. まだ未解決な所があるので, 詳しく元の予想から書いていきます. 予想は 3 つに分かれています. Faber は代数幾何学者ですから Chow algebra の言葉で書いています.

Faber conjecture

1.

$$\mathcal{R}^*(\mathbb{M}_g) = \begin{cases} 0 & (* > g-2), \\ \mathbb{Q} & (* = g-2). \end{cases}$$

$$\mathcal{R}^k(\mathbb{M}_g) \times \mathcal{R}^{g-2-k}(\mathbb{M}_g) \rightarrow \mathcal{R}^{g-2}(\mathbb{M}_g) \cong \mathbb{Q} : \text{perfect}$$

2. $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_{[\frac{g}{3}]}$ generate $\mathcal{R}^*(\mathbb{M}_g)$.

3. intersection number formula.

最初は tautological algebra が

$$\mathcal{R}^*(\mathbb{M}_g) = \begin{cases} 0 (* > g-2), \\ \mathbb{Q} (* = g-2). \end{cases}$$

これが最初の予想です。さらにこれは cup 積, 代数幾何的には intersection ですが, k 次の cycle と complementary な $g-2-k$ 次の cycle, まず予想ですが, $\mathcal{R}^{g-2}(\mathbb{M}_g) \cong \mathbb{Q}$?, これは $\mathbb{Q}$ か. Faber は最初から信じていたようです. genus が小さい所ではわかっていたのですが, genus は 5 くらいです. それでこれを予想するのはかなり大胆だったと思います. そしてこの pairing が perfect, Poincaré duality を満たす. 代数的には tautological algebra は Gorenstein algebra か?. 初めからこれが一番深い予想と言われていましたが, 今でもこれだけが残っています.

2 と 3 は完全に解決されました. 2 番目は $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_{[\frac{g}{3}]}$, これで $\mathcal{R}^*(\mathbb{M}_g)$ は生成されるだろう, そしてこれより下の degree では no relation です. この $\frac{g}{3}$ は Harer stability から出てくる $\frac{g}{3}$ です. また $g-2$ というのは Diaz という人の仕事で, complete な subvariety の次元が $g-2$ を超えないというのが根拠です.

3 番目は intersection number の formula です. これは非常に組み合わせ的でおもしろい公式です. これにはまだ topological な証明がありません. 我々にも challenging です. 代数幾何的な証明が 3 つあります. Poincaré duality を仮定しますと, 有理数を与える. どうやって見つけたかという, 論文を見ても書いてありますが, 元々 Witten のみんなビックリした論文がありますよね. Deligne-Mumford compact 化で tautological classes を積分して g を全てにわたるときに, 今では Kontsevich の定理ですが, ほとんど信じ難いような事が成り立つと言いました. 結構複雑な式です. これは Witten の notation ですが, $g-2 = d_1 + \dots + d_k$, partition があつたときに,

$$\langle \tau_{d_1+1} \tau_{d_2+2} \dots \tau_{d_k+1} \rangle = \frac{(2g-3+k)!(2g-1)!!}{(2g-1)! \prod_{j=1}^k (2d_j+1)!} \kappa_{g-2}$$

これにもう 1 つ別な解釈を与えて, そこから intersection number が定まる. それが Faber の本質的な予想です. 組み合わせ的にはよく出てきますが, どうなるかという k 個の数に, 一つ partition を固定する毎に対称群が作用します.

$$\langle \tau_{d_1+1} \tau_{d_2+2} \dots \tau_{d_k+1} \rangle = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \kappa_\sigma.$$

そこで κ_σ というのは何かというと

$$\kappa_\sigma = \kappa_{|\alpha_1|} \kappa_{|\alpha_2|} \dots \kappa_{|\alpha_{\nu(\sigma)}|}.$$

長さが $|\nu(\sigma)|$ として permutation σ を cycle で書くと

$$\sigma = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{\nu(\sigma)}$$

$|\alpha_i|$ は α_i は cycle ですから, その cycle に出てくる d_i たちの和です. 全部足すと $g-2$ になって, 丁度ぴったり合います. これが intersection の予想として提出されました.

ここから全然自明ではないのですが, 全ての k の階乗の relation があつて, 全部集めると, intersection が決まるというわけです. この辺りから Faber は Zagier と一緒に研究をするようになって, Zagier はもしこの予

想が正しいとすると, tautological classes の monomial と κ_{g-2} との proportionality が即座に出てくると, 言ったそうです.

$$\kappa_1^{g-2} = \frac{1}{g-1} 2^{2g-5} ((g-2)!)^2 \kappa_{g-2}.$$

例えばこういうものが出てきます.

一般に $\kappa_1, \kappa_2, \dots$ の $g-2$ 次の monomial が有ったら, それと κ_{g-2} との proportionality が出てくる. けどこれは極初期の事です.

現状はどうなっているかといいますと, まず最初に証明されたのは Looijenga の仕事, 1995 年の有名な Inventiones に出た論文です. 彼は何を証明したかという, 予想の (1) の最初の部分です.

Theorem 3.7 (Looijenga).

$$\mathcal{R}^*(\mathbb{M}_g) = \begin{cases} 0 & (* > g-2) \\ 0 \text{ or } \mathbb{Q} & (* = g-2) \end{cases}$$

topology の立場から言うと, これは未だ topological な証明はないのです. 代数幾何的には, この論文自体が 10 ページ前後だったと思いますが, cycle の intersection が空集合になる. topological にはどうしてそうなるのか, 全くわからない. 最初のやつ, $* = g-2$ で 0 or $\mathbb{Q}$ を証明しました. これを見て Faber は直ちに, 0 or $\mathbb{Q}$ は $\mathbb{Q}$ と top の所を決定しました. 実際はもっと強く,

$$\kappa_{g-2} \neq 0$$

を証明しました. これは publish されていなくて preprint しかありません.

Theorem 3.8 (Faber).

$$\mathcal{R}^{g-2}(\mathbb{M}_g) \cong \mathbb{Q}.$$

$$\kappa_{g-2} \neq 0.$$

この時点で, 予想の提出から 2 年後にここまで証明されました. それで結局結論から言うと 1 番だけが残っています. 2 は $e_1, e_2, \dots, e_{[\frac{g}{3}]}$ generate $\mathcal{R}^*(\mathcal{M}_g)$ を cohomology level で証明しました. これは私の結果です. わかったのは 1998 年で出版は 2003 年です. これについては今日の後半でお話します. もっと強い Chow algebra の level で $\kappa_1, \dots, \kappa_{[\frac{g}{3}]}$ が生成する. これは Ionel という代数幾何, symplectic geometry の人, 今は Stanford にいる女性の結果です. 2003 年の結果で出版は 2005 年です. Duke M. J. に出ました. Chow algebra level で正しい事を証明しました. それから no relation というのは Harer stability というものがありますが, その一番微妙な所について, 強くした improved Harer stability というもの, これは Boldsen の仕事があつて, それによってほとんど証明されていました. なので, 2 は 2003 年の時点で証明されました.

3 番目ですが, 3 番目はいつ証明されたかという, これも比較的早い段階で, 3 つの証明があります. 1 番最初に証明したのは, Givental で代数幾何というか Gromov-Witten theory というか, 2001 年に Gromov-Witten theory のある予想, これは Eguchi-Hori-Xiong の予想で, 各 variety 毎に stable map に関する予想ですが, これを $\mathbb{C}P^2$ に対して証明して, その corollary として Faber 予想の 3 が出てきます. この論文は Moscow Math. J. に出ました. もっと具体的な証明が Liu-Xu, 中国の人です. いろいろな観点から証明がありますが, 一番最近のは Buryak-Shadrin, 2011 年, Adv. Math. に論文は出ています. それぞれ利点があり, 完全に証明されました.

というわけで, 残ったのは Faber の perfect pairing 予想

$$\mathcal{R}^k(\mathbb{M}_g) \otimes \mathcal{R}^{g-2-k}(\mathbb{M}_g) \rightarrow \mathcal{R}^{g-2}(\mathbb{M}_g) \cong \mathbb{Q} : \text{perfect}$$

だけです。これが正しいかどうかは mystery になっています。言い換えると tautological class の k 次の monomial があって、相棒の monomial と cup して全部ゼロだったら、 $\mathcal{R}^k(\mathbb{M}_g)$ でゼロだろうという予想です。これが非常に難しい。

先取りすると、相棒の cohomology と cup して zero だったら cohomology が 0 だろう。この方が少しは易しくなります。この perfect pairing 予想ですが、Faber 自身が最初 computer と理論的なものを組み合わせて、1993 年以来、1999 年の論文の時点で $g \leq 15$ まで OK、Faber 自身が本に書いています。

質問:rank の計算はどうなっているのでしょうか?

rank の計算も微妙です。rank の具体的な表示が得られるかという微妙で、非常に組合せ的に複雑なものがある、組合せ的な難しさ、topological な難しさ、代数幾何的に深い cycle の難しさが絡み合っています。relation が今の所足りない、だけど $g \leq 15$ まで OK で、2005 年 3 月に Stanford で集会があって、そこで Faber に会って聞いたのですが、 $g \leq 21$ まで OK と言っていました。ただそれは 2 年前だと言っていましたから、2003 年ですね。その次は 2010 年で $g \leq 23$ まで OK、Faber 自身が証明しています。現状はここまでです。

問題は $g = 24$ で何かが起こっているのか? が現状です。もう少し詳しく言うと、Faber-Zagier relation という複雑な relation があって、これは次回に回したいと思います。Faber と Zagier はこういう relation が成り立つだろうという relation の set, system を提出しました。そして、 $g = 23$ まではこれが実際に relation である事を証明して、なおかつそこから Poincaré duality が成り立つ事を証明しました。

さらに、これが本当の relation だというのが、最近 2011 年の Pandharipande-Pixton の結果です。Pandharipande は元 Princeton の教授ですが、3 年程前に ETH に移りました。最近では決定的な仕事です。出版は未だで、preprint の段階です。Pixton は最初 Torelli 群の Magnus 表現の kernel の元を構成するという topology の仕事もありますが、いまは完全に Gromov-Witten theory、この分野の人です。この人たちによって 2012 年に完全な relation である事がわかって、 $g = 24$ のときは何がわかったかという、Faber-Zagier relation では不十分である。これだけからは Poincaré duality が出てこない。

流れが変わったと思った人もいます。 $g = 23$ というのは小さいようですが、rank としては結構大きいです。abelian variety の moduli の事もあります。なので予想は成立したら良いかな、くらいにはなっていたと思います。しかしこの relation が足りないという事から流れが変わったようにも見えます。

可能性としては 3 つくらいありまして、

(1). Poincaré duality は $\mathcal{R}^*(\mathbb{M}_g)$ では成り立たない。

これが 1 つ、こちらに流れている。但しこれを証明しようとする、Faber-Zagier relation が完全な relation であることを証明しなくてはなりません。相棒の intersection を取ったら zero なのにそれが生き残っている、それが cohomological には zero なのに、algebraic cycle では残っている事を証明しなくては行けない。closed ではないので、相棒といっても virtual な相棒です。それは非常に難しいです。

2 番目の可能性としては

(2). Faber 予想は正しい。

その場合には新しい relation が必要です。これについては Faber さんも込めて、topologist の中でもいろいろな人が、いろいろ try して新しいものを見つけると、Faber さんや Pandharipande に送ると、パッケージがあつてチェックしてくれます。この 2,3 年の試みは全て今までのものに帰着されています。今までの構成では出ない新しい relation を作らなくては行けない。

3 番目は

(3). 全射 $\mathcal{R}^*(\mathbb{M}_g) \twoheadrightarrow \mathcal{R}^*(\mathcal{M}_g)$ は not injective ではないか。

not injective なら即 Faber 予想は $\mathcal{R}^*(\mathbb{M}_g)$ では成り立たない事が直ちにわかります。

しかし, $\mathcal{R}^*(\mathcal{M}_g)$ では Faber 予想が成り立つ可能性がある. injective ではなくて, cohomology level では Faber 予想が成立するとなると topologist の活躍の場が出てきます. チャンスが出てきます. 代数幾何的には relation ではないのに, topological には relation になっている. new relation in cohomology を見つける必要があります.

最後は Faber 予想は両方とも正しくない. $\mathcal{R}^*(\mathcal{M}_g)$ でも予想は成り立たず, $\mathcal{R}^*(\mathbb{M}_g) \rightarrow \mathcal{R}^*(\mathcal{M}_g)$ も injective ではない. これは一番難しい状況で, ここでも 2 つに別れて Faber-Zagier relation は完全である, あるいは, 完全ではなくて, cohomology では relation があって代数幾何的にはない. しかし Poncaré duality には足りない. mystery です.

$g = 24$ のときは, 具体的に relation は書き下されていて Poincaré duality が成立するには 1 次元だけ足りない. そういう状況にあります.

それに対して topological な approach を考えたい.

moduli が general type になるというのが $g = 24$ 辺りからだった気がします. 昔良く話題にしていたと思いますが.

$g = 24$ で違うというのは, Harris-Mumford の仕事, Riemann 面の moduli 空間の小平次元が関係あるかもしれません. g が大きいと general type になる. g が小さい所で, 小平次元がわからないものが残っていますが, 上の方で全部決定されました. 何か関係あるかもしれません.

topological には approach があるかもしれません. topological approach があるのかな, というのは今の所淡い期待です. Faber-Zagier relation と対称群的なものが出てくる似た relation があるのですが, 一番可能性としては Faber-Zagier relation が本当の relation で, それはもちろん Chow algebra level で証明されていますが, その topological な証明ができるかなと, それを紹介したいのです. 淡い期待はそれが Faber-Zagier relation の cohomological な relation になって, さらに新しい relation になる, Faber 予想の証明になるかなというもの. 対称群の表現からどうなるか.

出発点は河澄さんとの共同研究です. それについて残りの時間で紹介します. これはまず 1 点 puncture の写像類群 $\mathcal{M}_{g,*}$, これは universal family の orbifold fundamental group と思うのがよくて, 群 version では

$$1 \rightarrow \pi_1 \Sigma_g \rightarrow \mathcal{M}_{g,*} \rightarrow \mathcal{M}_g \rightarrow 1$$

群の extension としては曲面の基本群による extension になります.

Johnson の第 1 準同型

$$\mathcal{I}_{g,*} \rightarrow \Lambda^3 H$$

を写像類群全体に拡張すると,

$$\mathcal{M}_{g,*} \rightarrow \frac{1}{2} \Lambda^3 H \rtimes Sp(2g; \mathbb{Z})$$

となります. ここで $H = H_1(\Sigma_g; \mathbb{Z})$, あとでは $\mathbb{Q}$ 上にして考えます.

こういう表現を作ったわけです.

$$\begin{array}{ccc}
\pi_1(\Sigma_g) & \longrightarrow & H \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{M}_{g,*} & \longrightarrow & \frac{1}{2}\Lambda^3 H \rtimes Sp(2g, \mathbb{Z}) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{M}_g & \longrightarrow & (\frac{1}{2}\Lambda^3 H/H) \rtimes Sp(2g, \mathbb{Z})
\end{array}$$

となります. $H \rightarrow \frac{1}{2}\Lambda^3 H$ は $u \mapsto u \wedge \omega_0$ で定義されます.

これは cohomology に移ると, 矢印は逆向きに, 右から左になって

$$H^*(\mathcal{M}_g; \mathbb{Q}) \rightarrow H^*(\mathcal{M}_{g,*}; \mathbb{Q})$$

は injective である事がわかります. この cohomology はどこから来るかというと, 半直積の cohomology なので, Sp の cohomology, それも含めて全部 $\Lambda^3 H$ から来る事がわかったわけです. $\Lambda^3 H$ は幾何学的には中間 Jacobi 多様体の基本群です.

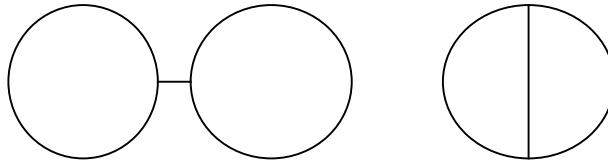
下の方では

$$\begin{array}{ccc}
H^*(\mathcal{M}_{g,*}; \mathbb{Q}) & \longleftarrow & H^*(\Lambda^3 H; \mathbb{Q})^{Sp} \\
\uparrow & & \uparrow \\
H^*(\mathcal{M}_g; \mathbb{Q}) & \longleftarrow & H^*(\Lambda^3 H/H; \mathbb{Q})^{Sp}
\end{array}$$

こういうものを作ったわけです. これが表現, Sp -表現, Weyl の基本定理を使うと exterior algebra の中の Sp -不変テンソルを取りだす. これが Weyl の一般論の特別な場合です. これは次のようにグラフの言葉で書ける.

$$\begin{array}{ccc}
H^*(\mathcal{M}_{g,*}; \mathbb{Q}) & \xleftarrow{\alpha} & H^*(\Lambda^3 H; \mathbb{Q})^{Sp} \cong_{\text{stably}} \mathbb{Q}[\Gamma; \Gamma \in \mathcal{G}] \\
\uparrow & & \uparrow \\
H^*(\mathcal{M}_g; \mathbb{Q}) & \xleftarrow{\beta} & H^*(\Lambda^3 H/H; \mathbb{Q})^{Sp} \cong_{\text{stably}} \mathbb{Q}[\Gamma; \Gamma \in \mathcal{G}_0]
\end{array}$$

$\mathcal{G}$ と書いたら連結な trivalent graph の全体. stable に g を大きくしていくと同型になる. 0 を付けたのは連結な trivalent graph で without loops.



鉄アレイと θ -curve の図

この 2 つはともに $\mathcal{G}$ に含まれますが、 $\mathcal{G}_0$ には θ -curve だけ含まれます。これは自然に $\mathcal{G}_0$ は $\mathcal{G}$ の部分集合、だから自然に injection がありますが、これは twisted embedding です。subset である事から来る自然な embedding ではなく twisted embedding です。

ある時期、1995,6 年頃 graph の多項式代数は次元が大きく、MMM-class の生成する多項式代数はそれに比べては次元が大きくないので、新しい特性類があるかと思ったのですが、ないと言ったのは河澄さんの理論があつて、generalized MMM-classes と呼んでくれたものです。その結果を使うと全部 tautological classes で書ける事がわかりました。

それをまとめてみますと、formula もまとめてここで書いておきます。1 点付きの場合の $\mathcal{R}^*(\mathcal{M}_{g,*})$ を定義していませんでしたが、この場合 Euler class も出てくるので、Euler class と tautological classes で生成される subalgebra として定義します。

Theorem 3.9 (Kawazumi-Morita).

1. 任意の g に対して

$$Im(\alpha) = \mathcal{R}^*(\mathcal{M}_{g,*}),$$

$$Im(\beta) = \mathcal{R}^*(\mathcal{M}_g).$$

2. formula for

$$\alpha_\Gamma \in \mathbb{Q}[g][e, e_1, e_2, \dots],$$

$$\beta_\Gamma \in \mathbb{Q}[g][e_1, e_2, \dots].$$

ここで $\mathbb{Q}[g][e, e_1, e_2, \dots]$ は g の多項式を係数とした $e, e_1, e_2, \dots$ の多項式代数です。こういう事を証明しました。 $\alpha_\Gamma, \beta_\Gamma$ の公式は、簡単に一言で言える感じではなくて係数が結構複雑です。

その次にこれともう一つの観点、 Sp の表現論を使うと、別の証明を与える事ができて、それを比べる事が大事になってきます。

それはまず $\mathcal{M}_{g,*}$ action on $\pi_1 \Sigma_g$. $\mathcal{M}_{g,*}$ は $\pi_1 \Sigma_g$ へ作用します。そして、second nilpotent quotient of $\pi_1 \Sigma_g$. これはどういうものかという、 $\Lambda^2 H / \langle \omega_0 \rangle \tilde{\times} H$, これが second nilpotent quotient でこれが誘導するのがさっきの homomorphism です。 $\Lambda^2 H / \langle \omega_0 \rangle \tilde{\times} H$ への作用を考えます。ここで $\Lambda^2 H / \langle \omega \rangle$ は Yong 図形でいうと $[1^2]_{Sp}$ に対応します。さっきの homo これは 2-step nilpotent ですが、Johnson 準同型の言葉で言うと第 2Johnson 準同型です。Johnson 準同型の理論はその後、河澄さん、久野さんの理論へと続いています。ここではもう 1 つ次の段階の作用を考えます。これは Torelli part と名前を付けていますが、最初にこれが大事だと言い出したのは Hain さんです。 $[2^2]_{Sp}$ を Hain さんは「田んぼ」と呼んでいます。最初何の事かわかりませんでした。

$$\begin{array}{ccc} \pi_1 \Sigma_g & \longrightarrow & [1^2]_{Sp} \tilde{\times} H_{\mathbb{Q}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{M}_{g,*} & \longrightarrow & (([1^2]_{Sp}^{\text{torelli}} \oplus [2^2]_{Sp}) \tilde{\times} \Lambda^3 H_{\mathbb{Q}}) \rtimes Sp(2g, \mathbb{Q}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{M}_g & \longrightarrow & ([2^2]_{Sp} \tilde{\times} (\Lambda^3 H_{\mathbb{Q}} / H_{\mathbb{Q}})) \rtimes Sp(2g, \mathbb{Q}). \end{array}$$

ここからは全て $\mathbb{Q}$ 上で考えます。ここで $\Lambda^3 H_{\mathbb{Q}}$ は第 1Johnson 準同型、 $([1^2]_{Sp}^{\text{torelli}} \oplus [2^2]_{Sp})$ は第 2Johnson 準同型の行き先です。

$$\pi_1 \Sigma_g \rightarrow \mathcal{M}_{g,*} \rightarrow \mathcal{M}_g$$

と書くと非常にすっきりしていますが, 非常に難しいですね. そこでどんどん複雑になったように見えますが,

$$[1^2]_{Sp} \times H_{\mathbb{Q}} \rightarrow (([1^2]_{Sp}^{\text{torelli}} \oplus [2^2]_{Sp}) \times \Lambda^3 H_{\mathbb{Q}}) \rtimes Sp(2g, \mathbb{Q}) \rightarrow ([2^2]_{Sp}^{\text{torelli}} \times (\Lambda^3 H_{\mathbb{Q}}/H_{\mathbb{Q}})) \rtimes Sp(2g, \mathbb{Q})$$

に行くと線型代数群という構造をもっていて cohomology の計算は可能になります. cohomology に移ると新しい特性類ではないかというのがダメになった理由がもう少しはつきりしてきます. cohomology に移って

$$H^*(\mathcal{M}_{g,*}; \mathbb{Q}) \leftarrow (H^*(\Lambda^3 H_{\mathbb{Q}})/([1^2]_{Sp}^{\text{torelli}} \oplus [2^2]))^{Sp},$$

中心拡大ですから cohomology をたんぼの作る ideal で割って, さらに Sp -不変 part を取ります. こうなってきた

$$\begin{array}{ccc} H^*(\mathcal{M}_{g,*}; \mathbb{Q}) & \longleftarrow & (H^*(\Lambda^3 H_{\mathbb{Q}})/([1^2]_{Sp}^{\text{torelli}} \otimes [2^2]))^{Sp} \\ \uparrow & & \uparrow \\ H^*(\mathcal{M}_g; \mathbb{Q}) & \longleftarrow & (H^*(U_{\mathbb{Q}})/([2^2]_{Sp}))^{Sp} \end{array}$$

但し $U_{\mathbb{Q}} = \Lambda^3 H_{\mathbb{Q}}/H_{\mathbb{Q}}$. こういう diagram が出てきます.

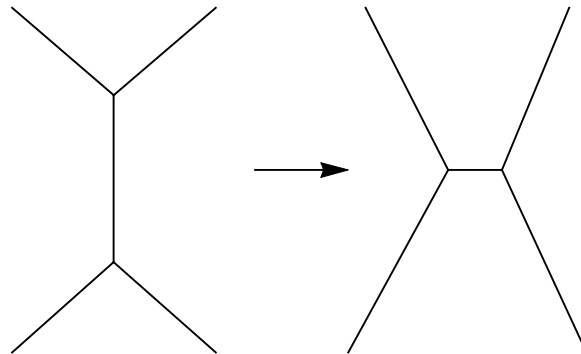
$$(H^*(\Lambda^3 H_{\mathbb{Q}})/([1^2]_{Sp}^{\text{torelli}} \otimes [2^2]))^{Sp} \leftarrow (H^*(U_{\mathbb{Q}})/([2^2]_{Sp}))^{Sp}$$

は twisted injectuon.

それで $(H^*(U_{\mathbb{Q}})/([2^2]_{Sp}))^{Sp}$ を表現論的にこう書けますよ, と言ったのが Garoufalidis-Nakamura の仕事です. Sp の表現論と graph との関係をはつきりさせました. どうなるのかというと先ほどの多項式代数で

$$(H^*(U_{\mathbb{Q}})/([2^2]_{Sp}))^{Sp} \cong_{\text{stably}} \mathbb{Q}[\Gamma; \Gamma \in \mathcal{G}_0]/W$$

W は Whitehead move であって, Garoufalidis-Nakamura は IH_0 -relation という言葉を使っています.



Whitehead move の図

この ideal は Whitehead move, これが対応します. この ideal $[2^2]_{Sp}$ はこれに対応する. それをみて我々は上の方でこれがどうなるかを調べました.

$$(H^*(\Lambda^3 H_Q)/([1^2]_{Sp}^{\text{ Torelli}} \oplus [2^2]))^{Sp} \cong_{\text{stably}} \mathbb{Q}[\Gamma; \Gamma \in \mathcal{G}]/\tilde{W}$$

Euler 類が出てくるのでちょっとだけ違いますが, whitehead move で割ればこれらは stable に同型です. そうすると graph が沢山あるので, それらが生成する polynomial algebra で, MMM-class が生成する algebra より大きくなるという期待があったのですが, Whitehead move で割ると各次元の所で 1 つしかない. 下でいうと結局ない. これが第 2 の我々の証明です. 今となつてはその方が自然です. これを元にどのように考えていくかという事です. これは stable には Madsen-Weiss の stable cohomology に同型です.

$$\begin{aligned} (H^*(\Lambda^3 H_Q)/([1^2]_{Sp}^{\text{ Torelli}} \oplus [2^2]))^{Sp} &\cong_{\text{stably}} \mathbb{Q}[\Gamma; \Gamma \in \mathcal{G}]/\tilde{W} \\ &\cong \lim_{g \rightarrow \infty} H^*(M_{g,*}, \mathbb{Q}) \end{aligned}$$

そしてこちらも Madsen-Weiss によって stable range では

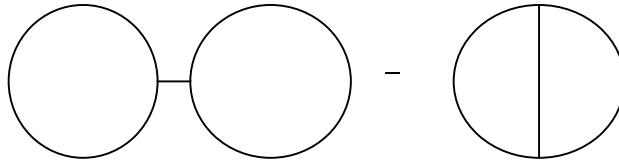
$$\begin{aligned} (H^*(U_Q)/([2^2]_{Sp}))^{Sp} &\cong_{\text{stably}} \mathbb{Q}[\Gamma; \Gamma \in \mathbb{G}_0]/W \\ &\cong \lim_{g \rightarrow \infty} H^*(M_g; \mathbb{Q}) \end{aligned}$$

Mumford conjecture. これが出発点であつて, この段階で graph 的にどう書けるか. 具体的に graph Γ がある毎に特性類 α_Γ があるわけですが, Whitehead move でどう変わるか, 比較的簡単にわかります. 2 つの trivalent graph Γ_1, Γ_2 があつて, 1 回の Whitehead move で Γ_1 から Γ_2 に移り, その変化するそれぞれの edge を τ_1, τ_2 とします. このとき α_{Γ_1} と α_{Γ_2} の違いは簡単に書ける.

Proposition 3.10 (Kawazumi-Morita).

$$\begin{aligned} \alpha_{\Gamma_1} - \alpha_{\Gamma_2} &= \frac{1}{2g(2g+1)} \alpha_{\Gamma_e} (\alpha_{\Gamma_1 \setminus \tau_1} - \alpha_{\Gamma_2 \setminus \tau_2}) \\ &= -e(\alpha_{\Gamma_1 \setminus \tau_1} - \alpha_{\Gamma_2 \setminus \tau_2}). \end{aligned}$$

$\Gamma_1 \setminus \tau_1, \Gamma_2 \setminus \tau_2$ は連結ではなくなるかもしれませんが, 連結でないときは連結成分毎の cohomology class の積になります. ここで Γ_e という graph は鉄アレイから θ -curve を引いたものです.



Γ_e の図

なぜ Γ_e をこう定義するかというと,

$$\alpha_{\Gamma_e} = -2g(2g+1)e$$

となるからです. ですから, graph は非常に複雑になるけれども, $2k$ 次の頂点の graph に 1 つの特性類を指定すると他のやつは Whitehead move で移っていくと帰納的に出てくる.

これは全部 stable なんです. 今までの話を全部 unstable にしたらどうなるか. ここから tensor の退化を調べるわけです. 退化を調べるというのは, stable には同型がありますから, g を固定する毎にある tensor が zero となると, 対応する特性類が zero という relation が得られる. 退化がある毎に relation が得られます.

次回詳しくやりますが, Faber-Zagier relation はこれで出てくるのではないかと予想しています. 但しさっきも言いましたが, 数年前に Chow algebra level で Faber-Zagier relation が本当の relation である事は証明されていますから, cohomology で証明したとしても, ああそうですかとなるのですが, 淡い期待は両方とも対称群の表現論的なものが書かれています. 似ているのですが, これは, 完全に 1 対 1 かというところと違います. 1 つの期待としては new relation があるのではないかと. 少なくとも Faber-Zagier relation は出てくると思っています. もちろん証明をしなくてははいけません. tensor の退化を調べる. 今回は Faber-Zagier relation をやります.

最後に, 後でわかった事というか, Kontsevich の仕事と今日言った事の間に, 実は関係があります. $\mathfrak{h}_{g,1}$ という notation で symplectic derivation Lie algebra というものがあります. Kontsevich の graph (co)homology の理論があるわけです. これも奇しくも Faber 予想の提出とほとんど同じ頃, 1992,3 年です. Kontsevich が Gelfand seminar で講演をしました. この重要性がわかり出したのはこれが出てからずっと後の事です. graph (co)homology は 3 つの version, commutative, associative, lie とあって, commutative は 3 次元多様体の不変量や transversely symplectic foliation の特性類と関係があり, associative は Riemann 面の moduli と関係があります. こころ辺は逆井さん, 鈴木さんと研究を続けています. $\mathfrak{h}_{g,1}$, これは lie なんです. lie version が関係するのは, Kontsevich の定理でいうと自由群の automorphism の homology $H_*(\text{Out}F_n; \mathbb{Q})$ です. Kontsevich の言った事は何かというと,

$$\text{lowest weight cohomology of } \mathfrak{h}_{\infty,1} \cong \mathbb{Q}[H_0(\text{Out}F_n; \mathbb{Q}); n = 2, 3, \dots],$$

$H_0(\text{Out}F_n; \mathbb{Q}) (n = 2, 3, \dots)$ の生成する多項式代数で. generator は $2, 3, \dots$ 毎にある. $H_0(\text{Out}F_n; \mathbb{Q})$ であり面白くないと思うかもしれませんが, lowest weight cohomology は Johnson 準同型の言葉で言うと $(H^*(\Lambda^3 H_\infty)/\text{Im} \tau_{2,1})^{Sp}$ でここは 1-boundary component version です. ここで微妙に違うので河澄さんとの定理の別証になるわけではありません. しかしある意味, Kontsevich はある程度こうなる事を知っていた. 今はこれは完全に mystery でどこに対応するかというと

$$e_1, e_2, \dots$$

これは理論的という事ではなく, 答えからするとこうならざるを得ない. 一方これは Riemann 面の moduli の cohomology ですから, associative version に出てくるはずののですが, これの出方とは全然違う. 元々の Kontsevich の論文には, associative version で, こういうもの全体を考えると MMM-class ですと書いてありますが, 証明は結局現れていません. よくわかりません. lie version で結論は, lowest weight cohomology は $H_0(\text{Out}F_n; \mathbb{Q}) (n = 2, 3, \dots)$ の生成する多項式代数です. 答えからすると, 2 つのやり方をやって, 第 2 Johnson 準同型を考えるか, 河澄さんの generalized MMM-class を考えるかです.

強調したい事は Kontsevich は $\tau_{2,1}$, 我々は $\tau_{2,*}$ でやっています. これで別証というわけではありません. この間は結構複雑で群は中心拡大ですが, Johnson image の方は複雑です. Kontsevich のこれからすぐ出る訳ではないのです. そうは言っても対応していると言わざるを得ない. 自由群の自己同型の 0 次元 homology が対応しているとしか言いようがないのですが, 我々の Johnson 準同型は surjective からほど遠い. lie version は $\text{Out}F_n$ に対応している. 我々の立場では Riemann 面の moduli の cohomology, Kontsevich の立場では associative version が複雑に出てくる.

graph homology の理論で 1 番わからないのは lie version, これは symplectic なんですが, Culler-Vogtmann の outer space には symplectic が出てこない. そこが 1 番の mystery です. 今の所わかっていません. Outer space に metric を入れようという仕事はありますが, symplectic structure についてはまだわかりません. そこがわからない. これが Kontsevich の天才と言ったら, そういふしかないのですが.

残りの退化の方は次回やります.

第9回 2014年7月16日

tautological algebra の構造の3回目です。Faber conjecture については一回で終わる予定だったのですが、前々回、前回と少し丁寧に、Grassmann 多様体の場合、そして abelian variety の moduli の場合からお話をしました。今日は具体的には Faber-Zagier relation というものをやります。

その前に、最近2つの集会、服部先生の追悼集会とその少し前に Thurston の追悼集会がありました。それでいろいろな事を考えましたので少しお話をします。Thurston の追悼集会、そこで Ghys が講演したのですが、最後の2分くらいで Thurston's lost theorem?????, これは書き間違いではなく last ではなく lost, そして?の7乗。少し話しが前後しますが、これはこの新シリーズでも2回目に foliation の話をしたときに、 C^ω vs C^∞ で foliation の特性類に差があるか。こういう大問題がある事をお話しました。今の所まだ何もわかっていません。この少し前、2013年9月に GF2013, BΓ-school, この両方でもこれに関係する話をしました。今回の Ghys の話は実は GF2013 のバンケットのときに informal に Ghys から聞いて、そのとき非常にびっくりしました。BΓ-school では関係する話をするので、講演の中で言おうかどうしようかと、周りの人にも相談しましたが、informal に聞いた事なので結局話すのはやめました。今回 Ghys がこういう公開の場所で言ったので、こういう問題があるという事をここでも話をしておこうと思います。

それは何かというと、Euler class というものがあります。 $\chi \in H^2(B\text{Diff}_+^\omega S^1; \mathbb{Q})$, S^1 の向きを保つ実解析的な同相写像で discrete topology を入れたもの、これの $\mathbb{Q}$ -係数 cohomology を考えます。最後の2分で Ghys が話したという lost theorem は

Thurston's lost Theorem ??????

$$\chi^3 = 0.$$

これが主張です。聞いた限りでは、Thurston はこれを1972年ころスイスのどこかでしゃべったようで、その話の Roger さん(?) によるノートが基になっているようです。Ghys はどうも人づてにそれを聞いて、気になりだして自分も証明しようと try したけれどもわからない。それで1970年代後半のあるとき、気になって手紙を Thurston を送りました。それは梨の礫で返事はなかったそうです。今度は別の人も議論をしてその人が Thurston に手紙を書いた。今度も最初は返事がなかったのですが、最終的に返事が来た。そこには1行、I forgot the proof. と書いてあったそうです。結局 lost theorem という事です。全然わからない。これだけを扱うとそんなに大きな問題には思えませんが、 C^∞ と C^ω の foliation の特性類に差があるかという観点から見ると、大問題です。特性類までいなくても一般の M に対して、 $\text{Diff}_0^{\infty, \delta} M$, foliation の特性類の場合は discrete topology を入れますが、例えば C^∞ -位相で identity の連結成分 $\text{Diff}_0^\infty M$ は M が closed の場合 perfect かつ simple というのが Thurston の大定理です。しかし C^ω -級の場合はわからない。

M が torus のときに Hermann が perfect かつ simple を証明しました。その後ずっと何もわからなかったのですが、Hermann の次に本質的に進めたのが坪井さんの大定理。iterated S^1 -bundle の場合に perfect を証明しました。perfect に関しては実解析的と smooth が一致している。それ以外は何もわかりません。

それでちょっと思い出すのは、問題の時期に含まれる1979年から翌年にかけて、私は Bonn に1年いました。この時に C^∞ -級の場合に任意の m に対して $\chi^m \neq 0$ を証明しました。Haefliger さんにその話をしたら話をしに来ないかと誘われて、Geneva に行きました。ただその時 Haefliger さんと Thurston のその辺の話をした記憶はありません。そこら辺りはどうなっているか、今度会ったら聞いてみたいと思います。

$\chi^m \neq 0$ の証明の出発点は Thurston の仕事です。一次分数変換で

$$PSL(2, \mathbb{R}) \subset \text{Diff}_+^\omega S^1$$

という自然な埋め込みがあります。この中に Fuchs 群があります。沢山あります。今からの議論は 1 個だけあれば良いので、

$$\Gamma \subset PSL(2, \mathbb{R}) \subset \text{Diff}_+^\omega S^1$$

を考えます。genus 2 以上の hyperbolic surface の基本群の表現, Fuchs 群表現があったとすると

$$H_2(\Gamma) \in H_2(\text{Diff}_+^{\omega, \delta} S^1; \mathbb{Z})$$

となります。そして、対応する負曲率の曲面を Σ_Γ とすると、その unit tangent bundle $T_1 \Sigma_\Gamma$ 上には Anosov foliation がありますが、その基本群 $\tilde{\Gamma} = \pi_1(T_1 \Sigma_\Gamma)$ は

$$\tilde{\Gamma} = \pi_1(T_1 \Sigma_\Gamma) \subset \widetilde{PSL}(2; \mathbb{R})$$

と埋め込まれます。ここで $\widetilde{PSL}(2; \mathbb{R}) \rightarrow PSL(2, \mathbb{R})$ は universal covering です。それで Fuchs 群表現があったとすると、さらに

$$\tilde{\Gamma} = \pi_1(T_1 \Sigma_\Gamma) \subset \widetilde{PSL}(2; \mathbb{R}) \subset \widetilde{\text{Diff}_+^\omega S^1}$$

に入ります。 $\widetilde{\text{Diff}_+^\omega S^1}$ 、これは $\text{Diff}_+^\omega S^1$ の universal cover で、具体的には

$$\widetilde{\text{Diff}_+^\omega S^1} = \{f \in \text{Diff}_+^\omega \mathbb{R}; f(x+1) = f(x) + 1 \text{ for } \forall x \in \mathbb{R}\}$$

と書けます。

$\chi^3 = 0$ が lost theorem ですが、私の知る限り、 $\chi^2 \neq 0$ なのかどうか（これは zero ではないと予想されていますが）さえ、未解決です。この C^∞ の場合の $\chi^m \neq 0$ の証明を今から sketch しますが、なぜ C^ω の場合に通じないか。Thurston が何を考えたかという、 $PSL(2, \mathbb{R})$, Fuchs 群が一杯住んでいる所は基本群が $\mathbb{Z}$ なので k -fold cover を考える事が出来ます。Lie 群として k -fold cover

$$p_k : PSL(2, \mathbb{R})_k \rightarrow PSL(2, \mathbb{R})$$

を考えると、これは k -fold cover ですから $PSL(2, \mathbb{R})$ が働く S^1 の k -fold cover に働きます。しかし S^1 の k -fold cover は S^1 ですから $PSL(2, \mathbb{R})_k$ は $\text{Diff}_+^\omega S^1$ に入ります。同じ所に入ります。この違い、 $k=2$ で考えると、 $PSL(2, \mathbb{R})_2 = SL(2, \mathbb{R})$ がここに入る入り方は、 $SL(2, \mathbb{R})$ は線型に $\mathbb{R}^2$ に働きますから、向きの集合に働きます。 k -fold covering をどんどん取るとずれていきますが、ずれないのは直感的には回転の部分だけ、そこで amalgamated product

$$PSL(2, \mathbb{R}) *_{PSO(2, \mathbb{R})} PSL(2, \mathbb{R})_k *_{PSO(2, \mathbb{R})} PSL(2, \mathbb{R})_{k^2} * \cdots \rightarrow \text{Diff}_+ S^1$$

Thurston はこれを考えました。ここに Γ という Fuchs 群があったときに、

$$\Gamma, \Gamma_k, \Gamma_{k^2}, \cdots$$

と出てきてその homology が $\text{Diff}_+^\omega S^1$ の 2 次元 homology の無限の系列

$$\{[\Gamma]_{k^n} \in H_2(\text{Diff}_+^{\omega, \delta} S^1; \mathbb{Q}); n = 1, 2, \cdots\}$$

を作ります。ℚ-係数で考えます。さらにこれは closed ですが、曲面上の foliated S^1 -bundle で、foliation でいうとある元に対応する曲面内の S^1 上で cut してそこ上で linear foliation になっているものを作って、relative cycle ですね、 k を k^n と一杯動かす事によって、linear foliation は単なる角度だけですが、いろいろ案配する事ができる。いろいろと持ってきたときに、これは話をしてませんでした、Euler class の他に、ℝ-係数の Godbillon-Vey class の fiber 積分、これが実解析的に連続に動くという事を Thurston は証明しました。

$\chi^m \neq 0$ という問題は、

$$[\tilde{\Gamma}_k] \in H_3(\widetilde{\text{Diff}}_+^{\omega, \delta} S^1; \mathbb{Q}),$$

ここに入ります。服部先生の追悼集会もありましたが、服部先生は Gysin sequence をいろいろな所でよく使われました。それが本質的に効いてきます。Gysin sequence の中で 2 次元 cycle があったとするとその total space は 3 次元の cycle を作る。その 3 次元 cycle が $[\tilde{\Gamma}_k]$ です。

それで C^∞ -級で $\chi^m \neq 0$ という私の証明は、どうなっているかということ、Fuchs 群 Γ があったときに foliated S^1 -bundle の全空間を考えて、 k -fold cover, k^n -cover を考えると、

$$[\tilde{\Gamma}_{k^n}] \in H_3(B\widetilde{\text{Diff}}_+^{\omega, \delta} S^1; \mathbb{Q})$$

となり、ポイントは何かというと、これの全体が張る vector space

$$\mathbb{Q}[\tilde{\Gamma}_{k^n}]; n = 1, 2, \dots \subset H_3(B\widetilde{\text{Diff}}_+^{\omega, \delta} S^1; \mathbb{Q})$$

は右辺の部分空間となりますが、これを考えると、 C^∞ -級のとき、この次元が有限次元だということです。covering として foliation としては単に pull-back, $B\Gamma$ への写像としては何倍かに移っていく、多分 1 次元だろうと予想していますが、未だ証明はできていません。この vector space が C^∞ -級のとき有限次元、これを示すために使ったのが Thurston のこれも大定理です。Thurston は任意の closed manifold で証明しましたが、今は S^1 の場合だけ考えます。

Theorem 3.11 (Thurston). $B\widetilde{\text{Diff}}_+^{\omega, \delta} S^1 \times S^1 \rightarrow B\bar{\Gamma}_1^\infty$ の adjoint map

$$B\widetilde{\text{Diff}}_+^{\omega, \delta} S^1 \rightarrow \Lambda B\bar{\Gamma}_1^\infty$$

が任意の係数で homology 同値。

$B\overline{\text{Diff}}$ という構成がありますが、今 S^1 の場合は $\overline{\text{Diff}}_+ S^1$ は universal cover と同じになるので $\widetilde{\text{Diff}}_+ S^1$ になります。

そうするとさっきの 3 次元 homology 群。 Γ から Γ_k を作るという群の準同型

$$\varphi_k : \text{Diff}_+^{\omega, \delta} S^1 \rightarrow \text{Diff}_+^{\omega, \delta} S^1$$

があつて、それは

$$(\varphi_k f)(x) = \frac{1}{k} f(kx)$$

これは単に ℝ の周期 1 の diffeomorphism ですが、 k 倍するという相似変換での共役と定義します。自分自身の中への、self-similar, telescope のようなものが出来て、そういう operation φ_k があるわけです。そして今は $\tilde{\Gamma}_k$ の homology class は

$$[\tilde{\Gamma}_k] = (\varphi_k)_*([\Gamma]),$$

こういう事がわかります。これにもう 1 回 φ_k を施すと $\tilde{\Gamma}_k$ が出てきます。 φ_k はどんどん小さくしていく写像で、同じ群ですから injective ですが、orbit が有限次元。その証明は Thurston のこの定理を使います。homology 同値ですから右側に行って証明すれば十分です。右側に行くと $S^1 \rightarrow S^1$ の k -fold cover が誘導する連続写像があります。これは free loop space ですから、 $B\tilde{\Gamma}_1^\infty$ 、これは単連結な空間です。これが C^ω 級のときに破綻します。 C^∞ 級では単連結というより 2-連結、これは Mather の定理で、特に単連結だから連結になります。

$$\psi_k : S^1 \xrightarrow{\times k} S^1 \rightarrow B\tilde{\Gamma}_1^\infty.$$

合成すると、これがなんであつたとしても free loop space 上にある自然な operation。これは定義からほとんど明らかで、homotopy 論に reduce したわけですが、 ψ_k が誘導する homology 群の自己同型、それが何になるかを計算すると、Sullivan の minimal model 理論の loop space 版で homotopy 論的には簡単で、それを少し一般化した free loop space にある自然な operation の homology の自己同型、それを計算すると、それは $B\tilde{\Gamma}_1$ が単連結ならば、任意の X の free space 上のこの operator は orbit が任意の cycle に対して有限次元であつて、 ψ_k が誘導する homology 群の自己同型、それが対角化可能で固有値が k のべきだという事を証明します。これは有限次元に収まって、Gysin sequence

$$\rightarrow H_4(\text{Diff}_+^{\omega,\delta} S^1) \xrightarrow{\cap \chi} H_2(\text{Diff}_+^{\omega,\delta} S^1) \xrightarrow{\mu} H_3(\widetilde{\text{Diff}}_+^{\omega,\delta} S^1) \rightarrow H_3(\text{Diff}_+^{\omega,\delta} S^1) \rightarrow$$

があつて、こういう有限次元で収まっているものがあると、しかも k のべきですから、その 1 次結合を適当に案配すると μ で zero に行くものが構成できる。van der Monde の行列式が係数に出てきます。それが本当に zero になると困るのですが、 μ による行き先とさっきの cycle で zero でないものが k 倍になっているとすると、Euler class は反対に $\frac{1}{k}$ で、 k -fold cover を取っていますから、multi-section があつてうまくいって、zero だけど χ との cup 積 μ で行つて zero ですから、1 つ前から来る。4 次元 cycle があつて、 χ との cup 積が、さっきの cycle で Euler class と Kronecker 積を取つて zero ではない。従つて χ^2 で zero ではない。この議論が帰納的にどんどん高次のべきまで適用できます。それで任意のべきで zero ではない。

解析的な場合、上の議論は完全に破綻します。 C^ω -級のとき $B\tilde{\Gamma}_1$ は Haefliger group H の $K(\pi, 1)$ -space、 $B\tilde{\Gamma}_1 = B\Gamma_H = K(H, 1)$ になり、 H は Haefliger 群と呼ばれ、単連結どころか基本群がものすごい群になります。free loop space 自体はありますが、連結ではありません。それで H_0 が違うから Thurston の定理は成り立たないのですが、それでも injection という可能性はあります。injection だとすると operator はあるし、実解析的でも orbit が有限次元だという事が Thurston の定理を使わないで、また minimal model も使わないで証明できれば、 $\chi^2 \neq 0$ の証明の可能性がある。Fuchs 群の covering を取ったときに χ^3 が zero だと、私はずっと何乗しても zero ではないと思っていましたので、去年 Ghys さんとその話になったときに、実は Thurston がそう言った、と聞いてびっくりし、それからずっと気になっています。もし χ の 3 乗が zero だとすると、この議論のどこかが間違いになります。全部 1 次独立になって、この議論が成り立たないのか。特性類をやるといつも出てくる事ですが、もし自然な特性類が消えたとすると、その secondary class が現れます。 $\chi^2 = 0$ だと 3 次元に現れます。 $\chi^3 = 0$ だとすると 5 次元に C^∞ -級では存在しない、実解析的な exotic class が現れます。何れにしても Ghys がこういう大きな集会で取り上げたので、注目を集めていると思います。

ここから本題, tautological algebra に入ります。

$$\mathcal{R}^*(\mathbb{M}_g) \twoheadrightarrow \mathcal{R}^*(\mathcal{M}_g)$$

topology の立場から $\mathcal{R}^*(\mathcal{M}_g)$ は写像類群の tautological algebra です。これは $e_1, e_2, \dots$ で生成される

$H^*(\mathcal{M}_g; \mathbb{Q})$ の subalgebra です. $\mathcal{R}^*(\mathbb{M}_g)$ は $\kappa_1, \kappa_2, \dots$ で生成される moduli 空間の Chow algebra $A^*(\mathbb{M}_g)$ の subalgebra で、こっちが上にあります.

Faber 予想というもの、これについて前回、前々回とやってきました. 予想は 3 つあるのですが、1 番最後まで残った Gorenstein conjecture, これは可換環の立場では、Gorenstein conjecture というのは、tautological algebra がある非常によい性質を持った可換環という事ですが、我々 topology の立場で言えば Poincaré duality が成り立つ可換環です. 我々はほとんど同値と思ってよいかと思えます. その部分が未解決です. これについては Faber が沢山仕事をしています. 今日の主題である Faber-Zagier relation. 以後簡単のため FZ-relation と呼びます. これは Faber と Zagier が提出した予想です. こういう relation があるだろうと、3,4 年前までは予想でしたが、これは Pandharipande-Pixton の 2 人が証明しました. 今はこれは定理です. これはどういう relation かというとは非常にわかりにくいのですが、今から書いてみます. 目的というのはこのわかりにくい relation が topology の立場から見ると、性質がわかりつつあるというか、それは逆井さん、鈴木さんとずっと続けてきた仕事との接点が少し見えてきました. そういう段階です.

まず Notation から言うと

$$\mathbb{P} = \{p_1, p_3, p_4, p_6, p_7, p_9, \dots\}$$

を用意します. Pontrjagin class みたいですが、 p_i は変数です. 2 がなくて、5 がなくて、8 がなくて、こういう変数 p_i で i は mod 3 で 2 以外のもの $i \neq 2 \bmod 3$. これを考えます.

3 というのは一番最初の Johnson 準同型 Torelli 群の able 化に出てきた $\Lambda^3 H$ の 3 に対応すると我々は見えています. しかし代数幾何的にはなぜ 3 が出てくるのか必ずしもはっきりしません. これを使って t という別の変数を考えて、次のように形式的に定義します. それは何かというと

$$\psi(t, \mathbb{P}) = \sum_{i=0}^{\infty} t^i p_{3i} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(6j)!}{(3j)!(2j)!} t^j + \sum_{i=0}^{\infty} t^i p_{3i+1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(6j)!}{(3j)!(2j)!} \frac{6j+1}{6j-1} t^j$$

t^i が最後に tautological algebra の relation を与えるときに次数です. double factorial みたいなものが一杯出てきます. double factorial は linear chord diagram の個数として出てくる我々にとってもおなじみのものです. まず前半は mod 3 で 0 の部分です. mod 3 で 1 の部分が後ろです. この $6j+1, 6j-1$ というのも曰く言い難い数が出てきています. 初めさっぱりわからないものがあるわけですが、こういうものを用意します. 但し p_0 は変数にしないで $p_0 = 1$ にします.

次に $C_r(\sigma)$ というものを用意します. この σ というのは何かというと、これは partition. 別の言葉でいうと Young 図形です. partition, サイズは $|\sigma|$ で表します. partition というときは $1, 2, 3, 4, \dots$ と全部使えますが、今の場合 parts は mod 3 で 2 のものは許さない. ですから具体的にはどう書けるかというと、通常の対称群の表現に出てくる

$$\sigma = \{1^{\sigma_1} 3^{\sigma_3} 4^{\sigma_4} \dots\}.$$

このとき形式的にですが、log を取って

$$\log(\psi(t, \mathbb{P})) = \sum_{\sigma} \sum_{r=0}^{\infty} C_r(\sigma) t^r \mathbb{P}^{\sigma}$$

形式的に log を取って、展開して出てきたものを無限和で書きます. 太字の $\mathbb{P}$ に σ が掛かっているのは、

$$\mathbb{P}^{\sigma} = p_1^{\sigma_1} p_3^{\sigma_3} p_4^{\sigma_4} \dots.$$

これから出てくる $t^r \mathbb{P}^\sigma$ の係数, これが $C_r(\sigma)$ の定義です. $\log$ で展開したときの係数です.

$$\gamma := \sum_{\sigma} \sum_{r=0}^{\infty} C_r(\sigma) \kappa_r t^r \mathbb{P}^\sigma.$$

κ_r は Mumford の κ -class. γ , これも形式的に無限の和です. こう定義して, この辺でもう何だかよくわからなくなります. Faber はいろいろな計算を重ねた上で, genus が小さいところから, どんどん relation を見つけました. その上で Zagier と議論をしました. Zagier は無限級数とか数論的な感覚の凄い人ですから, これは想像ですが, こういう風にまとめると relation が出る, 最終的な Faber-Zagier relation, となったのだと思います.

また $\exp$ を取って, $\log$ を取って $\exp$ ですから, ある意味で元に戻るわけですが,

$$[\exp(-\gamma)]_{t^r \mathbb{P}^\sigma} = 0 \in \mathcal{R}^r(\mathbb{M}_g).$$

$[\exp(-\gamma)]$ を形式的に展開して, その $t^r \mathbb{P}^\sigma$ の, この部分をまとめると κ たちの monomial になります. これが r 次の Chow algebra $\mathcal{R}^r(\mathbb{M}_g)$ の中で, cohomology 的には $H^{2r}(\mathcal{M}_g; \mathbb{Q})$ の中で, zero だろうというのが Faber-Zagier relation です. 何度見ても, あるとき何となくわかった気になっても, 2,3 日経ってみると感覚的にやっぱりわからない. そんな感じのものです. ここで zero になる条件があります. 不思議な条件です.

$$g - 1 + |\sigma| < 3r, \quad g \equiv r + |\sigma| + 1 \pmod{2}.$$

genus が偶数, 奇数で 1 つ飛びで同じ relation が出てきます. 何れにしてもこれが Faber-Zagier relation というものです. さっき言ったように, 2010 年に Pandharipande-Pixton が relation である事を証明しました. 下の方は relation が全然ない. この $3r$ の 3 は Harer stability の 3 です. 移行すると $\frac{g}{3}$ でそれより大きい所で relation になります. こういう monomial は下の方は zero ではない. ある所から出てくる. それは stability があるんで.

Faber 予想は 1993 年に予想として提出されました. Faber 自身計算していつて, 2010 年頃に一番難しい Gorenstein conjecture は $g = 23$ まで OK であることを証明しました.

この頃から Faber や Pandharipande がいろいろ計算をして $g = 24$ で変な事が起こっている. それを見るために, ちょっと一般論ばかり出てきましたので, 具体的にどういう relation があるか, 見てみですが, 一方私は位相的な立場で幾つか relation を証明しましたが, FZ relation との直接の対応は 2 つの系列くらいしかわかっていません. 何れにしても relation を topology の立場から, Riemann 面の family があると Jacobi 多様体の family があって Jacobi 多様体の上には symplectic form があって, それをあるベキにすると zero になります. そのベキを pullback して, fiber 積分して relation を出します. もう 1 つ, 表現論の立場からいろいろやったわけです. そうするとどうなるか. 一方 Looijenga と Faber の結果から

$$\mathcal{R}^*(\mathcal{M}_g) = \begin{cases} 0, & (* > 2g - 4) \\ \mathbb{Q}, & (* = 2g - 4) \end{cases}$$

ですから top は $* = 2g - 4$ になります.

具体的に $\mathcal{R}^*(\mathcal{M}_g)$ は $g = 2$ のとき 0 次元の所の $\mathbb{Q}$ で自明になります.

$g = 3$ のときどうなるかというと, 0 次元は $\mathbb{Q}$. 2 次元は $\mathbb{Q}$ で e_1 が生成していて $e_1^2 = 0$.

$g = 4$ になると, 0 次元は $\mathbb{Q}$, 生成元は 1. 2 次元は $\mathbb{Q}$, 生成元は e_1 . 4 次元は $\mathbb{Q}$, genus 4 で初めて e_1^2 と e_2 の間に relation が出てきて,

$$e_2 = -\frac{3}{32} e_1^2.$$

こういう relation が出てきて上は zero.

$g = 5$ のときは 0 次元は $\mathbb{Q}$, 生成元は 1. 2 次元は $\mathbb{Q}$, 生成元は e_1 . 4 次元は $\mathbb{Q}$, e_2 と e_1^2 の間に relation が出てきて

$$e_2 = -\frac{5}{72}e_1^2.$$

こういう段々複雑な relation が出てきます.

さらに 6 次元は $\mathbb{Q}$, relation が

$$e_3 = \frac{1}{2^{10} \cdot 3^2}e_1^3.$$

かなり係数が大きいです. abelian variety の moduli の場合は relation は非常に簡単でした. 係数は 1 とか 2 でしたが, Riemann 面の moduli のときは genus が小さいときでも relation が複雑になります.

$g = 6$ のときは, 0 次元は $\mathbb{Q}$, 生成元は 1. 2 次元は $\mathbb{Q}$, 生成元は e_1 . 4 次元は $\mathbb{Q}^2$, ここで初めて 2 次元になります. 生成元は e_2, e_1^2 , 独立です. 6 次元は $\mathbb{Q}$,

$$e_3 = \frac{5}{2304}e_1^3, 127e_1^3 = 2304e_1e_2.$$

従って 1 次元に退化します. 8 次元は $\mathbb{Q}$,

$$e_4 = \frac{5}{73728}e_1^4, 36864e_2^2 = 113e_1^4.$$

従って e_1^4 のスカラー倍になります. relation がかなり複雑である事がわかります.

Faber は私と違って代数幾何を使って, intersection を考えます. tautological algebra の表す monomial の intersection を取ると zero という所から relation が出てきて, それを重ねていって, Zagier さんと一緒になって Faber-Zagier relation になりました.

もう 1 つ彼らが提出した面白い現象, 予想があります. relation が genus の $\frac{1}{3}$ まではあまり relation がないという事で,

$$l = 3k - g - 1.$$

これで k と l を定義します. k は独立な変数です. これは k の所で relation を出す. relation が出てくる k です. $\mathcal{R}^{2k}(\mathcal{M}_g)$ の k です. 代数幾何的には k です. $l = 0$ という事は $g = 3k - 1$ の形をしているという事で, $l = 1$ という事は $g = 3k - 2$ の形をしているという事です. 以下同様... です. genus が $3k$ までは relation がないというのが Harer stability です. $g = 3k - 1, l = 0$ で初めて relation が出ます. $l = 1$ のときにも次が出てきて, $l = 2$ のときも出ます. これはまだ予想なのですが, Faber-Zagier の予想というのは, $a(l)$ というのを定義します.

$$a(l) := \text{number of relations in } \mathcal{R}^k(\mathbb{M}_g) (\twoheadrightarrow \mathcal{R}^{2k}(\mathcal{M}_g))$$

と定義します. 但し g は大きい. これが g とともに stabilize するというのが予想に入っています. これはまだ証明されていません.

さらに彼らはこの予想について, Gorenstein 予想を仮定したうえで, 具体的な計算をしているわけですが, $l = 0$ から 15 まで書いておきます.

l	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	...
$a(l)$	1	1	2	3	5	6	10	13	18	24	33	41	56	71	91	115	...

最初の方は Faber-Zagier です。 $l = 9$ までが Faber-Zagier の論文に書いてあります。 奇妙な数が出てきます。 この次 $l = 10$ から 14 まで計算したのが Liu-Xu です。

一方、彼らの予想が正しいとすると、 $a(l)$ の値は組み合わせ的に計算できますが、 $l = 15$ から先について鈴木さんがプログラムを作って計算しました。 私たちは Macky program と呼んでいます。 なぜ program が出来るかはあとで言います。 $l = 70$ くらいまではあつという間に計算できます。 計算できるというのは予想が正しいとした場合です。 stabilize してしかもそれがあある形で書けるとした場合です。 ある形で、これが Faber-Zagier 予想ですが、 stabilize してこれも証明されていませんが、

$$a(l) = \text{number of partitions of } l \text{ in parts of form } \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, \dots\}$$

Young 図形の数に制限があつて、さっきは 2 を外しましたが、2 は入れる。 2 のみ $\equiv 2 \pmod{3}$ を許す、5 から先は許さない。 こういう partition の数だろうと予想して、実際それが relation を与える。 $l = 11$, これは $g = 24$ ですが、ここまで正しい事を証明して、ここから先は鈴木さんは stabilize するという事と制限の付いた Young 図形という事をいれると、program を作りました。 どのくらい減っていくか、relation に関係します。 partitions の数から parts がないので減っていくのですが、どれくらい減るかが、partition でいうと parts で使えないのが 3 分の 1, partition でいうとそんなには減らないと予想されますが、そうではなくて予想に反して、 $l = 50$ くらいで 7 分の 1 になります。 それは全部予想を modulo しての話ですが、出てくる relation が partition より少ない。 圧倒的に速く減っていきます。 これが 1 つあるわけです。 $g = 24$ のときにどういう現象が起こっているかを説明します。 まず

$$\mathcal{R}^{22}(\mathbb{M}_{24}) \cong \mathbb{Q}.$$

これは Faber と Looijenga の結果です。 Poincaré duality で $\mathcal{R}^{11}(\mathbb{M}_{24})$ が丁度真ん中になります。 $\mathcal{R}^{10}(\mathbb{M}_{24})$ と $\mathcal{R}^{12}(\mathbb{M}_{24})$ が cup 積で同型かというのが予想です。

$$a(3k - g - 1) = p(k) - \dim \mathcal{R}^k(\mathbb{M}_g)$$

これを a の定義だとすると a が制限された形で書けるというのは予想です。 逆に制限された形で a を定義するとこちらが予想です。 $\mathcal{R}^{10}(\mathbb{M}_{24})$ の次元は、予想が正しいとすると $k = 10$ で

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{R}^{10}(\mathbb{M}_{24}) &= p(19) - a(5) \\ &= 42 - 6 = 36 \end{aligned}$$

36 次元が予想されて、実際 Faber-Zagier relation で出てくる 6 個の relation が一次独立で 36 次元になる事は正しい。

一方でその相棒となる方はどうなるか。

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{R}^{12}(\mathbb{M}_{24}) &= p(12) - a(11) \\ &= 77 - 41 \\ &= 36 \end{aligned}$$

でよかったはずだったんです。 これで OK だと。 Pandharipande と Faber は具体的に relation を計算するとうまく行っただけなのに、何が起きたかという、Faber-Zagier relation でこういう数が出てくるのですが、1 次独立かどうかはわからない。 41 次元、一次独立が予想されていました。ところが、実際多項式達の生成する空間の次元を計算をすると 40 次元だった、という事で何か変な事が起こっている。 4 年前の事です。

前回少し話に出ましたが、 $\mathbb{M}_{24}$ から general type という事が始まります。 これは Harris-Mumford です。 そういう事が関係するかどうかは Pandharipande, Faber は書いていないのですが、いずれにしてもこういう事が

起こっています。それから 2,3 年経っているわけです。Faber-Zagier relation は relation の system ですが、一方でこれ以外にも Faber は沢山 relation をもっています。これに対して、 $g = 24$ のとき、最初の論文には書いてありますが、1000 くらいは relation を持っています。300 くらいは check してそこからは新しい relation は出てこない事を確かめています。それから 2 年くらい経っています。どのくらい進んでいるかわかりませんが、ニュースになっていないので、見つかっていないのだと思います。

今 2 つの流れというか、Faber 予想、Gorenstein 予想は代数幾何的に正しい、その場合は relation が見つからない。もう 1 つの可能性は、代数幾何的にはこちらにシフトしているようですが、Gorenstein conjecture は正しくない。これ以上 relation はないだろう。そしてもう 1 つの可能性、Gorenstein conjecture が正しいければ、

$$\mathcal{R}^k(\mathbb{M}_g) \rightarrow \mathcal{R}^*(\mathcal{M}_g)$$

は同型ですが、実はこれが同型ではない。しかし cohomology 的には relation がある。この場合 topologist にとっては chance なわけですが、cohomology 的には relation があって、それは Chow algebra では relation ではない。いろいろな variation があるはずで、それが現状なわけです。

これに位相的な approach をしようというのを残りの時間で説明します。どういう戦略かと言いますと、これは前回の最後の所で、tautological algebra を graph を使って書いた河澄さんとの仕事に戻ります。

$$\mathbb{Q}[\Gamma; \Gamma \in \mathcal{G}] / \tilde{W} \cong_{\text{stably}} \mathbb{Q}[e, e_1, e_2, \dots]$$

これは連結な trivalent graph の生成する多項式代数。これにある Whitehead relation $\tilde{W}$ を入れました。これは同型である事の特性類の生成する多項式代数で、これは once-punctured の場合です。closed な場合でいうと連結な trivalent graph without loops 全体 $\mathcal{G}_0$ の生成する

$$\mathbb{Q}[\Gamma; \Gamma \in \mathcal{G}] / W \cong_{\text{stably}} \mathbb{Q}[e_1, e_2, \dots]$$

これは Garoufalidis-Nakamura の仕事でこうなります。表現論的にはこれがどうなるかという、これらは exterior algebra であって、Johnson の Torelli 群の able 化 $\Lambda^3 H$ の Grassmann 代数の Sp -不変 part。これと同型になります。

$$(\Lambda^* \Lambda^3 H)^{Sp} \cong \mathbb{Q}[\Gamma; \Gamma \in \mathcal{G}] / \tilde{W} \cong_{\text{stably}} \mathbb{Q}[e, e_1, e_2, \dots].$$

これは once-punctured の Torelli 群の able 化ですから、下の方で言うと、

$$(\Lambda^*(\Lambda^3 H / \omega_0 \wedge H))^{Sp} \cong \mathbb{Q}[\Gamma; \Gamma \in \mathcal{G}] / W \cong_{\text{stably}} \mathbb{Q}[e_1, e_2, \dots].$$

これが河澄さんとの仕事です。graph と symmetric module の Sp -不変 part との同型、

さて、この退化を見ようというのが戦略です。stable にはこれの generator が出てくるわけですが、表現論的には退化します。それを、具体的には外積代数の退化は後で考えることにして、まずはその上にある tensor 代数 $(H^{\otimes 2k})^{Sp}$ で退化を見ます。ここで $H = H_1(\Sigma_g; \mathbb{Q})$ で $Sp(2g, \mathbb{Q})$ の fundamental representation です。graph 的に書くと、 Sp -不変なものを作るというのは、Hermann Weyl に遡るわけですが、 $2k$ 個の頂点から 2 個選んで pairing する、それを表す図、そういうものを linear chord diagram と呼びました。それを基底とする vector space、それと同型になります。

$$(H^{\otimes 2k})^{Sp} \cong \mathbb{Q}\mathcal{D}^l(2k)$$

基底は何個あるかという $2k$ 個を pairing する数ですから、 $(2k-1)!!$ になります。これが同型になっていて、両方とも symmetric group が作用しますが、その作用に関して anti-isomorphism になります。anti という

うのは, chord diagram の方は向きとか考えないで自然に働きますが, tensor 代数の方では向きを逆にすると intersection number が-1 になりますから, sign として出てきます. 対称群の表現として反同型. 一方, $H^{\otimes 2k}$ には symmetric bilinear form があります. それは intersection number μ を $2k$ 個並べて,

$$\mu^{\otimes 2k} : H^{\otimes 2k} \otimes H^{\otimes 2k} \rightarrow \mathbb{Q}$$

$$u = u_1 \otimes u_2 \cdots \otimes u_{2k}, v = v_1 \otimes v_2 \cdots \otimes v_{2k} \in H^{\otimes 2k}$$

こういうものがあつたときに, 順番に intersection number を取って,

$$H^{\otimes 2k} \otimes H^{\otimes 2k} \ni u \otimes v = (u_1 \otimes u_2 \cdots \otimes u_{2k}) \otimes (v_1 \otimes v_2 \cdots \otimes v_{2k}) \mapsto \prod_{i=1}^{2k} \mu(u_i, v_i) \in \mathbb{Q}$$

μ は偶数個ありますから, これは symmetric bilinear form になります. わかる事はこれを $((H^{\otimes 2k})^{Sp}, \mu^{\otimes 2k})$ に制限するとこれが positive definite になります. だからこれは計量 vector space になりますけれど, それを基底に関して直交分解するとどうなるかというところ,

$$(H^{\otimes 2k})^{Sp} = \bigoplus_{\lambda=[\lambda_1, \dots, \lambda_h], |\lambda|=k, h \leq g} U_\lambda$$

ここで $\mathfrak{S}_k$ -module としては

$$U_\lambda \cong [\lambda_1 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_2 \cdots \lambda_h \lambda_h] = \lambda^\delta.$$

even type の対称群の表現と同型です. 基底があるので直交分解したとき固有値はどうなるか. eigen value は Young 図形の box に関して

$$\mu_\lambda = \prod_{b: \text{box of } \lambda} (2g - 2s_b + t_b)$$

となります. ここで s_b は b より上の box の number, t_b は b より左の box の数です.

例を挙げます. $\lambda = [2]$ のとき, $\lambda^\delta = [22]$ でこれは Whitehead move に対応します. graph でいいますと (鉄アレイ)-(theta curve) で, これは $\frac{1}{2g(2g+1)}e$ に対応していました. この数 $2g(2g+1)$, これが何を意味するのか以前はわからなかったのですが, $[22]$ に対応する固有値だった訳ですね.

$$\mu_\lambda = 2g(2g+1).$$

次に $\lambda = [1^2]$ のとき. 今度は exterior algebra になって $\lambda^\delta = [1^4]$, 固有値が

$$\mu_\lambda = 2g(2g-1).$$

縦に長い方が退化が早く始まります. 横の方にいくのは退化が始まりません. 固有値分解すると tensor として

$$(H^{\otimes 2k})^{Sp} \twoheadrightarrow \mathcal{R}(\mathcal{M}_g)$$

に全射があります. g 毎に直交分解すると, 段々行の数が小さくなると退化が起きます. その退化は固有値によって, 固有値 zero という形で起こります. 退化が起こると固有値 zero になる毎に relation が出ます. その relation を表現論を使ってそれを書いてやると, Faber-Zagier relation が見えてきた, と言いたい所ですが, 見えてきたかな?という所です.

縦にある 1 番最初に起こる退化, $l=0, g=3k-1$ のとき, それが丁度 Faber-Zagier の一番最初の relation と完全に一致しています. その次まで check しました. その次に起こる $g=3k-2$ での退化, 次も完全に一致しています. 但し完全に一致するといっても, $2k$ 次の対称群の表現と Faber-Zagier の relation, 2 番目は偶然

一致しているように見えます。まだわからない。数から言うと形式的に出てくる数は Faber-Zagier relation の数より多い。でも一次従属かもしれません。わかりません。さっきの Gorenstein conjecture が正しいかどうかに関わるわけです。

1 番うれしい状況は形の上では数は多いので、 $g = 24$ のときに新しい relation が見つかる事です。1 番うれしくない場合でも Faber-Zagier relation の位相的な解釈はできるだろうと思っています。じゃあ計算すれば良いじゃないかと言われるかもしれませんが、しかし計算量は膨大で現状、鈴木さんの program でも大変です。どうなる事かと思います。

一番最初の話に戻るとやっぱり日本の若い人たち、いろいろ問題は沢山ありますが、実解析的な世界と C^∞ の世界が cohomology 的に同じかどうか、是非関心を持って下さい。私自身も考えていますが、今はほとんど完全に手詰まりです。Fuchs 群で relation を見つけないといけない。各 Fuchs 群で $PSL(2, \mathbb{R}), SL(2, \mathbb{R})$ は $\text{Diff}_+^\infty S^1$ に入ります。 $\text{Diff}_+^\infty S^1$ にはこれらを rotation の所だけで amalgamated product を取ったものが入るのではないかと直感的にはそうですが証明された訳ではありません。hyperbolic element を取ると、無限遠で 2 点固定点があります。double cover を取ると 4 個、parabolic element だと 1 点、double cover を取ると 2 点、dynamical には全然違う。rotation は一致しますが、それ以外に関係があるとは考え難い。amalgamated product を取っていくと、homology 的には次元は上がっていない。 C^∞ で何が起きているかということ、簡単ではない relation が出てきて、4 次元の cycle が出てきている。 $\chi^2 \neq 0$ 。そういうものが実解析的にあるか、smooth でも具体的には作れていません。1 つだけ具体的な群としては Thompson 群、これは piecewise linear な S^1 の同相群です。これを Ghys-Sergiescuc が、無理矢理と言ったら怒るでしょうが、元々 piecewise linear な S^1 の群ですが、角の所を smooth にして $\text{Diff}^\infty S^1$ に埋め込みました。

Thompson 群の cohomology はわかっていて、一つは Euler class、もう一つは discrete Godbillon-Vey、その生成する多項式代数で relation は 2 つを掛けたら zero。自然な Euler class は Euler class に行く。Thompson 群の cohomology は何乗しても zero ではないので、Euler class は何乗しても zero ではない事が証明できます。1985 年頃の事です。一方で本来の Godbillon-Vey は discrete Godbillon-Vey に行くかということ、そうではなく消えてしまい、Euler class だけが生き残る。Ghys にこの構成を C^∞ を C^ω に出来ないのかと聞いてみましたが、即座にそれはできない、と言われました。解析的には global に影響があります。どうにもなりません。一つは具体的に作るのでしょうか、 C^ω -級で 埋め込めるとしたら、でも Thurston が正しいと出来ないと。もし正しいとすると transverse holomorphic foliation に持ち込んで Bott vanishing を使うくらいしか手はないと思います。

最後にもう一つだけ Thurston に関係して、Thurston の最後の方の弟子で Benson Farb という人がいます。Notice に出る記事を書いていて、Thurston は彼の先生ですが、思い出や自分の考えなどを書いています。その文章の中で一つ印象的だったのは、偉い数学者は沢山いる。その中で Thurston が際立っている事は、数学者は定理は証明するし、予想を述べるが、そういうあらゆるもので一つとしてその後間違った事を言った事がないのが Thurston だと。それで思い出すが、hyperbolic 3-manifold は finite cover を取ると S^1 上の fiber bundle になる、初めはそんなの嘘でしょう、という感じでした。Thurston も予想とは書いていない。ある時から virtual fibration 予想と呼ばれるようになって、結局証明されました。それが正しいという事はあっても、これ以外にも間違った事を言った事はないと思うと書いてあります。そうするとこの Euler class の 3 乗は zero ということも結局正しいということになるのでしょうか？。いずれにしても、大きなミステリーです。

今回はここでおしまいにします。

参考文献

1 回目

- [1] 足立正久, 埋め込みとはめ込み, 岩波書店, 1984.
- [2] R. Bott, *On a topological obstruction to integrability*, Proc. Internat. Congress Math. (Nice, 1970), vol. 1, Gauthier-Villars, Paris, 1971, pp. 27–36.
- [3] R. Bott, *Lectures on characteristic classes and foliations*, in Lectures on Algebraic and Differential Topology, 1972, 1–94. Springer Berlin Heidelberg.
- [4] R. Bott and A. Haefliger, *On characteristic classes of Γ -foliations*, Bull. Amer. Math. Soc. **78** (1972), 1039–1044.
- [5] R. Bott and J. Heitsch, *A remark on the integral cohomology of $B\Gamma_q$* , Topology **11** (1972), 141–146.
- [6] S. S. Chern and J. Simons, *Characteristic forms and geometric invariants*, Ann. of Math. (2) **99** (1974), 48–69.
- [7] I. M. Gel'fand and D. B. Fuks, *Cohomologies of the Lie algebra of vector fields on the circle* (Russian), Funkcional. Anal. i Priložen. **2** 1968 no. 4, 92–93.
- [8] I. M. Gel'fand and D. B. Fuks, *Cohomologies of the Lie algebra of vector fields on a manifold* (Russian), Funkcional. Anal. i Priložen. **3** 1969 no. 2, 87.
- [9] C. Godbillon and J. Vey, *Un invariant des feuilletages de codimension 1* (French), C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **273** (1971), A92–A95.
- [10] M. Gromov, *Partial differential relations*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3), **9**. Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [11] A. Haefliger, *Feuilletages sur les varietes ouvertes*, Topology **9** (1970), 183–194.
- [12] A. Haefliger, *Homotopy and integrability*, Manifolds-Amsterdam 1970 (Proc. Nuffic Summer School), Lecture Notes in Mathematics, Vol. 197, Springer, Berlin, 1971, pp. 133–163.
- [13] J. Heitsch, *Deformations of secondary characteristic classes*, Topology **12** (1973), 381–388.
- [14] J. Heitsch, *A cohomology for foliated manifolds*, Bull. Amer. Math. Soc. **79** (1973), no. 6, 1283–1285.
- [15] J. N. Mather, *The vanishing of the homology of certain groups of homeomorphisms*, Topology **10** (1971), 297–298.
- [16] J. N. Mather, *On Haefliger's classifying space. I*, Bull. Amer. Math. Soc. **77** (1971), 1111–1115.
- [17] J. N. Mather, *Integrability in codimension 1*, Comment. Math. Helv. **48** (1973), 195–233.
- [18] S. Morita, *Discontinuous invariants of foliations*, in Foliations (Tokyo, 1983), 169–193, Adv. Stud. Pure Math., **5**, North-Holland, Amsterdam, 1985.
- [19] 森田茂之, 特性類と幾何学, 岩波書店, 2008.
- [20] A. Phillips, *Submersions of open manifolds*, Topology **6** (1967), 171–206.
- [21] A. Phillips, *Foliations on open manifolds, I*, Comment. Math. Helv. **43** (1968), 204–211.
- [22] A. Phillips, *Foliations on open manifolds, II*, Comment. Math. Helv. **44** (1969), 367–370.
- [23] A. Phillips, *Smooth maps transverse to a foliation*, Bull. Amer. Math. Soc. **76** (1970), 792–797.
- [24] H. Samelson, *A connection between the Whitehead and the Pontryagin product*, Amer. J. Math. **75**, (1953), 744–752.

- [25] 田村一郎, 葉層のトポロジー, 岩波書店, 1976.
- [26] T. Tsuboi, *Irrational foliations of $S^3 \times S^3$* , Hokkaido Math. J. **27** (1998), no. 3, 605–623.
- [27] W. Thurston, *Noncobordant foliations of S^3* , Bull. Amer. Math. Soc. **78** (1972), no. 4, 511–514.
- [28] W. Thurston, *Foliations and groups of diffeomorphisms*, Bull. Amer. Math. Soc. **80** (1974), 304–307.
- 2 回目**
- [29] V. I. Arnol'd, *Small denominators. I. Mapping the circle onto itself*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **25** (1961), 21–86. (= Amer. Math. Soc. Translations **46** (1965), 213–284).
- [30] H. Grauert, *On Levi's problem and the imbedding of real-analytic manifolds*, Ann. of Math. (2) **68** (1958), 460–472.
- [31] M. R. Herman, *Simplicité du groupe des difféomorphismes de classe C^∞ , isotopes à l'identité, du tore de dimension n* , C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **273** (1971), A232–A234.
- [32] S. Jekel, *A spectral sequence for pseudogroups on $\mathbb{R}$* , Trans. Amer. Math. Soc. **333** (1992), 741–748.
- [33] S. Morita, *Nontriviality of the Gelfand-Fuchs characteristic classes for flat S^1 -bundles*, Osaka J. Math. **21** (1984), no. 3, 545–563.
- [34] 森田茂之, 微分同相群とトポロジー —いくつかの問題と展望—, 第 52 回全日本トポロジーシンポジウム予稿集 (高知大学), (2005).
- [35] C. B. Morrey, Jr. *The analytic embedding of abstract real-analytic manifolds*, Ann. of Math. (2) **68** (1958), 159–201.
- [36] D. Sullivan, *Infinitesimal computations in topology*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **47** (1977), 269–331.
- [37] T. Tsuboi, *On the group of real analytic diffeomorphisms*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) **42** (2009), no. 4, 601–651.
- [38] M. Vigué-Poirrier and D. Sullivan, *The homology theory of the closed geodesic problem*, J. Differential Geometry **11** (1976), no. 4, 633–644.
- [39] H. Whitney, *Differentiable manifolds*, Ann. of Math. (2) **37** (1936), no. 3, 645–680.
- 3 回目**
- [40] C. Chevalley and S. Eilenberg, *Cohomology theory of Lie groups and Lie algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **63**, (1948), 85–124.
- [41] S. Garoufalidis and H. Nakamura, *Some IHX-type relations on trivalent graphs and symplectic representation theory*, Math. Res. Lett. **5** (1998), no. 3, 391–402. Corrigendum, Math. Res. Lett. **14** (2007), no. 4, 689–690.
- [42] I. M. Gel'fand, D. I. Kalinin and D. B. Fuks, *The cohomology of the Lie algebra of Hamiltonian formal vector fields*, Funct. Anal. and Appl. **6** (1972), no. 3, 193–196.
- [43] L. V. Goncharova, *The cohomologies of Lie algebras of formal vector fields on the line*, Funct. Anal. and Appl. **7** (1973), 91–97.
- [44] G. Hochschild and J. P. Serre, *Cohomology of Lie algebras*, Ann. of Math. (2) **57**, (1953), 591–603.
- [45] T. Ishida, *Second cohomology classes of the group of C^1 -flat diffeomorphisms*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **62** (2012), no. 1, 77–85.
- [46] M. Kontsevich, *Formal (non)commutative symplectic geometry*, in The Gel'fand Mathematical Seminars, 1990–1992, 173–187, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1993.

- [47] M. Kontsevich, *Rozansky-Witten invariants via formal geometry*, Compositio Math. **115** (1999), no. 1, 115–127.
- [48] J. L. Koszul, *Homologie et cohomologie des algèbres de Lie*, Bull. Soc. Math. France **78**, (1950). 65–127.
- [49] D. Kotschick and S. Morita, *The Gelfand-Kalinin-Fuks class and characteristic classes of transversely symplectic foliations*, arXiv:0910.3414.
- [50] S. Metoki, *Non-trivial cocycles of the cohomology of Lie algebras of volume preserving formal vector fields*, thesis, Univ. of Tokyo (2000).
- [51] S. Matsumoto and Y. Mitsumatsu, *Leafwise cohomology and rigidity of certain Lie group actions*, Ergodic Theory Dynam. Systems **23** (2003), no. 6, 1839–1866.
- [52] K. Mikami, H. Kodama and Y. Nakae, *Higher weight Gel’fand-Kalinin-Fuks classes of formal Hamiltonian vector fields of symplectic $\mathbb{R}^2$* , arXiv:1210.1662, 2012.
- [53] K. Mikami and Y. Nakae, *Lower weight Gel’fand-Kalinin-Fuks cohomology groups of the formal Hamiltonian vector fields on $\mathbb{R}^4$* , arXiv:1211.0185, 2012.
- [54] J. Perchik, *Cohomology of Hamiltonian and related formal vector field Lie algebras*, Topology **15** (1976), no. 4, 395–404.

4 回目

- [55] D. Bar-Natan and B. McKay, *Graph Cohomology - An Overview and Some Computations*, unpublished, available on <http://www.math.toronto.edu/drornb/papers/GCOC/GCOC.ps>.
- [56] J. Conant, F. Gerlits and K. Vogtmann, *Cut vertices in commutative graphs*, Q. J. Math. **56** (2005), no. 3, 321–336.
- [57] E. Gorsky, *The equivariant Euler characteristic of moduli spaces of curves*, Advances in Mathematics **250** (2014), 588–595.
- [58] J. W. Milnor and J. C. Moore, *On the structure of Hopf algebras*, Ann. of Math. (2) **81** (1965), 211–264.
- [59] S. Morita, T. Sakasai and M. Suzuki, *Computations in formal symplectic geometry and characteristic classes of moduli spaces*, arXiv:1207.4350
- [60] T. Ohtsuki, *Problems on invariants of knots and 3-manifolds. With an introduction by J. Roberts*, Geom. Topol. Monogr., **4**, in the book of Invariants of knots and 3-manifolds (Kyoto, 2001), 377–572, Geom. Topol. Publ., Coventry, 2002.
- [61] T. Willwacher, *M. Kontsevich’s graph complex and the Grothendieck-Teichmüller Lie algebra*, arxiv:1009.1654.
- [62] T. Willwacher and M. Živković, *The dimensions and Euler characteristics of M. Kontsevich’s graph complexes*, arXiv:1401.4974
- [63] <http://oeis.org>, the on-line encyclopedia of integer sequences.

5 回目

- [64] A. Casson and C. McA. Gordon, *Cobordism of classical knots*, in the book of A la recherche de la topologie perdue, Progr. Math., **62**, 181–199, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1986.
- [65] A. Casson and C. McA. Gordon, *A loop theorem for duality spaces and fibred ribbon knots*. Invent. Math. **74** (1983), no. 1, 119–137.

- [66] A. Casson and C. McA. Gordon, *On slice knots in dimension three*, in the book of Algebraic and geometric topology (Proc. Sympos. Pure Math., Stanford Univ., Stanford, Calif., 1976), Part 2, 39–53, Proc. Sympos. Pure Math., XXXII, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1978.
- [67] T. D. Cochran, K. E. Orr and P. Teichner, *Knot concordance, Whitney towers and L^2 -signatures*, Ann. of Math. (2) **157** (2003), no. 2, 433–519.
- [68] T. D. Cochran, K. E. Orr and P. Teichner, *Structure in the classical knot concordance group*, Comment. Math. Helv. **79** (2004), no. 1, 105–123.
- [69] J. Cha, S. Friedl and T. Kim, *The cobordism group of homology cylinders*, Compos. Math. **147** (2011), no. 3, 914–942.
- [70] H. Endo, *Linear independence of topologically slice knots in the smooth cobordism group*, Topology Appl. **63** (1995), no. 3, 257–262.
- [71] R. Fintushel and R. J. Stern, *Pseudofree orbifolds*, Ann. of Math. (2) **122** (1985), no. 2, 335–364.
- [72] R. H. Fox and J. W. Milnor, *Singularities of 2-spheres in 4-space and cobordism of knots*, Osaka J. Math. **3** (1966), 257–267.
- [73] M. H. Freedman, *A surgery sequence in dimension four; the relations with knot concordance*, Invent. Math. **68** (1982), no. 2, 195–226.
- [74] M. H. Freedman, *A fake $S^3 \times \mathbb{R}$* , Ann. of Math. (2) **110** (1979), no. 1, 177–201.
- [75] Y. Fukumoto, M. Furuta and M. Ue, *W-invariants and Neumann-Siebenmann invariants for Seifert homology 3-spheres*, Topology Appl. **116** (2001), no. 3, 333–369.
- [76] M. Furuta, *Homology cobordism group of homology 3-spheres*, Invent. Math. **100** (1990), no. 2, 339–355.
- [77] S. Garoufalidis and J. Levine, *Finite type 3-manifold invariants, the mapping class group and blinks*, J. Differential Geom. **47** (1997), no. 2, 257–320.
- [78] S. Garoufalidis and J. Levine, *Finite type 3-manifold invariants and the structure of the Torelli group. I*, Invent. Math. **131** (1998), no. 3, 541–594.
- [79] M. Goussarov, *Finite type invariants and n -equivalence of 3-manifolds*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **329** (1999), no. 6, 517–522.
- [80] K. Habiro, *Claspers and finite type invariants of links*, Geom. Topol. **4** (2000), 1–83.
- [81] J. Hom, *An infinite rank summand of topologically slice knots*, preprint, arXiv:1310.4476[math.GT].
- [82] J. Levine, *An algebraic classification of some knots of codimension two*, Comment. Math. Helv. **45** (1970), 185–198.
- [83] J. Levine, *Invariants of knot cobordism*, Invent. Math. **8** (1969), 98–110.
- [84] C. Livingston, *A survey of classical knot concordance*, in the book of Handbook of knot theory, 319–347, Elsevier B. V., Amsterdam, 2005.
- [85] C. Manolescu, *Pin(2)-equivariant Seiberg-Witten Floer homology and the triangulation conjecture*, preprint, arXiv:1303.2354[math.GT].
- [86] C. Manolescu and B. Owens, *A Concordance Invariant from the Floer Homology of Double Branched Covers*, International Mathematics Research Notices. Vol. 2007, 1–1.
- [87] K. Murasugi, *On a certain numerical invariant of link types*, Trans. Amer. Math. Soc. **117** (1965), 387–422.
- [88] W. Neumann, *An invariant of plumbed homology spheres*, Lecture Notes in Math. **788**, Springer-Verlag, Berlin and New-York, 1980, 125–144.

- [89] P. Ozsváth and Z. Szabó, *Knot Floer homology and the four-ball genus*, Geometry and Topology **7** (2003), 615–639.
- [90] J. A. Rasmussen, *Khovanov homology and the slice genus*, Invent. Math. **182** (2010), 419–447.
- [91] L. Siebenmann, *On vanishing of the Rohlin invariant and nonfinitely amphicheiral homology 3-spheres*, Lecture Notes in Math. **788**, Springer-Verlag, Berlin and New-York, 1980, 172–222.
- 6 回 目**
- [92] J. S. Birman, A. Lubotzky and J. McCarthy, *Abelian and solvable subgroups of the mapping class groups*, Duke Math. J. **50** (1983), no. 4, 1107–1120.
- [93] J. M. Bismut and J. Lott, *Torus bundles and the group cohomology of $GL(N, \mathbb{Z})$* , J. Differential Geom. **47** (1997), no. 2, 196–236.
- [94] A. Borel, *Stable real cohomology of arithmetic groups*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **7** (1974), 235–272 (1975).
- [95] J. Conant, M. Kassabov and K. Vogtmann, *Karen Hairy graphs and the unstable homology of $Mod(g, s)$, $Out(F_n)$ and $Aut(F_n)$* , J. Topol. **6** (2013), no. 1, 119–153.
- [96] S. Galatius, *Stable homology of automorphism groups of free groups*, Ann. of Math. (2) **173** (2011), no. 2, 705–768.
- [97] F. Gerlits, *Invariants in chain complexes of graphs*, Thesis, Cornell University. 2002.
- [98] J. L. Harer, *Stability of the homology of the mapping class groups of orientable surfaces*, Ann. of Math. (2) **121** (1985), no. 2, 215–249.
- [99] J. Harer and D. Zagier, *The Euler characteristic of the moduli space of curves*, Invent. Math. **85** (1986), no. 3, 457–485.
- [100] A. Hatcher, *Homological stability for automorphism groups of free groups*, Comment. Math. Helv. **70** (1995), 39–62.
- [101] A. Hatcher and K. Vogtmann, *Homology stability for outer automorphism groups of free groups*, Algebr. Geom. Topol. **4** (2004), 1253–1272.
- [102] A. Hatcher, K. Vogtmann, and N. Wahl, *Erratum to: Homology stability for outer automorphism groups of free groups*, Algebr. Geom. Topol. **6** (2006), 573–579.
- [103] E. Looijenga, *Cohomology of $\mathbb{M}_3$ and $\mathbb{M}_3^1$* , in the book of Mapping class groups and moduli spaces of Riemann surfaces (Göttingen, 1991/Seattle, WA, 1991), 205–228, Contemp. Math., **150**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.
- [104] Ib. Madsen and M. Weiss, *The stable moduli space of Riemann surfaces: Mumford’s conjecture*, Ann. of Math. (2) **165** (2007), no. 3, 843–941.
- [105] E. Miller, *The homology of the mapping class group*, J. Differential Geom. **24** (1986), no. 1, 1–14.
- [106] S. Morita, *Characteristic classes of surface bundles*, Invent. Math. **90** (1987), no. 3, 551–577.
- [107] S. Morita, T. Sakasai and M. Suzuki, *Computations in formal symplectic geometry and characteristic classes of moduli spaces*, to appear in Quantum Topology.
- [108] S. Morita, T. Sakasai and M. Suzuki, *Integral Euler characteristic of $Out F_{11}$* , arXiv:1405.4063 [math.AT].
- [109] D. Mumford, *Towards an enumerative geometry of the moduli space of curves*, in the book of Arithmetic and geometry, Vol. II, 271–328, Progr. Math., **36**, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1983.
- [110] M. Nakaoka, *Cohomology mod p of the p -fold symmetric products of spheres*, J. Math. Soc. Japan **9** (1957),

- 417–427.
- [111] M. Nakaoka, *Cohomology mod p of symmetric products of spheres*, J. Inst. Polytech. Osaka City Univ. Ser. A **9** (1958), 1–18.
 - [112] M. Nakaoka, *Cohomology mod p of symmetric products of spheres. II*, J. Inst. Polytech. Osaka City Univ. Ser. A **10** (1959), 67–89.
 - [113] R. Penner, *Perturbative series and the moduli space of Riemann surfaces*, J. Differential Geom. **27** (1988), no. 1, 35–53.
 - [114] J. Smillie and K. Vogtmann, *Automorphisms of graphs, p -subgroups of $\text{Out}(F_n)$ and the Euler characteristic of $\text{Out}(F_n)$* , J. Pure Appl. Algebra **49** (1987), no. 1-2, 187–200.
 - [115] O. Tommasi, *Rational cohomology of the moduli space of genus 4 curves*, Compos. Math. **141** (2005), no. 2, 359–384.
 - [116] W. van der Kallen, *Injective stability for K_2* , Algebraic K-theory (Proc. Conf., Northwestern Univ., Evanston, Ill., 1976), pp. 77–154. Lecture Notes in Math., Vol. 551, Springer, Berlin, 1976.
 - [117] W. van der Kallen, *Homology stability for linear groups*, Invent. Math. **60** (1980), no. 3, 269–295.
- 7 回 目**
- [118] R. Bott and L. W. Tu, *Differential forms in algebraic topology*, Graduate Texts in Mathematics, **82**. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.
 - [119] W. Thurston, *The geometry and topology of 3-manifolds*, Lecture Notes, Princeton Univ., 1978; Electronic ver. 1.0, <http://www.msri.org/publications/books/gt3m/>
 - [120] C. Bavard, *Longueur stable des commutateurs*, Enseign. Math. (2) **37** (1991), no. 1-2, 109–150.
 - [121] M. Bestvina and K. Fujiwara, *Bounded cohomology of subgroups of mapping class groups*, Geom. Topol. **6** (2002), 69–89.
 - [122] M. Bestvina and K. Fujiwara, *Quasi-homomorphisms on mapping class groups*, Glas. Mat. Ser. III **42**(62) (2007), no. 1, 213–236.
 - [123] A. Borel and F. Hirzebruch, *Characteristic classes and homogeneous spaces. I*, Amer. J. Math. **80** (1958), 458–538.
 - [124] R. Brooks, *Some remarks on bounded cohomology*, in the book of Riemann surfaces and related topics: Proceedings of the 1978 Stony Brook Conference (State Univ. New York, Stony Brook, N.Y., 1978), 53–63, Ann. of Math. Stud., **97**, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1981.
 - [125] R. Brooks and C. Series, *Bounded cohomology for surface groups*, Topology **23** (1984), no. 1, 29–36.
 - [126] J. Ebert and O. Randal-Williams, *Generalised Miller-Morita-Mumford classes for block bundles and topological bundles*, Algebr. Geom. Topol. **14** (2014), no. 2, 1181–1204.
 - [127] N. Monod, *An invitation to bounded cohomology*, in the book of International Congress of Mathematicians. Vol. II, 1183–1211, Eur. Math. Soc., Zürich, 2006.
 - [128] D. Epstein and K. Fujiwara, *The second bounded cohomology of word-hyperbolic groups*, Topology **36** (1997), no. 6, 1275–1289.
 - [129] H. Endo and D. Kotschick, *Bounded cohomology and non-uniform perfection of mapping class groups*, Invent. Math. **144** (2001), no. 1, 169–175.
 - [130] C. Faber, *A conjectural description of the tautological ring of the moduli space of curves*, in the book of Moduli of curves and abelian varieties, 109–129, Aspects Math., E33, Vieweg, Braunschweig, 1999.

- [131] C. Faber, *Tautological algebras of moduli spaces of curves*, in the book of Moduli spaces of Riemann surfaces, 197–219, IAS/Park City Math. Ser., **20**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2013.
- [132] C. Faber and R. Pandharipande, *Logarithmic series and Hodge integrals in the tautological ring*, With an appendix by Don Zagier. Michigan Math. J. **48** (2000), 215–252.
- [133] K. Fujiwara, *Quasi-homomorphisms on mapping class groups*, in the book of Handbook of Teichmüller theory. Vol. II, 241–269, IRMA Lect. Math. Theor. Phys., 13, Eur. Math. Soc., Zürich, 2009.
- [134] K. Fujiwara and K. Ohshika, *The second bounded cohomology of 3-manifolds*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **38** (2002), no. 2, 347–354.
- [135] M. Gromov, *Volume and bounded cohomology*. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. **56** (1982), 5–99 (1983).
- [136] N. Kawazumi, *A generalization of the Morita-Mumford classes to extended mapping class groups for surfaces*, Invent. Math. **131** (1998), 137–149.
- [137] N. Kawazumi, S. Morita, *The primary approximation to the cohomology of the moduli space of curves and stable characteristic classes*, Math. Res. Lett. **3** (1996) 629–642.
- [138] N. Kawazumi, S. Morita, *The primary approximation to the cohomology of the moduli space of curves and cocycles for the Mumford-Morita-Miller classes*, preprint, Univ. of Tokyo, 2001.
- [139] S. Matsumoto and S. Morita, *Bounded cohomology of certain groups of homeomorphisms*, Proc. Amer. Math. Soc. **94** (1985), no. 3, 539–544.
- [140] Y. Mitsumatsu, *Bounded cohomology and l^1 -homology of surfaces*, Topology **23** (1984), no. 4, 465–471.
- [141] O. Randal-Williams, *Relations among tautological classes revisited*, Adv. Math. **231** (2012), no. 3-4, 1773–1785.
- [142] R. Pandharipande and A. Pixton, *Relations in the tautological ring of the moduli space of curves*, arXiv:1301.4561
- [143] T. Soma, *The third bounded cohomology and Kleinian groups*, in the book of Topology and Teichmüller spaces (Katinkulta, 1995), 265–277, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1996.
- [144] T. Soma, *Bounded cohomology of closed surfaces*, Topology **36** (1997), no. 6, 1221–1246.
- [145] T. Soma, *The zero-norm subspace of bounded cohomology*, Comment. Math. Helv. **72** (1997), no. 4, 582–592.
- [146] T. Soma, *Bounded cohomology and topologically tame Kleinian groups*, Duke Math. J. **88** (1997), no. 2, 357–370.
- [147] T. Soma, *Existence of non-Banach bounded cohomology*, Topology **37** (1998), no. 1, 179–193.
- [148] D. Sullivan, *La classe d'Euler réelle d'un fibré vectoriel a groupe structural $SL_n(\mathbb{Z})$ est nulle*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **281** (1975), no. 1, A17–A18.
- [149] G. van der Geer, *Cycles on the moduli space of abelian varieties*, in the book of Moduli of curves and abelian varieties, 65–89, Aspects Math., E33, Vieweg, Braunschweig, 1999.
- [150] T. Yoshida, *On 3-dimensional bounded cohomology of surfaces*, in the book of Homotopy theory and related topics (Kyoto, 1984), 173–176, Adv. Stud. Pure Math., **9**, Math. Soc. Japan, 1987.

8 回目

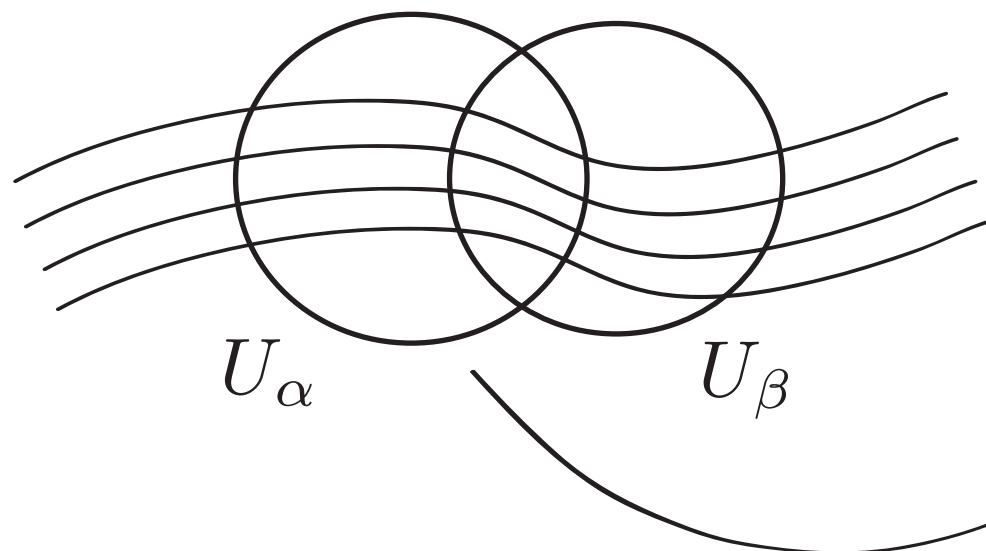
- [151] S. K. Boldsen, *Improved homological stability for the mapping class group with integral or twisted coefficients*, Math. Z. **270** (2012), no. 1–2, 297–329.

- [152] S. Diaz, *A bound on the dimensions of complete subvarieties of $\mathbb{M}_g$* , Duke Math. J. **51** (1984), no. 2, 405–408.
- [153] S. Diaz, *Complete subvarieties of the moduli space of smooth curves*, Algebraic geometry, Bowdoin, 1985 (Brunswick, Maine, 1985), 77–81, Proc. Sympos. Pure Math., **46**, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987.
- [154] T. Eguchi, K. Hori and C. -S. Xiong, *Quantum cohomology and Virasoro algebra*, Phys. Lett. B **402** (1997), no. 1-2, 71–80.
- [155] E. Getzler and R. Pandharipande, *Virasoro constraints and the Chern classes of the Hodge bundle*, Nuclear Phys. B **530** (1998), no. 3, 701–714.
- [156] I. P. Goulden, D. M. Jackson and R. Vakil, *A short proof of the λ_g -conjecture without Gromov-Witten theory: Hurwitz theory and the moduli of curves*, J. Reine Angew. Math. **637** (2009), 175–191.
- [157] I. P. Goulden, D. M. Jackson and R. Vakil, *The moduli space of curves, double Hurwitz numbers, and Faber’s intersection number conjecture*, Ann. Comb. **15** (2011), no. 3, 381–436.
- [158] A. Givental, *Gromov-Witten invariants and quantization of quadratic Hamiltonians*, Dedicated to the memory of I. G. Petrovskii on the occasion of his 100th anniversary. Mosc. Math. J. **1** (2001), no. 4, 551–568, 645.
- [159] J. Harris and D. Mumford, *On the Kodaira dimension of the moduli space of curves*, Invent. Math. **67** (1982), no. 1, 23–88.
- [160] E-N. Ionel, *Topological recursive relations in $H^{2g}(\mathbb{M}_{g,n})$* , Invent. Math. **148** (2002), no. 3, 627–658.
- [161] E-N. Ionel, *Relations in the tautological ring of $\mathbb{M}_g$* , Duke Math. J. **129** (2005), no. 1, 157–186.
- [162] M. Kontsevich, *Feynman diagrams and low-dimensional topology*, in the First European Congress of Mathematics, Vol. II (Paris, 1992), 97–121, Progr. Math., 120, Birkhäuser, Basel, 1994.
- [163] K. Liu and H. Xu, *A proof of the Faber intersection number conjecture*, J. Differential Geom. **83** (2009), no. 2, 313–335.
- [164] E. Looijenga, *On the tautological ring of $\mathbb{M}_g$* , Invent. Math. **121** (1995), no. 2, 411–419.
- [165] S. Morita, *Generators for the tautological algebra of the moduli space of curves*, Topology **42** (2003), no. 4, 787–819.
- [166] S. Shadrin and D. Zvonkine, *Intersection numbers with Witten’s top Chern class*, Geom. Topol. **12** (2008), no. 2, 713–745.
- [167] E. Witten, *Two-dimensional gravity and intersection theory on moduli space*, Surveys in differential geometry (Cambridge, MA, 1990), 243–310, Lehigh Univ., Bethlehem, PA, 1991.

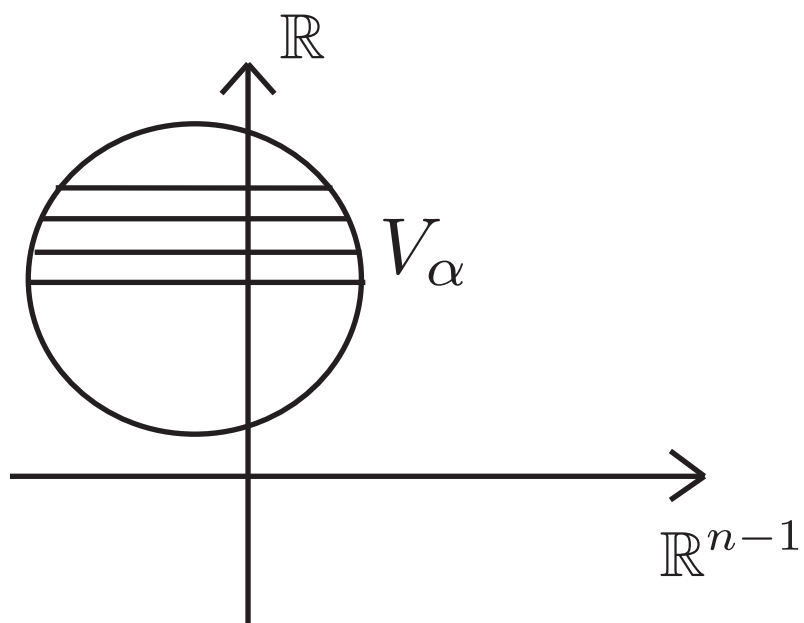
9 回 目

- [168] E. Ghys and V. Sergiescu, *Sur un groupe remarquable de difféomorphismes du cercle*, Comment. Math. Helv. **62** (1987), no. 2, 185–239.
- [169] B. Farb, *On being Thurstonized*, to appear in Notices AMS,
<http://www.math.uchicago.edu/farb/papers.html>

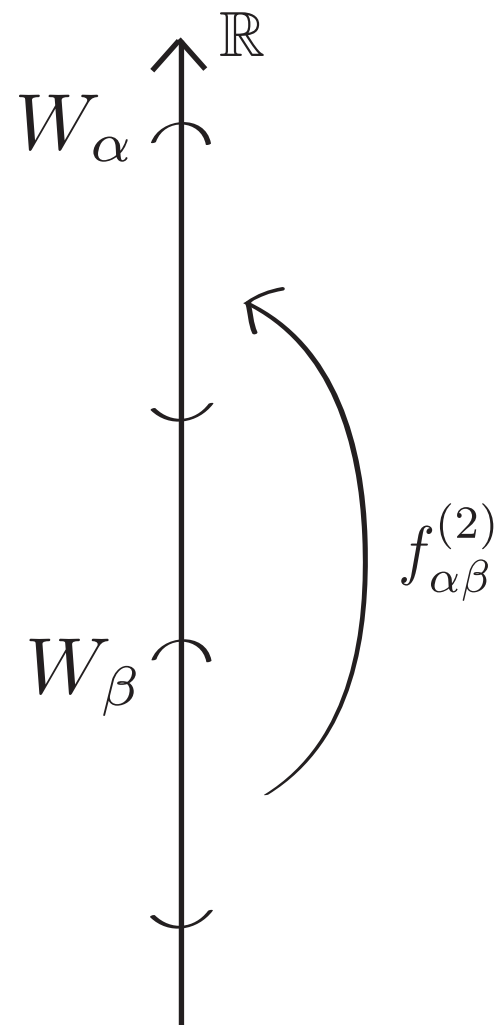
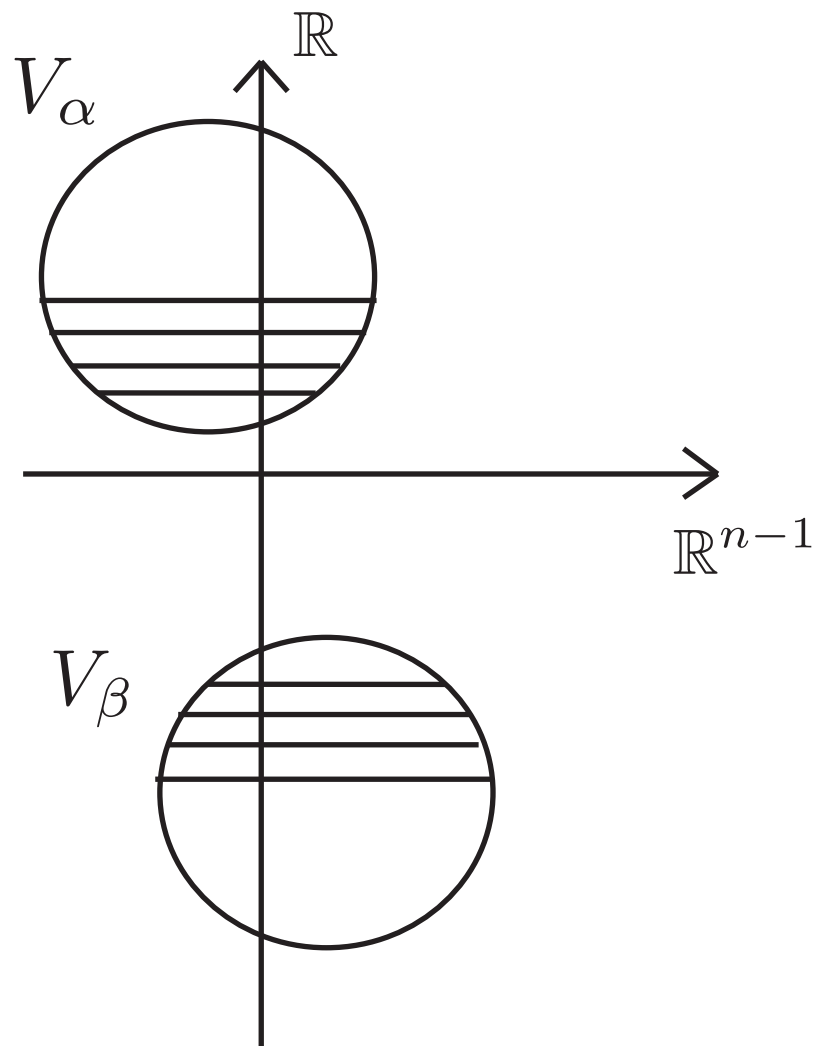
M^n

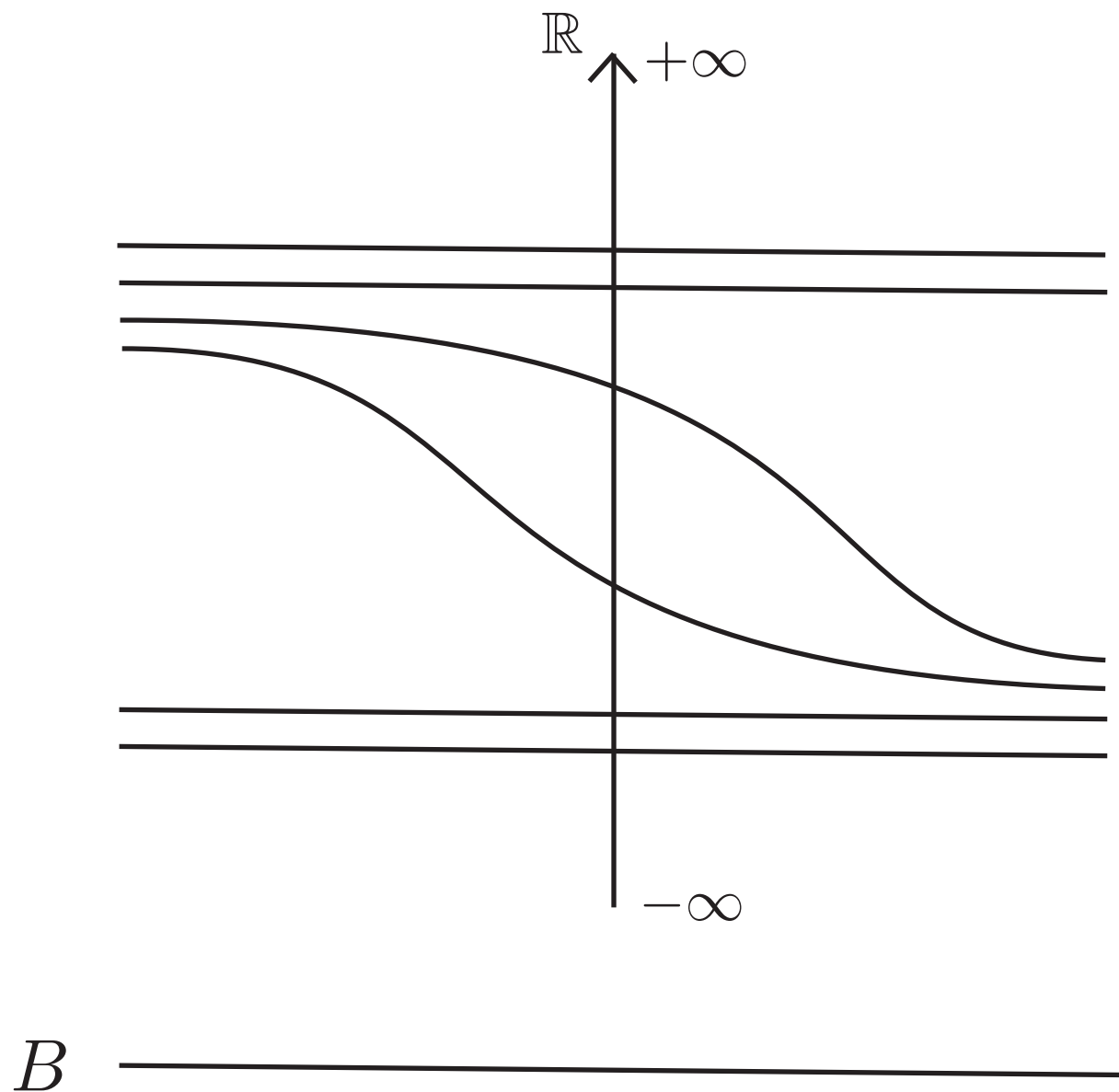


$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$$

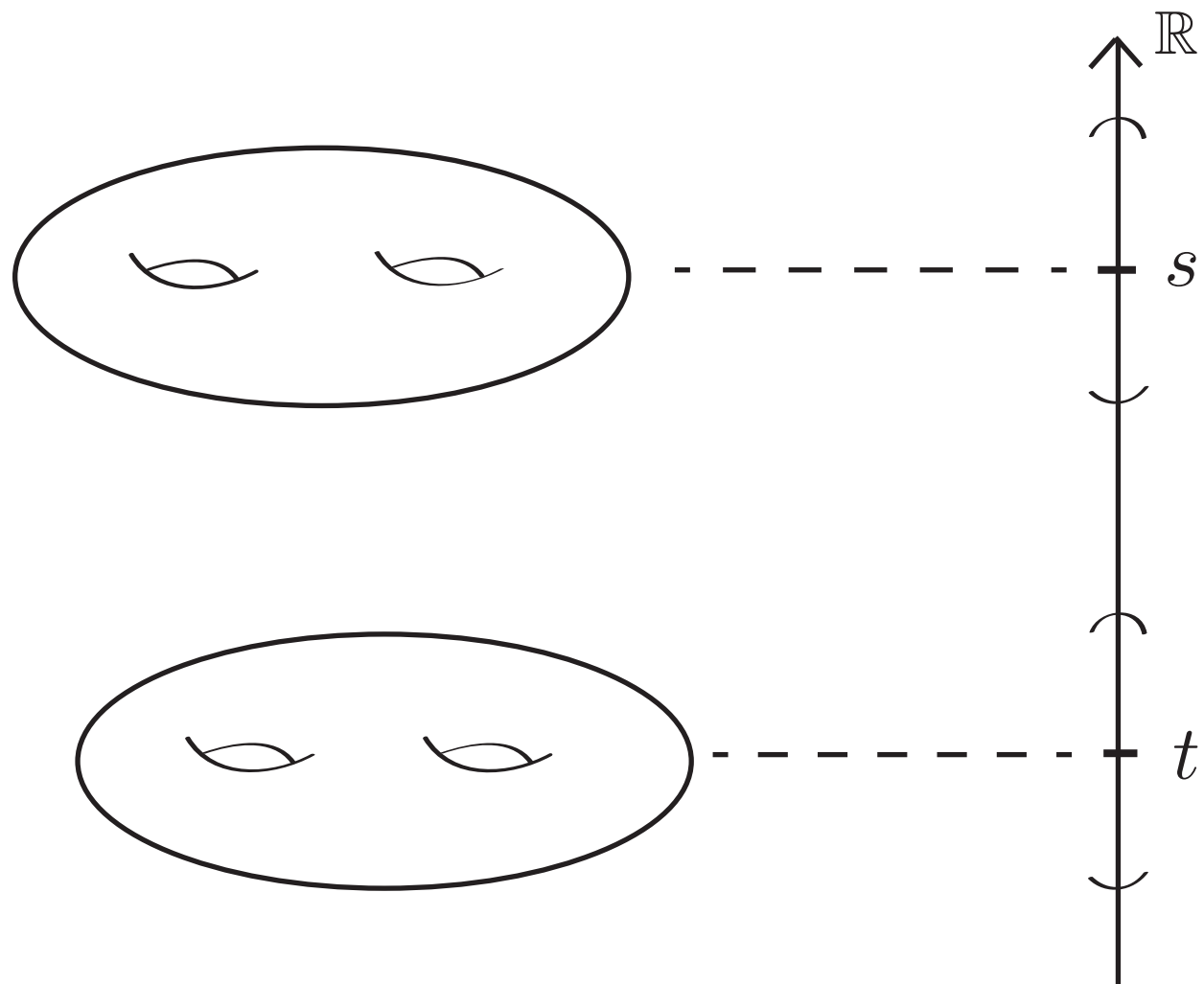


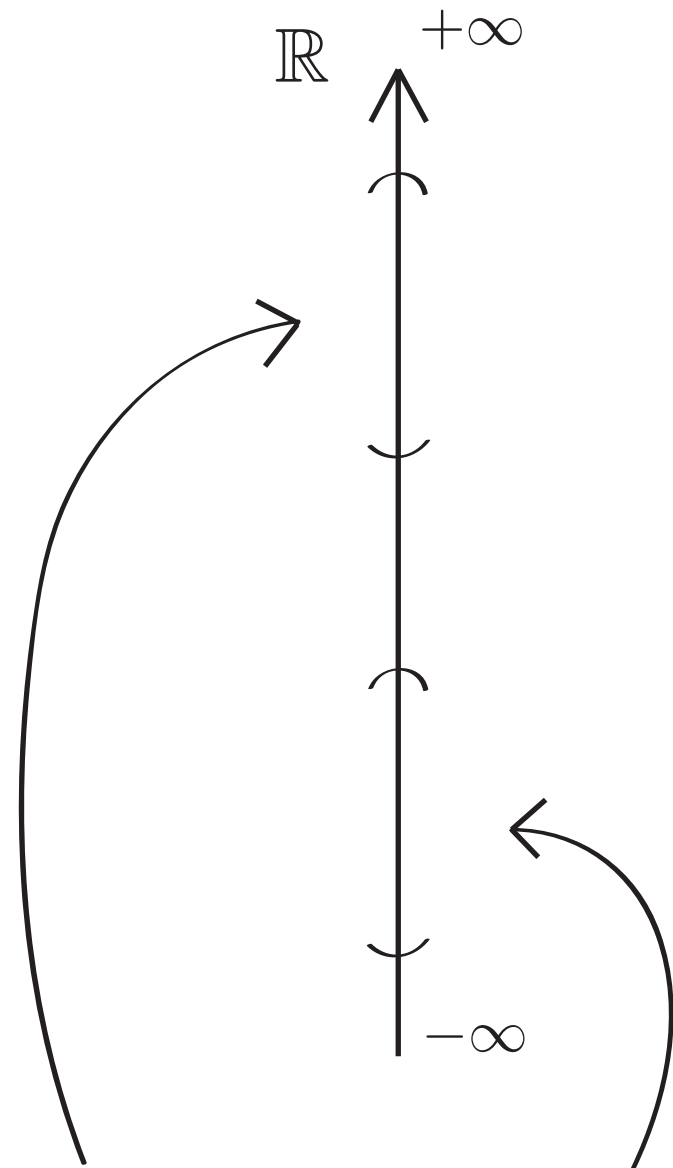
$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$$



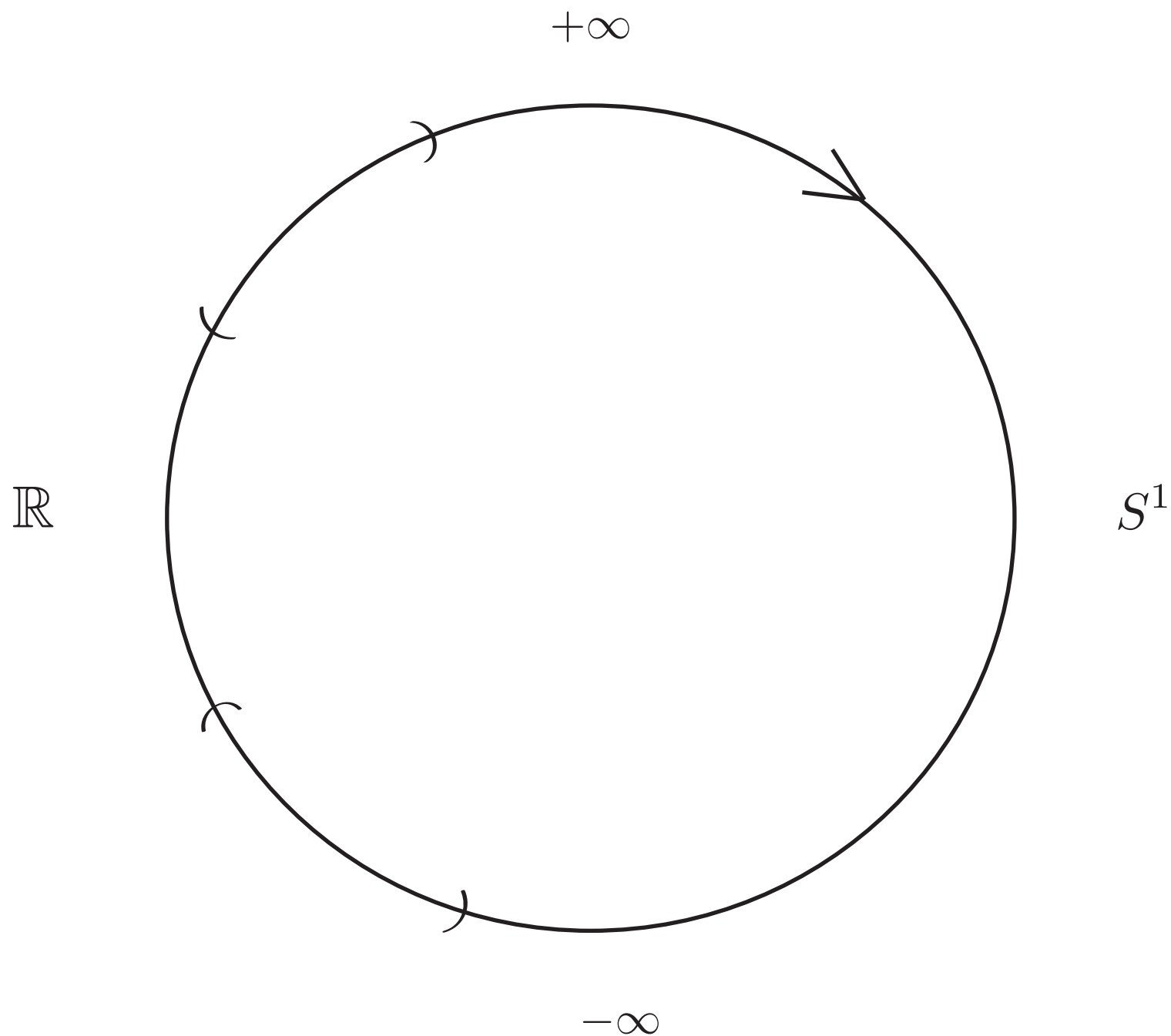


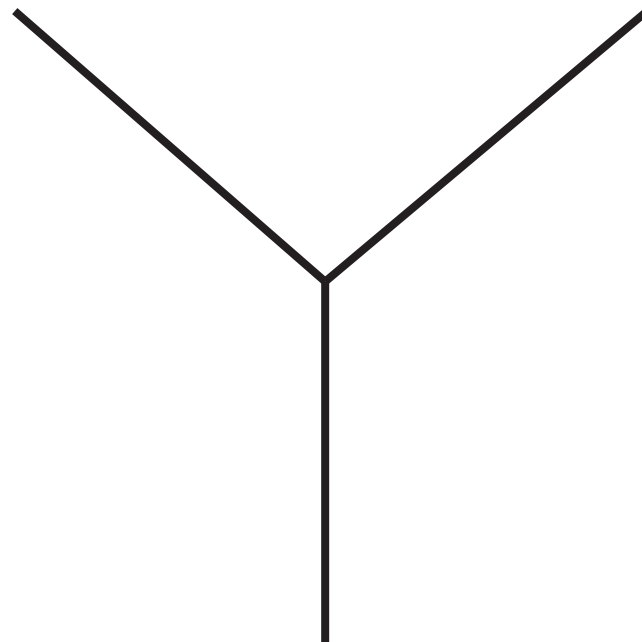
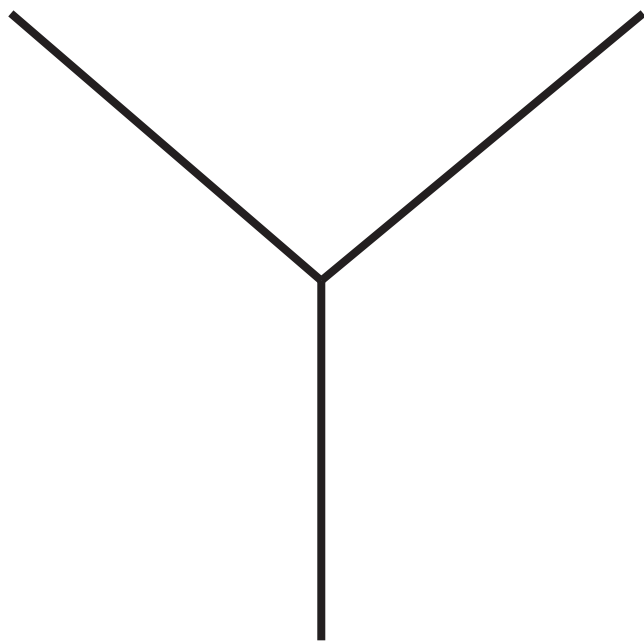
$$B\mathrm{Diff}_K^\delta \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow B\overline{\Gamma}_1$$



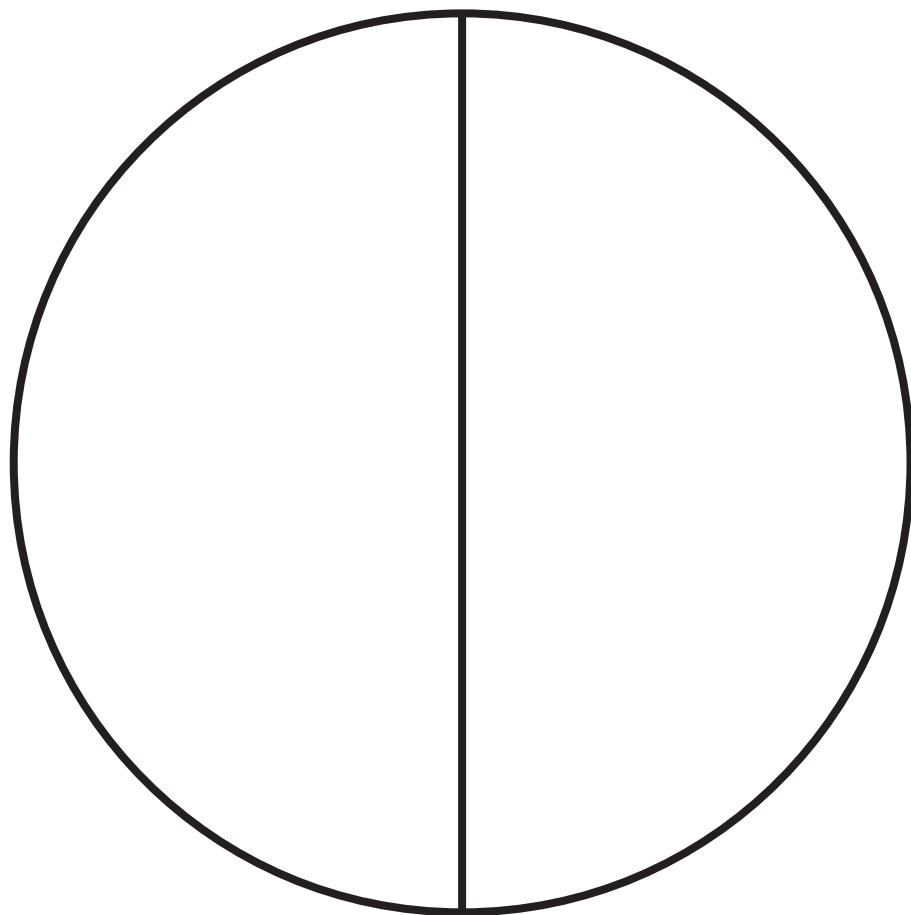


$$\mathrm{Diff}_K^\delta \mathbb{R} \times \mathrm{Diff}_K^\delta \mathbb{R} \hookrightarrow \mathrm{Diff}_K^\delta \mathbb{R}$$

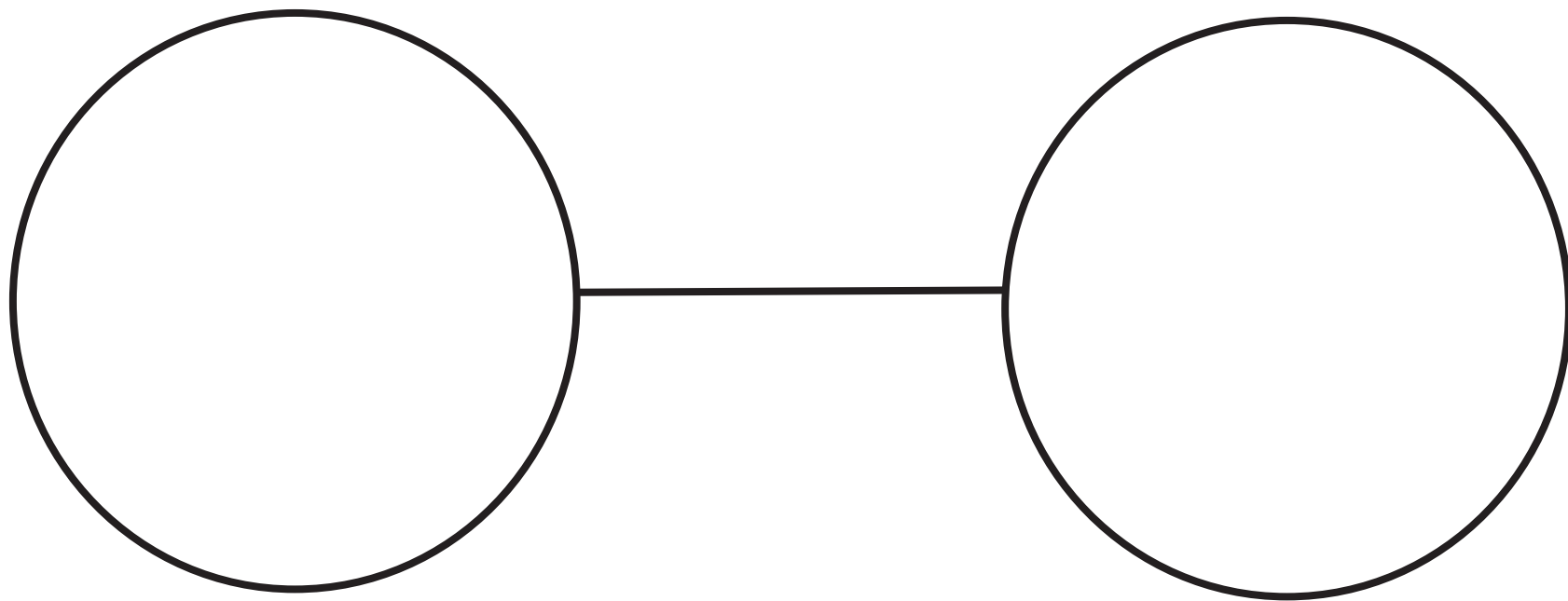




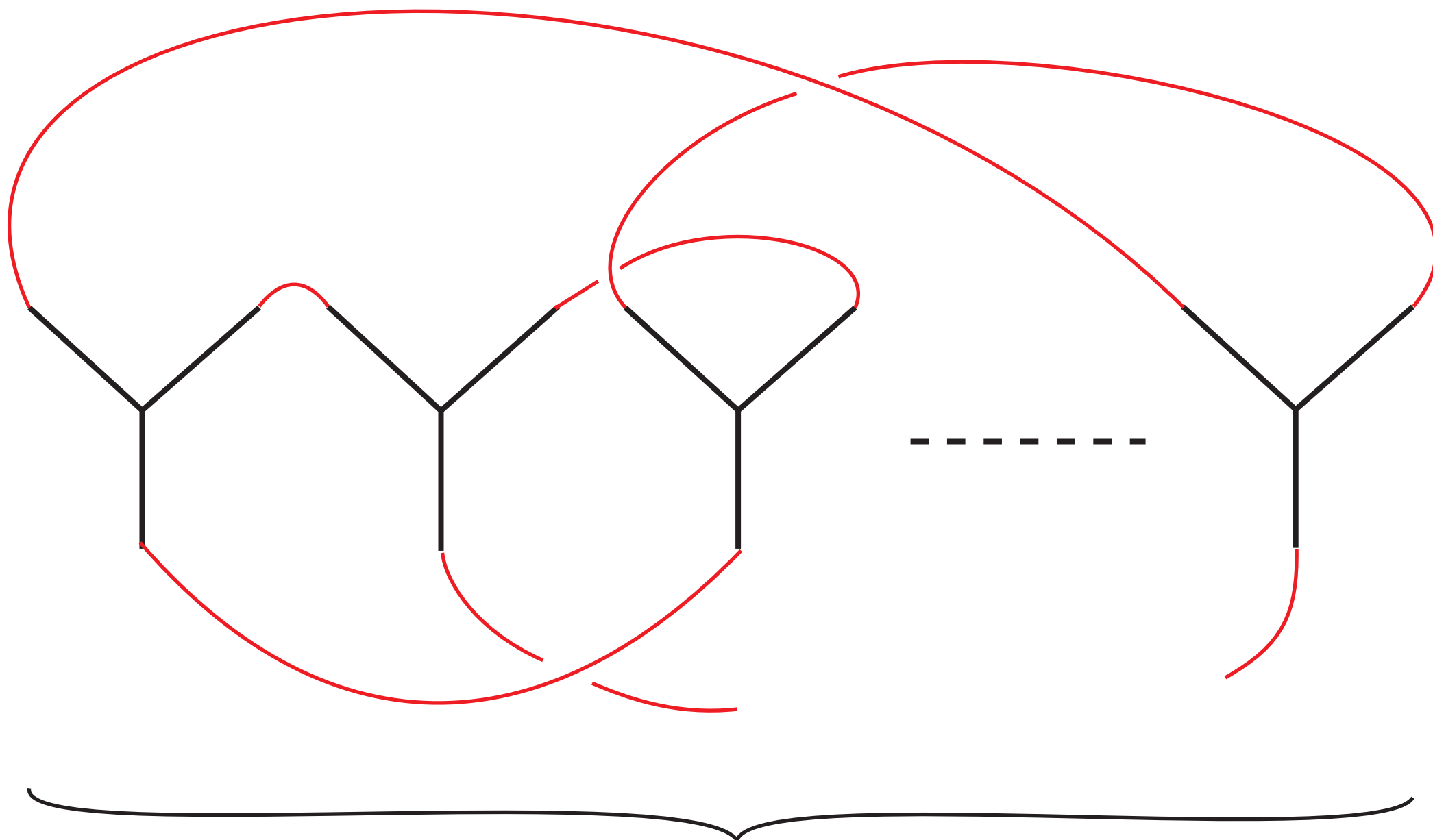
第4回 図4-a



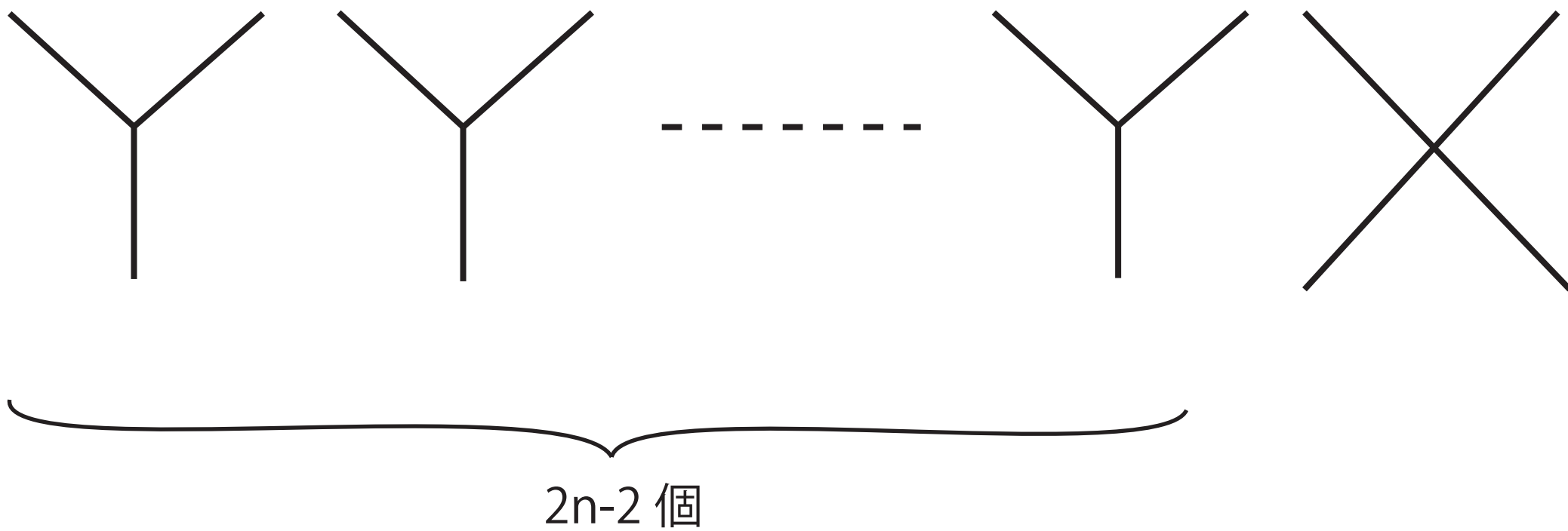
第4回 図4-b



第4回 図4-c



$2n$ 個



The diagram illustrates a mathematical identity between two trivalent vertices. Each vertex consists of three black lines meeting at a central point: one line extends vertically downwards, while the other two extend upwards and outwards at approximately 45-degree angles from the vertical. A red circular arrow is drawn around each vertex, indicating a rotation. In the first vertex, the arrow starts on the left diagonal line and points clockwise towards the right diagonal line. In the second vertex, the arrow starts on the right diagonal line and points clockwise towards the left diagonal line. These two vertices are separated by a plus sign (+). This is followed by an equals sign (=) and a large zero (0), indicating that the sum of these two configurations is zero.

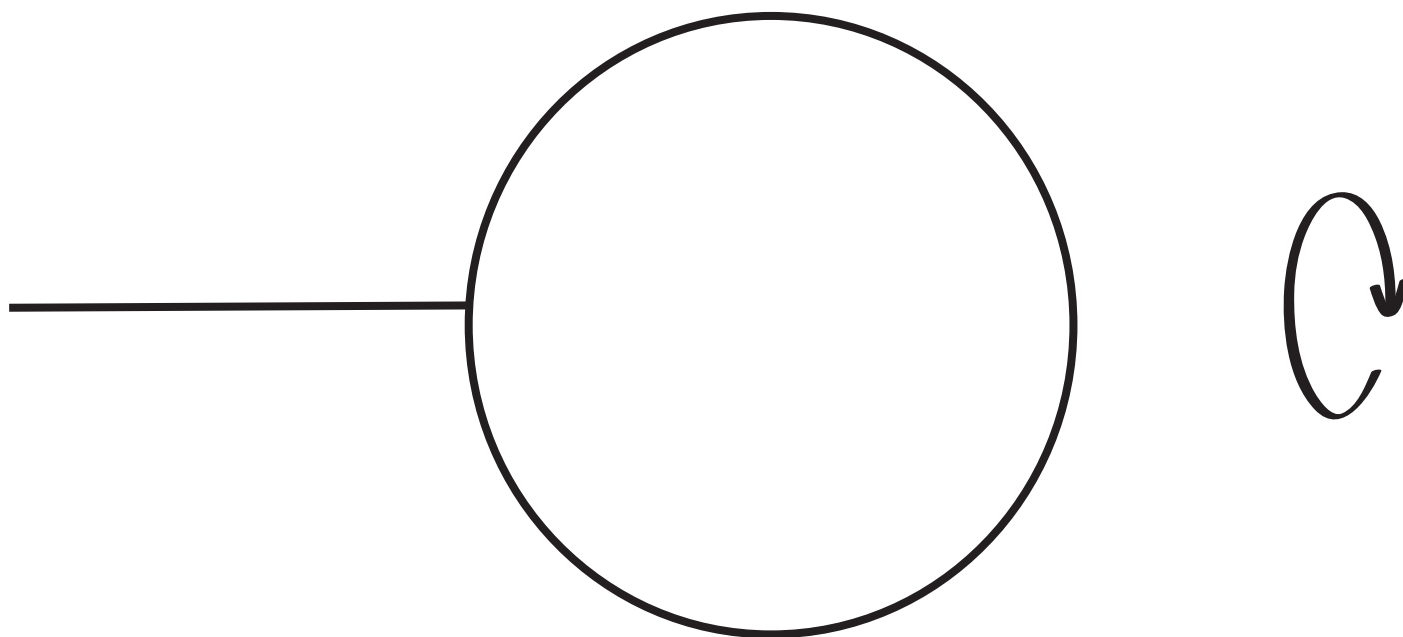
第4回 図4-f

The image displays a mathematical equation involving three diagrams, each with red circular arrows indicating rotation, separated by plus signs, followed by an equals sign and a zero.

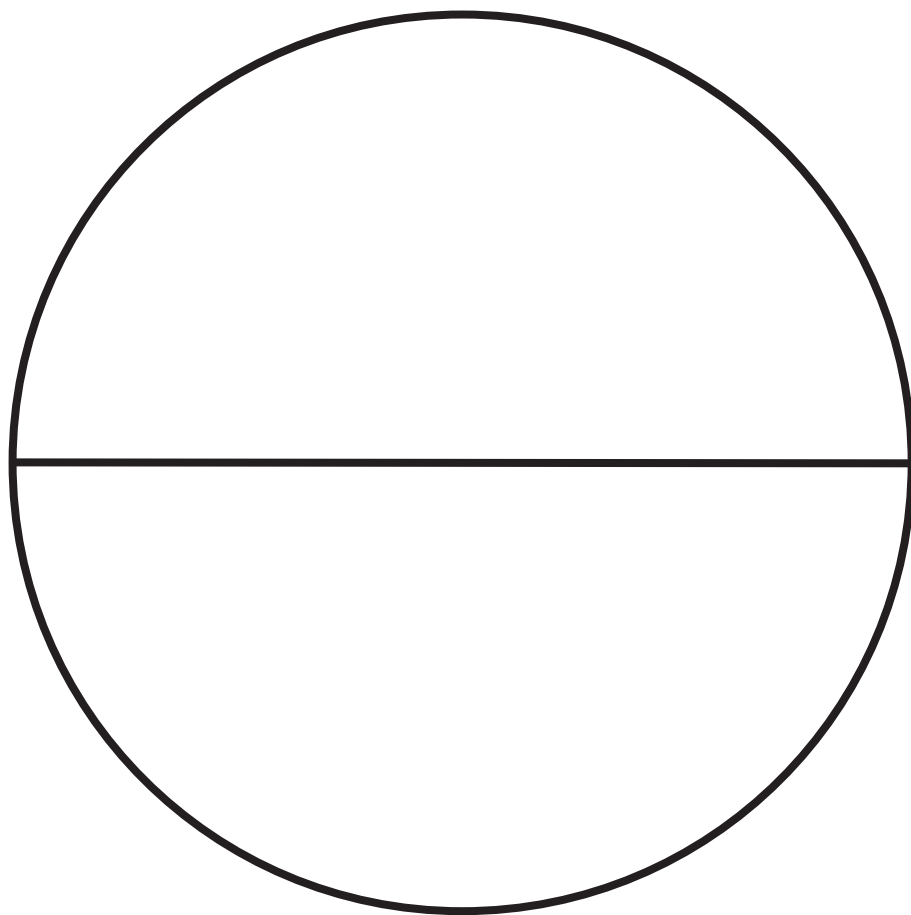
- Diagram 1:** A vertical line with two horizontal segments at the top and bottom. Each horizontal segment has a red circular arrow above it, pointing clockwise.
- Diagram 2:** Two vertical lines connected by a horizontal line in the middle. Each vertical line has a red circular arrow on its left side, pointing clockwise.
- Diagram 3:** Two vertical lines connected by a horizontal line in the middle. The entire structure is crossed out with a large 'X' formed by two diagonal lines. Each vertical line has a red circular arrow on its left side, pointing clockwise.

The equation is: $\text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} = 0$

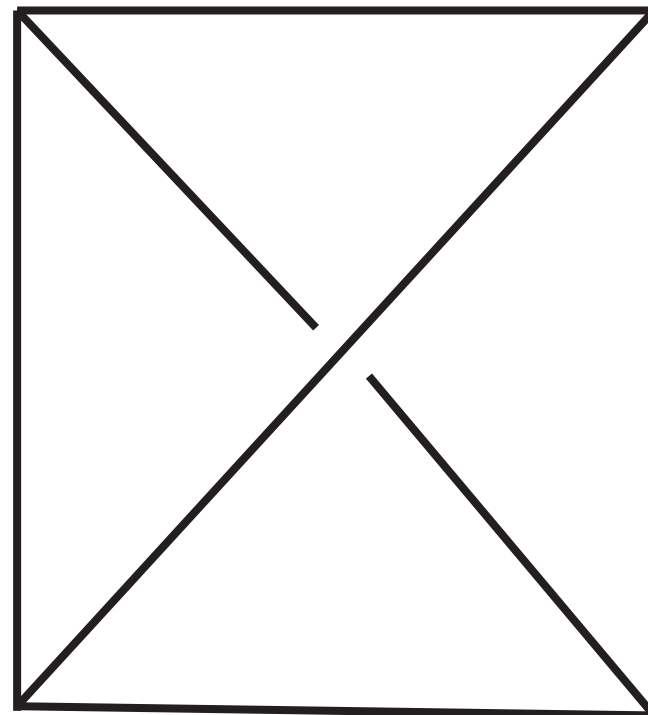
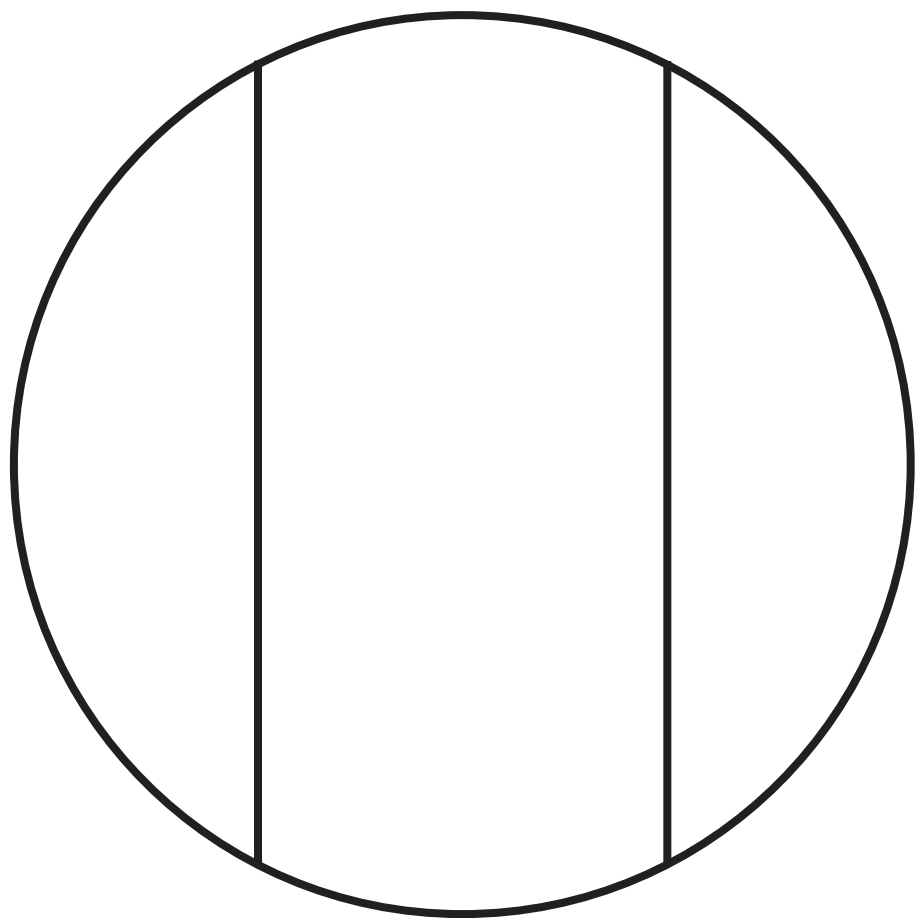
第4回 図4-g



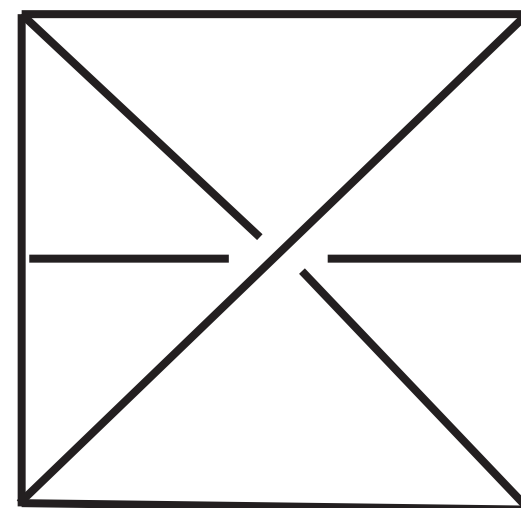
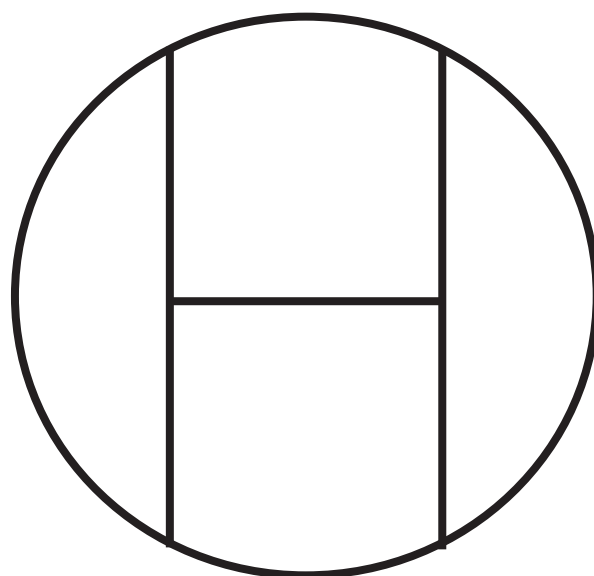
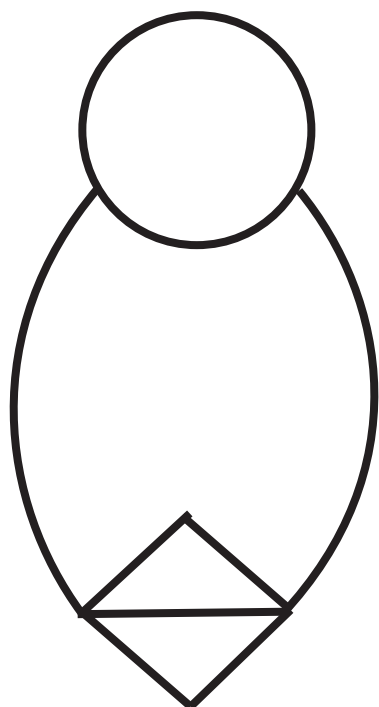
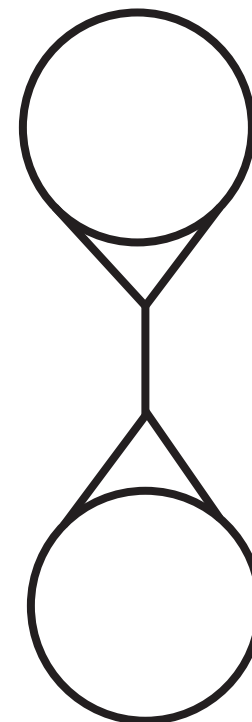
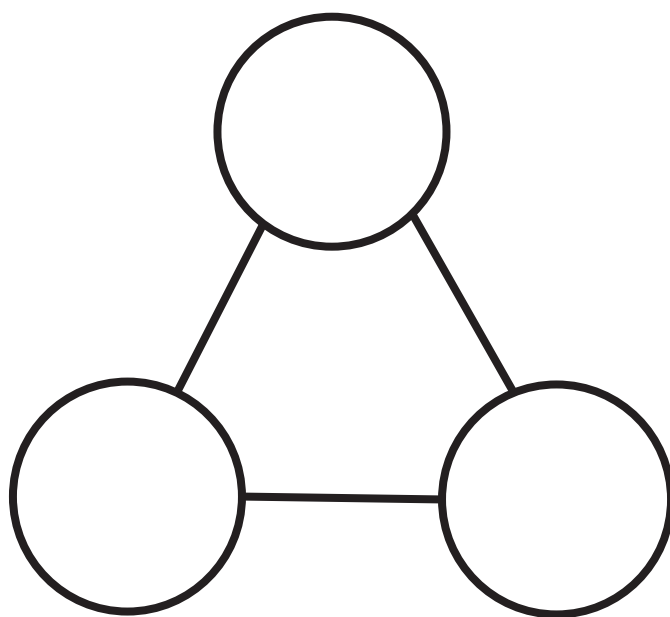
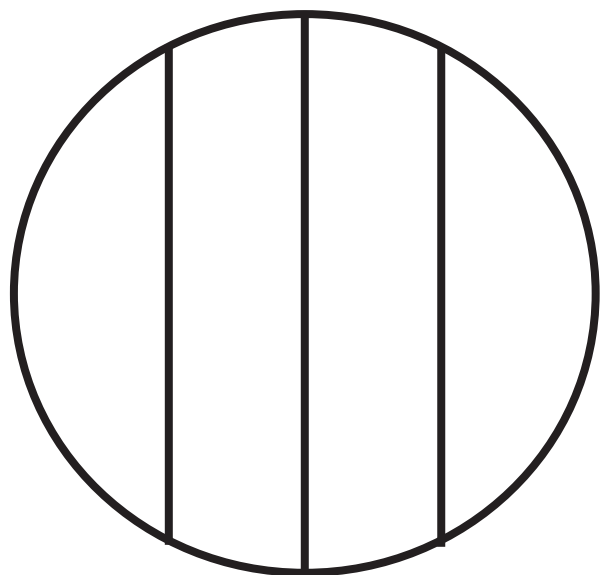
第4回 図4-h



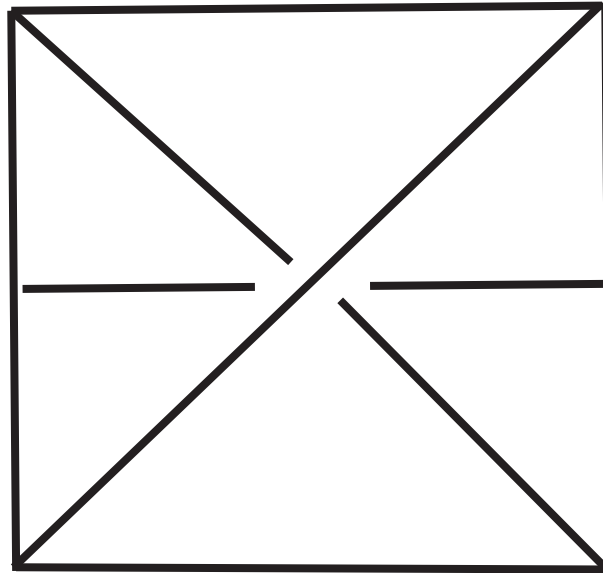
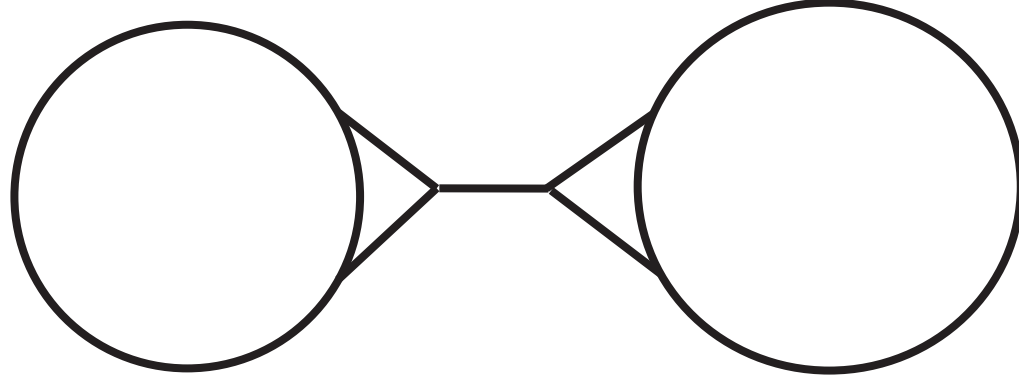
第4回 図4-i



第4回 図4-j



第4回 図4-k



第4回 図4-1