

$6 = 2 \times 3, 8 = 2 \times 4, 9 = 3 \times 3$ のようにより小さい正の整数の積として表わせる整数を合成数といいます。一方、2, 3, 5, 7 のように 1 とそれ自身以外に正の約数を持たない 2 以上の整数を素数といいます。

問題 1. 10 から 30 までの素数を列挙せよ。

既に学んだように、「2 以上の整数は幾つかの素数の積として順序を除いて一意的に表せる」という**素因数分解の定理**が成立します。「順序を除いて一意的に」というのは

$$30 = 2 \times 3 \times 5 = 2 \times 5 \times 3 = 3 \times 2 \times 5 = 3 \times 5 \times 2 = 5 \times 2 \times 3 = 5 \times 3 \times 2$$

のように見掛けは違う表し方があっても、積の順序は入れ換えられるので、違う表示とは考えないということです。また、67 は素数ですが、 $67=67$ も素数の積としての表示と考えます。さらに、 $72 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$ ですが、見やすいように $72 = 2^3 \times 3^2$ と指数を用いて表わすのが慣習です。

問題 2. 1440 を素因数分解せよ。

さて、素数はどれくらい存在するのでしょうか。紀元前 3 世紀に著されたユークリッドの「原論」に「素数は無限に存在する」ことが証明されています。参考までにユークリッドの証明を現代の表現で述べてみましょう。

ユークリッドの証明. 素数が有限個しかないと仮定して、 $\{p_1, p_2, \dots, p_r\}$ が素数すべてであるとする。このとき、 $N = p_1 p_2 \cdots p_r + 1$ とおけば、 $N > 1$ 。したがって、 N を割り切る素数 q が存在する。仮定から、 q は $p_1, p_2, \dots, p_r$ のどれかに一致する。しかし、 N を p_i で割ったときの余りは 1 なので、 q が N の約数であることに反する。素数が有限個しかないと仮定して矛盾が起きたので、素数が無限に存在することが示された。

素因数分解の定理は整数を扱う理論では最も基本的な事項ですが、その応用を一つ紹介します。例えば、72 の正の約数は幾つあるか。素朴な方法として、1 から 72 までの整数に対して 72 の約数であるか否かを順次調べていくことが考えられます。しかし、この方法は無駄が多く、効率的ではありません。そこで、72 の素因数分解に着目します。 $72 = 2^3 \times 3^2$ 。そうすると、72 の約数の素因数分解には 2 か 3 しか現れないこと、さらに素因数の指数にも制限があることが観察されます。実際、

$$\begin{aligned} 2^0 \times 3^0 &= 1, 2^1 \times 3^0 = 2, 2^2 \times 3^0 = 4, 2^3 \times 3^0 = 8, \\ 2^0 \times 3^1 &= 3, 2^1 \times 3^1 = 6, 2^2 \times 3^1 = 12, 2^3 \times 3^1 = 24, \\ 2^0 \times 3^2 &= 9, 2^1 \times 3^2 = 18, 2^2 \times 3^2 = 36, 2^3 \times 3^2 = 72 \end{aligned}$$

と 72 の正の約数を見通しよく列挙することができます。「72 の正の約数は幾つあるか」ということであれば、約数を実際に計算しなくても、 $(3+1) \times (2+1) = 12$ と素因数の指数の組み合わせを考えればたちどころに答が出て来ます。

問題 3. 1440 の正の約数の個数を求めよ。さらに、8 または 9 で割り切れる、1440 の正の約数の個数を求めよ。

次に、「72 の正の約数の和を求めよ」という問いにも、素因数分解を用いて筋よく答えることができます。上で求めた 72 の約数を正直に足さずとも

$$(2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3) \times (3^0 + 3^1 + 3^2)$$

を展開すれば、分配法則によって 72 の正の約数がすべて展開式の項として現われます。そして、等比数列の和の公式

$$r \neq 1 \text{ のとき, } 1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1} = \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

の出番です。これで

$$(2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3) \times (3^0 + 3^1 + 3^2) = \frac{1-2^4}{1-2} \times \frac{1-3^3}{1-3} = \frac{15}{1} \times \frac{26}{2} = 195$$

と計算できます。

この考え方は「72の正の約数の逆数の和を求めよ」という問いに対しても適用できます。実際、上と同じ要領で

$$\left(\frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3}\right) \times \left(\frac{1}{3^0} + \frac{1}{3^1} + \frac{1}{3^2}\right) = \frac{1-\frac{1}{2^4}}{1-\frac{1}{2}} \times \frac{1-\frac{1}{3^3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{15}{16}}{\frac{1}{2}} \times \frac{\frac{26}{27}}{\frac{2}{3}} = \frac{195}{72}$$

と筋よく計算できます。

問題4. 等比数列の和の公式「 $r \neq 1$ のとき、 $1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1} = \frac{1-r^n}{1-r}$ 」を導け。

18世紀の大数学者オイラーはこのような考え方を大胆に発展させて「素数が無限に存在する」ことの別証明を与えました。その概略を説明しましょう。等比数列の和の公式から等比級数の公式

$$-1 < r < 1 \text{ のとき、 } 1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1} + \cdots = \frac{1}{1-r}$$

が導かれます。 $r = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}$ に等比級数の公式を適用すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \cdots, \\ \frac{1}{1-\frac{1}{3}} &= \frac{1}{3^0} + \frac{1}{3^1} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^{n-1}} + \cdots, \\ \frac{1}{1-\frac{1}{5}} &= \frac{1}{5^0} + \frac{1}{5^1} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{5^{n-1}} + \cdots \end{aligned}$$

を得ます。そこで、その積

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}} \times \frac{1}{1-\frac{1}{3}} \times \frac{1}{1-\frac{1}{5}} = \left(\frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \cdots\right) \times \left(\frac{1}{3^0} + \frac{1}{3^1} + \frac{1}{3^2} + \cdots\right) \times \left(\frac{1}{5^0} + \frac{1}{5^1} + \frac{1}{5^2} + \cdots\right)$$

の右辺を形式的に展開すると、

$$\frac{1}{2^0 \times 3^0 \times 5^0} + \frac{1}{2^1 \times 3^0 \times 5^0} + \frac{1}{2^0 \times 3^1 \times 5^0} + \frac{1}{2^2 \times 3^0 \times 5^0} + \frac{1}{2^0 \times 3^0 \times 5^1} + \cdots$$

となります。このように、2, 3, 5以外の素因数を持たない正の整数がすべて一回ずつ現れることが分かります。そこで思い切って左辺を

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}} \times \frac{1}{1-\frac{1}{3}} \times \frac{1}{1-\frac{1}{5}} \times \cdots \times \frac{1}{1-\frac{1}{p}} \times \cdots$$

とすべての素数 p を取った積にします。すると、素因数分解の定理によって、右辺はすべての正の整数の逆数の和

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

となります。これは調和級数とよばれるものですが、 ∞ に発散することはオイラー以前に知られていました。(問題5で微積分が確立される前の素朴な証明を、問題6で微積分を用いた証明を議論します。)そこで、素数が有限個しかないと仮定すると、左辺は有限の値をとり、右辺は発散するので、矛盾が起きます。これがオイラーによる「素数が無限に存在する」ことの証明の発想です。無限項の和と積を扱うので、それなりの注意が必要ですが、大学初年次で学ぶ微分積分学の知識できちんと数学の論証として確立することができます。

問題5. 不等式

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{2}, \dots, \quad \frac{1}{2^k+1} + \frac{1}{2^k+2} + \dots + \frac{1}{2^{k+1}} > \frac{1}{2}, \dots$$

を示せ。それを用いて $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ が ∞ に発散することを示せ。

問題6. $y = \frac{1}{x}$ のグラフを利用して不等式

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} > \int_1^{N+1} \frac{1}{x} dx$$

を示せ。さらに、これから $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ が ∞ に発散することを導け。

時間に余裕があれば、以下も読んでください。

オイラーはこのようにして整数論の研究に微分積分学を取り込んだのですが、これは解析的整数論とよばれる分野の先駆けとなりました。解析的整数論の最も基本的な結果の一つに素数定理とよばれるものがあります。実数 x に対して x 以下の素数の個数を $\pi(x)$ で表します。例えば、 $\pi(100) = 25$, $\pi(1000) = 168$, $\pi(10000) = 1229$ 。素数定理は $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}} = 1$ のふるまいを記述する定理ですが、その一番簡単な表現は

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}} = 1$$

です。

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\log x} = \infty$$

ですので、素数定理は「素数が無限に存在する」ことを含んでいますが、「素数がどのくらい沢山あるのか」を精密な形で述べています。素数の分布問題は今でも最先端の数学研究の対象ですが、クレイ研究所の七つの問題の一つである「リーマン仮説」は、19世紀の偉才リーマンが素数定理の証明について彼の構想を述べた論文で提示したものです。