

0. 微分法の発見とそれ以前

微積分学, 特に微分法は, 17 世紀後半 1665 年から 1667 年頃にかけてイギリスのニュートン (Sir Isaac Newton, 1643 年 - 1727 年) やドイツのライプニッツ (Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646 年 - 1716 年) により発見されたといわれている。ニュートンにとっては, 移動する物体の速度・加速度を求め, 力学を記述することが微分法の発見へ至る大きな動機の一つであったかも知れないが, 関数のグラフの接線を計算により求めてみたいという欲求がより一般には微分法を生み出した一番大きな動機であったに違いない。

しかしこのような欲求が生じたのは, 17 世紀に入ってからであって, 微分法発見のほんの少し前である。関数のグラフの概念は, 16 世紀には発見されていなかったと考えられる。座標の概念は, フランスのデカルト (René Descartes, 1596 年 - 1650 年) によって 17 世紀に入ってから発見・導入された。それ以前には, 人類は平面に x 軸と y 軸をとり関数の変化をグラフで表すということを知らなかったはずだ。

ギリシャ時代には, アルキメデス (Archimedes, 紀元前 287 年 - 紀元前 212 年) やアポロニウス (Apollonios of Perge, 紀元前 262 年頃 - 紀元前 190 年頃) らが円錐曲線としての放物線の幾何学的研究を高度に進めており, その結果の一つとして放物線と直線が囲む領域の面積でさえ計算出来ていた。放物線上の点の, 放物線の軸からの距離を x , 軸と直交する接線からの距離を y とすれば, y と x^2 が比例することも知っていた。しかし彼らは, その放物線が $y = ax^2$ のグラフであるという考え方を持っていなかった。ピタゴラス (Pythagoras, 紀元前 582 年 - 紀元前 496 年) による三平方の定理の発見はアポロニウスやアルキメデスの円錐曲線論から更に 250 年ほど遡るが, ピタゴラスにしても, 数百年のちのギリシャの賢人たちをもってしても, 単位円を $x^2 + y^2 = 1$ と表せるなどとは考えもしなかったであろう。

I. グラフの接線

さて, 17 世紀前半のヨーロッパ大陸に戻ろう。デカルトによる座標の概念の導入後, フランスのパスカル (Blaise Pascal, 1623 年 - 1662 年) やフェルマー (Pierre de Fermat, 1607 年末または 1608 年初頭 - 1665 年) は平面上に書かれた曲線の接線を研究し始めた。微分法の概念が定式化される少し前に, 彼らはグラフのを拡大することで接線に迫ることが出来るとも考えていたらしい。

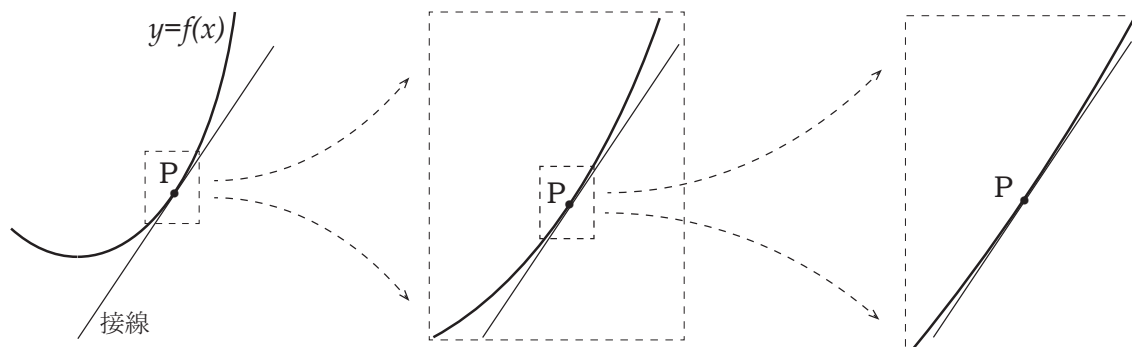
推察

平面上の曲線の上に 1 点を取り,
その点を中心にしてその曲線を限りなく大きく相似拡大していけば,
ある直線に近づくであろう。

それがこの曲線の点 P における接線に他ならないはずだ。

P を中心に拡大する

P を中心にもっと拡大する



さて、この推察を実際に数式で調べてみよう。 $y = f(x)$ の C 上に点 $P(a, f(a))$ をとる。点 P を中心にグラフ C を c 倍 ($c > 0$) に相似拡大して得られる曲線を D とし、この曲線 D をグラフとする関数を $y = g_c(x)$ とおく。

準備 1. 関数 $g_c(x)$ は $g_c(x) = c \left\{ f\left(\frac{x-a}{c} + a\right) - f(a) \right\} + f(a)$ と表される。

この事実の確認から始める。

問題 1. 1) 相似拡大の中心 P が原点 $O(0, 0)$ の場合は $g_c(x) = cf\left(\frac{x}{c}\right)$ と表されることを確かめよ。

2) 一般の場合に、1) を利用して 準備 1 を証明せよ。

パスカルやフェルマーらの思惑通り、 $c \rightarrow \infty$ とすると $y = g_c(x)$ のグラフは接線に近づくであろうか？簡単のため、 P を原点とし、簡単な 2 次関数で調べてみよう。

問題 2. $f(x) = x^2 + 2x$, $P = O(0, 0)$ に対して 準備 1 を使って $g_c(x)$ を求め、 $\lim_{c \rightarrow \infty} g_c(x) = 2x$ となることを確かめよ。

ではもう少し頑張って次もやってみよう。

問題 3. $f(x) = e^x$, $P(0, 1)$ に対して $g_c(x)$ を求め、 $\lim_{c \rightarrow \infty} g_c(x) = x + 1$ となることを確かめよ。

どうやら、上の推察は正しいらしい。しかも問題 3 では、確かに微分係数の計算をしているように見える。実際、次のようにして上の推察の意味を厳密に証明することができる。

定理 I. 以下の条件 (1) ~ (3) は同値である。

- (1) 関数 $y = f(x)$ は $x = a$ において微分可能で、 $f'(a) = A$ である、
- (2) $\lim_{c \rightarrow \infty} g_c(a \pm 1) = f(a) \pm A$,
- (3) 任意の実数 u に対し、 $\lim_{c \rightarrow \infty} g_c(a + u) = f(a) + Au$.

(2) $\Rightarrow$ (3) は比較的容易な計算で分かる (発展問題 [1])。また、(3) は

「 $y = g_c(x)$ のグラフは $c \rightarrow \infty$ のとき、点 $(a, f(a))$ を通る傾き A の直線に近づく」

ということに他ならないから、(1) と (2) が同値であることを示せばよい。これを証明してみよう。まずは「関数 $y = f(x)$ が $x = a$ において微分可能であり、 $f'(a) = A$ である」ということの定義を復習しよう。

定義. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = A$.

この定義 (つまり条件 (1)) を、条件 (2) との関係が分りやすくなるように少し書き換えてみる。定義にある $\lim_{h \rightarrow 0} \dots$ は、 $h \neq 0$ として h を 0 に近づけるならば、どのように近づけても必ず $\dots$ という意味である。従って (1) は次の (1') と同値である。

$$(1') \quad (1_+) : \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = A \quad \text{かつ} \quad (1_-) : \lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = A.$$

これに合わせて条件 (2) も以下のように書き換える。

$$(2) \quad (2_+) : \lim_{c \rightarrow \infty} g_c(a+1) = f(a) + A \quad \text{かつ} \quad (2_-) : \lim_{c \rightarrow \infty} g_c(a-1) = f(a) - A$$

以上の準備のもとに、定理の (1) と (2) の同値性を証明するには、 (1_+) と (2_+) の同値性、 (1_-) と (2_-) の同値性をそれぞれ示せばよい。

問題 4. (1_+) から (2_+) を導け。(ヒント： $h = 1/c$ と置きなおせばよい。)

時間に余裕があれば以下第 II 節、問題 6 までやってみよ (難しくない)。

発展問題 [1]. (2_+) から (1_+) を導け。同様にして、 (1_-) と (2_-) の同値性を証明せよ。また、 $u > 0$, $u < 0$ に分けて (2) から (3) を導け。

上の推察を数式でこのようにきちんと表せば微分の定義に至ったはずなのだが、17 世紀前半にはまだそこまで考え方が進まなかったらしい。ニュートンらによる微分の定義まであとほんの 10~20 年である。

II. 2 階の微分係数

上の推察をさらに拡張して、2 階、3 階など、高階の微分係数をグラフの拡大から調べることができる。以下では簡単のため、 $P(0,0)$, $f(0) = 0$ とする。まずは 2 階の微分を調べてみよう。原点を中心に、単にグラフを相似拡大していくのではなく、水平方向に c 倍拡大したら垂直方向には c^2 倍拡大するのである。

問題 5. $c > 0$ に対し $k_c(x) = c^2 f(\frac{x}{c})$ と置けば、関数 $y = k_c(x)$ のグラフは $y = f(x)$ のグラフを水平方向に c 倍、垂直方向に c^2 倍拡大したものであることを示せ。

定理 II. 関数 $y = f(x)$ は 2 回微分可能で、 $f(0) = f'(0) = 0$, $f''(0) = 2A$ と仮定する。このとき次が成り立つ。

$$\lim_{c \rightarrow \infty} k_c(x) = Ax^2.$$

この定理を一般的に証明するには、まずは大学に進学し、微積分の講義で「平均値の定理」を理解してからにすることがよい。幾つかの例では直接確かめることができる。

問題 6.

$$1) \quad f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} - 1 \quad \text{に対して} \quad \lim_{c \rightarrow \infty} k_c(x) = \frac{x^2}{2} \quad \text{を確かめよ。}$$

$$2) \quad f(x) = 1 - \cos x \quad \text{に対して} \quad \lim_{c \rightarrow \infty} k_c(x) = \frac{x^2}{2} \quad \text{を確かめよ。}$$

<< 次ページ以降は、発展研究として、家に帰ってから考えてみよ。 >>

III. 3 階および高階の微分

前節での考察は更に高階微分に適用できる。 n を 0 以上の整数とする。

準備 2. $c > 0$ に対し $K_c(x) = c^n f\left(\frac{x}{c}\right)$ と置けば、関数 $y = K_c(x)$ のグラフは $y = f(x)$ のグラフを水平方向に c 倍、垂直方向に c^n 倍拡大したものである。

定理 III. 関数 $y = f(x)$ は n 回微分可能で、 $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n-1)}(0) = 0$, $f^n(0) = n!A$ と仮定する。このとき次が成り立つ。

$$\lim_{c \rightarrow \infty} K_c(x) = Ax^n.$$

多項式で考えてみると、この定理の裏には当然のからくりが潜んでいることがわかる。0 以上の整数 n は固定しておく。また、 d を自然数とする。

定理 IV. $f(x) = x^d$ とおく。このとき以下が成り立つ。

- (1) $0 < d < n$ のとき、 $\lim_{c \rightarrow \infty} K_c(x)$ は $x = 0$ 以外では発散する。
- (2) $d = n$ のとき、 $c > 0$ によらず $K_c(x) = x^d$ 。
- (3) $d > n$ のとき、 $\lim_{c \rightarrow \infty} K_c(x) = 0$ 。

問題 7. 定理 IV の証明は易しいから各自試みよ。

定理 IV を使うと、定理 III は多項式に対しては容易に示せる。 k 次多項式

$$f(x) = \sum_{i=0}^k A_i x^i = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots + A_k x^k$$

に対し、定理 III の条件は $A_0 = \cdots = A_{n-1} = 0$, $A_n = A$ に他ならず、定理 IV は、グラフを水平方向に c 倍、垂直方向に c^n 倍拡大する操作により、 $y = A_n x^n$ は不変、 $y = A_{n+1} x^{n+1} + \cdots + A_k x^k$ は 0 に収束する、と主張しているからである。

IV. 拡大不変な曲線：フラクタル幾何

上の推察を逆の方向に突き詰めることで、フランス系アメリカ人数学者・経済学者のマンデルブロ (Benoît B. Mandelbrot, 1924 年 - 2010 年) は 20 世紀後半になって現代数学に一つの大きな展開をもたらした。

マンデルブロが抱いた疑問： 相似拡大で不変な曲線は直線だけだろうか？

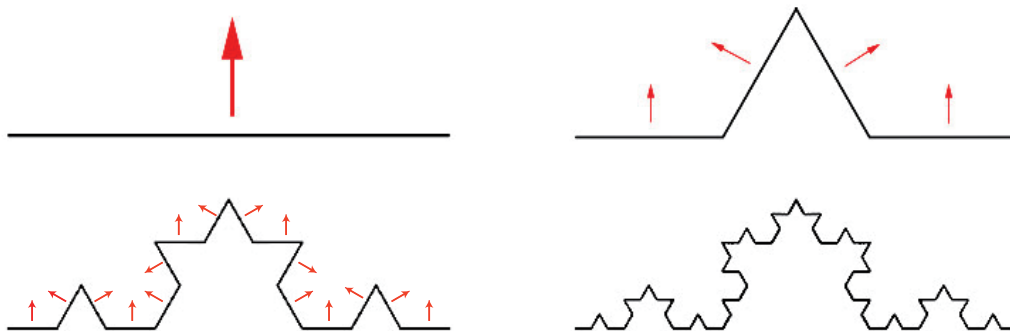
この疑問を、「あらゆる 0 以外の実数 c に対する c 倍相似拡大」で不変な曲線は直線だけか、ととらえるならば、答えは確かに YES である。

発展問題 [2]. この事実は極めて容易に示せる。考えてみよ。

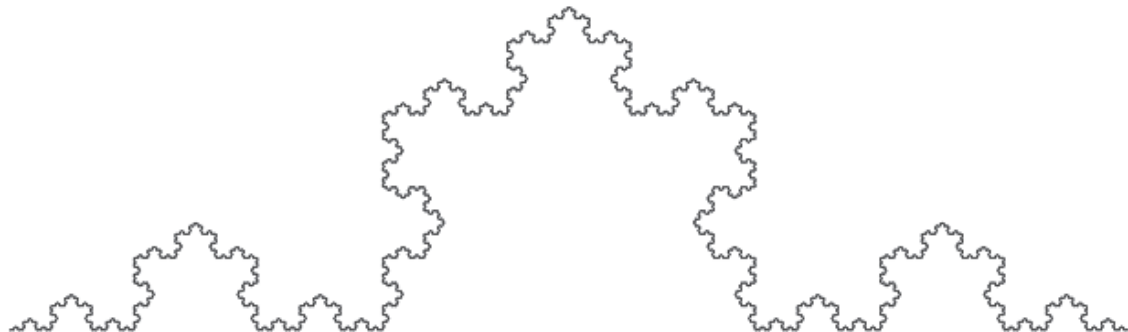
一方、定数 $c > 1$ を固定し、 c 倍相似拡大で不変な連続曲線（実際あらゆる整数 n に対し c^n 倍拡大で不変）は直線だけかと問われると、一般に答えはそうではない。マンデルブロ

が切り開いた**フラクタル幾何**がそこに現れる。歴史的にも最も有名なコッホ曲線（雪片曲線）を見てみよう。（スウェーデンの数学者ヘルゲ・フォン・コッホ：Niels Fabian Helge von Koch, 1870 年 - 1924 年）

コッホ曲線 平面上に線分 AB を用意し、これを 3 等分し、真ん中の 3 分の 1 の区間をそれ上に正三角形を書いて 2 辺で置き換える。つまり、3 分の 1 の線分 4 本に取り換えたことになる。次のステップとして、4 本の小線分に対し同じ操作をする。



これを無限に繰り返していくと ...



たとえば、一番上の頂点を中心に 3 倍に相似拡大すると、正確に自分自身に一致する！途中の段階で現れた頂点は必ずコッホ曲線が通過する。これらの頂点間のコッホ曲線の長さを計算してみると、各段階で 3 分の 4 倍されることが分るから、もしこの曲線に長さが定義できるなら、元の頂点 AB の間の曲線の長さは無限大と言わざるを得ない。長さは無限大であって、まるで微分もできず、これまで学んだような曲線とはまるで違うが、明らかに何か美しさを湛えた曲線である。その美しさは「見た目」だけでなく「数学的」な奥深さも持ち合わせている。

＝お終い＝