

1 特殊な整数値多項式

有理数を係数にもつ多項式 $f(x)$ が整数値多項式であるとは、すべての整数 n について $f(n)$ が整数となることをいいます。

このような整数値多項式について、考察したいと思います。まず、特別な整数値多項式を構成するために、相異なる n 個のものから k 個を取り出す組み合わせの数 ${}_nC_k$ から始めましょう。公式より

$${}_nC_k = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} \quad (1 \leq k \leq n),$$
$${}_nC_0 = 1$$

が成り立ちます。ここで、この右辺の n を変数 x に変えた多項式を

$$f_0(x) = 1, \quad f_k(x) = \frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1)}{k!} \quad (k \geq 1)$$

とおきます。このとき、定義より

$$f_0(x) = 1,$$
$$f_1(x) = \frac{x}{1!} = x,$$
$$f_2(x) = \frac{x(x-1)}{2!} = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$$

となります。

問 1 定義に従い、多項式 $f_3(x)$, $f_4(x)$, $f_5(x)$ を上記のように具体的に書き表せ。また、一般に、 $f_k(x)$ の x^k の係数を求めよ。

一般に、 $f_k(x)$ は次数 k の有理数を係数にもつ多項式であることが分かります。

定義より、 k 以上のすべての整数 n に対して

$$f_k(n) = {}_nC_k$$

が成り立ち、 $f_k(n)$ が整数であることが分かります。

以上より、 n が k 以上の整数のとき、 $f_k(n)$ は整数となりますが、さらに、 $n = 0, 1, \dots, k-1$ に対して、 $f_k(n) = 0$ となります。負の整数 $-n$ ($n \geq 1$) についても $f_k(-n)$ が整数となることが分かります。

問 2 正整数 n について以下を証明せよ。

- (1) $f_5(-n)$ は整数である。
- (2) $f_k(-n)$ は整数である。

これより、すべての整数 n について $f_k(n)$ は整数であることが分かり、 $f_k(x)$ ($k = 1, 2, \dots$) は整数値多項式であることが分かります。

ところで、組み合わせの数に関する公式 ${}_nC_{k+1} - {}_{n-1}C_{k+1} = {}_{n-1}C_k$ と同様に次の公式が成り立ちます。

問 3 正整数 k に対して次の式が成り立つことを証明せよ。

$$f_{k+1}(x) - f_{k+1}(x-1) = f_k(x-1)$$

この等式は、以下で用います。

2 一般の整数値多項式

次に、一般の整数値多項式 $f(x)$ は、上記で定めた特殊な整数値多項式 $f_k(x)$ の整数倍の和で表されることを示しましょう。まずは 2 次多項式から議論しましょう。

問 4 $f(x) = \frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{5}x + \frac{1}{2}$ を $b_0f_2(x) + b_1f_1(x) + b_2f_0(x)$ と書き表すとき、 b_0, b_1, b_2 の値を求めよ。

問 5 2 次多項式 $f(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2$ を $b_0f_2(x) + b_1f_1(x) + b_2f_0(x)$ と書き表すとき、 b_0, b_1, b_2 を a_0, a_1, a_2 を用いて表せ。

問 6 2 次多項式 $f(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2$ は整数値多項式であるとする。このとき、問 5 における b_0, b_1, b_2 が整数となることを証明せよ。

一般に、有理数を係数にもつ m 次の多項式

$$f(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_m$$

について、次が成り立ちます。

問 7 次数 m に関する帰納法によって、

$$f(x) = B_0f_m(x) + B_1f_{m-1}(x) + \cdots + B_mf_0(x)$$

($B_0, B_1, \dots, B_m$ は有理数) と書き表されることを証明せよ。

m 次の整数値多項式 $f(x)$ は問 7 により、

$$f(x) = B_0f_m(x) + B_1f_{m-1}(x) + \cdots + B_mf_0(x)$$

($B_0, B_1, \dots, B_m$ は有理数) と書き表されます。

問 8 $f(x)$ が整数値多項式ならば、 $B_0, B_1, \dots, B_m$ は整数であることを、次数 m に関する帰納法により証明せよ。(問 3 の結果を用いよ。)

以上により、整数値多項式は、 $f_0(x), f_1(x), \dots$ の幾つかの整数倍の和で表されます。