

9 低次元トポロジーの謎

ちょっと話を変えまして、低次元トポロジーの謎という事でお話したいと思います。少しお話的な事をやろうと思います。低次元トポロジーというと、メインは 3 次元、4 次元だと思いますけれど、その前にもっと低次元の 1 次元、2 次元もあります。その中で 3 次元多様体、これは皆さんご存知のように最近大きな仕事の締めくりとか、ちょっと大袈裟かもしれませんが、Poincaré から始まって Thurston までで一つ区切りがついたという感じになっています。

まずここから話を始めようと思います。Poincaré が生まれたのは 1854 年。これは後で触れますが、トポロジーとか数学の歴史にとって記念碑的な年だったと思います。Poincaré が亡くなったのは 1912 年。それで Thurston は 1946 年 10 月 30 日に生まれて、非常に残念な事ですが、2012 年 8 月 21 日に亡くなりました。あと 2 ヶ月ちょっとで 66 になる所でしたが、65 で亡くなりました。

1854 年というのが画期的な年だというのは、その前に Gauß がいるわけですが、Gauß、そして Riemann。Gauß は 1777 年に生まれて、亡くなったのはこの次の年 1855 年に亡くなりました。Poincaré の生まれた次の年です。Riemann は 40 になる前に亡くなってしまいました。1826 年に生まれ 1866 年に亡くなりました。この前にはもちろん Euler、そしてもちろんその前には古代ギリシャの数学、Euclid とかいますが、現代幾何学はこの辺りから始まっていて、発祥の地というやはり Gauß、そして Riemann。この 1854 年という Riemann の有名な Göttingen の就職講演があります。現代幾何学は 2 本柱があるのですが、一つは Riemann 幾何学ですね、それが創始されて今という Riemann 多様体が導入された画期的な年ですね。Gauß はこの講演を聞いたようですが、感激して、自分がいろいろ考えて来た事、Gauß 曲率などを大きく発展させるという予感を持ったと思います。時代が 1854 年から 2012 年まで、今 2012 年ですから大分経っていて 150 年以上ですね。その間に 3 次元多様体論というのが一つの区切りです。

3 次元多様体の側からいくと、Poincaré がもちろん Poincaré 予想を提出したわけです。一番最初の段階では homology 球面というもの、3 次元ですね、homology 球面はもちろん一般次元であります。ここでは 3 次元、何も言わなければ多様体は closed orientable を仮定する事にして、homology 球面 W^3 とは homology が、integral homology ですが、homology が 3 次元球面と同じ；

$$H_*(W; \mathbb{Z}) \cong H_*(S^3; \mathbb{Z})$$

多様体を homology 球面と言いました。そして Poincaré の予想は、homology 球面は S^3 か？これが最初だったわけですが、すぐに自分自身で誤りに気が付いて、それで Poincaré 球面を発見したんですね。基本群は非自明な有限群ですけど、homology 群は S^3 と等しいものを発見して、Poincaré 予想を

$$\pi_1(W^3) = \{1\} \Rightarrow W^3 \cong S^3?$$

と修正したわけです。基本群自身も Poincaré が考え出しました。単連結ならば S^3 か？これが Poincaré 予想であってこれが正しいというのは、みなさんご存知のように Perelman が 2002,3 年頃に解いたわけです。Poincaré が予想を修正したのが 1904,5 年頃ですからほぼ 100 年弱で象徴的な Poincaré 予想が解決しました。

これは単に Poincaré 予想が解かれたというわけではありません、ここに Thurston の革命、1980 年前後から、があります。後でもう少し詳しく述べますが、私自身、Thurston が Princeton 大学で教授になったときに、幸運

にも最初の講義を聴講する事が出来ました。それは 1974 年の事です。そのときは Thurston は foliation をやっていた。その後、曲面の微分同相群についてやって、Teichmüller 空間の Thurston コンパクト化をやって、その後にこの 3 次元多様体論を展開しました。3 つ目の大きな仕事です。そして 1980 年代に geometrization conjecture というものを提出しました。3 次元多様体を 2 次元と同じような感じで完全に理解できるという理論を作って、どんどんと自分でも証明しつつあって、そこら辺の所は Thurston に関する思い出とか、Cornell 大学、最後は Cornell 大学の所属でしたから、ここの HP を見ると、Thurston に関する情報があって、いろいろな人の Thurston に関する思い出なども書いてあります。そこで最後の講演ではないですが、いま見る事の出来る事実上最後の講演、この後も Cornell 大学で Cornell Topology Festival でも講演していますが、ただネット上で見られる最後の講演は、2010 年の Paris での講演です。これは Clay 研究所が主催し、Perelman の Poincaré 予想の解決を機に、錚々たるメンバー、Smale とか Gromov とか集まって講演をしました。video で沢山見られるのですが、その中の一つが Thurston の講演、geometrization conjecture です。こういうものについて、思い出というわけではありませんが、印象的なのは、彼自身 Haken とか条件を付けた上で証明したわけですが、それが付かないときに、いわばその外側から Ricci flow, Hamilton の Ricci flow, 外側というところと語弊がありますが、topology proper から見るとちょっと外側から証明されました。そこら辺、どういう考え、感想をもっていたか、難しい所です。印象的な言葉もあって、99 パーセント、この辺りが英語だから実際に聞いて頂くのがよいと思いますが、私はこれを証明した、とまで強く言っていないのかもしれませんが、確信したというような事を言っています。100 パーセントという証明した事になりますが、99 パーセント確信をもっていたというような事を言っています。これはもちろん Perelman の仕事、いわば外側からというのがあつたわけ。これは是非まだ見ていない方は、沢山ダウンロードされているので、知っている人も多いと思いますが、2010, Clay, Paris, Thurston くらい入れて検索するとすぐ見つかると思います。

Gromov とか Smale とか錚々たる人が沢山しゃべっています。簡単に geometrization conjecture、皆さんご存知かと思いますが、話の都合上少しお話しします。3 次元の幾何学ですが、3 次元は、 S^1 しかない完全にわかっている 1 次元と曲面、これは古典的というか、前々世紀に分類はわかった曲面、2 次元の組み合わせでできるというもので、

$$3 = 1 + 2$$

です。まず簡単な場合が product, $S^1 \times S^2, S^1 \times T^2, S^2 \times \Sigma_g$. これが正の世界、零の世界、負の世界、elliptic, parabolic, hyperbolic. この次に来るのが Seifert. S^1 -bundle, これをちょっと一般化したのが Seifert です。 S^1 -bundle で base が曲面になる。 S^2 上の S^1 -bundle, T^2 上の S^1 -bundle, Σ_g 上の S^1 -bundle. 一番おもしろいのは base space が S^1 であつて、fiber が 2 次元、曲面になります。これが最も面白い所であつて、これは写像類群が出てきます。

ところが S^2 の場合は Smale の最初の仕事で S^2 の向きを保つ微分同相は identity と isotope になります。従って S^1 上の S^2 -bundle は trivial で product と一緒になります。次が S^1 上の T^2 -bundle で $SL(2; \mathbb{Z})$ の元を monodromy とするような bundle.

その次に写像類群 M_g が出来て来て S^1 上の Σ_g -bundle です。ここが最も豊富な世界であつて、結局 hyperbolic 3-manifold というものは有限 cover を除けば、 S^1 上の Σ_g -bundle と一緒というのが、最近の virtual fibration conjecture の解決です。

hyperbolic 3-manifold というそういうきれいなものが S^1 上の曲面バンドルの構造を持つなどというのはまずありえない、というのが大分前の見方でした。J. Millson やその他の人たちが、first Betti number が零でない、そういう例を作り、例を作るという事自体が大変な仕事でしたが、今では有限 cover を取れば全部そうだ

という事になってきました。それが virtually fibration conjecture, その前に virtually Haken conjecture というものがあって、この2つが Perelman の Poincaré 予想の解決以降残った Thurston geometrization conjecture の大きな問題で、これらが2012年に解決されました。これがまた一つ、先ほどの Perelman の仕事がトポロジーの外側からと言いましたが、こちらは外側と言えど外側ですが、それほどでもない geometric group theory ですね。ここに寄与している人は沢山います。全部知っているわけではありませんが、Wise, Markovic, Kahn. Markovic という人は、曲面の写像類群が homeomorphism の群としては実現されないという有名な仕事があります。ずっとイギリスで活躍していましたが、今は CalTech にいます。それから Agol, 最後はこの人がこの2つを完全に証明しました。virtual fibration conjecture を Wise はある部分証明をしましたけれど、完全に証明したのは Agol です。これが外側というか、geometric group theory から来たわけです。いろいろな概念が、一般的な metric space とか Gromov 流の概念が沢山あって、topology proper でずっとやって来た私にはなかなか難しいですね。

それはともかく3次元多様体論, Poincaré から出発して、ずっと長い歴史があって、Seifert とかいろいろ仕事をしているわけですが、Thurston が1980年代に3次元多様体論に革命を起こしたわけですね。それまでの3次元多様体論と全然違う、微分幾何というか、もうちょっと rigid な双曲幾何を導入して、それが3次元多様体論に如何に力を発揮するかを示して、まさに革命なわけですね。それが意味取まって2012年、一つの締めくくりがなされて、非常に残念な事に Thurston はこの世を去ってしまったわけです。

じゃあ全て終わったかということと全然そんな事なくて、例えば、Thurston 自身言っている事です。volume という非常に大事な不変量があります。 $\mathbb{Q}$ に hyperbolic 3-manifold の volume 全体を添加し、volume という大事な不変量、volume は正の実数ですが、これを vector space と思うと、volume は $\mathbb{Q}$ 上一次独立か、この次元は無限大か：

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}\langle \text{volume}(M^3) \rangle = \infty?$$

これは幾何だけの問題ではなく数論とも絡む問題です。この volume, 幾何と arithmetic というか、算術的な数論、両方に跨がる重要な不変量なわけですね。これはまだどういう風にやったら良いか、なかなか分からないわけです。

Thurston にまた戻ります。さっき言いましたように1946年に生まれて2012年に亡くなりました。ちょっと個人的な事を言います。私は1973年から1975年、2年間、最初 Bonn に行って、アメリカに渡ったのは確か74年7月、西海岸であるシンポジウムがあって、9月に Princeton に行きました。そのとき講義を、さっき言ったように、Thurston の講義を聞く事ができる幸運に恵まれたわけですね。1974年の秋学期です。そのとき、Thurston が Princeton 大学の full professor になりました。1974年の9月、27才ですね。これは非常に若いのですが、じゃあ Princeton 大学の full professor, これが一番若いかと言いますと、実はこれは私が駒場にまだいた頃2009年か2010年に、談話会の係をしたときに、C. Fefferman が、Fefferman は兄弟で有名な数学者ですが、C. Fefferman が駒場の談話会で話をしてくれたときに聞きましたが、彼は Thurston と同時に full professor になった、そのとき彼は24才だったそうです。これは今でも Princeton 大学の記録だそうです。ただ Fefferman は24才で教授になったわけですが、実はその前はすでに full professor なんですね。22才で Chicago 大で full professor になったそうです。調べたわけではないですが、これは Chicago 大で多分記録でしょうか。年だけみると非常にちょっと俗っぽい話ですが、若ければよいかということもちろんそうではありません。この二人が関心するのは、Fefferman はまだ現役ですが、Fefferman も Thurston もずっと連続的に仕事をしていますね。Fefferman の事はあまりよく知らないのですが、最近日本で言うところの平地さん、Q-curvature など、幾何学と物理学とも関係する新しい問題を出しています。

Thurston に戻りますと、革命を起こしたのですが、その前に既に普通の人的一生分の仕事を 2,3 年でしてしまいました。最初にやったのは foliation の理論であって、この話でも時々出てきましたけれど、デビュー作というのが、1972 年の Bulletin of AMS、実際に仕事をしたのは 1971 年頃です。Non cobordant foliations on S^3 という非常に有名な仕事です。構成したんですね、パラメータ付きの codimension 1 foliation $\mathcal{F}_l$ を S^3 に構成しました。そして、こういうものに対しては Godbillon-Vey class, gv と書きますが、これは出版は 1971 年、定義されていました。これが零でないというのは Lie 群 $PSL(2; \mathbb{R})$ を使って証明されました。

それから 1 年も経たないうちに Thurston は何をやったかと言いますと、これ $gv(\mathcal{F}_l) \in H^3(S^3; \mathbb{R})$ はどこにあるかと言いますと、定義されている多様体、今は S^3 ですが、これの実係数 3 次元 cohomology 群、これを基本類で evaluate する、 S^3 の実係数の 3 次元 cohomology を S^3 の fundamental class で evaluate すると、 $\langle gv(\mathcal{F}_l), [S^3] \rangle \in \mathbb{R}$ と実数になります。これを Godbillon-Vey number と呼びます。画期的だったのは、これが連続的に動く、これは特性類なのですが、例えば Euler 類、Chern 類、Pontrjagin 類などは、微分形式を使うと実数 $\mathbb{R}$ 上定義されますが、実は $\mathbb{Z}$ 上定義されていて、幾何学的な構造を動かしてもこれは整数ですから動きようがないわけです。これは初めて幾何的に定義された特性類が連続的に動く、非常に画期的なデビュー作でみんなはあつと驚いたわけです。そこに使った構成、ここに双曲幾何学を使ったわけです。群で言うと $PSL(2; \mathbb{R})$ 。

非ユークリッド幾何学というのはもちろん 1820 年代から 1840 年代、Gauß, Bolyai, Lobachevskii が独立に見つけて、ユークリッド幾何学の第 5 公準が他のものから出てこない。まあ、例を一つ作ったといえおしまひですが、現代幾何学への今から思えば出発点だったわけです。それはもうみんな知っているわけですが、トポロジー、これは 1950 年代くらいから進歩していてあとでもうちょっとやりますが、手術の理論などがあって、differential topology というものは、metric とか長さは敢えて無視して、それでも出てくる、それがトポロジーの魅力だったわけです。differential topology の。ところが、これを構成するのに、Thurston は古典的でちょっとお蔵に入ったというと語弊がありますが、双曲幾何を持って来てみんなをあつと言わせたわけです。その辺の事は Milnor が大分後に同じ Bulletin に、双曲幾何学の 150 年という論説を書いていますので、それを見るとよいと思います。

トポロジーの強力な武器の一つに分類空間があります。何でもかんでも分類空間にしてしまいます。何でもかんでもというであれでしょうか。それで Haefliger が foliation にとつての分類空間、 $B\Gamma_n^r$ ($r = 0, 1, \dots, \infty, \omega$) を導入しました。ここで r は differentiability です。これを使うと Thurston の仕事は、Haefliger space の言葉でいうと、 $B\Gamma_1$ の 3 次元の integral homology から $\mathbb{R}$ へ Godbillon-Vey は準同型写像

$$H_3(B\Gamma_1; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\langle gv, \rangle} \mathbb{R},$$

を与えますが、これが全射だという事になります。

さっき言った 1974 年の秋の Princeton での最初の講義でのとき、そのとき私は Princeton の Institute の方にいました、Princeton の大学と研究所は日本流にいうとほとんど境界が接しているの、歩けなくはないでしょうが、広大な国ですから歩く人はほとんどいない。近くなのに私は車で通いました。確か木曜か金曜だったとおもいます。朝 9 時頃から始まりました。Princeton University の Fine Hall という有名な Princeton の数学教室の部屋で週一で Thurston は講義をしました。聴講者がどれくらいいたかという、確か 10 人もいなかった、8 人くらいだったと思います。9 時頃行くと Thurston がラフな格好で coffee cup を片手に現れて、軽く挨拶をして話を始めます。だけど数式はほとんどなくて、数学の講義というよりは、画家が絵の書き方を書くようななかば、そういう感じで、結局は S^2 上のベクトル場の絵だったんですけど、私は必死でノートを取り、それを今も持っています。懐かしい思い出ですね。そこで何をやったかという、結局これの言葉で

いうと

$$H_5(B\Gamma_2; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\langle gv, \rangle} \mathbb{R}$$

今度は codimension 2 の foliation ですが、ここにも Godbillon-Vey というのがあってこれが全射であることを講義しました。gv は別の 2 次特性類の言葉で書くと $h_1 c_1^2$ です。

具体的には何を使ったかという、3 次元多様体上の S^2 -bundle, foliated S^2 -bundle, ですから構造群は discrete なので、 S^2 上の向きを保つ微分同相写像全体で、discrete topology, これは topology を入れないとさっき言った Smale の定理で、 $SO(3)$ と homotopy 同値になるわけです。

$$H_3(\text{Diff}_+^\delta S^2; \mathbb{Z}) \rightarrow H_5(B\Gamma_2; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{R}$$

で具体的に証明したのは、この合成

$$H_3(\text{Diff}_+^\delta S^2; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{R},$$

これが全射だという事です。もっとも、これを使うというよりは、実はベクトル場を使うわけなので、ベクトル場全体のなす無限次元のベクトル空間 $\mathcal{X}(S^2)$ を使って、この foliation の特性類というのは、ほぼ同じ頃 Gelfand-Fuchs の、これも非常にビックリするべき理論が展開されたわけで、それとの関連で Thurston は完全にその事を知っていて、Godbillon-Vey の仕事はベクトル場、もうちょっと古典的に微分形式の段階で展開されていますけれども、そこで S^2 上のベクトル場を使って、それを perturb するという事をします。結局だから 3 次元サイクルを作って、しかもパラメータ付きで作って、動くという事を証明した。

時々講義の合間に、わかりますかという、わかりますよね、と相槌を求めるのですが、我々は非常に苦しいですね、絵ですから。絵を見ればそうかなと思うけれど、最初の Bulletin の論文はこれはわかりやすいですけど、結局彼はこれは論文に書かなかったですね。

Topology に Rasmussen という人が、これは foliation の人、今は不変量、結び目に別な人がいますが、Rasmussen が論文を Topology に出版しています。結局 2 つ 1 次独立な特性類があって、 $\mathbb{R}^2$ への全射：

$$H_3(\text{Diff}_+^\delta S^2; \mathbb{Z}) \xrightarrow{(f_{h_1 c_1^2}, f_{h_1 c_2})} \mathbb{R}^2$$

を証明しました。これを Topology に出版しました。私は Rasmussen は Thurston の弟子なのかなと思ってましたが、さっき言った Cornell 大の HP 上の Thurston の情報を見ると geography, Thurston の子孫というか、数学上の子孫が書いてあるのですが、どうも Rasmussen は入っていないので、Rasmussen は Thurston の学生だというわけではないようです。誰の学生だったのか、Bott は Harvard にいたのでこの辺りででしょうか。

ここら辺りは Heitsch とか、どんどんいろいろな人が展開してずっと大きな理論になっています。これが 1974 年の秋学期なのですが、私は次の年 1975 年の 8 月に日本に帰りました。このときはパーティなどでも Thurston に会ったりしてました。そのときに家族で一緒に出て来て、Thurston が背負子というか、子供を載せるリュックサックのようなものを背負ってパーティに出て来たので、非常にビックリしました。今は父親のそういう姿は珍しくないですが、当時の日本では大体母親でした。それが多分 Thurston の長男の人だと思います。Nathaniel Thurston でしょうか。この Nathaniel Thurston も Topology の論文があります。今はどうもコンピュータサイエンスの方にシフトしているようです。Dylan Thurston は皆さんよくご存知のように Topology proper です。それはともかく、話しはしましたけれど、その後 Thurston を見たのは、小島先生が東工大に呼んだときですね。

それでですね、これは foliation をやった。さっきの Cornell 大の HP で見てそうなのかと思ったのですが、1975 年にこれは lecture とは書いてないのですが、talk を、いろんな人が Thurston の思い出を書いている所

に、これも有名な人ですが、Howard Masur という人がいますよね。その人が書いていてなるほどと思ったのですが、さっきの3つの仕事、foliation と surface diffeomorphism と 3次元多様体、いつ頃何処ら辺でそうなったのかなと思ってましたが、すでに次の年、Thurston の talk を聞いてビックリしたという事が書いてあります。この Masur も一流の仕事をしていますけれど、この Thurston の talk に自分自身の数学の生き方を完全に決定付けられた。どういう話をしたかと言うと、ここで既に pseudo-Anosov の話が出ている。さらに measured foliation $\mathcal{MF}$ という概念、その後はほとんど同値ですけど、measured lamination、こちらの方が topological なんですね。さらに Teichmüller 空間の boundary $\partial\mathbb{T}_g$ 、Thurston の compact 化もすでに、完成していたかはともかくこの3つの話をした。1回かどうかはわかりません。この話がこれまでのどの人の話にもない、決定的に違った革命であった。一言でいうと、surface diffeomorphism の全体、その isotopy 類全体が写像類群なわけです。

$$\text{Diff}_+\Sigma_g \rightarrow M_g$$

これについて、もちろん Nielsen という 1910 年、1920 年代の仕事も有ったのですが、surface diffeomorphism の研究を始めた頃は、これを Thurston は知らなかった。多分全く独力でこの理論を完成させました。有名な論文ですが、いまはその後のバージョンになったので、引用文献は 10 本くらいありますが、最初に出回ったものは引用文献が全くなかった、ゼロでした。その後 Nielsen の論文を 2 つくらい引用しているバージョンがあります。本当に一人で Thurston の surface diffeomorphisms に関する理論を作ってしまった。その後の Thurston の仕事は私はあまり詳しくなくて、小島先生に聞いた方がよいと思います。70 年代、77,8 年には 3 次元多様体、まあ、すでにここで、pseudo-Anosov ならばその suspension は hyperbolic という定理がありますから、ここから 3 次元多様体に入っていくわけですね。その後は皆さんご存知のような 3 次元多様体論の革命が起こっていった、自分自身も推進したし、いろいろな人が集まって、2012 年、一つの区切りの年になりました。そういう感じになっています。

Thurston についてはまた後で出てくると思いますが、あとの話の都合上 notation で $\mathcal{H}(3)$ と書いたら、homology 3-sphere, oriented, closed はいつも仮定しますが、それらの oriented diffeomorphism class 全体、可算集合になります。そして $\mathcal{M}(3)$ と書くと 3 次元多様体全体、closed, oriented ですけど。

$$\mathcal{H}(3) = \{\text{homology 3-sphere}\}/\sim \subset \mathcal{M}(3) = \{3\text{-manifolds}\}/\sim$$

今は単なる集合ですけども、空間であるかのように、Thurston は既に考えていたわけです。volume であるとか、Gromov の simplicial volume であるとか、不変量がありますが、不変量はこれ上の関数です。これは単なる集合というよりは、位相というちょっとと語弊があるかもしれませんが、単なる集合以上の構造があるだろうと。volume に関して言えば、最も重要な volume conjecture というものがあります。この解決にはかなり時間がかかるとおもいますが、これは Thurston というよりは違う事から来ている、不変量ですね。不変量の方から言うと元々は Euler number があります。3 次元多様体は closed oriented だと、euler number は全て消えてしまいます。そして secondary で Chern-Simons の不変量というものがあって、そして volume, hyperbolic の場合は volume があって、あるいは、 η -invariant というものがあって、Atiyah-Patodi-Singer ですね。そして Gromov が出て来て simplicial volume $\|M\|$ 、これは 3 次元に限らず simplicial volume という不変量があるわけです。こういういろいろな流れがあって、そして Vassiliev の 1990 年くらいの革命的なアイデアですね。knot の不変量、Vassiliev 不変量というものが、knot 全体を space だとおもってそこに singularity の理論を適用する画期的な Vassiliev の考えが出てきました。knot に対してですね。それを大槻さんが 3 次元多様体、あるいはその中の knot に対して一般化して 3 次元多様体の有限型不変量というものを展開しました。そして、それがどんどんどんどん発達して LMO ですね、Le さん、村上順さん、大槻さん、というものになったわけです。

この volume conjecture の方は Kashaev と 2 人の村上さんですね, Hitoshi Murakami, Jun Murakami. この 3 人の人が出したという事です. volume というものは transcendental な不変量なわけですが, それがこの有限型不変量というか, 多項式ではないけれど, いわばこういうものの極限として現れるだろうというものです. これが今どんどん展開されていて, Sergei Gukov さんが先頭に立って, これを理論をどんどん広げていって, 複素数値, あるいは A -多項式などとも絡めて非常に大きな予想だけでなく, 理論になりつつあります. これはいま 2012 年でさっきの virtual Haken conjecture, virtual fibration conjecture が解かれちゃったわけですから, また外側という用語がありますが, まあ 2015 年くらいに解決する可能性もあるかもしれません. 私は門外漢ではありますが, 非常に深い予想だと思います.

これはだから 3 次元多様体, この homology 球面, Poincaré が一番最初, homology 球面は S^3 か?と言ったときは, これ, homology 球面はいわば S^3 だけ, 1 点しかなかったわけですから, 3 次元多様体を調べるにはいろいろな事をしなくてははいけなかったわけです. Poincaré が自明でないものを最初見つけて, 今では皆さんご存知のようにこれはもの凄く沢山あるわけです. 幾何学の中でも elliptic なものは元々の Poincaré 球面だけですが, 次にでてきたものは Brieskorn homology 球面, これは特異点論, 1960 年代くらいからですね. 特異点のトポロジー, 代数幾何とトポロジーの橋渡しをする非常に大きな仕事があります. Brieskorn sphere, 一般次元で exotic sphere が出るのですが, 由緒正しい代数幾何の所にこういう homology sphere が出て来た. 非常に重要な仕事です. ただこれは Seifert です. hyperbolic な中に homology 3-sphere があるというのは, ものすごい, さっきも言ったように, 最初の頃はそういう事はありません, と思われていたということがあったわけです. 今では敢えていうとほとんど全て hyperbolic な homology 球面, ある意味ほとんど全てという事です. この世界がこんなに広いというのは, Poincaré がいま天国から見たらビックリしていると思います. 最初は 1 個しかない, 彼自身自明でない例を最初に見つけたからものすごい天才としか言いようがないですが, 今やこんなに沢山ある. hyperbolic な homology 球面.

それでちょっとここは思い出というか, さっきは Thurston が出てきましたが, 今度は Hirzebruch の思い出を少しお話しします. この人も残念な事に今年の 5 月に亡くなってしまいました. 1927 年 10 月 17 日に生まれて, 2012 年の 5 月 27 日に亡くなってしまいました. 84 才でした. この人は, もちろん, 名前はみんな知っている偉大な人です. Hirzebruch の signature theorem, トポロジーと代数幾何の垣根をとったというか融合させた一番偉い一人です. Atiyah とか Armand Borel とかいますけれども, Hirzebruch ですね.

video のあれで言うと, Max Planck Institute Bonn の HP を見ると, さっきの Cornell 大の Thurston のいろいろな記述と同じような感じで Hirzebruch について書いてあります. 亡くなる 1 ヶ月くらい前, 今年 2012 年の 4 月頃ですが, Max Planck で講演, lecture をしています. 2 つありまして, 1 回目, 2 回目と分かれています. これは original な話なんですね. real な実構造をもつような代数曲面の involution, $\mathbb{C}$ 上で考えて involution, conjugation がある, involution があるときに, その conjugation といろいろな不変量との絡み, euler 数が一番大事ですね, そして signature, Hirzebruch ですから, その絡みについて original な話をしています. 私は 1 回目しか見ていませんが, いろいろな事を思い出しました. 彼は 1973 年に日本に来て, IMU lecture をやったんですね. これは Hilbert modular surface という大きな仕事になりました. そのときに私は助手だったと思います. 私は非常に感銘を受けたわけです. その秋から幸運にも Bonn に行く機会を得ました. その頃はまだ Max Planck はなくて, 日本でいうと大型の科研費, SFB というのがあって, 幸いそこに行く事が出来たわけです. そこで 1 年間近くにいる事が出来ました. この original のこの話ですね, 2 つ, 是非, 特に若い人は見ると参考になると思います. やや不自由な感じの動きではあるのですが, 数学に対する情熱というか, 力強さというのは, 70 年代に彼自身の講義を受けましたけれど, ある意味, ほとんどその勢いについては変わらないという感じです.

それでその前から微分トポロジーというものがあって、黄金時代、こういう名前で黄金時代があったのですが、それは 1950 年代、1960 年代で、敢えていうと、これは敢えてですから、その後何もなくなったというわけではないので、敢えていうと 1969 年で締めに入ったという事です。ここに出てくるのが Kirby と Siebenmann の画期的な仕事です。後で詳しくやります。

ここら辺をちょっとだけ歴史的に振り返りますと、最初に微分トポロジーというものの誕生を宣言したのは Thom, Thom の仕事です。Thom は cobordism というアイデアを出して、今でも誰でも知っています。トポロジストはもちろん知っていますが、数学をやっている人で知らない人はほとんどいないと思います。アイデアとしては非常に簡単で、次元の等しい 2 つの多様体が cobordant であるとは、2 つが協力して次元が 1 つ高い多様体の共通の boundary になるか、これが cobordism です。向きなんか入れているいろいろなバージョン、これの複素構造、概複素構造、いろいろなバージョンありますが、アイデアとしてはこういうものです。これはその後 1980 年代後半に Witten が出てくる辺りから、トポロジー、数学、これもいわば外圧というか、非常に変革を迫られているわけですが、その中でも cobordism、これは最も重要な概念、これは永遠にそうだと思います。cobordism 群の計算は終わっていますが、じゃあもうないかという、これが全ての基本だというのは永遠に変わらないと思います。これが要するに cobordism Ω_* 。幾何学ですから、多様体を分類するわけですが、いわば非常に荒っぽい分類をするわけですが、Thom の偉いところは、全部がわかればそれが良いですが、それは望めない、曲面ではわかった、3 次元多様体でも Perelman の仕事でいわば分類は終わった。しかし、一般次元で全ての多様体がわかるということはありません。問題設定が良くない。

そこで cobordism という relation を入れて、非常にきれいな relation を入れて分類するとどうなるか、それがそもそもの考え。これだったら誰でもというわけではないが、考えつく人は結構いると思います。それをですね、homotopy 論に帰着させたんです。Thom spectrum MSO 、これがさっき言ったトポロジーで最も重要な概念、分類空間というのがありますが、その分類空間上の universal bundle で Thom 構成というものがあって、これも非常に他分野から見ると、乱暴なと思うかもしれません。vector bundle があつたら metric を入れて、長さ 1 以下を取って disk bundle にして、その境界 sphere bundle を 1 点に縮める、だなんていうそういう乱暴な事をします。だけどトポロジーではそれが非常に強力なものでこれを Thom spectrum と言います。そしてその homotopy 群、homotopy 論というのはトポロジーの 1 分野、代数的な方でこれも発達して来て、いわばちょっと disjoint な部分もあるわけですね。homotopy 群というのは計算が非常に難しい。Thom の偉い所は幾何学的な分類と代数的な homotopy 論を融合させて、homotopy 論が非常に強力な力を発揮する、Thom space の homotopy 群 $\pi_*(MSO)$ がこの分類を完全に与えるという事をやったわけです。homotopy 論が十分発達していたわけです。一般に homotopy 群の計算は homology 群に比べると格段に難しい、ほとんどいつも不可能です。まあ基本群を考えれば分かると思います。単連結としても $\pi_2, \pi_3, \dots, \pi_2$ くらいはなんとかなるかもしれませんが、一般の homotopy 群というのは無理なわけです。だけど Eilenberg-MacLane space とか homotopy 群の計算に強力な、Henri Cartan とか topologist だけではなく 50 年代ですから数学総動員ですね、理論があつて、Eilenberg-MacLane space $K(G, n)$ 、これの cohomology を計算するというのがあつて、それが十分発達していて、それを使って Thom は Ω_* を決定したわけです、まあ 2-torsion は Milnor とか Wall の仕事があつて、テンソル $\mathbb{Q}$ したものを完全に決定しました。答えは偶数次元の複素射影空間の生成する多項式代数であるという、非常にきれいな大定理ですね。それを Thom は証明したわけです。それは 1952 年 Comptes Rendus に発表したんですね、Thom は。

そのとき Hirzebruch は Princeton の高等研究所に居て、これは彼自身が reminiscence というか、昔を、signature theorem が出たときのいきさつを彼自身の論文の中に書いていて、有名な話ですね。1952 年に Institute の、今は新しい建物が沢山ありますが、古めかしいというかある建物の中に図書室があつたんです

ね、図書室、そこに行って *Compte Rendus Paris*, Thom の速報を見て、そこに書いてあるのですが、直ちに今でいう Hirzebruch の signature theorem の証明が分かった。これが有名な Hirzebruch signature theorem, これが 1952 年ですね。Hirzebruch はその後、Hirzebruch の Riemann-Roch とか、トポロジーと代数幾何、複素多様体論、そこら辺の垣根を取って、一級の仕事を亡くなるまで続けました。

これが今で言うところの微分トポロジーの誕生を宣言した仕事です。一般に言われるのは、もう少しわかりやすいデビューというか、さっきの Thurston の foliation のデビューに匹敵するとか、それは全然劣らない大衝撃だったのが、Milnor の例の exotic sphere の仕事ですね。1956 年です。\$S^7\$ と homeo だけでも diffeo ではない。どう書くんでしょうか、Brieskorn とかいろいろ絡んでますが、homotopy sphere ですね。homotopy 型が sphere であるような微分可能多様体を分類するという理論があつて、Milnor, 最初の例ですね。それが群になるという事、そして有名な Kervaire と Milnor の仕事が出て来て、\$n\$ 次元の homotopy 球面の作る群 \$\Theta^n\$ が定義されて、これがまた homotopy 群が出てくるのですが、あるいは Bernouille 数とか整数論的なものも出て来て、一言でいうと有限群であつて、\$n \bmod 4\$ についていろいろな違いが出て来て、\$4n-1\$ 次元の所が一番豊富なんですね。\$4n\$ 次元, signature があるところから一個下がったところに homotopy sphere が一杯出て来て、\$4n+1\$ 次元では、次元を 1 上げて \$4n+2\$ 次元の所に Kervaire 不変量というものがあつて、それは最近 2 年くらい前、Hopkins, Ravenel, Hill の一大仕事があつて、これも大団円、大問題が一個の次元だけを除いて解決されました。126 次元の framed manifold で Kervaire 不変量 1 のものがあるか、これは未解決です。これ以外は全部解決しました。非常に難しい理論であれを理解している人は世界中で 10 人くらいでしょうか。Fermat 予想もそうでしたけれど非常に難しい。

そしてこれは球面、homotopy 球面ですけども、手術の理論、surgery theory というものが一世を風靡しました。名前を挙げると W. Browder, Princeton で活躍して、ロシアで Novikov, そして Wall が出て来て、最初は homotopy 球面ですから、単連結です。Browder は単連結な surgery theory を完成させました。有名な教科書があります、Novikov はちょっと違う、場所も全然違いますが、彼の一番有名な仕事の 1 つは rational Pontrjagin class の位相不変性です。Wall は基本群が一般の場合に Wall 群という、彼の名前を取った、この algebraic L-theory, トポロジーと代数の境界ですね、今は Algebraic K とか L とか、沢山あるわけです。その理論を作つて、そして Sullivan ですね。この 4 人の名前を取って、普通 Browder-Novikov-Wall-Sullivan theory と言います。この Sullivan は、さっきの Thom の考えですね、分類を何かの space の homotopy 論に帰着するという事を、これを surgery theory の中で究極、これ以上はできないという感じで実現しました。そうすると、カテゴリーとしては微分可能多様体 \$BO\$, orientable なら \$BSO\$ ですが、こういうものがあつて、その次は piecewise linear な、PL topology というのがあつて \$BPL\$, その次に位相多様体というものがあつて \$BTOP\$, その次に多様体ではなくて今度は Poincaré complex というものがありますね。分類空間で言うと \$BG\$ という、sphere の self homotopy 同値全体のなす群 \$G\$ です。こういう物があつてこの間に自然な写像があります。

$$BO \rightarrow BPL \rightarrow BTOP \rightarrow BG$$

微分多様体の分類、組み合わせ的多様体の分類、位相多様体の分類、それらの間の関係、これらが fiber bundle みたいになって、それぞれの fiber は \$PL/O, TOP/PL, G/PL, G/TOP\$. 例えば、Sullivan の初期の一番の有名な仕事は、\$G/PL\$ の homotopy 型を完全に決定した仕事です。

そして後でやる Kirby-Siebenmann, 1969 年に終わったと言ったのは、Kirby-Siebenmann が \$TOP/PL\$ を完全に決定したという事になって、Thom の幾何学的な問題を homotopy 論に帰着して、その homotopy 論を解くというのが、究極にまで高められた、それが 1969 年です。

1969 年、何が起こったかといいますと、さっきも書きましたけれど、Kirby と Siebenmann, 何を解決したか

と言いますと、Milnor が挙げた、ある時期に Milnor が挙げた 7 つの問題の中の有名な一つ、Hauptvermutung、これは基本予想と呼ばれます。これは一言でいうと、piecewise linear, combinatorial な多様体、PL manifold というものがある、それは三角形分割された位相多様体であって、各点の link が次元が 1 個下がった球面のスタンダードな三角形分割と組み合わせ同値、そういうものを PL manifoldと言いますが、そういう構造は unique だろうというのが基本予想です。

もう一つの予想は triangulation problem、これは conjecture といっているのか、problem、そもそも位相多様体は三角形分割できるのか、というものがあって、結論的にはこれは今でも未解決の、多分、歴史的にみると微分トポロジーで今残っている、残っているというのちょっと語弊がありますが、もっとも重要で難しい問題です、triangulation problem。この 2 つに piecewise linear, combinatorial な観点から完全な解答を与えたのが、Kirby-Siebenmann です。これは唯一つの特性類、4 次元に特性類があって、

$$ks \in H^4(BTOP; \mathbb{Z}/2),$$

Kirby-Siebenmann class と呼ばれますけれど、これだけで決定できる。例えばまず次元は 5 次元以上で、境界がある場合は 6 次元以上の位相多様体があったとすると、その 4 次元 $\mathbb{Z}/2$ -cohomology にある特性類 ks が定義される、Stiefel-Whitney とか Chern とかそういう感じで、位相構造のみによる特性類が定義されて、この位相多様体が piecewise linear な意味で triangulation, triangulable である事の必要十分条件は、この特性類が消える事。決定的な仕事ですね。

Hauptvermutung の方は、この次数が 1 つ下がって 3 次元に、2 つの組み合わせ的な構造が互いに同値かどうかという obstruction が入る、そういう形で完全に解決してしまう。それが Thom から始まった微分トポロジーという分野の黄金時代の締めくくりの仕事になっています。

この 1969 年というのは個人的になって申し訳ないですが、私は修士に入った年なのです。そしたら大問題は解けた。微分トポロジーはどうなるんでしょう、そのちょっと前に Thom 自身が大仕事をした後で、皆さんご存知の Catastrophe の理論に移ったんですね。そしてこれはニュアンスはわからないのですが、巷で言われた事は、Thom はトポロジーは死んだ、と言っている。トポロジーは死んで、しかも微分トポロジー、これを一生懸命大学 3 年生、4 年生くらいから、Minor の理論に魅了されてですね、勉強を始めて修士に入ったと思ったら、いわばそのときの最後の問題を解かれてしまった。途方にくれましたよね、どうしたらよいか。後付けですけど、foliation の理論がまさにこの辺から始まっています。Gelfand-Fuchs 理論は論文がすでに出ています。Godbillon-Vey は 1970 年くらいにあって、1971 年には Thurston が現れるわけです。けどここでこれを聞いたときは、まだそういう事は全然、少なくとも私は知らないで、ああ終わってしまったなと。そのとき加藤十吉先生ですね、この年、これが解決された時にさっきの Institute にいて、1 階、あそこはメンバーは、若いメンバーは 2 階建ての日本流にいうと長屋みたいな所に入ります。一棟に 4 人くらい。加藤十吉さんは 1 階にいて 2 階に Siebenmann が居た。これが解かれたというところで加藤さんから、私が直接もらったわけではありませんが、多分松本幸夫さんかだれかに知らせて来て、それを我々は間接に聞いたのだとおもいます。最近 2 階で Siebenmann がうろちょろしてるのが分かって大変なんだという事が書いてあって、後から見ると、これが解かれたんだというふうな事がありました。そういう非常に歴史的な年です。

この章が低次元トポロジーの謎と題名を付けましたが、今日の締めくくりは Milnor が挙げた、Milnor の問題集というのがあって、Milnor の問題集は 1960 年代前半ですね。ですから Smale や Zeeman が高次元の Poincaré 予想を解いた頃に提出したとおもわれる 7 つの問題があります。それをちょっと書きます。

1. double suspension problem
2. simple homotopy type は位相不変量か?

3. $p_i \in H^{4i}(BO; \mathbb{Q})$ は位相不変か？
4. Hauptvermutung.
5. topological manifold は triangulable か？
6. Poincaré 予想 in dim. 3,4.
7. annulus conjecture

1 番目が double suspension problem, それはさっきの 3 次元 homology 球面 W^3 があつたときに, それを 2 回 suspend する $\Sigma^2 W^3$, 2 回 suspend すると, これは一見とんでもないように見えるのですが, 5 次元球面 S^5 と homeo か? という問題です. もちろん S^3 だったら, 1 回 suspend して S^4 ですから, もう 1 回 suspend して S^5 になります. こういうとんでもない予想というか, 問題です.

2 番目に, simple homotopy type というものがあつて, これは基本群も考えにいたした上での homotopy 型ですけれども, simple homotopy type, これは組み合わせ的多次体に対して定義されますが, これは位相不変か? 2 つの組み合わせ的多次体があつたときに, simple homotopy type があるのですが, 互いに位相同型ならば simple homotopy type は同じか? これが 2 番目です.

3 番目は Pontrjagin class というものがありますが, この Pontrjagin class は $\mathbb{Z}$ 上定義されますが, $\mathbb{Q}$ 上にとるとこれは位相不変か? torsion では位相不変ではないということは, もう例として分かっていたんですが, rational cohomology にすると位相不変か.

4 番目は, これがさっきの Hauptvermutung ですね, 組み合わせ的多次体の組み合わせ構造は一意的か?

5 番目が topological manifold, 位相多次体は triangulable か? だから単体複体の構造を持つかどうか.

そして後 2 つですけれど, 6 番目がこれが Poincaré 予想ですね, さっき言ったように Smale と Zeeman, smooth と PL category ではもう解いてますから, 高次元では, dimension が 3 と 4. これが残ってました.

7 番目にこれが annulus conjecture. これも有名な予想だったのですが, 簡単にいうと $\mathbb{R}^n$ の中に, locally flat という条件を満たすような codimension 1 の球面 S^{n-1} が 2 つ disjoint に入ったときに, この間の部分が annulus か? standard か? $S^{n-1} \times [0, 1]$ と homeo か?

これが Milnor のある時点での問題だったわけです. それに対してその Milnor 自身が後日談というか 2006 年のさっきの Institute に属する PCMI, Park City Mathematical Institute, Utah 州にあるのですが, 毎年テーマを決めて夏に大学院生向けのサマースクールとコンファレンスがあります. 今年は geometric group theory で, 去年は Riemann 面の moduli 空間, 2006 年は低次元多次体がテーマでした. そこで Milnor は一般向けの講演をしていて, 60 年代に出した 7 つの問題のその時点での総括をしています. ちょっと簡単にそれを書きます.

double suspension theorem は Edwards, Cannon の 2 人によって, 肯定的に解決しました. Edwards は geometric topology, 今ではなく昔の, wild も入れた geometric topology の人です.

simple homotopy type は位相不変量か, これも Yes です. Chapmann と Edwards ですね, 独立に.

それから $p_i \in H^{4i}(BO; \mathbb{Q})$ は位相不変か? これは Novikov の Fields 賞受賞の主な理由になった一番有名な定理の一つです.

Hauptvermutung と topological manifold の triangulation. これは combinatorial のとき No であつて, これは Kirby と Siebenmann が解決しました.

Poincaré 予想, これは smooth のときに Smale, PL のときに Zeeman がそれぞれ証明して, 次元が 5 以上ですね, Poincaré 予想を証明しました. dimension 3 は Perelman によって解決されました. アーカイブに論文が出たのは 2002,3 年ですね, Milnor のこの 2006 年の論文ですすでに言及されています.

そして annulus conjecture は $n \neq 4$ のとき Kirby が証明して ($n = 4$ のときは Quinn), これも Kirby の有名

な仕事の一つです。

こういうふうになっていて、結局残ったのは何かというと、残ったのは、大問題は、1 番目は combinatorial, PL ではない、こういう条件を取ったときに triangulable か、位相多様体は triangulable か?

それともう一つはこの Poincaré 予想の dimension 4 です。また、dimension 4 の topological category では Freedmann の仕事があって、これは 1982 年ですね。結局残ったのは Poincaré conjecture, dimension 4 の C^∞ category, これが残った。詳しくは Milnor の論文を読んで頂きたいのですが、こんなふうになっています。

時間が来ましたのでちょっと中途半端ですが、今日はここまでにしたいとおもいます。この位相多様体は triangulable かというのは大問題ですが、4 次元の、さっきの 3 次元の革命は Thurston が起こしたと言いましたが、4 次元の革命は Donaldson と Freedman が起こして、その事を少し、私は門外漢ですが、そのあくまでもその立場からですが、今回はこの続きですね、4 次元の革命が起こって、どうなってその後、にしたいとおもいます。

後一つだけ、foliation はどうなったか、というのですが、これは私が言うよりは、坪井先生とか足助さんにその解説をお願いする方が適切だとおもいます。一個だけ、私は foliation はやっていないかということ、ずっと気になっている問題があります。それは Godbillon-Vey で

$$B\Gamma_1^\infty \xrightarrow{gv} K(\mathbb{R}, 3),$$

ここにこういう写像があるわけですが、これが homotopy 同値か? というのは大問題なのです。ここは実解析的にすると違うというのが Haefliger の定理があります。これは C^∞ で考えます。これは differentiability が小さくなると codimension に限らず、坪井先生の大定理がありますから、この homotopy 型について分かっていることも沢山あります。smooth で homotopy 同値かというのは大問題で、ちょっと大袈裟に言うと、 $\mathbb{R}$ と $\mathbb{Q}$ の違いがトポロジーでも絡んできます。というのも、

$$K(\mathbb{Q}, 3) = (S^3)_{\mathbb{Q}}$$

になります。 $(S^3)_{\mathbb{Q}}$ は 3 次元球面 S^3 の rational type, S_0^3 と書く事もありますが、 $\mathbb{Z}$ 上 S^3 と変わらなくて高次元 cohomology なんかは何かはないわけです。しかし $\mathbb{R}$ はものすごいバカでかい abel 群

$$\mathbb{R} = \bigoplus_i \mathbb{Q}_i \quad (\mathbb{Q}_i \cong \mathbb{Q})$$

であって、連続体濃度、 $\mathbb{Q}$ 上の次元が連続体濃度ある。homotpy 群は和になりますと、Eilenberg-MacLane space は直積になりますから、

$$K(\mathbb{R}, 3) = \prod_i K(\mathbb{Q}_i, 3)$$

となります。 S^3 が連続体濃度の product, そうすると cohomology がとんでもなく出てきます。3 次元の cohomology が $\mathbb{R}$ だけあって、Thurston は GV で実現したわけです。 $S^3 \times S^3$ だと 6 次元 cohomology はあるわけです。直積をどんどん増やすと S^3 が、3 の倍数の cohomology がとんでもなくあるわけです。それが foliation, $B\Gamma$ -structure で実現されるか、というものを含んでいて、これがいつ解決されるか、100 年かかるかもしれないし、永遠に分からないかもしれない、もしかすると解けない問題、答えのない問題かもしれませんね。これはずっと頭の中に有んですが、どういうものなのか、differentiability が小さいときは坪井先生の結果があるのですが、 C^∞ , また実解析的になると全然違うというのもまた面白い所です。integrability に絡む homotopy 論ですね、これは分からない事が沢山あるわけです。では、今日はこれでおしまいにします。

会場から質問: Kirby-Siebenmann の仕事で微分トポロジーが終わるというのはなぜでしょうか? Kirby-Siebenmann の仕事は位相多様体の三角形分割の問題で微分トポロジーではない気がするのですが。

Thom, その後の一連の仕事を見ると、微分可能多様体と PL 多様体と位相多様体、それが同じ土俵の上で同じ理論で展開できた。微分トポロジーであるから最初のうちはもちろん微分構造が問題でしたが、そのうち PL 構造があって、PL 構造の smoothing の問題や位相多様体の triangulation の問題が同じ同列の問題として出て来て、だから微分トポロジーというところちょっと言い過ぎかもしれませんが、まあ一つの時代が終わった、1969 年に、と言えとおもいます。differential topology というのは、今でも使う人は沢山いますし、最近では geometric topology とか differential geometry, metric topology とか、differential topology は 50 年代、60 年代に比べれば無くなって来てますよね、言い方が。60 年代は differential topology か homotopy 論、どっちかしかなかったです。大学院生もやりやすかったですね。

今はだからトポロジーと言ったって、トポロジーだけではなかなか難しいですね。gauge 理論とかやるなら微分幾何とか global analysis も必要だし、あるいは解析学も必要だし、だから全く感じは違う時代になっています。まあでもそれは当たり前ですよ。ずっと同じ事が続くわけではないので、その時代時代の特色があるわけで、いまからどうなっていくかというのは、それは私には分かりません。というより、それは若いみなさんが作っていくものだとおもいます。なかなか先が見えない時代です。数学だけではありませんが、でもそういうときは良い仕事が出る可能性は高くなります。

あとここでもう一つ transversely symplectic とか transversely volume preserving は、40 年ほとんど進歩がなくて、transversely holomorphic については足助さんが精力的に研究を続けて来て、smooth とは違うという事がわかりつつあります。transversely symplectic とか transversely volume preserving はなかなか難しいですよ。それともうちょっと 10 章くらいで少し触れたいとおもいます。

会場から質問：Milnor の問題というのはどこかでしゃべったのでしょうか。

それは調べたのですが、そうではないようです。2006 年のは PCMI の年次報告に入っていますが、そこを見ても論文もないようです。1960 年代前半に書いて circulate したと書いてあったと思います。引用はしてなかった、論文は出版はしてないと思います。

第 18 回 10 月 23 日

それでは、今 9 章です。低次元トポロジーの謎というタイトルでお話していてその 2 回目です。まだ途中で
すね。

微分トポロジーと呼ばれる分野というか、これが華々しく開花したのは、1950 年代初頭です。そして敢えて
いうと前回言ったように、1969 年の、今日改めてもう一度詳しくお話しますが、Kirby と Siebenmann の仕
事があって、一つ節目になりました。

それですね、Milnor の 1957 年の exotic 7-sphere ですね、それがこの微分トポロジー、その前には Thom
がいたんですが、微分トポロジーの開花を華々しく宣言した仕事ですね。その Milnor が 1960 年代に 7 つの問
題を提出しました。これは出版されているわけではなくて、preprint というか、今みたいにネット時代ではな
いので、コピーもゼロックスとかではなくてなかなか難しい、青焼きみたいなものでした。それでいろいろな
所に流布していたようです。

Milnor 自身が 2006 年にこの問題の現状について、6 年前ですが、これは前回言いましたので改めて全部は
書きませんが、錚々たる問題があったのです。2006 年時点でかなり、何パーセントというのはそれほど意味が
ないですが、7 分の 1、だから 6 題は解かれた、0.5 題、0.5 題残ったという感じなんです。残った問題を、これ
は残った問題は今日の主題なので後でもう一度詳しくやりますが、残った問題は 2 つなんです。これは大問題
であって、この先 10 年で解決するのか、50 年経っても解決しないのか、なかなか難しいですが、後で詳しく
やりませんが、ここで書いておきますと一つは Poincaré conjecture, dimension 4 で C^∞ -category, 7 つのうち
の一つの問題は Poincaré 予想で、この微分トポロジーで Smale と Zeeman がそれぞれ smooth と PL category
で 5 次元以上の Poincaré 予想を解いたわけです。そしてこの時点で、この問題の時点で 3 次元と 4 次元が残っ
たわけですね。3 次元は皆さんご存知のように、Thurston の革命、3 次元トポロジーの革命、geometrization
conjecture を Perelman が完全に解いて、Thurston 自身 90 パーセントか、本人は 99 パーセントくらい確信
していましたが、最終的に 3 次元 Poincaré 予想を解決したのは Perelman。3 次元は解決されて 4 次元がその
時点で残ったのです。これが 2002,3 年。4 次元が残ったわけですが、それより前に、後でやりますが、1982
年に Freedman が topological category では 4 次元 Poincaré を解きました。従ってこれだけが残っています。
いま大問題、どのくらいで解決するかどうか、2002,3 年頃には絶対反例が出るよと言っていた人もいました。

2 番目ですね、これが何かというと topological manifold の triangulability, 位相多様体ですね、これが半分だ
というのは、Kirby-Siebenmann のこの 1969 年の有名な仕事に関連するわけで、位相多様体の triangulability
はずっと大問題だったわけですね、この微分トポロジーより前に、例えば 3 次元多様体が triangulable とい
うのは Moise の仕事です、2 次元、曲面はどうかというと、それはいつ誰がやったかというよりは、今はみ
んな当たり前のように思っていますが、完全に当たり前ではないですね。Kirby-Siebenmann は 1969 年に
combinatorial な triangulation, 条件付きの triangulation, だから各点の link が、次元が一つ下がった sphere の
スタンダードな triangulation と PL equivalent なものを combinatorial な triangulation といいます、その存
在とその一意性について完全な解答を与えた、Kirby と Siebenmann の仕事です。だから半分、強いて言う
と半分解かれたわけですが、その条件がないときに位相多様体が triangulable か、というのは、大問題であって、
これもいまから何十年かかるのか、それとも機が熟しているのか、ちょっとわかりませんが、ともかく
この 2 つが残ったわけです。これについては後でもう少し詳しくやります。

3 次元多様体ですね。低次元多様体というのが、いまトポロジーのメインの研究対象ですけども、3 次元多
様体と 4 次元多様体、この対比というのが段々、非常に対照的だということがわかってきました。これ両方と
も革命が起こったわけです。革命を起こしたのは、前回やったように 3 次元はもちろん Thurston (1946-2012),

非常に残念というか悲しい事に今年亡くなってしまいました。Thurston が革命をおこしたのは 1980 年代初等だったのです。70 年代初めに foliation の仕事で華々しくデビューして、前回ちょっとやりました、70 年代の後半に surface diffeomorphism の分類で、いまでは Nielsen-Thurston theory という大理論を独力で作りました。そして 80 年代、それにつながる形で、Pseudo-Anosov というのができたら双曲幾何が出てくるわけです。3 次元多様体の geometrization conjecture, これを完全に解いたのがさっき言った Perelman. だけど Perelman が解いたというのとあまり良くないですね。Thurston が非常に多くの場合、Haken の場合ですね、そして残りの場合という Perelman があれですが、方法が全く違うわけですから、Thurston はいわゆる topology proper な方法、もちろん、革命を起こしたわけですから、それまでのトポロジーとは違って双曲幾何、微分幾何的の観点が入ったわけですが、でもまあ classical なトポロジーの延長線上の大革命だったわけですが、Perelman は外からくる感じで Ricci flow, Hamilton の仕事があったわけで、いわば全く違う手法で解いてしまった。これが 2002,3 年ですね。

これは今では完全に認知されて、これにもいろいろな人間的なドラマがあったわけですが、アーカイブに 3 つ preprint が載った段階で、もちろんすぐにみんなビックリして、これは全部知っているわけではありませんが、3 つくらいのグループがそれぞれ独立に検証を始めて、今では完全に認知されているという事です。

何れにしても Thurston が革命を起こして、そして言いたかった事は Perelman が geometrization conjecture を解決したわけですが、Thurston 自身が 1982 年出版の Bulletin of AMS に survey というか、有名な論文ですけど、3 次元多様体と Klein 群に関する有名な論文を書いてそこで 24 の問題を挙げています。Thurston の問題、Milnor との対比で言うと、Milnor は 7 つの問題で残り 0.5, 0.5, 0.5 と言いましたが、0.5 というよりは 0.25 かもしれませんが、一方で Thurston は 24 の問題を挙げていますが、ほとんど解決しています。

最初に解決したのは Klein 群に関する Ahlfors 予想とか ending lamination 予想とか、それがほとんど粗方 2004,5 年でしょうか。これは大鹿さんに聞くのが一番よいですが、粗方全部証明されて、関わった人は、Canary, Calegari-Gabai, それからもう一人、これは私の専門ではないですが、Agol ですね。この人、Agol は後でまた出てきます。これは大体前半の問題です。

そしてこのごく 2,3 年、今年が最後 2,3 年、劇的な進展を見せて、Thurston の geometrization conjecture を超える幾つかの問題があったのが、粗方完成してしまったというのが、2,3 年前から今年ですね、問題でいうと 15 番から 18 番、この 4 題。

これは Agol の、Agol は最近いろいろな所でもう 10 回以上、いろいろな talk ですね、1 時間 talk とか survey talk をしていますけれど、それをみるとわかるように Agol は Thurston の Bulletin に載った 15 番から 18 番、これを Agol だけではなくて、Wise とかいて、これもいわば Perelman 程ではないですが、topology proper というよりはちょっと外側というよりは隣ですね、geometric group theory から来た Wise とか Agol, virtual Haken conjecture, virtual b_1 conjecture, virtual fibration conjecture, この 3 つを完全に肯定的に解いてしまいました。これが 2012 年初頭で終わった。いま Agol が精力的にいろいろ講義をしている、そういう段階です。じゃあ 24 あるうちで全部解決したかという、敢えて言うに残った問題ですね、2 つ 3 つあるのですが、大きな問題とおもうのは 22 番と 23 番。24 番も大きいかもしれませんが、この 2 つに比べるとやや、22 番というのがこれが何かという、3 次元多様体全体を $\mathbb{Z}/3$ と書いたとおもいますが、その中でこれが 8 つの幾何学で統制されるというのが Thurston の geometrization conjecture です。その中で一番豊富な世界ですね、hyperbolic な 3 次元多様体の世界、ここに volume というのが、まあ volume 自身は hyperbolic でなくても、Gromov の仕事で simplicial volume というものがあるから全て定義されているから、しかし hyperbolic の場合はここに η -invariant というものがあって、あるいはこれを mod $\mathbb{Z}$ すると Chern-Simons invariant,

$$\mathcal{M}(3) \xrightarrow{(\text{volume}, \eta\text{-invariant})} \mathbb{C}.$$

$$\text{Knot} \rightarrow \mathbb{C}$$

本当はこれを順番をひっくり返した方が、Lie 代数の cohomology からすると自然になります。いずれにしてもこの組で plot 下さい、というのが Thurston の問題。あるいは knot の問題、knot の空間から volume と Chern-Simons, これは Thurston 自身書いていて、もうちょっと具体的にいうと computer program を開発してこういうものを plot 下さい、特に knot に関しては knot table 毎に全部 plot して、Thurston の有名な仕事、closed manifold の場合でいうと hyperbolic manifold の volume 全体の集合は ω の ω 乗という order type をもつというのが Thurston の大定理の一つですが、それを観察下さいと書いてあります。そして volume はこれは bijective ではないけれども、かなり近いわけです。finite to one ですが、そうすると 3 次元多様体全体がいわば virtual に複素平面全体に plot されるわけです、hyperbolic の世界、これがどうなるかを computer を使って観察下さい。これはそれほど進んでいるとはおもえないですね。これに関連して前回言ったように volume 予想というのは非常に広がりを持ってきて、これは元々 Kashaev が物理学的な考えである不変量を定義しました。そしてそれを村上順さんと村上斉さんが、だから Kashaev-Murakami-Murakami と呼ばれる volume 予想というのがあって、knot の場合、Jones 多項式、これは finite type 不変量になっていますが、volume がそのある asymptotic な振る舞いで書けるだろう。volume 予想、これが大きな広がりをもっているのは、Sergei Gukov, Caltech の、この人が A 多項式の理論との関連を付けて非常に大きな流れとなっています。大問題になっています。敢えていうと 22 番に関係するとも言えます。

23 番は前回少しやりましたが、これは整数論的で、トポロジーの範囲ではどうにもならないものです。Q 上 hyperbolic manifold の volume を添加する。Thurston の 23 番に何て書いてあるかという closed hyperbolic manifold の volume の比はいつも有理数か? rationally related, 多分違うという事を想定しているのだとおもいます。

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q} \langle \text{volume of } W^3 \rangle = \infty?$$

大方の人は無限次元であることを予想している、次元が 2 以上である事を証明しただけでも大定理ですね。だけどそれは Topology の範囲だけではどうにもならない。Q 上一次独立だという事を証明しなくては行けない。

これが 23 番、24 番が Thurston の有名な仕事は knot の Dehn surgery をすると、ほとんど全て hyperbolic になる。knot の Dehn surgery, genus 1 の surgery ですが、24 番は genus を上げて Heegaard 分解を固定したときどうなるか、ほとんど hyperbolic か、

これが残った問題。しかしまあ全体から言うと、Klein 群に関する Ahlfors 予想を含む大予想ですね、これがあれよあれよという間に解かれてしまいました。virtual 予想、これもまた 5,6 年しないうちに、Thurston が存命中に完全に解決してしまいました。それが 3 次元の革命、Thurston の革命に関わる現状です。

それで 4 次元の革命というのが、これはもちろん、私は 4 次元が専門ではないので、こら辺は耳学問がほとんどですが、皆さんがご存知のように革命を起こしたのは Freedman と Donaldson。このほとんど間を置かずに出たこの大結果、衝撃を与えました。これを見てみるとほとんど同じ時期なんですね、3 次元と 4 次元に革命が起こったのは、Freedman は 4 次元 Poincaré 予想を topological category で証明した、これは大定理。Donaldson は C^∞ で 4 次元多様体というものが、topological manifold と違って微分構造が algebraic topological な非常に強い制限を与える事を証明したわけです。最初は単連結で definite な C^∞ -多様体、definite だったら standard である事をいったわけです。standard でない definite な form はもちろんすごい沢山あるわけですから。しかも Freedman は 4 次元 Poincaré を証明しただけではなく、単連結な 4 次元位相多様体を完

全に分類しました, その corollary として C^∞ -structure が algebraic な structure に大きな制限を与えるのですが, topological manifold には全くない. 4次元では topological category と C^∞ -category が全く違うということを証明しました. それは3次元では古典的に知られているように, topological category と C^∞ -category は全く等しいという事が分かっていたわけですから, 3次元と4次元の drastic な違いというものがこの2つの革命によって明らかになっていったわけです. 先ほどの大きな問題, 4次元の smooth Poincaré と位相多様体の三角形分割可能性の問題が, クローズアップされてきて, と言っても, これをまともにやっている人はそんなに多いかどうか分かりませんが, そこをちょっとやります.

1969年の Kirby-Siebenmann, 特性類の観点からいうと $ks \in H^4(BTOP; \mathbb{Z}/2)$, こういう特性類があつて, combinatorial な多様体にもその tangent bundle, stable な normal bundle と言った方がよいかもしれません, 構造群が piecewise linear な homeomorphism のなす群の vector bundle, smooth なときは Grassmann, PL の Grassmann みたいなものです. これがあつて, 位相同型で分類する. この差を考えるというのが微分トポロジーの常套手段です. 幾何学的な問題をこういう分類空間という universal な空間のホモトピー論に帰着して解く. surgery theory の一つの帰結だったわけです. Kirby-Siebenmann はこれを完全に解決したわけで, fiber は TOP/PL , こういう等質空間みたいなもので, Kirby-Siebenmann の定理はこれが, 分類空間のホモトピー型を決める, それは Thom が始めたもので, 微分可能な多様体の分類を tangent bundle, normal bundle のホモトピー論に帰着して, そのホモトピー論を解くというのが, それが基本戦略です. 敢えていうと現在まで続いています. 段々難しくなっていますが,

Kirby-Siebenmann の基本定理は, 非常に信じられないくらい簡単に1箇所だけホモトピー群が order 2 の群になって, 3次元 homotopy 群が $\mathbb{Z}/2$ であとは自明ですから

$$TOP/PL = K(\mathbb{Z}/2, 3).$$

fibration, これは右の方に無限につなげる, この分類空間ですから, 逆にいうとこの loop space $\Omega K(\mathbb{Z}/2, 4) = K(\mathbb{Z}/2, 3)$ がここにくるわけです.

$$TOP/PL \rightarrow BPL \rightarrow BTOP \xrightarrow{ks} K(\mathbb{Z}/2; 4)$$

これは Eilenberg-MacLane space への写像というものがその cohomology と等価なわけですから, ここから $H^4(BTOP; \mathbb{Z}/2)$, これは非自明であつてこれが Kirby-Siebenmann の特性類の定義する連続写像,

$$M^n \rightarrow BTOP$$

これは fibration, 左に無限に続いていくわけです.

そして位相多様体があつたときに, 低次元はこのときでも, surgery をするので, 特に4次元は出来ないのですが, 次元が closed の場合は5次元以上, boundary があるときは6次元以上, 条件はありますが, ここに位相多様体があつたら stable な tangent bundle, それは topological bundle ですから分類写像はあるのですが, combinatorial な triangulation をもつかどうかの必要十分条件は, これが lift するか,

$$M^n \rightarrow BPL$$

これは Thom 以来のものですね, bundle が reduce するとあとは surgery してこっちになる. この homotopy 型が決まったわけですから, lift があるための必要十分条件は, こういったときに null homotope, つまり4次元 cohomology, Kirby-Siebenmann 類,

$$ks(M) \in H^4(M; \mathbb{Z}/2)$$

これが消える事が必要十分である、完全な形でさっきの trianagulability を解いてしまった。同時にその uniqueness も基本予想, Hauptvermutung と呼ばれた、これも大問題だったわけですが、これも同時に解いてしまった。敢えていうと、微分トポロジーの終わりというところちょっと問題ですが、大きな節目であった。

さてそうすると Milnor の 7 つの問題, 2 つ残ったわけですが, mystery としてクローズアップされてきます。改めて書くと, topological manifold は三角形分割可能か、これは大問題なわけで、これは全く条件がないわけですから、言い換えると、任意に与えた位相多様体は、単体複体の underlying space を多面体と言いますが、多面体と同相か？というわけです。それが mystery, $n=4$ のときはこれ自身 No なわけです。Freedman や Donaldson の結果を使うと、いわゆる E_8 -manifold というものがあります。それはそもそも 4 次元多様体でもし単体複体の構造を持つならば点の link は 3 次元ですから、3 次元は Poincaré 予想は正しいですね。だから 4 次元がもし何の条件もなく triangulable としてもそれは組合わせ的多様体になります。 E_8 -多様体は組み合わせ多様体になると smoothable ですから、 C^∞ になって Donaldson の結果に矛盾します。だから No というのはわかっています。

問題は $n=5$ のとき。これが今でも分かっていない問題です。境界があるときは 6 次元以上。これについては Kirby がいろいろな節目の講演で事ある毎に挙げています。1969 年に自分自身 Siebenmann と一緒に証明したけれども、そもそもなんの条件もないときに triangulable かというのは大きな問題で Kirby の problem list にももちろんあって、またことあるごとにいろいろな節目に挙げていて、もちろんわからないですが、どうなんでしょうね。やり方がないから、実質的にやっている人がいないと言えるかもしれません。これについてですね、こういった 3 次元, 4 次元が全然違うというのに出てくる大きな mysterious な群というのは、

$$\Theta_{\mathbb{Z}}^3 = \{\text{oriented homology 3-sphere}\} / H\text{-cobordant}.$$

普通 integral homology 3-sphere. これは integral な homology 3-sphere 全体、こう書いたら、全部 3 次元多様体は oriented, oriented な homology 3-sphere を持って来て、これは可算個あるわけですが、これを homology 同境. 大文字の H -同境, 小文字で書くと h -同境, homotopy 同境です。homology の意味で product になる、そのときに両端を H -cobordism, そういう同値関係で割ったら群になる。これは非常に、いま 2 つの問題とか、3 次元とか 4 次元の差について、mysterious な群、もともとあったのですが、これについてですね、問題をほとんどある意味で、ほとんどというところちょっと語弊がありますが、構造がわからない、まずこれが自明でないというのは、4 次元多様体の Rohlin の有名な定理を使うと、これは able 群ですが、ここから order 2 の有限群へ全射が出来る。

$$\Theta_{\mathbb{Z}}^3 \xrightarrow[\text{Rohlin}]{\mu} \mathbb{Z}/2 \rightarrow 1$$

これは Rochlin 不変量 $\mu(M)$ というものですが、念の為に書いておきます。homology 3-sphere M があつたとすると、その homology cobordism 類があつて、それはまず任意の 3 次元多様体 M はある 4 次元多様体 W の境界になるという事が古典的に知られていて、もちろん oriented, differentiable で取れます。 W に spin 構造が入る、 w_2 も消える、oriented だから w_1 は消えますが、 w_2 も消えるようにできます。これはそんなに難しい事ではありません。そうして W の signature というものが定義できます。境界はあるのですが、sphere みたいなもの、homological には sphere ですから、homological には disk を貼って、signature が定義できます。この signature が代数的に 8 で割れる事はわかるのですが、8 で割ったときにその mod 2, これは W の取り方に依らないというのが Rochlin の定理の帰結です。

$$\Theta_{\mathbb{Z}}^3 \ni [M^3] \mapsto \frac{\text{Sign}(W^4)}{8} \bmod 2 \in \mathbb{Z}/2$$

そしてこれが全射になるという事も Poincaré 球面を考えるとこれは非自明になり、全射である事がわかります。これはかなり早い時期にわかったのですが、ある時期、これが同型か？と考えられたときがあります。ある時期、非常に弱い形ですけど、同型だったらいいな、というくらいですが、No だというのが分かって、Casson 不変量もこれに関わって出てきました。1983 年頃です。これが同型でない事を証明しようとして出てきました。Casson 不変量自身、非常に大事な不変量だという事はどんどん明らかになって、これと関係ないところで理論がどんどん発展しました。これが決定的に No という事を証明したのが古田さん、1990 年の Inventiones、有名な論文ですね。やや遅れて Fintushel と Stern、この 2 人、4 次元の gauge 理論と古典的なトポロジーを使った、息の長い仕事をしているコンビです。やや遅れて、論文出版は同じ年でしょうか、古田さんが証明して、やや遅れて独立に証明したと言われています。何を証明したかという $\Theta_{\mathbb{Z}}^3$ は abel 群だから rank が定義できるわけですが、その rank が無限大である事を証明しました。同型であるどころの騒ぎではありません。無限群であるばかりではなく、rank が無限である事を証明しました。この証明はやっぱり Donaldson の流れを汲んだ証明で、gauge 理論を使う証明であって帰謬法なんですね。

homology 球面の作り方としては一杯あって、今では hyperbolic な homology 球面というのが研究の対象であって、なかなか難しいですが、その前に Seifert の homology sphere、1960 年代に Brieskorn という人が、Hirzebruch の近くですね、Bonn にいた人が、Brieskorn singularity という大きな流れをつくったんですね。その Brieskorn sphere というのが一杯出て来て、その中の系列が $\mathbb{Z}$ 上 1 次関係があるとすると gauge 理論を使って矛盾を導く、両方とも同じ、帰謬法です。無限 rank だから、ここから $\mathbb{Z}$ へ準同型を作ったら一番よいのですが、今の所 1 つだけあって Floer の準同型が一つだけあります。もうちょっと最近、もう大分前になりますが、大分前 Ozsváth-Szabó、この理論を使ってもできる、これはまだ証明はされていないようですが、これは同じじゃないか、古田さんに聞いたら同じだろうといわれてますね、でも証明はされていません。と、何れにしても有っても 1 個か 2 個しかありません。そもそも abel 群で rank が無限だったら $\mathbb{Z}$ への準同型が無限個あるか、というそれはわかりません。divisible という事はあるのでわかりません。無限 rank だけで $\mathbb{Q}$ みたいな形だったら、どうにもならないですが、多分そうではないだろうと、いくらでも divisible だったらどうしようもないですが、でも証明はまだないですね。

無限 rank だから $\mathbb{Z}$ への準同型が無限個あるなんていう事にはすぐにはならない。もう一つ幾つか candidate、候補は幾つかある。Neumann-Siebenmann, Furuta-Ue-Fukumoto, それから Floer の instanton Floer homology、最近では Lagrangian Floer とか Heegaard Floer とか、一番盛んに研究されていますが、その前に instanton Floer homology, $\mathbb{Z}/8$ -graded. 8 個の Betti 数が出てきます。その 8 個を、普通の Euler 数は交代和ですが、weight $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$, +, +, -, -, +, +, -, -, こういう weight で加えると Seifert 上 Neumann-Siebenmann, Furuta-Ue-Fukumoto と同じで準同型になるのですが、問題は hyperbolic のときどうなるかわからなくて、こういう weight を付けた instant Floer homology の Euler 数がもう一つの candidate、それを具体的に言ったのは Saveliev。だけどこれは全部 candidate で一番難しいのは hyperbolic な homology 球面に対して方法がない、additive かどうか調べる方法がない。Seifert では additive というのは証明されています。

いずれにしてもそういう神秘的な群、 $\Theta_{\mathbb{Z}}^3$ というのがあります。位相多様体の triangulability に関して決定的な仕事というのは、2 つのグループ、まず Matumoto Takao さん、さっきの Fintushel-Stern の Stern, Stern という人は、数学者は沢山いますが、Stern は本当に紳士の Stern ですね、そして Galewski, Galewski-Stern の 2 人、この 2 つのグループがほとんど同時に、松本堯生さんの仕事は Siebenmann の下での Doctor 論文。これが 1978 年から 80 年くらいでしょうか。松本堯夫さんは Symp. in AMS, Galewski-Stern は Annals of Math に出ています。どちらも超一流の雑誌に出ています。

これを書きますと、任意の位相多様体 M^n , topological manifold, これは n が 5 以上で境界が空でないとき

は n は 6 以上, こういう条件付きですけれども, 全ての M^n , こういうものが triangulable である必要十分条件は, これは非常に強い美しい定理ですが, $\mu : \Theta_{\mathbb{Z}}^3 \rightarrow \mathbb{Z}/2$ が split する.

Theorem (T. Matumoto, Galewski-Stern, 1978-80)

任意の topological manifold M^n ($n \geq 5, \partial M \neq \emptyset$ のとき $n \geq 6$) が triangulable $\Leftrightarrow \mu : \Theta_{\mathbb{Z}}^3 \rightarrow \mathbb{Z}/2$ が split する.

こういう statement もきれいでわかりやすい, 群論的にこういう全射があったら, Kernel, 普通はねじれた extension ですが, それが半直積になる, 言い換えるとこの中に order 2 の元が存在して, Rochlin 不変量が zero でない. 1980 年ちょっと前ですから 30 年たちますが, これを元にさっきの残った問題にアタックするとよいとおもいますが, なかなか難しいですね. Galewski-Stern は, 松本さんも principle としては同じだと思いますが, 分類空間の言葉で言っていて, これは Galewski-Stern の書き方ですが, $BTRI$, これは triangulable の TRI , こういう Grassmann 多様体みたいなものがある, これが $BTOP$, これは位相多様体の tangent bundle, そして一方, ここに BPL というのがあって, これが Kirby-Siebenmann によってこの fiber は $K(\mathbb{Z}/2, 3)$ であって, 一方でこの fiber がまた Eilenberg-MacLane space になって, Kernel の, Rohlin 準同型の kernel, これはいま構造のわからない, 無限 rank ですが, それ以外の事がまったくわからない abel 群が π_4 に出てくる,

$$\begin{array}{ccccc}
 & & BPL & & \\
 & & \downarrow K(\mathbb{Z}/2, 3) & & \\
 BTRI & \xrightarrow{K(\text{Ker}\mu, 4)} & BTOP & \xrightarrow[\text{Bockstein}]{\delta ks} & K(\text{Ker}\mu, 5) \\
 & & \downarrow ks & & \\
 & & K(\mathbb{Z}/2, 4) & &
 \end{array}$$

従ってこの写像は何かというとこれは Bockstein という準同型, $\delta ks, K(\text{Ker}\mu, 5)$, Bockstein, これは何に associate した Bockstein かというと,

$$0 \rightarrow \text{Ker}\mu \rightarrow \Theta_{\mathbb{Z}}^3 \xrightarrow{\mu} \mathbb{Z}/2 \rightarrow 1$$

です. 一般に homology や cohomology の係数として, 係数の完全系列があったら, これ係数の Kirby-Siebenmann があるから, long exact sequence を使って, degree が 1 つシフトした, 5 次元の cohomology が定義できます. こういうものが, これがこの定理の言い換えなわけです. こういう風になっています. これは 1980 年頃ですが, その直後に, さっきの, もう一度書きますが, 4 次元の革命が起こって, Freedman と Donaldson になるわけです. Freedman は単連結な位相多様体を完全に分類して, 特に topological な 4 次元 Poincaré 予想を解決しました. もう一つ大きな仕事があります. それは何かというと, $\Theta_{\mathbb{Z}}^3$, これは 3 次元の oriented な homology 3-sphere を, 大文字の H, homology cobordism という同値関係で割って得られる abel 群です. cobordism は 4 次元なので何も言わないときは smooth manifold を仮定しますが, それが位相多様体でもよいとしても定義できます. これは何かというと, homology 3-sphere で, oriented ですけれども, mod homology cobordism ですが, だけど 4 次元の cobordism なので, topological な位相多様体でよい.

$$\Theta_{\mathbb{Z}}^3(\text{top}) = \{\text{homology 3-spheres}\} / \text{Top. H-cobordism}$$

Freedman が証明した事は, 4 次元においては位相多様体は微分可能多様体よりもものすごく沢山ある, algebraic な条件さえ満たせばよい. 少なくとも単連結な場合は, そうすると topological な H-cobordism, これで割ったとすると小さくなる. Freedman が証明した事はこれは自明な群になるという事です. 実は Freedman はもっと強い事を証明しまして, さらに強く任意の homology 3-sphere, これは境界になる事の,

さっき Rohlin 不変量の所で、4次元の smooth な多様体が存在して、spin まで仮定でき、さらに単連結までできるけど、homology は消せるか、homology 4-disk になるか、なるならこの群の中ではゼロになります、それは分からないけれど、Rohlin 不変量が消えたら、smooth な homology disk の boundary になるかどうか、これは大問題ですね、smooth な homology 4-disk の境界になるかどうか、この群の中で自明になるかならないか、だけど Freedman が証明した事は、位相多様体は驚くほど自由にあつて、任意の homology 3-sphere M^3 に対して、topological 4-manifold W^4 が存在して、これは contractible 4-manifold で、homology disk というよりずっと強く可縮な 4次元位相多様体の境界になる、 $M^3 = \partial W^4$ となるものが存在する。これが homology disk だったら homology cobordism の群の中で自明になる、もっとずっと強くて可縮な多様体の境界になる。

Theorem 9.1 (Freedman).

$$\Theta_{\mathbb{Z}}^3(top) = \{1\}.$$

私は門外漢ですけれども、本当かなというと言弊がありますが、どんなふうに証明するのかなとおもって、Scorpan という人の AMS から出ている、The wild world of 4-manifolds というタイトルの、かなり分厚い本を見ました。あとで聞いたのですが、この人は Kirby さんの弟子で、もの凄い勉強をして Donaldson と Freedman、両方勉強をして完全に理解して本を書きました。両方書いてあります。その後数学者にはならなかったようですが、この中にこの証明の概略は書いてあります。これは構成しているんですね、constructive なんです。wild world ですからアメリカの南部で発達した Bing 以来の wild topology、その流れに Casson handle とか、モダンなトポロジーとアメリカの wild topology、Casson の大きな仕事は出て来たんです。読んだときは納得したんですが、凄い関心してなるほど可縮なのかとおもいました。どんどん消していくんですね、homotopy 群を消していかなければいけない。何れにしてもこれは大定理なわけで、4次元の世界で topological、これは smooth にすると Furuta, Fintushel-Stern の定理があるから無限 rank、決定的に違う。

それからちらっと言いましたが、4次元 Poincaré, smooth ですが、ちょっとだけ、これのお話的な事をいうと、2003 年京都で foliation の symposium がありました。そのときにある人といろいろと話をしました。4次元では Donaldson 以降、Betti 数がだんだん小さい所で、位相多様体は一つ固定したときに、微分構造が無限個はある、 $\mathbb{C}P^2$ を blow up して、 $\mathbb{C}P^2$ 自身、 S^4 は、これもまだ未解決ですが、これを blow up していくと、exotic structure が 1 個入ると大体無限個入らしいのです。Kotschick がブレイクスルーをやって、いまどんどん減って来て今 Betti 数 2 ぐらいでしょうか。

最新の仕事は、Park さんとか Stipsicz さんとか、この辺りの人がどんどん下げて来て、この辺りは Stern さんが去年 2011 年 5 月ですね、毎年ある Cornell Topology Festival で話をしています。Stern は 4次元 smooth では大御所の一人であつて、このときのタイトルが、4次元 smooth なんかかんとか 2011、ですね、毎年やるかどうか分かりませんが、来年は少なくともしゃべるんじゃないでしょうか。どんどん exotic structure が入ってきている。Cornell, Topology Festival, Stern で検索すれば video が見られます。大問題は S^4 、これが最終的な大問題、 S^4 , CP^2 , $S^2 \times S^2$ 、ここら辺りの homology 群が非常に小さい所でどうなるか、大問題。2003 年に京都である人に会ったときに、4次元 Poincaré 予想が、うわさでもう解かれるのではないかと議論したら、あれはもう来年くらいには反例が出来ますよ、とその人は言っていました。次の年にまた会ったので、反例できました？と聞いたら、なかなか難しいようなので、1,2 年あつたら出来るでしょう、その次にあつたら、なかなか難しいですね、と。どんどんトーンダウンして行きました。その人がどうかという事ではないですが、一時反例が出るだろうという機運が高まりました。いろいろな新しい homology 論がでてきたから、構成、候補はいろいろある。ことごとくいまの所全部 S^4 になっているわけです。新しい homology 論が出来たから、3,4 次元で今でも発展中なものがある。一方で反例の候補はあるから、新しい homology 論を適用する

と S^4 と違うという形でできるだろうと、これは正しいとおもっている人も多いでしょう。言ってもあまり意味のない事ですが、非常に難しい問題で何年かかるかわからないという状況になっています。この 2 つの問題、4 次元 Poincaré と Triangulability, これも Thurston の 24 の問題をほとんど、2,3 つはまだ解かれていませんが、解答を見たというのがどういう感じなのかわかりませんが、例えば Riemann 予想というのがありますが、これが解かれたとすると、わからないなりに感激するでしょうが、数学にとっては大ピンチだともいます。黒川さんの文章を見ると、問題はいくらかでもありますよ、ということですが、Riemann 予想が仮に解かれたとすると大ピンチだと思います。問題は解かれていくという運命にありますが、1950 年代から、Thurston の問題にしる、Milnor の問題にしる、大ブレイクスルーがおきて 2,30 年のうちにどんどん解かれています。これが続いて行くと有り体にいうと問題が無くなってしまいます。もちろん問題を解くことは醍醐味ではありますが、新しいものを作って、Hilbert の問題にしる、Fermat にせよ、あたらしいブレイクスルーを引き起こすような問題を提出する、そういう事が求められると思います。

幸い新しい動きというのは、例えば Khovanov homology, Cluster algebra, Cluster algebra は最近脚光を浴びていますが、両方とも、その前に Vassiliev とか、これは偶然ではなく全部ロシア系の人ですね。なんとというか新しいアイデア、アイデアじゃないな、新しい構造が求められています。Cluster algebra が出てもう 10 年くらいになります、Khovanov も 10 年くらい、大体 10 年に 1 回くらい新しいもの、ブレイクスルーが起きます。Vassiliev は 1990 年くらい。

次は何か、日本発で何か出てくるといいのですが、というわけで主観的な低次元トポロジーの謎というものをやってきましたけれど、それで少し元の方に戻って、章はそのまま少し手前味噌になるかもしれませんが、逆井さん、鈴木さんとずっと一緒にやっている問題を、2 つの問題、さっきの問題と多少は関係があるのですが、これの紹介、これに少しずつ入っていきたいとおもいます。だからこれは 9 章の敢えていうとセクション 3 です。多分逆井さん、鈴木さんとの仕事、これは 10 章になります。

次は mapping class group です。これはこの講義の主人公です、 $\mathcal{M}_g$ と書いて、これは isotopy class であって、種数 g の曲面の向きを保つ微分同相の isotopy 類の群。これがいわばちょっと大袈裟にいうと、Poincaré 予想というのがあって、そもそも初めは homology が S^3 と同じならば S^3 と homeo か、ほんの一瞬だけですがこういつて、彼自身が homology 球面を構成して、100 年くらい経って Poincaré 自身、いまいたらびつくりするくらい homology 球面だらけ、hyperbolic な homology 3-sphere というものがあるというのは、Poincaré も夢にも思わなかったのではないのでしょうか、Thurston 自身だって、Thurston がつくったのですが、どうおもったのでしょうか。そういう事があるので、homotopy と homology の違いが全然あるわけです。 $\mathcal{M}_g$ はいわば homotopy の世界だとすると、いわば homology の世界に広げる群というのが $\mathcal{H}_g$ という群です。これは Garoufalidis と Levine によって導入されたのが、2000 年くらいですかね、まだ 10 年ちょっとしか経っていないですね。Garoufalidis は比較的若い人で今 Georgia にいます。Levine は私とほぼ同世代、高次元も含めた Knot の有名な大家ですけれども、Jerome Levine です。数年前に亡くなりました。homology と homotopy の違いというのは、定義を、写像類群の定義を次のようにすればよいわけです。これは cylinder ですが、 $\Sigma_g \times I$ を持って来て、曲面があつて product を取って、0 の方は Σ_g から identity でいくけれども、1 の方は Σ_g からこれは結局 monodromy になるわけですが、 φ という diffeo を持って来て、これを isotopy で割ります。こういうやつ全体を考えて、これはもともとは微分同相の isotopy 類だったわけですが、cylinder 上の marking、左側は identity、右側は自由に動かす、同値類によってこれで mapping class を定義して、これを φ で貼付けると S^1 上の fibration になって、一つの fiber が Σ_g と identify されている、monodromy がかつちり決まる。

$$\mathcal{M}_g := \pi_0 \text{Diff}_+ \Sigma_g$$

こう考えると、これは homotopy の category ですが、homology の category にして得られるのが、Garoufalidis と Levine であって、左側は Σ_g があって、cylinder ではなくて、今度は homology cylinder W^4 があって、homology の意味で、homological には $\Sigma_g \times I$ 、左側は identity、そして右側には monodromy みたいなものがあるわけです。あるんだけど cylinder ではなくて homology product.

一番簡単な例としては 3 次元多様体 $\Sigma_g \times I$ ですが、内部において homology 3 球面、何でもよいから持って来て connected sum する、homological には何もないので、これを 4 次元の cobordism でわる。これが定義です。

$$\mathcal{H}_g := \{W^4 \underset{H_*}{\cong} \Sigma_g \times I\} / H - \text{cobordism}$$

Garoufalidis-Levine の導入した、Levine は enlargement と呼んでいますけれども、写像類群の拡大。この base にあるのは 1990 年代後半に展開された Habiro 理論、独立に Goussarov 理論があって、これに基礎をおいて、Habiro さんの論文は 1999 年の Geometry and Topology、有名な論文で 90 ページくらいの大論文です。名前が、これが homology cylinder という命名は Levine なのかな、Habiro さんは homology cobordism、という別な名前で呼んでいます。clasper surgery、強力な理論があって、写像類群が部分群になるような大きな群を定義しました。

そうするとさっきの homology cobordism の作る群の定義、これは 4 次元の cobordism ですから、topological でつかうか、smooth でつかうか、2 つバージョンが出てきます。notation として smooth は何もつけないとするとこの商として $\mathcal{H}_g^{top}$,

$$\mathcal{H}_g \twoheadrightarrow \mathcal{H}_g^{top}$$

こういうものが定義できる。この 2 つの群の topological category, smooth category は 4 次元で劇的に違うという事がわかっているわけです。これはいわば 2 次元、3 次元の幾何なのですが、群として現れるその差を研究するとすれば、さっきの 2 つの大問題、triangulability と Poincaré 予想、Poincaré 予想はさすがに直接というわけにはいきませんが、triangulability の方は直接関係する、これを調べましょうと。

homology cylinder は研究が始まってまだ 10 年くらいしか経っていませんが、逆井さんが世界的なリーダーの一人であって、合田さんとか幾何的な研究、逆井さんの場合は代数的な研究も込めてすすんでいるわけですが、なかなか難しいですね。写像類群の場合もそうでしたが、これ自身が最終的な研究なのですが、代数的に表示しようとする外部自己同型になるからなかなか難しい、基本群、base point をとるとやや簡単になります。曲面から disk を 1 個引っこ抜いて基本群を自由群にして

$$\mathcal{M}_{g,1} \rightarrow \mathcal{M}_{g,*} \rightarrow \mathcal{M}_g$$

この差というのは Birman とか Dennis Johnson の仕事で完全に分かっている。完全にわかっているの、これは研究しやすいので、これを研究して、落っことして、落っことしてと。

homology cylinder の場合もそうであって、あんまり書かないですかね、disk を除いて、

$$H_{g,1} \rightarrow \mathcal{H}_{g,*} \rightarrow \mathcal{H}_g$$

こうやらないとなかなか難しいですね。この差はわからないのですよね、Habiro-Massuyeau の仕事で手術の言葉ではわかっている。Massuyeau は Strasbourg の人ですね。わかっているけれどもそんな簡単な形にはならない。それでですね、 $\mathcal{H}_{g,1}$ 、これの topological version, $\mathcal{H}_{g,1}^{top}$ ですが、これに $\Theta_{\mathbb{Z}}^3$ がどう絡むかということ、ほとんど定義から

$$H_{0,1} = \Theta_{\mathbb{Z}}^3 \subset \mathcal{H}_{g,1}$$

は central となります. injective でさらに大事な事は central, 中心, すべての元と交換可能. この部分群としての取り方は簡単であって, homology 3-sphere があって, 一方で homology cylinder があつたら, 代表元は 3 次元多様体. connected sum はどこでやっても同じというので central になります.

従って中心拡大が得られる. こういう拡大が得られる. ここで Freedman の定理を使って, これを同じ topological category でやるとこれが自明になるわけですから, 全射が, forgetting homomorphism があるのですが, ここを factor する. これは Freedmann の結果からこうなる.

$$0 \rightarrow \mathcal{H}_{0,1} \rightarrow \mathcal{H}_{g,1} \rightarrow \bar{\mathcal{H}}_{g,1} = \mathcal{H}_{g,1}/\Theta_{\mathbb{Z}}^3 \rightarrow 1$$

これは Freedmann の定理. これとこれの差の中にこの神秘的な群, Furuta さん, Fintushel-Stern の無限 rank ぐらいしか分かっていない群がここに現れる. 一方で中心拡大というものがあつたとすると, これはそもそもこの話の初回にやったとおもいますが, 一つの曲面があつたときにその unit circle bundle を考えたときに,

$$T_1\Sigma_g \xrightarrow{S^1} \Sigma_g$$

これは principal S^1 -bundle になって, 基本群でいうと中心拡大,

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \pi_1 T_1\Sigma_g \rightarrow \pi_1\Sigma_g \rightarrow 0$$

これは g が 2 以上のとき自明でない central extension, 中心拡大になる. $g = 1$ のときは torus になるから, split してしまいます. $g = 0$ のときは単連結で, Eilenberg-MacLane space にならない. 違いが出ます.

Euler 類 $\chi(T_1\Sigma_g) \in H^2(\Sigma_g; \mathbb{Z})$ が定義できます. この Euler 類, これが曲面の世界が種数 0, 1, 2 以上に 3 つ分かれる事を体現するわけです. Gauß-Bonnet の定理です. というわけでこれの family version を考えると, これは中心拡大ですから, Euler class $\chi(\mathcal{H}_{g,1}) \in H^2(\bar{\mathcal{H}}_{g,1}; \Theta_{\mathbb{Z}}^3)$ が定義できます. ここにこの神秘的な群が出てきて, どのようにねじれているか, ちょっと大袈裟に言うと Poincaré が予想しなかったように沢山ホモロジー球面があるのだけど, その homology 球面が, この 3 次元と 4 次元をつなぐこの homology cylinder というもののなす群に, topological category と smooth category の差として現れるわけです. その差として中心拡大なので, こういうその Euler class として現れる. だからこれを研究するという事と, 1 個の曲面に対して, これは Gauß, Riemann 以来, 1 個の曲面でこれがブレイクスルーになった, Euler class, 特性類の理論になった. これを family に対してやるとこれが 3 次元と 4 次元をつなぐ mystery の究明, 研究にとって突破口になるのではないかと思います. これが一つのスローガンなんです. これを調べましょう.

今日はもう時間になりましたが, ここに Kirby-Siebenmann class がでるわけですが, ここに Rohlin 不変量で, $\mathbb{Z}/2$ があって, 松本堯生さんとか Galewski-Stern の $\text{Ker}\mu$ というのがありますが, 従ってこの Euler class をこれは非常に分かりにくいのですが,

$$0 \rightarrow \text{Ker}\mu \rightarrow \Theta_{\mathbb{Z}}^3 \rightarrow \mathbb{Z}/2 \rightarrow 1$$

から, $\mathbb{Z}/2$ に落とすとどうなるか.

$$H^2(\bar{\mathcal{H}}_{g,1}; \text{Ker}\mu) \rightarrow H^2(\bar{\mathcal{H}}_{g,1}; \Theta_{\mathbb{Z}}^3) \xrightarrow{\mu} H^2(\bar{\mathcal{H}}_{g,1}; \mathbb{Z}/2).$$

これは 2, 3 年前からずっと Scorpan, あるいは Freedmann-Kirby なんかの仕事をみてやろうとしています. まあ Kirby-Siebenmann class との関係がでるわけですが, 4 次元の, Kirby-Siebenmann class はもう 69 年のあれですから, なかなか表立って研究されているというわけにはいかないのですが, この観点からすると非常に重要で, また改めて研究した方がよいかなとおもいます.

今回は今日はできませんでしたが、数論との関係が3つ、4つ、あきらかに non trivial な関係が出ると思うのですが、これも逆井さん、鈴木さんとの仕事の中から出て来た。これを Thurston の問題、volume についても数論ですが、それとは全く違う観点から出てきます。こういうものを込めて次回以降やりたいとおもいます。

会場から質問: $\mathcal{H}_{g,1}$ の定義は、10 章でやるのでしょうか。

定義はさっきの定義です。homology cylinder を 4 次元の cobordism で割ります。割らないと monoid になりません。cylinder と cylinder をくっつけると cylinder にはなりますが、それが群になるためには同値関係で割らないといけません。それが 4 次元の homology cobordism です。

genus はいつも固定していますが、 $\mathcal{M}_{g,1}$ にしたら写像類群がそうですが、 $\mathcal{M}_{g,1}$ があつたら $\mathcal{M}_{g+1,1}$ に包含写像があります。これも同じで boundary で自明化されたら、genus が 1 個上のやつになって各 g ごとにあるのだけれども、多分 stable cohomology と思われま。 g によらない形になる。いま戦略はさっき言ったように、これが無限 rank が予想されるので、 $\mathbb{Z}$ への無限個の準同型が予想されるので $\mathbb{Z}$ 係数の 2 次元 cohomology が無限個あるはずですね。これは torus の場合は T^2 の unit tangent bundle はねじれてないので、Euler class は定義はされますが、ゼロです。これはさすがにゼロではないだろう、もちろんゼロでないという証明はまだありません。ゼロではなくてなにか hyperbolic、適当な意味で、そうすると無限個こういうものがでてくるのですが、写像類群で展開してきた理論を使うと無限個の元が定義できる。いま予想としては、無限個の元が、定義自身はこういうものは全然何も出てこない、いわば外側くる homotopy 論、表現論からくるんだけど、これがいわば体現しているというのが夢というか、なんですけど。

これは本当は、さっき数論的といいましたが、2-torsion も必要だし、 $\mathbb{Z}$ 上でいずれはやらないといけないですが、いまは $\mathbb{Q}$ 上でやっています。全部 $\mathbb{Q}$ 上で、symplectic 群の表現論を使って、構成して、ただ定義されたら自明でない事と証明したいんだけど、今のところどうにもならないですね。これの写像類群の場合には H^2 は rank 1 で、それが signature なんですね、それがゼロでないというのが、そもそも Atiyah と小平先生の surface 上の surface bundle の構成で、そもそも難しいんですよ。今はみんなわかっているから ramified covering、本質的な構成を使って surface bundle なのに signature がゼロでないものを作った。そのいわば higher version. signature というのは cup 積から出来る不変量ですけど、無限個のやつはこれは Massey 積、homology cylinder 上の Massey 積からくる self intersection を実現するような 4 次元位相多様体があるか、という問題です。ゼロでないことを証明するためには構成しなくてははいけない。だけど Freedman を見ればわかるように、単連結の場合でさえ wild な無限の反復をしないとはいけません。これは基本群が非常に大きいので、surface 上の surface bundle くらい大きい所で、そういう事をやらなくてははいけない。我々はどうしているかというところでもう一人の天才 Kontsevich が登場し、素晴らしいプレゼントというか、これは群の cohomology であつて、それに対応する Lie 代数があつて、Lie 代数の cohomology が定義できる。それを最初定義したんですが、そうするとそれは今の所関連は見つかっていない、それが全く違う所で意味をもってそれが graph の moduli の特性類、それがゼロでないという事は証明、これは無限個あるのだけれども、Lie 代数ですから、computer、線型代数で計算を始めるわけですが、無限個あるやつですが、3 個までしか自明でないというのは証明できていません。一番最初が、定義と同時に 99 年、その次が 2004 年、3 個目が 2011 年の Ph D 論文、Gray という人です。少し間隔が広がってきているから、この調子でいくとどうにもならない。僕は見られないかもしれません。それじゃちょっと困るので、逆井さん、鈴木さんと頑張って 4 番目と思っています。

会場から：昔の Casson handle、下から順番に頑張っていたのがあるとき Freedman が突然現れて全部そうだと証明しましたような。

そうそう、群ではさすがにできないとおもいますが、Lie 代数でも cycle を作らないといけない。群の場合は surface 上の homological surface bundle をつくらないといけない。Massey 積が高次の意味でゼロでない、

小平先生の surface 上 surface bundle の構成だって出来たときはビックリだったわけです。それよりさらに、高次のどんどん深い、無限個の series が深くなっている、Massey 積のいわば higher な self intersection がゼロでない 4 次元多様体があるか、という問題です。

ですからここで定義したんだけど、段々詳しくやっていきますが、ここで逆井さんは、いわば algebraic な homology cylinder を使った $\mathcal{H}_{g,1}^{alg}$ を定義しました。Freedman がやった事は、少なくとも単連結では topological と algebraic は同じ世界。だけと homology cylinder の場合は、これが同じ世界ではないという事はもうわかっています。knot の concordance とかでわかっています。わかっているけれども、無限個の series の cohomology はここで定義できて、まず最初は algebraic な surface 上の homological surface bundle で非自明を証明したらよいのだけでも、それでも難しい。予想としては topological category では全部非自明だけど、smooth な category ではそういうものはない、smooth な category では higher Massey 積の self intersection がゼロ、Kähler 多様体で Massey 積がゼロ、という有名な Deligne-Griffiths-Morgan-Sullivan という定理がありますが、全部消える、しかも uniform に消えるというんです。smooth な所で Massey 積が消えるという兆候は今の所ないので、ないんだけど、夢としては、非常に深い Massey 積なので、smooth structure がそういう obstruction になるだろう、ある世界的な大家に以前聞いてみましたが、言下にそんなものはないよとはいわれませんでした。100 年かかるとおもっています。だから僕はどうにもならないとおもっています。若い人たちが頑張つてさっきの Thurston ではないですけど、最初のやつくらいはゼロでないという事が分かって欲しいですね。

そこはほとんど同じに見えてくる、knot の topological concordance という群があつて、そこら辺はもう一つのグループがあつて、Peter Teichner, 4 次元の強力なグループですが、Conant, Schneiderman, Teichner, Whiteny tower の 4 次元の、Whiteny の trick をいろいろな filtration をいれて topological category, ここ Ker が自明でないということはわかっています。だけれどもそれはこういう 2 次元的なねじれには影響しない。それが影響するのは smooth, drastic な違いがこの群に現れて、Euler, Gauß, 古典的なあれで、捕まえられよう。それは 10 年くらいいろいろな所で言ってきたけど、だんだんはつきり言うようになってきましたけど、率直に言ってだれも信じてないでしょうか。我々に取って幸いな事は、さっきの Kontsevich の Lie 代数 version は意味があつて、最初の 3 つはゼロでないことが証明されたという事です。

10 夢

9 章まで行って、低次元トポロジーの謎、という事で幾つかの問題についてお話をしました。今日は新しい章、どういうタイトルをつけようかと思いました。本当は夢に向かってとかいろいろ考えたり、予想とか書くとも思ったのですが、それにはあまりになんというか、理論的というか実験的なので、「夢」としました。

それで 19 回目ですが、多少、前の復習から入ります。今日は 1,2,3,4 まで用意しました。初めに 4 つ全部書いておきます。

1. 一つの曲面の場合.
2. 曲面バンドル (mapping class group $\mathcal{M}_g$)
3. homology cylinder
4. $\mathbb{G}_Q = \text{Gal}_{\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}}$ との関連

この講義の一番始めに戻りまして、まずは一つの曲面、Gauß, Riemann の話題。そして曲面の family ですから曲面バンドル、monodromy, mapping class group です。これが 2 番目。この話では $\mathcal{M}_g$ と書いています。だから family です。3 番目はこれも何回か、前回も出しましたが homology cylinder。これは homology 的曲面バンドル、bundle と書く fiber bundle みたいですが、これは私が一人勝手に言っているものであって、本当は Habiro さん、Goussarov さんの homology cylinder です。Habiro さんは homology cobordism という名前を付けてました。これは通常の fiber bundle から homology 的 fiber bundle へ。Poincaré 予想の解決から象徴的に書くと、homotopy から homology へ。最初の Poincaré 予想、3 次元の場合、敢えていうと homotopy と homology に差がない、敢えていうとそれは正しくなくて、homology 球面で homotopy 球面でないものはいくらでもある。bundle の方も従って広がって、特性類がどんどん広い世界に延びていく。ここでは何回か名前を挙げていますが、最近ずっと共同研究している逆井さんと鈴木さんとのプロジェクトですね、2,3 年前から始めて 2,3 ヶ月前に一つ新しい柱をさらに立てて、プロジェクトを走らせ出してそれが軌道に乗り出した所で、それについても少しお話したいと思います。

現在、それは今現在ですが、カナダの Banff という所で研究集会が行なわれていて、鈴木さんと逆井さんは参加しておりリアルタイムでやりとりをしています。これは video で瞬時に見られるようになっていますので、興味ある人は見て下さい。今行なわれている研究集会は、Vogtmann, Farb, あと組み合わせ群論の人が 2 人の合計 4 人が organize したものです。この Banff はドイツにある Obelwolfach 程は有名ではないかもしれませんが、こちらの方が新しいですが、ほとんど毎週世界的な研究集会が行なわれています。Oberwolfach は video はみられませんが、report があります。こちらは on time で見られて、今の研究集会に限らず HP に行くと昔のやつも video で見られます。解像度も凄く良いですね。MSRI のも同じように見られますが、東大数理もかなり充実してきましたね。遠くにいる人間にとっては、リアルタイムで video で見られるというのはすごく助けになりますね。

そして 4 番目が数論、絶対 Galois 群、 $\mathbb{G}_Q$ と書きます、絶対 Galois 群。数論とトポロジーとの関係というのは、遡ると、現代数学で出てきたのは Grothendieck だと思います。そのあと伊原先生、Deligne とか Drinfeld とか。現在いろいろなものがある関連があります。ここで言うのは直接の関連ですけど、数論とトポロジーの間のパラレルな類似も B. Mazur とか日本では森下さんが、arithmetic topology といって研究しています。

Reznikov という人がいて、この人が一つ先鞭を付けました。彼は残念ながら亡くなってしまいました。

この後 5,6 と、今日は書かないけれど、5 は Kontsevich の graph homology というものがあって、それがこれらとどう関連するかというのは、結構複雑な関係です。graph homology については 10 回目くらいに、2,3 回お話ししました。3 つの世界があって、大きくいうと 3 次元多様体の不変量と、foliation, transversely symplectic foliation の特性類、それから Riemann 面の moduli 空間の cohomology, それから Outer space, graph の moduli 空間の cohomology, それがこの関連で言うと、associative と lie, もう一つが commutative ですが、Kontsevich の graph homology というものがあって、これは 1992 年くらいからずっと展開されてきています。

数論との関連でいいますと、Willwacher という人がいます。フランスに Fresse とか Lazarev とか Hamilton とかいう人がいて、こういう人たちは homology 代数とか数論とかいう関連ですけれど、graph homology と絶対 Galois 群との関連については大きな仕事があります。特に Willwacher, 若い人です。この前 Utrecht で賞, André Lichnerowicz prize in Poisson Geometry をもらった人です。2 年に 1 回の Poisson geometry の国際会議で若い人にあげているみたいです。スイスの ETH の出身で、先生は homology 代数というか、symplectic 幾何の ETH の人。Willwacher の講演も video で見ることができます。Willwacher の講演を見ると、例えば日本でいうと村上順さんとかそういう LMO 不変量との関連もあるので、3 次元多様体と絶対 Galois 群というのはいろいろな関連があります。我々是一个の立場からですね、これは直接の関連というものを立ち上げて、またコンピュータを使っていろいろやっています。

1. 一つの曲面.

まずは、これはもう敢えていうと Euler, 18 世紀ですね、それから Gauß, そして Riemann, Poincaré. 現代幾何学の発祥の地です。

そこで曲面 Σ_g です。 $g = 0$ のときは例外的であって、但し Gauß は Gauß 曲率の曲がり方のものさしとして S^2 を使ったわけです。少し大袈裟に言えば Grassmann 多様体, 分類空間の原点ですよ、 S^2 というのは、Gauß はそれを使ったのですが、一般化する立場からいうと、 S^2 は基本群がないので、本質的に全部群の話になりますから、 $g \geq 1$. 本質的には $g \geq 2$ のところが大事になります。

fundamental homology class, homology の原点ですね、これは $g = 0$ でももちろん成り立ちますが、大事な 1 というものが、 $H_2(\Sigma_g; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \ni 1$, fundamendal cycle というもので

$$H_2(\Sigma_g; \mathbb{Z}) \ni [\Sigma_g] \mapsto 1 \in \mathbb{Z}$$

fundamental というだけあって、fundamental cycle ですね、homology をとれば class, これは homology の原点です。これをどうするかというと、dual にすると $H^2(\Sigma_g; \mathbb{Z}) \ni [\Sigma_g]^*$, これは homology と cohomology の dual です。ここに fundamental cohomology class があって、どっちにしてもこういうものをどうつかむか、捕まえるか。 S^2 の場合は捕まえるものにも、そのまま見るしかないのですが、 g が 1 以上の場合にはこれが分解できる。その分解に使うのは基本群が出てくるので、 $g = 1$ のときには基本群は abel 群ですから、 $\mathbb{Z}^2$ の分類空間をとれば自分自身 T^2 にもどるので、ここから全ての情報が出てきます。

$g \geq 2$ になると、abel 化は

$$r : \pi_1 \Sigma_g \rightarrow H_1(\Sigma_g; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{2g},$$

これは表現になるので r と書きます。abel 化は rank $2g$ の自由 abel 群になります。 $\mathbb{Z}^{2g}$ は topological には何かというと $2g$ 次元の torus T^{2g} になる、これが $\mathbb{Z}^{2g}$ の Eilenberg-MacLane space になる、次元は上がるけれどずっと簡単なものになります。そうすると r で homology を取りますと、

$$r_* : H_1(\Sigma_g) \rightarrow H_1(T^{2g})$$

だから Jacobi 多様体, その cohomology を取ると,

$$r^* : H^*(T^{2g}) \rightarrow H^*(\Sigma_g).$$

係数は今 $\mathbb{Z}$ ですが, しばらくすると全部 $\mathbb{Q}$ になります. 数論的には最後は $\mathbb{Z}$ にしたいのですが, それは私が生きているうちは無理でしょうから $\mathbb{Q}$ でやります.

Jacobi 多様体 $T^{2g} = \text{Jac}(\Sigma_g)$, $2g$ 次元, g が増えていくと, cohomology は一杯あります. これは exterior algebra

$$\Lambda^* H^1(\Sigma_g; \mathbb{Z}) = H^*(T^{2g})$$

であって, これが Poincaré duality $H^1(\Sigma_g; \mathbb{Z}) \cong H_1(\Sigma_g; \mathbb{Z})$ より, $\Lambda^* H^1(\Sigma_g; \mathbb{Z}) \cong \Lambda^* H_1(\Sigma_g; \mathbb{Z})$ です. 以後簡単のため $H = H_1(\Sigma; \mathbb{Z})$ とおきます.

すでに何回かお話しましたが, これは本当に歴史の綾というか, Poincaré が生まれたのは 1854 年, Gauß が亡くなったのは 1855 年です. Gauß が亡くなる 1 年前に Poincaré は生まれたのですが, さらに Riemann との絡みでいうと, その一年前 1854 年に数学史上最大の講演の一つですよ, Göttingen 大学への Riemann の就職講演というものがあって, ここで Riemann 幾何学と高次元の多様体論, これが両方出て来たという有名な講演です. これを Gauß が亡くなる一年前に聞いて, Poincaré はもちろん生まれた年だから聞けないけれど, その年に生まれた, そういう年です. Poincaré duality というのは, 高次元, 一般次元であります, 根本はこの曲面においては, 1 次元 homology と 1 次元 cohomology が canonical に同型になる, そういうものです.

そうするとですね, H と書いたんですが, H は単なる $\mathbb{Z}$ -module ではなくて, ここに symplectic 群 $Sp(2g; \mathbb{Z})$ というものが作用します. それは H には intersection form というものがあるからです. intersection form を μ と書くと,

$$\mu : H \otimes H \rightarrow \mathbb{Z}.$$

intersection theory というものは, 例えば H_2 と H_2 の intersection というものは, 4 次元 topology では Donaldson 理論とか 4 次元トポロジーの根本的な構造ですが, ここにもすでに出てきている. これは Poincaré. H には Sp が作用するので, 作用があるのでそれを込めると Jacobi 多様体の cohomology $H^*(T^{2g})$ の Sp -不変 part を考える事ができます. 表現論を使っていくと $Sp(2g; \mathbb{Z})$ の表現論というものは未来永劫終わらない, というか, 難しすぎてどうにもならない. なので後では全部 $\mathbb{Q}$ にしますが, こころ辺は $\mathbb{Z}$ でできます.

$$r^* : H^*(T^{2g}; \mathbb{Z})^{Sp(2g; \mathbb{Z})} \rightarrow H^*(\Sigma_g; \mathbb{Z})$$

$Sp(2g)$ -不変な cohomology はどうなったかという, 自然に g 次元の複素射影空間の cohomology に同型

$$H^*(T^{2g})^{Sp(2g; \mathbb{Z})} \cong H^*(\mathbb{C}P^g)$$

になって, $g = 1$ のときは S^2 で Gauß に戻って, 分類空間で一番重要な line bundle の分類空間になります.

ここに 2 次元の generator があるわけですが, $* = 2$ にすると, $H^2(\mathbb{C}P^g) \cong \mathbb{Z}$, これは Chern class. こちらの言葉でいうと symplectic form,

$$H^2(\mathbb{C}P^g) \cong \mathbb{Z} \ni \omega_0 = c_1(\xi) \mapsto g[\Sigma_g]^* \in H^2(\Sigma_g; \mathbb{Z}).$$

どういう事かという, $H^2(T^{2g}) \cong \Lambda^2 H$ ですが, Sp -不変 part を取ると, これは $\mathbb{Z}$ になってこの生成元 ω_0 が symplectic form というものになって,

$$(\Lambda^2 H)^{Sp} = \langle \omega_0 \rangle \cong \mathbb{Z}.$$

symplectic 幾何学, symplectic 幾何というのは, 2つあり, 物理的, 力学系というか Hamilton, ともう一つは Poincaré. その間の関連がどうなっているかは詳しくはわかりませんが, 現代数学からいうと, 2つ, もちろん密接には関係するけれども 2つ, 物理学的なものと Poincaré duality から来るものとあります.

そうすると $g = 2$ のときは symplectic form, universal line bundle の c_1 , こいつがどこに行くかという, genus が曲面の根本的な不変量になりますが, fundamental cohomology class の g 倍. これをもって私は ω_0 は square root of $[\Sigma_g]^*$ と言っています. 2次元にある cycle の dual, cocycle, これが homology 論の根本的なものですが, その square root が取れる. 1次元の cohomology と symplectic 群の作用で canonical に出てくる. canonical なもので, 捕まえられる. これが一つの曲面の場合です.

さらにここから不変量を出そうという, 別の不変量ですね. それは何かというと未来永劫, 数学で一番重要な多様体は S^1 だと思いますが, $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$, homology もこの場合 $\mathbb{Z}$ ですが, 基本群, homotopy の意味でも $\mathbb{Z}$ ですね, これが最重要. これが曲面との関係でどうでてくるかという, 長さ 1 の接ベクトル全体を集めて unit tangent bundle $T_1\Sigma_g$ を考えます.

$$S^1 \rightarrow T_1\Sigma_g \rightarrow \Sigma_g,$$

これは Σ_g 上の principal S^1 -bundle, 主 S^1 -bundle というものになって, そしてこの基本群をとると中心拡大

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \pi_1 T_1\Sigma_g \rightarrow \pi_1\Sigma_g \rightarrow 1$$

になります. これは g は 1 以上です. その場合にこうなる.

$g = 0$ のときには

$$S^1 \rightarrow T_1 S^2 \rightarrow S^2$$

になって homotopy 完全系列で $\pi_2(S^2) \cong \mathbb{Z} \rightarrow \pi_1 S^1 \cong \mathbb{Z}$ が出てくるので, S^1 が S^2 の cohomology を誘導しなくなるんですね.

g が 2 以上のときは fiber の S^1 の基本群, だからこれがちょっと大袈裟ですけど, fiber bundle の cohomology の spectral 系列から transgress という概念があり, transgress to Euler class $\chi = (2 - 2g)[\Sigma_g]^* \in H^2(\Sigma_g; \mathbb{Z})$. こうなって Euler class は Gauß-Bonnet の定理によって, $2 - 2g$ 倍の fundamental cohomology になるわけです. これは g が 2 以上ですね.

$g = 1$ のときは product ですから, spectral 系列もなにも直積になるわけですから, fiber と base space の間には関係がないといえば言い過ぎですが, 影響しない, 寄与しない. パラレルに S^1 がずっといる.

従って g が 2 以上のときには本質的にねじれて来て, fiber の fundamental cocycle が spectral 系列の中で生き残って, $2 - 2g$ というところに行くというわけです. こうなります.

逆に Euler class χ を cocycle だと思うとどうなるか, 群の cohomology で書くとうどうなるか, 基本群の元を 2つ α, β をもってきたときに, χ の表す cocycle は $\pi_1\Sigma_g \ni \alpha \mapsto [\alpha] \in H$ を用いて

$$\begin{aligned} \chi(\alpha, \beta) &:= [\alpha] \cdot [\beta] \\ &= \mu([\alpha], [\beta]) \end{aligned}$$

これに等しい. これが cocycle になって, その表す class は Euler 類に等しい. これは cocycle なので, この up to constant かもしれませんが. これを projection

$$\pi_1 T_1\Sigma_g \rightarrow \pi_1\Sigma_g$$

で pull back $\chi \in Z^2(\pi_1 T_1\Sigma_g)$ すると, Σ_g 上ではもちろん g が 2 以上の場合には, cohomology は non zero ですが, $T_1\Sigma_g$ 上に pullback すると $\mathbb{Q}$ 上では coboundary になって,

$$\pi^*\chi = \delta d$$

となる d が存在します. これが secondary class になって, d は何かというと, $d: \pi_1 T_1 \Sigma_g \rightarrow \mathbb{Q}$, もともとは 1-cochain, $d \in C^1(\pi_1 T_1 \Sigma_g)$ ですから, 要するに群上の関数になります. これは単なる cochain, cocycle ではない. これを部分群 $\pi_1(S^1)$ に制限すると homomorphism になります. なぜなら cocycle δd はもともと底空間から来ているから fiber に制限すると cocycle としてゼロになります. 従って $\delta d = 0$, つまり d は準同型, nontrivial な準同型. $\mathbb{Q}$ 上では準同型

$$d: \pi_1 T_1 \Sigma_g \supset \pi_1 S^1 = \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}.$$

ねじれ具合から未来永劫一番重要な不変量 $\pi_1 S^1$ が捕まえられた, 曲面の曲がり方を通して捕まえられた, という事になります. これで 1 がおしまいです.

2. 曲面バンドル

次は mapping class group の場合, これを族に一般化します. そうすると $\mathcal{M}_g$ というのが出て来て, これはどう理解したら一番良いかという曲面バンドルがあるわけですから, 曲面の族がある, その monodromy 群と思うのが一番良いです. universal な意味ですけれども, こう思うのが一番良くて, 1 個しかないときは, ねじれようがなくて自明な群です. そしてこれが intersection form を保つという事から古典的な準同型

$$\mathcal{M}_g \rightarrow Sp(2g; \mathbb{Z})$$

が存在します. $g = 1$ のときはこれは同型. g が 2 以上のときは大きな Kernel があって, これが Torelli 群と呼ばれています.

$$1 \rightarrow \mathcal{I}_g \rightarrow \mathcal{M}_g \rightarrow Sp(2g; \mathbb{Z}) \rightarrow 1$$

いろいろな研究があるわけですが, 特にトポロジーの研究は D. Johnson の 1970 年代後半ですね, それに続いて J. Harer の仕事があって, その前から moduli の研究はずっと昔から, 複素解析的には Teichmüller, Fricke-Klein がいて, もっと言うと Riemann がいて, ただ Riemann は local に moduli を考えていました, 1850 年代に, moduli を考え出したのは Fricke-Klein, 1900 年くらい. 基本群など, 直接の moduli ではありませんが, Poincaré. そして Teichmüller, 1937 年, その後は数論と複素解析と今言った D. Johnson, J. Harer, とトポロジー, Witten を経由して数理物理, どんどん広がって来ています. 数論の前に Bers, Ahlfors, 代数幾何的には Grothendieck, そして Mumford. Mumford の school があって, Joe Harris, Carel Faber も Mumford school ですね, そしてトポロジー. 私は 1980 年代にここら辺に参入しました. 1990 年に Witten, そして数理物理学, 弦理論, という展開があって, これはずっと終わらないですね.

ここに出てくるのは数論で, $\mathbb{G}_\mathbb{Q}$, これを出したのも Grothendieck です. Grothendieck-Teichmüller, 前からあったのですが, トポロジーとか homology 代数とか巻き込んで大きな展開を見せた. 伊原先生の school が一番大きな貢献を日本ではしています.

それでですね, そういうものはまたいろいろあります. 1 のこれを一般化, ただ一つの側面ですけれども, monodromy, $\mathcal{M}_g$ は群として perfect になります. さっきの一つの曲面の場合 Σ_g の基本群は非可換になって, g が 2 以上で難しいから abel 化して, とやりました. $\mathcal{M}_g$ は曲面の基本群よりずっと難しいのですが, abel 化して調べようと思うと abel 化すると何もなくなってしまふ. こういう状況になっています. ところが mapping class group, これは Siegel modular 群 $Sp(2g; \mathbb{Z})$ へ全射準同型があって, $Sp(2g; \mathbb{Z})$ の研究も未来永劫終わらないと思いますが, ただ stable cohomology で言うこれは Borel の仕事があって, 古典的な Chern class で stable cohomology は生成される, stable cohomology は分かっている. unstable は終わらないでしょうね. $\mathcal{M}_g$ の stable cohomology は MMM class, Madsen-Weise によって, MMM-classes によって生成される多項式代数

という事がわかっています。それは 2002,3 年、一つ区切りがついたのですが、いまは unstable cohomology に研究が移っています。

これは写像類群だけでなく、今日はしゃべれませんが、自由群の自己同型群、これとパラレルにあつて、これと似た所というかこれを念頭に爆発的に研究が進んでいます。unstable な cohomology. さっきいった Vogtmann の Banff で昨日と一昨日の講演は、 $OutF_n$ の unstable cohomology というのがタイトルでした。

またちょっと戻りまして、さっきの M_g は難しいから able 化しようと思ったら、何もなくなる。そこでこれに関する D. Johnson の決定的な仕事があつて、Johnson homomorphism

$$\tau: I_g \rightarrow \mathcal{U} = \Lambda^3 H / \omega_0 \wedge H$$

これが Torelli 群の able 化を与えるわけです。3 階のテンソルで、通常は ω_0 を省略して $\omega_0 \wedge H$ を H と書いてしまいましたが、submodule として入っていてこれが自然な Sp の表現になります。これが Torelli 群の $\mathbb{Q}$ 上の abel 化

$$H_1(I_g; \mathbb{Q}) \cong \mathcal{U}_{\mathbb{Q}} = \mathcal{U} \otimes \mathbb{Q}$$

を与える。これが Dennis Johnson の大定理です。

そうするとこれ自身、mapping class group 自身 abel 化すると何もないわけですが、その代わりに Sp の研究と Torelli 群の研究と twisting, で M_g に迫ろう、これが自然に考えられる基本的な戦略です。Johnson は何をしたかという、これは今でも非常に神秘的な群ですが、この Torelli 群は abel 化が非常に大きい、abel 化が非常に大きいと、ここからさっき言った 1 個の曲面の場合と同様に Sp が作用するわけですが、 Sp -不変な cohomology は何か。そして 1 番大事なものは、moduli があつたときに一番大事なものは 2 次元 cohomology なわけですが、 M_g の 2 次元 cohomology は $\mathbb{Z}$ 上でわかっていますが、 $\mathbb{Q}$ 上で今日はやると、

$$H^2(M_g; \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q},$$

これは rank 1 でこれは John Harer の基本定理の一つです。その generator というのが、私は e_1 と書かしてもらいますが、これは最近では段々 κ クラスと呼ばれるようになっていて、MMM tautological class というやつです。代数幾何的には κ と書かれます。今日は一応 e_1 と書きます。 κ というのは Mumford の notation で写像類群の cohomology の元というよりは、moduli 空間の Deligne-Mumford compact 化のしかも Chow algebra の元、これが generator なわけ。そしてこれがさっきの 1 個の曲面の場合には Euler class に対応するもので、大分前の仕事でこれの square root が

$$[\tilde{\tau}] \in H^1(M_g; \mathcal{U}_{\mathbb{Q}}) \cong \mathbb{Q} \ (g \geq 3)$$

前にやった仕事です。

それをどのようにしたかという、ここで書きますと、 τ という Johnson homomorphism, τ_1 とも書きますが、これは Torelli 群という M_g の部分群、normal subgroup 上定義されています。これが M_g 全体に extend するかというのが、大きな問題になります。幾何学的には fiber に何か構造があつたときに、total space にどういう形で extend できるか、これは大事な問題です。 $\tilde{\tau}$, 昔の論文では $\tilde{k}$ と書きました。今日は話の都合上 $\tilde{\tau}$ と書く事にします。この extension が存在する、但し extension という場合に、 M_g は perfect だから、準同型として拡大する事はありません。abel 化が自明ですから、ねじれた crossed homomorphism として拡張する。これを大分前に証明しました。

そしてさらにこれが 1 個の曲面の場合には、 π_1 から abel 化にいくやつ、それは crossed ではなく準同型で、monodromy がなかったから曲面の基本群があつて able 化がいて、それが Sp -module になったわけです。

family になったときには全体からは準同型はないのだけれども, crossed homomorphism としてある. そして更に証明したことは,

$$[\tilde{\tau}] \in H^1(\mathcal{M}_g; \mathcal{U}_{\mathbb{Q}}) \cong \mathbb{Q} \ (g \geq 3)$$

これが実は rank 1 だと言う事を証明しました. $\mathbb{Q}$ 上でやりますから, $\mathcal{U}_{\mathbb{Q}}$ と書きます. $g = 2$ のときは例外的になってこの module が自明になります. g が 3 以上で rank 1. 実は e_1 の square root が取れるというのですが, $\tilde{\tau}$ が e_1 の square root として取れる, これはどういう意味かという $H^1(\mathcal{M}_g; \mathcal{U}_{\mathbb{Q}})$, これが rank 1 なのですが, ここに $\tilde{\tau}$ という crossed homomorphism があります. これを cup する, 自分自身と cup する. 通常, constant cohomology だと奇数次元 cohomology は自分自身と cup するとゼロになりますが, こういう twisting があるから, $\tilde{\tau}^2$, 正確には $\wedge^2[\tilde{\tau}]$ は, Sp -module $\mathcal{U}_{\mathbb{Q}}$ の 2 階の wedge product $\wedge^2 \mathcal{U}_{\mathbb{Q}}$ に値を取り非自明です. $\wedge^2 \mathcal{U}_{\mathbb{Q}}$ の Sp -不変 part を取るとこれが rank 1, $(\wedge^2 \mathcal{U}_{\mathbb{Q}})^{Sp} \cong \mathbb{Q}$ なんですね.

$$\wedge^2[\tilde{\tau}] \in H^2(\mathcal{M}_g; (\wedge^2 \mathcal{U}_{\mathbb{Q}})^{Sp}).$$

1 個の場合にはこれが曲面の homology H , つまり, Jacobi 多様体の 1 次元 homology と思えますけれども, その 2 階の wedge $\wedge^2 H$ の所に ω_0 というものがありました. これと同様で rank 1 でしかも $\omega(\mathcal{U})$ で生成される. これは higher な intersection number, 代数幾何的にいうと中間 Jacobi 多様体というのがありますが, これは自然に symplectic 多様体になって, その symplectic form になる. そうすると, up to constant で本質的に e_1 になるというのが前に証明した事です. この square root が取れる.

ここからさらに cocycle level でこれを考えると, S^1 という多様体の不変量 $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ が出てきたと言いました. その idea をここに作用させる, cocycle level でこれを考えるとこれから Casson 不変量が出てきます. これは自分自身でも思いがけない応用として出てきました. Secondary class ですね, どういうふうに出てくるかという, Torelli 群というのがあって, 写像類群があって, $\mathcal{K}_g$, これは写像類群の bounding simple closed curve に関する Dehn twist が生成する部分群. 通常 $\mathcal{K}_g$ と書いて Johnson Kernel と最近呼ばれる事が多いです.

$$\mathcal{K}_g \rightarrow \mathcal{I}_g \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}_g.$$

つまり Johnson 準同型の Kernel です. τ の Kernel です. そしてここに τ というか, $\tilde{\tau}$ があるので, cocycle が出来ます. $\wedge^2 \tilde{\tau}$ と書きますが,

$$\wedge^2 \tilde{\tau} \in Z^2(\mathcal{M}_g; \mathbb{Q}).$$

mapping class が 2 つあったときに, $\tilde{\tau}$ で送るとこれは $\mathcal{U}_{\mathbb{Q}}$ の元ですが, 3 階テンソルになる. intersection, constant の場合は, これは曲面の homology の元があったときには intersection number を取らせたわけですが, これは高次の表現になりますが, symplectic 多様体の基本群なんです, symplectic form $\omega(U_{\mathbb{Q}})$ がある. $\mathcal{U}$ は Young 図形で書くと縦に 3 つ



これで表すものになる. $\mathcal{U}_{\mathbb{Q}}$ に関する intersection number を取ると, twisting があるからそのままだと cocycle にならない. twisting があるからここに φ_* を掛ける. crossed homomorphism の流儀が右から作用するか, 左から作用するか, 2 つありますが, 本質的には同じで

$$(\wedge^2 \tilde{\tau})(\varphi, \psi) = \tilde{\tau}(\varphi) \cdot \varphi_* \tilde{\tau}(\psi).$$

そうすると signature cocycle と呼ばれる cocycle になって e_1 を represent する. moduli の特性類としては一番大事なものです. そして一方で, Grothendieck の Riemann-Roch の定理から, 大袈裟にいうと Hodge bundle の Chern class c_1 と proportional になる. これは $Sp(2g; \mathbb{Q})$ 上にある, principally polarized な abelian variety の分類空間, Riemann 面があると Jacobi 多様体, Riemann 面の族があると Jacobi 多様体の族があつて, Hodge bundle が定義され, その c_1 , それは Sp から来るもの, これに proportional になる. この cocycle を Torelli 群に pullback すると coboundary になります.

ここで e_1 を表すもう一つの重要な cocycle, Meyer cocycle というものがあります. 今の話でこれを使うと, Meyer cocycle は monodromy の homology への作用の行列で表されますから, Torelli 群の元の像は自明な行列ですから cocycle は出てこない. Meyer cocycle と signature cocycle, これらの差は coboundary ですが, Torelli 群に制限すると, Meyer の方は恒等的にゼロになりますが, signature の方は消えない. 従って

$$\pi^*(\wedge^2 \tilde{\tau}) = \delta d.$$

これをやると coboundary の δd というのがあつて, d は何かというと Torelli 群上の関数

$$d : I_g \rightarrow \mathbb{Q}$$

になって, Torelli 群上自明ではないから, Meyer cocycle でやるとゼロになって coboundary になるけど, zero cocycle ですから, ゼロの coboundary は何も出てきません. これは non trivial な単なる写像ですが, これを $\mathcal{K}_g$ に制限すると, この signature cocycle というものは I_g では非自明ですが, ここに制限すると自明になる. Bounding simple closed curve の Dehn twist の Johnson homomorphism の像はゼロ. そもそも Johnson Kernel ですから, ここに制限すると

$$d : \mathcal{K}_g \rightarrow \mathbb{Q}$$

が準同型になります.

$\mathcal{K}_g$ というのは曲面上の bounding simple closed curve に沿う Dehn twist ですから, これを 3 次元との関連を付けるために, S^3 の Heegaard 分解を考えます. standard な Heegaard 分解, ある同値関係の下で unique ですが, そういうものを考えます. この $\mathbb{K}_g$ の元で与えられる mapping というのを 3 次元多様体のトポロジーと関連させます. S^3 を忘れると Heegaard surface 上の写像でねじれるわけですが, その bounding simple closed curve の tubular neighborhood を考えてやると, bounding simple closed curve が丁度 S^3 内の knot と思える. するとこの Dehn twist は丁度 knot に関する Dehn surgery になり, それとの関連でいうとこれは本質的に Casson だと, 私は core of Casson と書いています. 一番大事な第 1 特性類の square root が構成できて, 1 個の場合に曲面の Euler class を unit tangent bundle に持ち上げてやると, S^1 の不変量が出て来たのと同じように, 今度 family でやる. moduli の第 1 特性類を pullback すると, Torelli 群, $\mathbb{K}_g$ までもうちょっと小さくしますが, knot と深い関連があつて, それを経由して homology 3-球面の不変量である Casson 不変量が出て来たという事になります. これが 2 番目の話です. ここまでは既に得られている話です. これを 3 番目と 4 番目に拡張しようというのが今進んでいるプロジェクトです.

3. homology cylinder

3 番目に拡張するのは homology cylinder の群です. これは写像類群を含んだ非常に大きな群です.

$$\mathcal{H}_g \supset \mathcal{M}_g$$

homology cylinder の monodromy のなす群というべきものです. 写像類群は曲面バンドル, Σ_g -bundle の monodromy のなす群です. これは homology 的な fiber bundle ですから, たくさん出てきてその monodromy も沢山でてきます. ここに拡張する.

4. 絶対 Galois 群

4 番目は絶対 Galois 群 $G_{\mathbb{Q}} = \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. 多分今日は最後まで行けないで、こちらを先にやります.

これに絡んでこの不変量, 具体的には Grothendieck の motivic Lie algebra というものがありまして, 具体的に現れているのは Soulé 元, Soulé element というものがありまして, これは crossed homomorphism, さっきの τ と書いたやつに対応するものです.

絶対 Galois 群というのは $\mathbb{Q}$ の algebraic closure $\bar{\mathbb{Q}}$ の自己同型ですから, 1 のべき根に作用するわけですが, その $\hat{\mathbb{Z}}$ の unit 全体 $\hat{\mathbb{Z}}^*$, ここへの全射が定義できて, cyclotomic character というものがあるって,

$$\text{Ker}\chi_{\text{cyc}} \subset G_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\chi_{\text{cyc}}} \hat{\mathbb{Z}}^*.$$

敢えて言うとも写像類群があったら $Sp(2g; \mathbb{Q})$ へいくようなものです. そして, この cyclotomic character の Kernel が大事になります. Torelli 群みたいなものです. 数論で深い予想は沢山あります. その一つがこれは pro-群ですが, その意味で free ではないか, という予想, Shafarevich 予想と呼ばれています. Torelli 群は free ではなく homology を沢山持っていますので, 全然違います. でも似た所もあります. D. Johnson は Torelli 群という神秘的な群について最初の情報 abel 化を与えたわけですが, このそれに対応する Kernel が free だとすると abel 化はもの凄くたくさんある. 無限個準同型を与えて, target は今度は p 進, p 進の群にするわけです.

$$\text{Ker}\chi_{\text{cyc}} \rightarrow \mathbb{Z}_p$$

これを構成したのは Soulé です. Soulé の p -adic regulator という本質的な仕事があつて, そしてこれは $G_{\mathbb{Q}}$ に extend するか, という問題になります. これは Kernel は normal subgroup ですから, 準同型があれば extend するか, 写像類群のときは perfect ですから, 今度は perfect ではないですが, $\hat{\mathbb{Z}}^*$ は topologist にもわかるような abel 化であつて, そんなものとは全然違う, 全然違うとは言えないですね, この中に入っていますから,

会場から: それは p 毎にそういうものがあるのですか?

はい, 任意の prime p に対して, さらに p ごとに無限個, odd Tate twist というのがあつて, だから素数が無限個あつて, 各奇素数, $3, 5, \dots$, 各 p と各 3 以上の奇数に対して, p 進 regulator というものがあるって, twisted cohomology ですけれども,

$$H^1(G_{\mathbb{Q}}; \mathbb{Z}_p(2k+1)) \cong \mathbb{Z}_p,$$

これは constant cohomology ではなくて, さっきの写像類群の場合は Sp -module でしたが, これは cyclotomic character を経由して作用します. weight が $2l+1$, こういうものがあるって, これは constant cohomology ではなくて Tate twist と呼ばれます. $2k+1$ は Tate twist の weight です. Soulé が証明した事は, これが $\mathbb{Z}_p$ と同型, Soulé の大定理です. これが先ほどでいうと Johnson 準同型に対応します. そこから幾何学的に考えて, もとに戻した homology cylinder, homology 3 球面の不変量に関連するかどうか, この段階ではちょっと唐突ですが, どちら辺にいるかわからない.

homology cylinder の理論との関連でいうと, まず $\mathbb{C}$ 上の variety として moduli 空間を, 普通の topology で考えて, orbifold fundamental group を考える, それが写像類群なわけです.

$$\mathcal{M}_g = \pi_1^{\text{orb}}(\mathbb{M}_g/\mathbb{C}).$$

Grothendieck が言い出したのは, algebraic な基本群 $\pi_1^{\text{alg}} \mathbb{M}_g$, これは puncture がなくては行けないので, $\mathcal{M}_g$ 自身では定義できません. 1 点 puncture, すくなくとも必要. なくても $\mathbb{Q}$ 上の variety ならよいのですが, Riemann 面の moduli が quasi-projective というのが, Deligne-Mumford. compact 化を与えましたが, 実は

さらに $\mathbb{Q}$ 上定義される. $\mathbb{Q}$ 上定義されると $\mathbb{Q}$ 上の algebraic variety には, algebraic fundamental group というものを Grothendieck が定義しました. これはどうなるかというと topological な fundamental group の profinite completion $\widehat{\pi}_1(\mathbb{M}_{g,*}/\mathbb{C})$ ですが、これが topological part. arithmetic part は絶対 Galois 群ですから projective curve の係数に作用します. $\mathbb{Q}$ 上 projective curve があると, この自己同型が基本群に作用します. topological な作用では全然ないのですが, 連続的ではないけれど profinite な topology では連続に作用します.

そういうわけで $\mathbb{G}_{\mathbb{Q}}$ は,

$$\pi_1^{\text{alg}}(\mathbb{M}_{g,*}/\mathbb{Q}) = \hat{\mathcal{M}}_{g,*} \rtimes G_{\mathbb{Q}}.$$

と split する. splitting は canonical なものはないですが, これが同型, これは Grothendieck の結果です. さらに moduli との関連では Grothendieck-Teichmüller 理論というのがあって, さらに anabelian 理論, 連綿と続く, こういうものがあります.

homology cylinder $\mathcal{H}_g \supset \mathcal{M}_g$ でこの間に入る. これは profinite completion はあるけれども, $\mathcal{M}_{g,*} \subset \pi_1^{\text{alg}}(\mathbb{M}_{g,*}/\mathbb{Q})$ と subgroup で増えた数論的な部分が

$$\mathcal{H}_{g,*} \supset \pi_1^{\text{alg}}(\mathbb{M}_{g,*}/\mathbb{Q}),$$

こちらに入りますよというのが Johnson 準同型の理論. 数論というよりは Johnson+Number theory との絡みであって, 伊原先生, あるいは Deligne, 数論では一番大事なのは $\mathbb{M}_{0,3}$ でやるわけです. トポロジーの観点からいうと S^2 から 3 点引っこ抜いた, これは topology というか双曲幾何でも基本ですけど, monodromy 的には写像類群とは絡まないですが, higher genus にしたというのは伊原先生の理論, 具体的には織田孝幸さん, そして, 中村博昭さん, 松本眞さん. 1980 年代後半に織田さんがある予想をして, ある時期織田予想と呼ばれたものが独立に中村博昭さん, 松本眞さん, によって証明されました. その後に Hain, 古庄さん. さらに純粋に数論の立場からと思ったら, 最近アーカイブに knot theory における絶対 Galois 群という論文を出していますから, 彼もついにトポロジーに入ってきたかと思います. こういう非常に大きな広がりを見せている理論がある.

絶対 Galois 群が具体的な Lie 代数に現れるわけですが, Lie 代数に現れるというのが織田予想. 織田予想を証明したのが, 中村博昭さんと松本眞さん. 例えば multiple zeta value であるとか motivic Lie algebra に関連する問題は沢山あって数論とトポロジーに絡んで沢山あります. そこに新しい流れが出て来たのが Kontsevich, graph homology の立場. graph homology の関連が出て来て非常に大きな広がりをみせつつある. その中で逆井さん, 鈴木さん, 我々はトポロジーの立場からですが, 解明を進めていこうという, それを紹介したいと思います.

3 番目に戻ります. もう少し具体的に書きますと, homology cylinder ですが、もう一度書きます. $\mathcal{M}_g$ というものがあって, 曲面バンドルの monodromy で

$$I_g \rightarrow \mathcal{M}_g \rightarrow Sp(2g; \mathbb{Z}).$$

そして homology 的な曲面バンドルの monodromy があって,

$$I\mathcal{H}_g \rightarrow \mathcal{H}_g \rightarrow Sp(2g; \mathbb{Z})$$

homology cylinder の homology cobordism の群として定義されます.

$\mathcal{M}_g$ と $\mathcal{M}_{g,*}$, $\mathcal{M}_{g,1}$ というのは, 理論的には一つ分かれば他の 2 つもそれほど苦労なくわかるのですが, 最終的には $\mathcal{M}_g$ がわかりたい. 最終的には homology cylinder も $\mathcal{H}_g$ がわかりたい. しかしこれは非常に難しいで

すね、そこで once punctured, $\mathcal{H}_{g,*}$, これも非常に難しい、そこで disk を除いて

$$\mathcal{H}_{g,1} \rightarrow \mathcal{H}_{g,*} \rightarrow \mathcal{H}_g$$

ここに行きます。写像類群の場合もそうですね、disk を除いて自由群にして boundary の情報は忘れないでずっとこちらでやって最後に $\mathcal{M}_g$ にもっていく。そういう戦略です。

問題は homology cylinder の場合は、 $\mathcal{H}_{g,1}, \mathcal{H}_{g,*}$ と $\mathcal{H}_g$, この差とこの差はわからないという語弊があるけれど、Habiro-Massyeau, Sakasai さん、いろいろ研究されていますが、写像類群ほど簡単ではない。写像類群の場合は $\mathcal{M}_{g,1}$ と $\mathcal{M}_{g,*}$ の間は単なる中心拡大、 $\mathcal{M}_{g,*}$ と $\mathcal{M}_g$ の間は基本群、簡単だったわけですが、homology cylinder の場合はこれがいろいろ難しく、knot の concordance とかもいろいろわからなくて難しい。

これを全部線型のところで行列表現するのは共通であって、

$$\mathcal{H}_g \rightarrow Sp(2g; \mathbb{Z}),$$

群は広がったんだけど古典的な行列で研究できるものは、残念ながら幸か不幸か増えない。そうすると Torelli 群が出てきます、

$$I\mathcal{H}_g \rightarrow \mathcal{H}_g \rightarrow Sp(2g; \mathbb{Z}).$$

この Kernel として homology cylinder の Torelli 群、normal subgroup になって、 I_g は mystery ですから、況んやそれを含む大きな群 $I\mathcal{H}_g$ はもっと mystery.

本質的な違いは一つわかっていて、写像類群の Torelli 群の場合に $g=2$ は例外的に Mess の定理があって、これは rank が無限大の自由群、 g が 3 以上は有限生成、群論的にはよいものになります。大問題は finite presentabel かどうかはまだ分からない。 I_g は有限生成ですからその abel 化は有限生成、それが $\mathcal{U} = \Lambda^3 H/H$, torsion がでてきますけれど、torsion の話は今日はしません。

問題はこの $I\mathcal{H}_g$ の abel 化です。写像類群は perfect でしたが、こちらは perfect かどうかはわかりません。今知られている現状をいいますと、 $I\mathcal{H}_g$ が not finitely generated だというのは、多分私が最初に証明しました。trace を用いて、その群 version $\widehat{trace}$ ですが、有限生成ではないという事を証明しました。

でも abel 化がどうなるか、target でいうと、まず moduli からくるやつがあるのですが、target は $2k+1$ 次の symmetric product というものがあって、

$$I\mathcal{H}_g \rightarrow \mathcal{U}_{\mathbb{Q}} \times \prod_k S^{2k+1} H,$$

image が Zariski dense という事を証明しました。これは無限 rank ですから有限生成ではないという事がわかります。

それを逆井さんが Magnus 表現の理論を展開して、homology cylinder の Magnus 表現の立場からも trace が出て来て、無限生成、行列を使った証明があります。

これ自身が、 $\mathcal{H}_{g,1}$ が not perfect というのは、Stefan Friedl, Friedl は Friedl-Vidusi の Friedl で、3 次元、4 次元で symplectic 多様体と曲面バンドルとの関係、大問題を解決しました。Friedl と Kim さん, Cha さん, Cha-Friedl-Kim, 2010 年、2 年くらい前に何を証明したかという、 $H_1(\mathcal{H}_g)$ から次のような surjection,

$$H_1(\mathcal{H}_g) \twoheadrightarrow (\mathbb{Z}/2)^{\infty}$$

が存在するという事を証明しました。 $\mathbb{Q}$ 上 H_1 が消える、 $\mathbb{Q}$ 上 perfect という可能性はまだ少し残っていますが、torsion を考えると $\mathbb{Z}/2$ が出てくる。トポロジーでは、 $\mathbb{Z}/2$ -torsion というのが微分トポロジーの昔から大

事で、例えば Kervaire 不変量というのがあって大事だというのは分かっていますが、 $\mathcal{H}_{g,1}$ から無限 rank の $\mathbb{Z}/2$ の直和に全射がある。これが出たときにはビックリしました。写像類群よりもずっと構造が沢山ある、有限生成ではなくなっていました。

写像類群でここで研究がうまくすすんだのは有限生成で、しかも Lickorish generator というのがあって、具体的に計算できたからです。しかし homology cylinderの方は無限生成なんですね。また写像類群は生成元だけではなくて relation も完全にわかって、群論的には presentation が完全にわかって、例えば、鈴木晋一さんの handlebody 群とか、それを使った廣瀬さんの研究などがあります。presentation があると全然違う。presentation どころか generator がわからない、どうにもならない。無限生成なわけです。homology に世界が広がったわけですが、さっきの square root とか一番大事な H_2 がどうなるか、という問題が出てきます。これですと

$$H_2(\mathcal{H}_g) \cong ?,$$

$\mathbb{Q}$ 上でどうなるかというのは、まったく皆目わからないのです。

しかし元は trace を使って無限個構成されていて、まずそれを書きます。第 1 特性類 e_1 、これは $c_1(\text{Hodge bundle})$ と proportional かどうか。homology cylinder に世界が広がっても Hodge bundle はある。その Chern class はあって Hodge bundle の Chern class と surface 上の surface bundle の signature が等しいというのは、Grothendieck-Riemann-Roch です。しかし e_1 と $c_1(\text{Hodge bundle})$ が等しいかどうかわからないのです。2 つ元が定義されますけれど、一つは signature, signature は bundle ではなくても 4 次元多様体なら signature はあるので、2 次元 cohomology は定義されます。これが proportional かどうかわからない、

$$c_1(\text{Hodge bundle}) \approx \text{sgn} \approx e_1?$$

これは Grothendieck-Riemann-Roch、これは私は 20 世紀のもっとも深い数学の定理の一つだと思います、Atiyah-Singer もそうですが、これらは fiber bundle で通用しているので、homology 的な bundle に対していまところこのままではどうにもならない。Grothendieck 流に代数幾何ではどうにもならない、Atiyah-Singer でも多分どうにもならない。これは大問題、大問題というよりは中間問題ですね。第 1 MMM 類と c_1 と signature、だから 3 つあるんですね、3 つ目、これは signature cocycle, signature の、surface 上の homological な family である、4 次元多様体 W^4 、4 次元多様体ですから signature $\text{Sign}(W^4)$ はある。Hodge bundle は、 $Sp(2g; \mathbb{Z})$ に準同型があるから、ここから line bundle を引き戻して定義される。

e_1 は何かというと Johnson 準同型 $\tau: \mathcal{I}_g \rightarrow \mathcal{U}$ 、それが homology cylinder の Torelli 群 $I\mathcal{H}_g$ 上でも定義されるというのは比較的簡単にわかります。写像類群の場合はこれに τ という extension があって、1 次元のある twisted cohomology が rank 1 であって、さらにその generator であったわけです。ここですでに分かっている事は、homology cylinder の Torelli 群上に Johnson 準同型は拡張するのですが、さらに $\mathcal{H}_g$ 上 crossed homomorphism として拡張する。ここでは $\tilde{\tau}_H$ と書きますが、これで同じように e_1 を定義する事ができ、

$$e_1 \in H^2(\mathcal{H}_g) \cong ?$$

全部で 3 つあります。

それでいうと $H^1(\mathcal{H}_g; U_{\mathbb{Q}})$ がゼロでないというのはわかっている。大問題はこれが rank 1 か、写像類群の場合は rank 1 です。

$$\tilde{\tau}_H \in H^1(\mathcal{H}_g; U_{\mathbb{Q}}) \neq 0 \sim \mathbb{Q}?$$

そうすると $\Lambda^2 \tilde{\tau}$ の homology version,

$$\Lambda^2 \tilde{\tau}_H \in H^2(\mathcal{H}_g; \mathbb{Q}),$$

homology cylinder の constant homology, これはもちろんゼロではない. surface bundle のときには全部等しい, これは Grothendieck-Riemann-Roch.

だけど homology bundle の場合は 3 つ自然に定義できますが, その間の関係はわかっていません. 全部 proportional という事が予想されますが, どうやって証明してよいかわかりません. もともと Atiyah-Singer にしても Grothendieck-Riemann-Roch にしても非常に難しいですよ. 今の所方法はないのです.

この第 1 特性類はこうなのですが, そもそも $H^2(\mathcal{H}_g)$ はどうなるのか? ここに無限個の cohomology を trace を使って定義しました. まず e_1 があって, c_1 があって, signature cocycle,

$$H^2(\mathcal{H}_g) \ni e_1, c_1, \text{sgn},$$

多分全部 proportional であろうと予想しています. これは数論的にいうと 1 に対応します. 1 は奇数と思って.

- $1 \cdots \mathcal{U} = \Lambda^3 H/H$
- $3 \cdots S^3 H \cdots \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}$
- $5 \cdots S^5 H \cdots \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array}$

その次に 3 に対応するところが $\widetilde{\text{trace}}(3)$ と称するもので,

$$H^2(\mathcal{H}_g) \ni e_1, c_1, \text{sgn}, \Lambda^2 \widetilde{\text{trace}}(3),$$

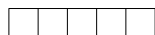
これは $\widetilde{\text{trace}}(3)$ の target は $S^3 H$ なんですね. target が Johnson 準同型の場合は, $\mathcal{U} = \Lambda^3 H/H$ で, $\mathcal{U}$ という既約表現でした. $\widetilde{\text{trace}}(3)$ というのは target が 3 階の symmetric product $S^3 H$ で, これも既約なんですね. Young 図形でいうと



横に 3 個ならぶものです. これらは全部の奇数に対してあるわけです. 次は

$$H^2(\mathcal{H}_g) \ni e_1, c_1, \text{sgn}, \Lambda^2 \widetilde{\text{trace}}(3), \Lambda^2 \widetilde{\text{trace}}(5),$$

で $S^5 H$ に対応するもので, Yong 図形でいうと



です. こうあって, これらの表すものが無限個あって, notation で

$$\tilde{t}_3 = \Lambda^2 \widetilde{\text{trace}}(3),$$

一般に

$$\tilde{t}_{2k+1} = \Lambda^2 \widetilde{\text{trace}}(2k+1)$$

と書いておきますが, $S^{2k+1} H$, こういう target があって, 1 個の曲面の場合には, これが H に対応していたわけ. そして曲面バンドルの場合には, これが $\mathcal{U}$ という 3 階のテンソルだったわけ. higher trace の場合, homology cylinder の場合には, 写像類群の場合には H_2 が rank 1 というのが Harer の定理ですけれども, 予想としては homology に世界を広げると, $H_2(\mathcal{H}_g)$, 基本的な Picard group, これは algebraic variety, これは無限 rank を予想しています.

これは非常に難しいから, 最近言っているように 100 年くらいかかると思われる. Kontsevich の graph homology の理論があるとなぜ良いか, これらは群 level では非常に難しく 100 年かかる. ところが Lie algebra

の世界でもまったく同じものが、全く同じものというか、parallel が意味を持っているというのが Kontsevich の Lie version. これは偶然か、偶然ではないのです。これが群だと思ったときにその Lie 代数が、Johnson 準同型の target である Lie 代数であって、写像類群に対しては大きすぎた。その image をどんどん縮めるという仕事が今でもなされています。しかし homology version にするとこの Johnson 準同型は全射になるんです。全部 realize する、homological な surface bundle で、全射ですから、そうするとこういうものがゼロでないという希望が出て来て、さっき言ったように群 level では 100 年かかるんだけど Lie 代数 level では computer が使えて実験が出来る。

Lie 代数 level では t_7 まで zero でないという事がいろいろな人によって、最初は私が computer を使って証明して、2 番目が Conant と Vogtmann, 3 番目を証明したのが去年、Gray という人の Doctor 論文。ただそれは Lie 代数 level ですから、例えばこれが有限次元 Lie 代数で、Lie 代数の cohomology から対応するものの Lie 群の discrete cohomology にここにいくのはハードルが高いというか、比較にならない程難しい。例えば 1 次元 $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への微分同相の群で jet の空間で考えると、Lie 代数 level で cocycle で作って非自明はすぐわかりますが、群で作ろうとすると大変です。

ちょっと手前味噌ですが一番最初に分かったのが、これに μ_k という名前を付けていて、 $\mu_1 \neq 0$ は 1999 年に私が証明しました。 $\mu_2 \neq 0$ を証明したのは 2004 年でこれは Conant-Vogtmann. $\mu_3 \neq 0$, Gray という人の doctor 論文。2011 年でまだ publish されていない。最初は 5 年掛かって、次は 7 年掛かっています。段々延びて来ていますが、いろいろなグループがこの問題に取り組んでいます。

我々は一気にゼロでないことを証明しようとしています。これが出来たら 1 年くらいゆっくりしようかと、それぐらいの level の問題です。 μ_4 , これ 1 個だけでも証明されたら一流の雑誌に確実に載ると思います。但しこれは Lie 代数ですから、群の level で証明するには、それこそ Thurston みたいな人が出てこないとうにもならないと思います。

それで cohomology が沢山あるわけですが 3 次元多様体の不変量で言うと、これは元々今までの話では 2 次元 cohomology があって、その square root を取る。これは逆になっています。square root がまずあって、その 2 次元の積をとって 2 次元 cohomology を取る。逆になっている。一番期待されるのは、幾何学的に homological な surface bundle があつたときに、何か cohomology を与えるというのがあって、その square root が trace であるという、それが一番よいのですが、逆になっています。

一つヒントになるのは signature cocycle, e_1 は signature であって、4 次元多様体の signature. これはどうなるかという、Johnson 準同型はそもそもどんどん深くなっていく Massey 積を計算しているわけです。多様体としては全部 4 次元のままですが、基本群はどんどん大きくなっていて、ものとしては Σ_g 上の Σ_h -homological bundle であることにはかわりない。signature はずっと定義されている。signature は 2 次元 cohomology があって、繰り返すですけど、Hodge bundle の c_1 とか、signature cocycle, Johnson 準同型の拡張をつかってとか、3 つあって、それらが等しいかというのは問題ですが、それはおいておくとして、こちら側に 4 次元多様体の不変量を作りたい。それが作れるというのは、 Σ_g 上の Σ_h -bundle, modnromy は $\mathcal{H}_g$ に入っているわけですが、 Σ_g 上の local system として、元々は local system としては fiber の homology H ですから、 H というのがあって、だけどこれからは不変量が出てこない。Johnson 準同型を経由すると、 $\Lambda^3 H$, ここに monodromy が考えられてこの中で twisted cohomology ではあるが、両方とも 2 次元 cohomology になって cup して 4 次元にすると signature になる。それは自明ではないのです、signature が出てくる。これは trace を使って crossed homomorphism を一杯作るから、 $\pi_1 \Sigma_g$ 上に local system が出て来て、fiber が何になるかというところが Massey 積を使って、高次の symmetric power $S^{2k+1} H$ に値を取る。そうすると、これは $\mathbb{Q}$ 上で考えると rank 1 なんですね。この symmetric power というのがものすごい次元の高い symplectic torus なわけで、

symplectic 多様体である事には違いない. symplectic form がある, それが rank 1 なんです.

ちなみに Heegaard Floer とか Ozsváth-Szabó の理論でも, 新しい 3 次元多様体の不変量は symmetric product, Riemann 面の symmetric product を取るんです. その間に関係があるかどうか, 気にはなっていますが, 未だに見つかっていません. どこかでつながるかもしれません. $S^{2k+1}H$ が rank 1,

$$(\Lambda^2 S^{2k+1} H_{\mathbb{Q}})^{Sp} \cong \mathbb{Q}$$

というのは computer で実験しようと思うと $S^{2k+1}H_{\mathbb{Q}}$ からどこに入れるかという, 高次の tensor の中に symmetric tensor として入れます.

$$S^{2k+1}H \otimes S^{2k+1}H \subset H^{2k+1} \otimes H^{2k+1} \rightarrow \mathbb{Q}$$

symmetric tensor として入れると, ここから intersection form があるので, 前の $2k+1$, 後ろの $2k+1$, お見合いをして pairing をするわけです. そうすると pairing した毎に intersection number を取ると scalar が出てきます. pairing の仕方は chord の数だけある. これを $S^{2k+1}H \otimes S^{2k+1}H$, ここに制限すると, 奇数ではなくても, 全部一次従属になって 1 個だけ本質的に出てくる. これが奇数のときは alternating, 偶数は symmetric, どちらにしても rank 1 になります. alternating にしないと 2 次元 cohomology は出てこない. alternating で 2 次元 cohomology が出て来て, こういう

$$\tilde{t}_3, \tilde{t}_5, \dots,$$

は幾何学的にはいわば 4 次元多様体の signature であって, どんどん深い Massey 積の self intersection です. ne, higher な self intersection として有理数が出て来て, homology 的な surface bundle に対して, 無限個定義される. それがこいつだろうというわけです. 口でいうとさらさらと出来そうですが, これは非常に難しい.

さらに言うと, 時間的に今日はおしまいです, こういうふうに定義した 4 次元の不変量は smooth な多様体なら全部ゼロだろう. 全部ゼロ, 最初だけは違う, signature はこれは小平先生, Atiyah, これはそもそも moduli がねじれているすごい発見です. 曲面上の曲面バンドルで signature が消えない.

ここら辺になると曲面上の曲面バンドルだったら trace は trivial になりますから写像類群上, もともと何も無いわけです. だけど homology 的に Poincaré がもともと homotopy と homology に差があると言ったのを使って, バンドルを広げると, higher intersection, 少なくとも cocycle レベルではゼロではないものが一杯ある, それのしかもその higher intersection を取る, それが有理数になって全部ゼロではないだろう, というのが予想なわけで, しかも smooth なら全部ゼロで, topological ならゼロではないものが作れるだろう. それが Donaldson と Freedman の決定的な違いですね, 4 次元多様体の, smooth な多様体は非常に大きな制約が cup 積に入る. それは higher Massey 積になっても同じだろう. だから topological にはある構成があつてこれを realize する多様体があるだろう, しかしあるとしたら wild な構成をしなくては行けないはず. すでに Casson handle とか単連結な世界であれだけ難しいわけです. 基本群が一杯あるとどうしようもない. だから Thurston みたいな人が出てこないといけない.

しかし smooth 多様体に対して, これがゼロというのは多少可能性はあるでしょう. smooth をどこかで使ってゼロ. Massey 積が消える, Kähler というもつときれいな構造が入れば Massey 積が全部消える, しかも uniform に消えるという. これは Deligne-Griffiths-Morgan-Sullivan の大定理があるのです. しかしそれは Kähler という構造で, $\partial\bar{\partial}$ -lemma というのが本質的で, uniform にきえてしまう. だけど Massey 積が smooth で消えるというのは, これは口では言うけど, 非常に難しいですね. 有名な 4 次元の人に聞いたら, それはわかりませんと言われました.

だけど non trivial を証明するには、これに対して小平先生、小平先生が一番最初にやった、小平先生と Atiyah の構成を topological でやらないといけない。写像類群の場合は代数幾何が完全に使えて、直積をやって diagonal をとって、有限 cover をとって homology を divisible にして branch cover を取る。これはこういうきれいな構成ではできないというのが予想ですから、wild な構成でやらないといけない。最後に 4-cell, homology cell を付けるときに何かをしないとけない。というわけで絶望的で、絶望的というのはよくないですね、100 年くらいかかる。

凄く幸運な事に Kontsevich という大天才がいて、Lie 代数 version がすでに凄い意味がありますよと、しかも絶対 Galois 群も出てくるという。だからいまプロジェクトは、こちらはずっと忘れないのですが、しかし具体的にやる方法がないので、Lie 代数、こちらの方では幸い computer が使えます。それでも 3 個しか非自明はわかっていません。時々やるのはさっきのもうちょっと topological な言葉で有理数を定義する事です。

ちなみに群 version で non trivial で分かったら Lie version で non trivial というのは明かです。それは有限次元 Lie 代数の場合と同じです。 μ_4 が non trivial だけでも超一流の雑誌にのると思います。それぐらい難しい問題だと思います。これで時間が来たので 4 は、絶対 Galois 群の話はまた次回にします。

会場から質問:4 次元多様体のそういう wild な構成法というのは？

今の所知られているのは、Casson の無限反復法、Freedman がやったやつですね、あれしか今ないですよ。基本群が自由 abel 群ぐらいだったら Freedman の仕事がありますが、これは基本群が非可換ですから今の所どうにもならない。曲面の基本群の曲面の基本群による拡大ですけれども、それだとまだ bundle, homological ですからそういうものを実現する 4 次元多様体を作ろうとすると、最初多様体で作るのは、難しいと思います。Poincaré complex くらいで作らないとしようがないです。それで作って surgery で多様体にしていく、基本群がバカでかいですから、surgery theory をするといってもそういう群の Wall 群とか計算されていないと思います。100 年でもだめかもしれません。

これは Lie version があるので、全部ナンセンスという事はないです。定義されるが全部自明という事はないです。Lie 代数レベルで自明でない事は分かっているの、完全にポシャる事はありません。

ただ前回も言いましたが、世界であまり信じている人はいません。Lie version のこの意味では geometric group theory の人たちが興味を持ってきていて、逆井さんのメールには、高次元の manifold bundle について、特性類として μ_k が出る可能性がどうもあると言っている人もいます。そっちの方向でバンドルを構成して Lie 代数 level で non zero が示される、小平先生の構成を曲面ではなく高次元の多様体にしてバンドルにして特性類は出る可能性はある、特性類はねじれている事が証明できるかもしれない。Madsen と Berglund という人で講演はまだ金曜日だそうで、食事の後にこういうのやったと聞いて、非常にビックリしたと言ってきました。全部 Lie 代数 version ですから、こっちの群の話ではありません。

それでこれらに associate した transgress して homology3-球面の不変量が出てくる、全部うまくいったらというのは、さっきの Casson 不変量が出たというのと仕組みは全く同じです。2 次元 cohomology があって、Torelli 群に制限すると coboundary になる。1-cochain の coboundary, その 1-cochain をしかるべき所に制限すれば準同型になる。しかるべき所というのは homology3-球面の homology 同境の群 Θ_2^3 。

絶対 Galois 群の方は計算が少し軌道に乗り出しました。一番簡単に書くと数論的には Soulé 元というのが無限にある。各奇数毎にあると言いましたが、Grothendieck の motivic の哲学では全部 $\mathbb{Z}$ 上定義されている。これは証明されていませんが、だから我々 topologist も計算できる、 $\mathbb{Z}$ 上だから、 $\mathbb{Z}$ 上定義された Lie 代数 $\mathfrak{h}_{g,1}$ で。ただ現状数論的には p を持ってこない、 $\mathbb{Z}$ 上ではできない。 $\mathbb{Q}$ 上では全然足らない。各 p でやると p 進、Grothendieck のいろいろな cohomology 理論がある。 $\mathbb{Z}$ 上で 3,5,7 といろいろな cycle があって、トポロジーの立場からもしこれが正しいとすると、Galois 元は我々の立場で言って boundary である、これは予

想ですよ、全部、これの計算を今やっています。Johnson 準同型の具体的な計算です。もしこれが正しいとして、boundary でこういう cycle は Lie 代数レベルでどうやるかという、weight があって weight 3 と weight 3 の wedge で weight 6 の cycle が出来たのですが、これが別の weight で bound するか、これが μ_k たちの非自明性の問題です。具体的に私が最初のやつでやったのは、computer で全て計算して、数え上げて boundary operator を計算して、全然 conceptual な証明ではないのです。

2 番目を証明した Conant-Vogtmann もそうです。これも computer で計算しています。Gray も cycle を作った、全て computer です。どんどん進化していますから、最初の頃の計算は今は 2,3 秒で出来ますが、私は 2,3 ヶ月掛かりました。chain を全部計算しました。私は表現論を使ったので、いろいろな Sp -module の Sp -不変元を、次元をまず計算して、その後で次元だけではなく基底を求めなくては行けませんでした。

Vogtmann は Culler-Vogtmann の Outer space, graph の Teichmüller space にあたるものの基本的な仕事をした人です。Vogtmann さんの方針は本質的にはつながっていますが、Lie algebra レベルではなくて、Outer space で作る。これは simplicial complex ですから。Gray もその方針でやっています。ただし cell の数がバカでかくなります。いま μ_4 が non zero を証明しようと、世界で 3 つくらいの group が取り組んでいます。ただ computer のレベルは限界まで来ている。super computer を使っても 20 年くらいかかると思います。世界中の computer を使えば計算は出来る、そういう種類の計算です。でもこれは非現実的ですよ。それは政治の問題ですね。 μ_4 が zero でない事を証明しよう、これは全部 Lie 代数 level です。群の level だとここでやるのはこれを多様体で作ろうという事です。片側は plumbing みたいなものです。

会場から：Milnor の exotic 7-sphere の構成のような事ですか？

そうそう、まさにそうです。反対側からかぶせるというのは smooth ではできないけど、topological にはできる。しかも homotopy disk ではできない、homology disk で貼り付けなくては行けない。homology 4-cell なんて沢山ありますけれども、最後に貼り付けるものは気が遠くなるような性質を持たないといけない。そんなものは天才が出ないとどうにもならない。繰り返しになりますが、不変量の定義は出来ます。Massey 積の intersection ですから。曲面上の曲面バンドルの signature は sinature cocycle, Meyer cocycle で解釈があって、ある 4 次元多様体の中の 2 次元の surface の self intersection. これは twisted cohomology なので、ねじれていますから難しくなりますが、概念的には同じです。2 次元のあるねじれたものを持って来てねじれた意味での intersection.

最後にそもそもこの μ_k は何か、Lie 代数 level では何か。これも予想なんですけど、これは Borel regulator, これは p 進ではなく、もともとの regulator で $H^{4k+1}(GL(N, \mathbb{Z}); \mathbb{R})$, stable cohomology, ここにもともといいますが、これが $Out F_N$ 上 zero というのが Igusa Kiyoshi さんの結果です。さらに $Out F_N$ の有理係数安定コホモロジーが自明というのが Galatius の大定理, Annals に出ています。だけど unstable にどんどん小さくしていくとこれがある所で消えていて、しかも Out に pullback すると全部消える。どこで消えるか critical な所がもしわかれば、2 つの理由で消える。そういうときには必ず secondary class がある。

これは Soulé さんに教えてもらったのですが、Bismut-Lott の仕事、Bismut は解析と幾何に跨がる基本的な仕事をしている人です。Lott は今 Berkeley ですが、Perelman の 3 つのチームのうちの一つに入っていました。ここで μ_k はどこにいるかという $H_{4k}(Out(F_{2k+2}); \mathbb{Q})$ にいます。その対応する Borel cohomology で $H^{4k+1}(GL(2k+1; \mathbb{Z}); \mathbb{R})$, Borel class が unstable に 2 つの理由で消える差として secondary が出てくる、Bismut-Lott が言った事は、これが $2k+1$ ならば消える、これは JDG に載っている論文です。この次、 $2k+2$ で何かが起こっている。消えるか消えないか。そこで私の予想としては消えていて、Galatius の $Out F_N$ では消える理由と unstable で消えるもう一つの理由がある。

2 つの理由があるとこれは元々 Casson 不変量を構成したときもそうですが、cocycle があって 2 つの理由で

coboundary になる, そうすると cochain がとれ, cocycle が出来る. これで Casson が出て来た, Meyer cocycle と signature cocycle の差を取って, ここでも出てくるだろう. 出てくるのは Borel regulator class. Lie 代数レベルでは Soulé の p 進 regulator, Borel の original な regulator とは関係すると思いますが, まだそこまで勉強は進んでいません. Soulé 元というのは p 進 regulator といいますが, 多分ここに出てくる regulator は p に依らない. μ_k は Lie 代数 level では Borel regulator の secondary class. 全て話しはあっています.