

特性類と不変量

森田茂之

ver. 2013 年 3 月

目次

1	曲面	2
2	曲面とシンプレクティック群	20
3	群の近似 (Mal'cev completion)	38
4	表現論の使い方	53
5	Sp -modules と低次元トポロジー	76
6	mapping class group の近似	117
7	モジュライ空間	142
8	モジュライ空間のサイクル, コサイクルの作り方	158
9	低次元トポロジーの謎	161
10	夢	187

記録者から

このノートは 2010 年 5 月から中央大学で行われている森田茂之先生の講義をまとめたものです。この講義は当初は 10 回の予定でしたが、その後再開され現在 21 回目まで行なわれています (2013 年 3 月現在)。なるべく講義の雰囲気をもそのまま伝えるために、講義ノートとしてまとめるというよりは、極力話された内容をそのままに近い形で文字にするようにしています。また作図に関しては中央大学の大学院生の皆さんに手伝って頂いています。但し講義ノートの 12 回目から 16 回目分, 21 回目分は未完成となっています。

なお, 記号や用語の不統一, 誤植などに関しては全て記録者に責任があります。

記録者：北野晃朗

第 1 回 (2010 年 5 月 19 日)

10 回くらいかけてお話しする、特性類と不変量というタイトルを付けたんですけれども、どんな感じになるか、まだ最初の 2, 3 回くらいは、だいたい整ってきてますけれど、その後どうやっていくか、夏休みも有りますので、皆さんからのご要望とかご希望を聞きながら変えていくところもあるかもしれません。

最初の 2, 3 回はコンピュータは使わないのですけれど、その後で実際 Mathematica を使っているいろいろな実験してますけれど、不変量を作るという、その立場でコンピュータでここで上映しながら、聞いていただこうかとも計画もしております。

今日は、どういう知識を仮定するか、はっきりしないところもあったので、多分、やさしく感じる所もあるかも知れませんが、まあ最初はこの辺りから入るのがよいと思います。今日は 1 回目で曲面というタイトルにしたいと思います。

1 曲面

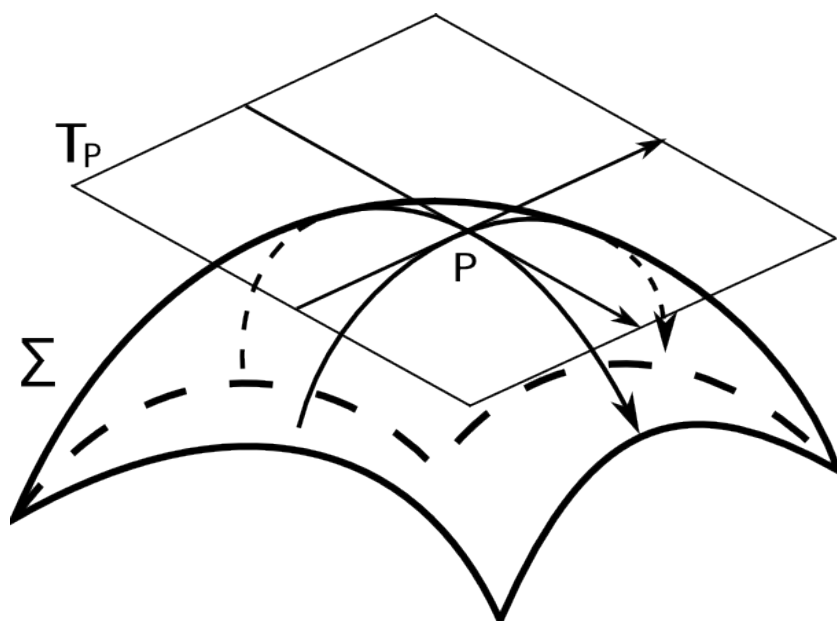
曲面というとももちろん何千年の歴史が有るわけですが、まずは Gauß(1777-1855)、数学王とも呼ばれています。非常に偉大な数学者、みなさん、もちろんご存知だと思いますが、まずはここからスタートしたいと思います。

生まれたのは 1777 年、もう大分前になりますけれども、比較的長生きしまして 1855 年まで、77,8 歳で亡くなりました。みなさんご存知のように数学のほとんどあらゆる分野で天才的というか第一級の業績をあげた人ですけれど、幾何学に関して言いますと、これも有名ですからご存知の方も多いでしょうけれど、曲面論というのがありまして、

曲面論 1827 年。

これは大体 Gauß, 50 歳くらいですね。当時からいうと多少、こうなんというか高年とってはちょっとあれですが、今は 50 歳だと中年ですかね、だんだんと、1827 年、Gauß の曲面論というのがあります。幾何学に関する業績は分量的にはまあ全体の中では少ない。ですけれども、その後これは 200 年近く経っていますけれど、近代、それから現代幾何学に関して、その与えたインパクトというのは大きく、これから現代幾何学が始まったと言ってもよいと思います。これに関して復習気味に進めていきます。

曲面論ですけれども、まずは具体的に xyz 空間 $\mathbb{R}^3$ の中に埋め込まれた形の曲面 Σ を考えます。この Σ , 通常まずは総和記号に使用しますが、曲面 surface という意味で、ギリシャ文字の S の大文字ですけれども、 Σ で表す事にします。この話では Σ , 少し後には Σ_g になります。



Σ 上の点 p を取りますと、まあ曲がってるわけですが、その曲がり具合を表す Gauß 曲率をちょっと復習しておきましょう。

p における Σ の接平面を T_p と書きます。そしてですね、これは平らな xy 平面みたいなものになるわけですが、座標を入れて、 p を原点にして、そして xy 座標、直交座標ですね。もちろん回転の任意性、向きの任意性がありますが、これは結局本質的ではないという事がわかりますので、 p を原点として xy 平面 $\mathbb{R}^2$ と同一視しておきます。

ここに $\mathbb{R}^3$ と書いてあるので、自然に $\mathbb{R}^2$ がここに入っていますから、ちょっとあれですから $T_p \cong \mathbb{R}^2$ を付けておきます。

その曲がり具合がどのように書かれたかと言いますと、 p でもし真つ平らだとすると接平面と Σ が一致して、曲がっていないという事です。接平面とどのくらい離れていくか、高さ関数 h と書きますけれども、 T_p の原点 p の近くで高さ関数

$$h : (T_p \supset) p \text{ の近く} \rightarrow \mathbb{R}$$

というのが定義されます。これを 2 変数 x, y に関する関数だと思うのですが、

本当は、 (x, y) ではなく (u, v) にした方が良かったかもしれませんが、 (x, y) において高さ $h(x, y)$ 、これはどうするかと言いますと、原点 p の近くに (x, y) が有りますと、 (x, y) で垂線を立てると点 p の近くなれば、この曲面 Σ とただ 1 点で交わりますね。交わるので、どちらを正にするかの任意性がありますが、こちらを正にしますと反対側が負になります。これを高さ関数 $h(x, y)$ と表します。0 の時は接平面から離れていない。

$$h : (T_p \supset) p \text{ の近く} \ni (x, y) \mapsto h(x, y) \in \mathbb{R}$$

そうすると Gauß 曲率、これを

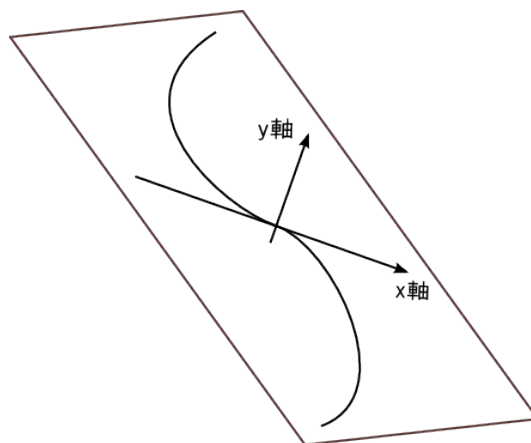
$$K : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$$

と書きますが、これが、この Gauß 曲率が現代幾何学にまでずっと影響を与え続けていて、Riemann 計量とい

うものにだんだんなっていきますが、曲面の曲がり具合を実数で表す。各点でやると、

$$K : \Sigma \ni p \mapsto K(p) \in \mathbb{R}$$

という曲面上の実数値関数になります。この定義は今 p において、 $K(p)$ とやるわけですが、これもみなさんご存知のように、曲面論ですから、次元を下げると曲線、曲線の曲がり方というのは、簡単の為に平面曲線でまず考えると、



曲がり具合は次元が1下がっていますから、接線になりまして、この定義は p において、接線で座標をいれますとこれがグラフの形になるので、 $y = f(x)$. 原点で x 軸に接しているとします。接線方向に x 軸、法線方向を y 軸にします。曲率は κ とおきますが、1階微分 $f'(0)$ はゼロなんですね。接していますから。そこで2階微分をとって $\kappa := f''(0)$ とおきます。今度は法線方向どちらを正にするか負にするか、これが1次元と2次元の本質的な差であって、曲線では曲率がプラスになるかマイナスになるか、まったく向きの問題で、本質的に関係がない。これはこっち側にまがったとしても、回転でまわしたとすれば本質的に全く違いはない。そこで絶対値を取って $\kappa = |f''(0)|$ とおきます。通常、これが曲率です。

2次元になると、2階微分というのが曲がり具合を測るという事で、あそこから類推して、ここは自然に出てくるものではありますが、2階微分、そして点 p において、Hessian という

$$K(p) := \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(p) & \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(p) \\ \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x}(p) & \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(p) \end{vmatrix},$$

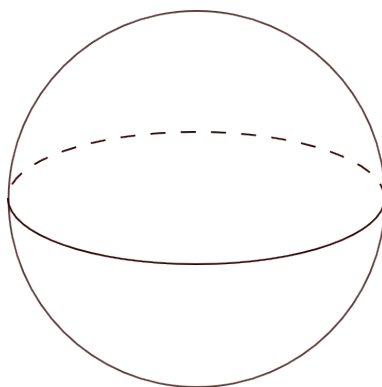
もちろん、この話では関数は十分滑らかというか、 C^∞ にしますから、右上にあるやつ $\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(p)$ と左下にあるやつ $\frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x}(p)$ は同じになります。その行列式。これが曲率の定義です。

ここで1次元と2次元の本質的な違いが現れるというのは、先ほど1次元の場合は正負を変えると曲率の絶対値を取る前は符号が変わるわけです。2次元の場合はこちら側を正にするのと向こう側を正にすると、2個あるから当然ですが、変わらない。ここで1次元と2次元の本質的な違いがここで現れる。これが、今からすれば当たり前ですが、Gaußの天才的な気がついたところですね。これがGauß曲率 $K(p)$ と呼ばれる。

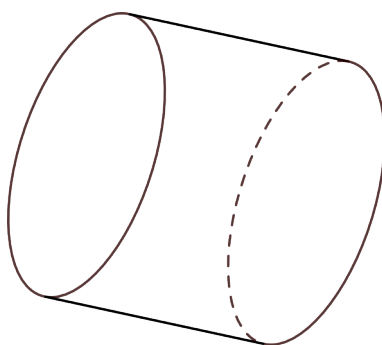
実数というのは、もちろん無限個のいろいろな数が有って、数学のあらゆる分野でそれぞれに重要な役割を果たすのだけれども、一番大雑把に定性的に実数全体を分けるとすれば、3種類、
正、ゼロ、負

と、それに応じて曲率も分けると、

$K > 0$, elliptic な曲がり具合。これが Gauß 曲率が正。この式を見れば例えば球面なんかでこれを計算すると正の定数、



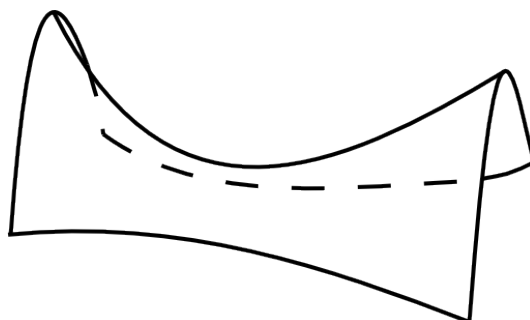
$K = 0$, 平面。平らというのがあります。 $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(p)$ がゼロでなかったとしても、あと3つがゼロなら曲率はゼロですから、 $K = 0$ というのは一見曲がっているような円柱、シリンダーとかですね。こういうやつも曲率はゼロになります。



これが Gauß のもう一つ本質的な寄与というか、 $\mathbb{R}^3$ の中に書かれた絵なわけですが、私は親離れという言葉を使っていますが、 $\mathbb{R}^3$ が親だとすると曲面は子供ですけど、 $\mathbb{R}^3$ を忘れた曲面自身の言葉で曲がり具合、曲率は記述できる。intrinsic な幾何学。これが Gauß のびっくり定理と呼ばれてますが、その後、Riemann がそれを高次元に拡張した。

2次元で違ってくるというのは、 $K < 0$ が本質的で負な曲がり具合が現れて、こういう風に saddle point と

か峠点などと呼ばれている。



この2次元において実際、正、ゼロ、負と3種類に分かれる。これは数学のあらゆる分野で分類をしていくと3種類に分かれます。ここで一番目に見える形で現れる。

$$\begin{cases} K > 0 \\ K = 0 \\ K < 0 \end{cases}$$

$K > 0$, elliptic な世界。一番均整の取れているのは円ですけれども、一般には楕円的な世界。

$K = 0$, 放物的な世界, Gauß以前は Euclid 幾何学とか物理学で言えば Newton 力学など、すべてここで行われたわけですね。ある意味で一番自然ですし、何千年にわたって宇宙とか我々が住んでいるところはこれであると考えられてきた。Euclid 幾何学と Newton 力学。そうではないというのが、物理的には Einstein ですが、数学的にはその前にある意味 Gaußでそのあと Riemann が一般次元で議論を付けて、それを Einstein が物理学に応用した。この3種類が現れる。

語弊がありますが、 $K = 0$ は神の世界、もしいるとすればですが、一見安定していますが、不安定な世界。ちょっとでも動かせば正にもなるし負になる。実際宇宙はこれ $K = 0$ なのか。何千にもわたって宇宙論は進んできてますね。こちら $K = 0$ なのか、こちら $K < 0$ なのかいろいろ議論があります。結局宇宙は $K < 0$ なのか、ある意味で負だということちょっと negative という感じが有りますけれども、皆さんご存知のようにある意味これが一番本質的で豊富な世界であって、negative というイメージは全然ないですね。 $K > 0$ は一番均整がとれていて分類が易しいというところ怒られるでしょうが、きれいな理論がある。簡単という語弊が有りますが、 $K = 0$ は一番昔からある。楕円的な世界、放物的な世界、双曲的な世界。この3種類に大別される。これが Gaußが一つ提出した天才的な idea ですね。それが Gauß曲率です。

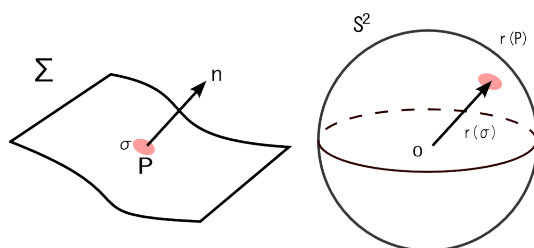
もう一つ、私は位相幾何学をやっていますが、幾何学、大きく分けると Riemann 幾何学、微分幾何学と、もう一つ Poincaré, Betti, さかのぼれば Euler くらいまで行きますが、位相幾何学、その2つに分かれますが、その位相幾何学で重要になる概念、Gauß曲率と密接に関係していますが、Gauß map. これは Gaußに敬意を表して γ と書きます。ちょっと違和感があるかもしれませんが、 g , これは種数にしたいので、 γ と書きます。

Gauß map というのは、 $\mathbb{R}^3$ の中に埋め込まれた曲面 Σ の曲がり具合を測るんですけれども、測る物差しとして単位球面が取れる。ターゲットは

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

ですね。単位球というとそれ自身曲面なわけで Gauß 曲率は恒等的に 1 という非常にきれいなものになるわけですが、これが物差しとして使える、抽象的な意味あいをもっています。具体的に単位球というのは曲面ではありませんが、もっと深い意味を持っている。

これらもご存知の方が多いと思いますが、話の都合上書きますと、



法線ベクトルを立てるんですが、局所的には向きを付けておいて、右ねじの方向にたてます。すると法線, normal vector というので n_p と書き、長さは 1 にしておきます。

曲がり具合というのはこちらの曲面の intrinsic な量なわけですが、親から離れない立場ですと、曲がれば曲がるほどというか、完全に一致する形で、法線ベクトルがどう動くかと、接ベクトル、接平面がどう動くか、傾くかは全く同じ情報を持っているわけです。親離れしない立場では、ここに原点が有って、単位球ですから、法線ベクトルと接ベクトルは全く同じ。

Gauß 写像というのは、この曲面から単位球、物差しへの写像ですが、この法線ベクトルを $\mathbb{R}^3$ の長さ 1 のベクトル n'_p に平行移動します。出発点を原点として、本質的には全く同じですが、幾何学的ベクトルとしては違うので、その終点が S^2 上になります。

この n'_p の終点が Gauß 写像の定義ですね、 $\gamma(p)$. これを Gauß 写像と言います。

Gauß 写像と Gauß 曲率の違いは Gauß 自身がすでに記述してしまっていて、 p の周りの、 p を含む小領域 σ を取ります。Gauß 写像によって、もし平らだとすると法線ベクトルの向きは、接平面が水平だとすると、法線ベクトルは全部北極を向いちゃうわけですから、有限の面積を取ったとしても全然動かない。これが曲がれば曲がるほど法線ベクトルはぐらぐら揺れるので、 σ の行き先が、本質的に、 $\gamma(\sigma)$ こうなります。

この曲がり具合が Gauß 写像の定義をよく見ますと、この σ が γ でどのように単位球上に行くかに反映されたと考えられるわけです。これは実際 Gauß の定理ですが、最初のように K を定義すればこれは定理、これを K の定義にする流儀も有りますけれども、これを定義にすればあれは定理です。

$|\sigma|$ は直径ですね。それが 0 に行く、 σ が小さくなっていく極限ですね。そこで σ と $\gamma(\sigma)$ を比べるわけです。面積は Area. 分母の方に σ のですね、点 p を含む小領域の面積。

もし平ならば σ が面積を持ったとしても、1 点に行っちゃいますので、 $\gamma(\sigma)$ は面積ゼロですから、それは曲がらないという事です。

曲がれば曲がるほど行った先はぐらぐら揺れるので、こういう比

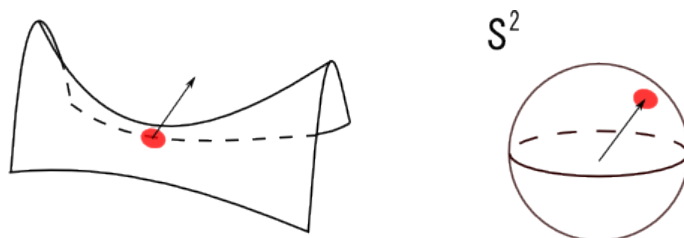
$$K(p) = \lim_{|\sigma| \rightarrow 0} \frac{\text{Area}(\gamma(\sigma))}{\text{Area}(\sigma)},$$

これが結論です。

ここで Gauß 曲率は負にもなるんだけど、面積は正なので、面積は負になるのはおかしいじゃないかと思われ

るかもしれません。分子の面積は符号付きの面積、負にもなる。マイナスになるのはどういうときかという
と、Gauß写像によって裏返しになる。Gauß写像によって面積は負である。絶対値は本当の面積。こうやると
Gauß曲率になる。

Gauß曲率負のところで、この saddle point の周りで Gauß写像を作図というか、計算してみると



実際裏返る事がわかるので、幾何を志すならば、若い人は1回くらい試してみる、体験するとよいと思いま
す。ひっくり返るのでマイナス。

さて、それで親離れという話なのですが、Gauß写像は曲面から単位球面への写像。現代流に言いま
すと、これが接バンドル、一般に M というのが多様体となったときに、 M に対して TM 、接バンドルというも
のが有ります。

M manifold $\Rightarrow TM$ 接ベクトル束

これは各点において多様体、曲面でいいですけども、曲がっているわけですけども、各点でまっすぐな線
型空間、接空間を各点で M の 1 次近似と思って、それが点毎で動いていくと、各点で束ねる。これはファイ
バーバンドルを勉強した人はその特別な場合で、ベクトルバンドルと呼ばれるものになります。

そうすると Gauß写像というのは単に曲面から物差しへの写像だけではなくて、物差しの接バンドルが有り
ますけれども、これをカバーする bundle map というものが有ります。

$$\begin{array}{ccc} T\Sigma & \xrightarrow{\tilde{\gamma}} & TS^2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Sigma & \xrightarrow{\gamma} & S^2 \end{array}$$

ですから曲がり具合が本当に忠実にこの Gauß写像によって再現されるわけですけども、現代というか、ベ
クトルバンドルの言葉で言いますと、接バンドルというのが、こういうバンドルマップがあるとすると、も
との曲面の曲がり具合の 1 次近似である接バンドルが、pull back というのがありますが、Gauß写像で pull
back する事のこの物差し、単位球面の接バンドルの引き戻しとなるわけです。

$$T\Sigma = \gamma^* TS^2.$$

これは 1 次近似を与えているわけですから、与えられた曲面、多様体の曲がり具合、第一次の曲がり具合と
いうのは、物差しの曲がり具合、それがわかったら物差しの曲がり具合がどのように引き戻されるか、一般に
cohomology 理論を使うわけですが、こうやって研究しているわけです。

Gaußがどこまで知っていたかは今となっては、聞くわけにいきませんのでわかりません。非常に慎み深い
人でもあったし、信心深い人でもあったし、あるいは当時の社会的な状況というか、宗教的な背景があるので、

なかなか発表しなかった。例えば $x^2 = -1$ などにはあり得ないとしか一般の人には思えなかった。曲面論は書いていますが、非 Euclid 幾何は Gauß は知っていたと言われていますが、余り書きはしてはいない。それはそれとして、個人的なあれですが、Gauß はバンドルという概念を本質的にはわかっていたと私は思います。

それで有名な Gauß-Bonnet の定理、幾何学の定理は沢山ありますが、未来永劫多分第一の定理として永遠に残ると思います。永遠と言ってもただ人類が永遠に続く事はないですけど、そうすると数学も永遠に続く事はないですが、幾何学が続く限り第一級の定理です。親離れした立場でも書けるんですが、通常そのように定式化しますが、まだ離れていないので、 Σ_g と書いたら種数 g の有向閉曲面、

$$\Sigma_0 = S^2, \Sigma_1 = T^2, \Sigma_2, \dots$$

Σ_0 と書いたら球面 S^2 , Σ_1 は torus T^2 , 位相的には $S^1 \times S^1$, 一人乗りの浮き輪, Σ_2 は二人乗りの浮き輪, 種数 2 の閉曲面。こうして種数 g の閉曲面の位相同形類を Σ_g と書くわけです。

100 年以上前に向き付け可能な閉曲面の分類定理というのがあった、誰かというより既にわかっていた。向き付け不可能な系列ももう一つ、射影平面、クラインの壺、... とあります。

$\Sigma_g \subset \mathbb{R}^3$ とこう書いたら、今流にいうと Riemann 計量、曲がり具合が Gauß 曲率の分布が一つ指定されている。こういうものが与えられている。そのとき Gauß 曲率の総和を取る、つまり、面積分を取る。 K というのは Σ_g 上の実数値関数ですから、面積分する、面積分するから面積要素 $d\sigma$ 。さっきの小領域の面積の無限小バージョン。Gauß 曲率の総和は、定員、種数を指定したとしても、曲がり具合は自由自在。曲率関数は変わってくる。しかしその総和を取ると驚くべき事にそれは浮き輪の定員のみに依る。

Theorem 1.1 (Gauß-Bonnet). $\Sigma_g \subset \mathbb{R}^3$

$$\int_{\Sigma_g} K d\sigma = 2\pi\chi(\Sigma_g).$$

これは 2π という数学で未来永劫重要な定数。そしてここに Euler 数、Gauß よりも前、1600 年代から 1700 年代、Euler も超一級の数学者。この人が、2 次元球面の場合に三角形分割をして、頂点の数、辺の数、面の数の交代和を取ると分割に依らないという事を実質的に発見した。今では Euler 数は homology 論ですね、Betti-Poincaré を経由して、homology 論。Euler-Poincaré characteristic と呼ばれていて、Betti 数の交代和ですね。

具体的に 3 角形分割をすると、あとでやりますが、ほとんどの人はご存知でしょうが、

$$\chi(\Sigma_g) = 2 - 2g$$

となってこれが Gauß-Bonnet の定理の驚くべき美しい主張なわけです。

なぜかという左と右、特性類というのがだんだん出てくるわけですが、その前に曲面の不変量ですね。左辺は各点で曲がり具合を実数で表す、その総和を取る、曲がり具合をかき集めたらどれぐらいの量になるか、右辺は何かというと位相的な量、曲がり具合は関係なく、組み合わせ的な量。そこから出てくる量。左辺は微分幾何学的な量、現代的に言えば、右辺は位相幾何学的な量。これが等しい。

数学はいろいろな定理が有りますが、その美しさの判断基準は、全く違うものによって定義をしたものが実は等しい、まさにそうですね。ここからいろいろな事が出てきます。

左辺は無限の自由度で曲がり具合は変形できるが、どうやったとしても右辺は変わらない。これは驚くべき事です。

一方右辺からいくと、Euler 数、位相不変量であって計算はこちらの方が簡単なわけですけど、それが一見難しい sophisticated された量でこれが表される。そういう風にも見えます。いずれにしても美しい式なわけで

す。それでこの値を見ますとさっきは局所的に Gauß 曲率, 正, ゼロ, 負とやりましたけれど, 今度は整数ですから, 実数の一部分なわけですが, これがその整数というのも実数ですから, 正とゼロと負と三種類に大別されるわけですが, 閉曲面も 3 種類に大別すると, 正というのは elliptic な世界. 物差しに使った単位球面 S^2 は正の所に入ってきます. parabolic, 閉曲面でいうと torus T^2 . 負, hyperbolic $\Sigma_2, \Sigma_3, \dots$.

$$\begin{cases} \text{elliptic } S^2 \\ \text{parabolic } T^2 \\ \text{hyperbolic } \Sigma_2, \Sigma_3, \dots \end{cases}$$

まず positive な所が解決して, parabolic ゼロのところは微妙な所で, それ自身がおもしろい, 普通残り全部と言って分類します. 一般型という分類が完成したように思いますが, そうではなくて残りはわからない. これが一番豊富な世界. 実際, 閉曲面の分類においても無限個はこの hyperbolic な所に入ってくる.

さてそれですね, 現代幾何学, ちょっと大上段に言うと, これ Gauß-Bonnet の定理をさまざま一般化する形で行われる. まず特性類の観点から言うと, 今度は Euler 数ではなく, Euler class, Euler 類と呼ばれるものです. Euler 自身がここまで知っていたかということはないと思われ. cohomology, homology というのはない時代ですから, 今流にいうと数が Euler 類になるような cohomology 理論を作る, categorification というものの走りと思われる. これは cohomology というのが出てきまして,

$$\chi(T\Sigma_g) \in H^2(\Sigma_g; \mathbb{Z}),$$

となります.

一般には $T\Sigma_g$ である必要はなくて, ベクトル束 $(\mathbb{R}^{2k}, GL^+(2k, \mathbb{R}))$ に対して $\chi \in H^2$ が定義される. 曲面の場合, fiber は $\mathbb{R}^2$ で近似してましたが, 偶数次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^{2k}$ がファイバーになって, 構造群というのがあって, 偶数次元の線型空間の正則 1 次変換全体 $GL(2k, \mathbb{R})$ です. 但し Euler class を定義するためには determinant が正のものだけ, こういうものをファイバーが向きづけられたといいます. 構造群が向きを保つ $GL^+(2k, \mathbb{R})$, こういうものに対しては定義される.

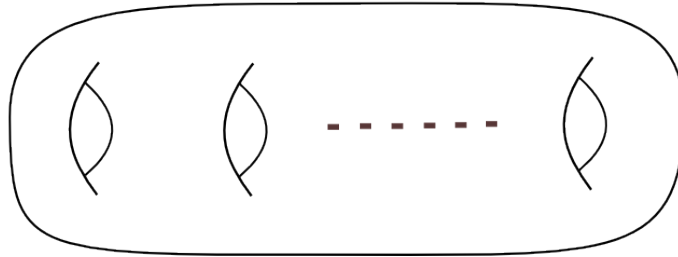
そして Euler 数との関係で言いますと, cohomology と pairing をする homology というのがあるわけですが, もし向きを一つ指定しておくと, 1 というのがある.

$$H_2(\Sigma_g; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \ni 1$$

これを fundamental homology class, 基本類, と呼びます. これがそもそも homology 論の motivation. 閉じた向きづけられた多様体があるとそれ自身 1 つの閉じた cycle になっていて, それが基本類と呼ばれるものになっている. これは homology 論, Betti 以来, Poincaré, 1920 年頃の話です. Pairing でいうと曲面の, これは 2 次元の cohomology なので, Kronecker 積の一つの表し方ですが, これがどうなるかというと, 曲がり具合はなくなった, cohomology 論を使うとこうなる.

$$\chi(T\Sigma_g)[\Sigma_g] = 2 - 2g$$

これを実際証明しようとするとうなるか. Gauß 写像を使うとうなるか,

Σ_g 

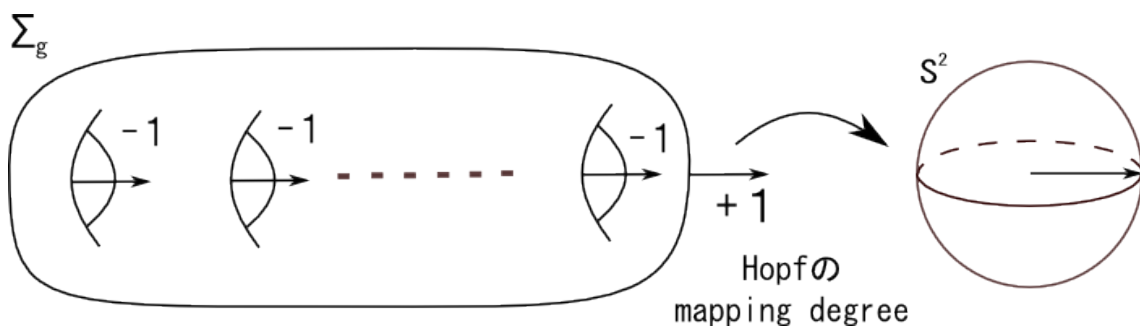
一つ曲がり具合を指定して、一方 naturality というものが有りまして、これを使うと、

$$\gamma^*(\chi(TS^2)) = \chi(T\Sigma_g).$$

これとの比較をするわけですが、その後の homology 論, cohomology 論を経由すると、 Σ_g の方に 2 次元の cycle, 基本類が有って、 S^2 の方に同じように 2 次元の cycle, 基本類が有って、両方とも $\mathbb{Z}$ なのでそれが何倍に行くかというのが、それを実際定式化したのは Hopf という人で、トポロジー, 代数幾何にまたがって基本的な仕事をした人ですね。Heintz Hopf, Hopf という人は 2 人おります。

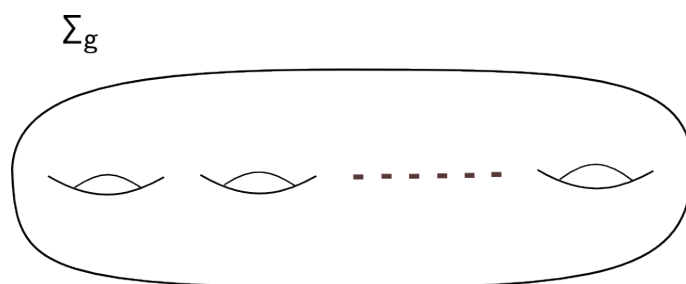
Hopf の mapping degree というのがあります。それを Hopf が定義して、sphere から sphere の場合には Hopf が定義していて、多様体から多様体の間で同じ次元でコンパクト、閉じたときにできます。

それをここに適用すると実際にできるかなと、homology 論を勉強すると、仮定すると、ここに 2 次元の cycle があって、こちらに 2 次元の cycle があって連続写像で覆い被さる、本質的に何重に被さるかということを調べる、それが Hopf の mapping degree です。閉じた世界、それが homology 論の本質ですが、なんというか、美しい閉じた世界を作っているので、何重に被さるかというのは全体を見なくても、良い性質をもつ点を調べれば 1 点だけでわかる。



あまり具体的にやるとここだけで 3,4 回かかるので、ちょっと苦しいですが、良いところというのは、被さり具合が特異点を外してぱっとうまく行く。法線ベクトルがここになるような点がどれだけあるかを考えると、本質的に何重になるかがわかる。そうですよね、というのは数学の講義としては良くない。もちろん homology 論を知っている人は何をいっているか、わかりますけれど、勉強の motivation にしてください。

法線ベクトル，こっち向きを考える．向きを付けておいて，Gauß写像の定義は法線ベクトルが行った先でこうなる，無限個の点から来ているようなところは外しておく，それ以外は外しておく，簡単な所を選んだからですが，これ以外は違う方向を向いている．これしかない．Gauß曲率の定義の中にあるように，向き，表裏が大事．出っ張っているところは正になる，向きを保っていく．local degree と言いますが，ここは +1 で計算します．残り g 個ありますが，先ほど書いた負の曲がり具合，Gauß曲率，負なわけです．先ほど面白いといった裏返しです．-1 が g 個あって +1 が 1 個有るわけです．



裏返しの所があって， g 人乗りですから， γ の degree = $1 - g$ という答えが出ます．

一方この Euler 数，この物差しの Euler 数，これは Euler は知っていた

$$\chi(S^2) = 2.$$

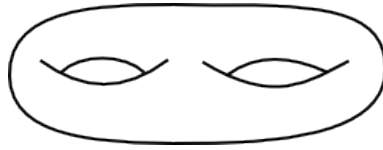
これを組み合わせると Euler 数 2 のものを degree $1 - g$ のもので pull back しているので $2 - 2g$ ．これは証明ではないですけども．数学は一番厳密な科学ですから，1 個だけやってこれは証明では有りません．ちょっとでもこの辺を perturb すると，さっきの証明はすぐに破綻します．しかし，これが Gauß-Bonnet の素晴らしいところで，degree 1 の所が出てくると必ず -1 が現れます．

実際の任意のこの $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ の実現がこの絵を連続変形して得られるかということ，また別問題として出てきます．それでこの親離れという事になってきます．

その前に一つだけ昔話をさせて頂きます．Dennis Sullivan という，私の憧れの人ですが，最近は微分幾何学，位相幾何学と分けるというのは前時代的になってきて，幾何学は一つですが，私の若い頃 40 年近い前ははっきり分かれていた．どちらかを勉強すれば良かった．これは善し悪しで，今から言えば半分でうれしい，そういう面も有るけれど，微分幾何の事を今からするともう少し勉強しておけばよかった．これは善し悪しです．Dennis Sullivan は当時としては位相幾何，この人は非常にスケールの大きな人ですから，topologist には間違いないけれども，微分幾何だけではなく力学系とか，沢山の業績があります．いずれにしても私は憧れの人だった．

1973 年に東京で Manifolds Tokyo という国際 symposium が行われて，これは丁度修士を卒業して 2 年くらい経った頃です．Dennis Sullivan とか位相幾何学だけでなく代数幾何，小平先生，世界一流の数学者，Atiyah とか Spencer さんとか来て大研究集会でした，その後しばらく Dennis Sullivan はしばらく東京にいて，東北大に行って東京に戻ってそのあと京都大学に行きました．ずっと Dennis Sullivan にくっついて回ったことが有りました．

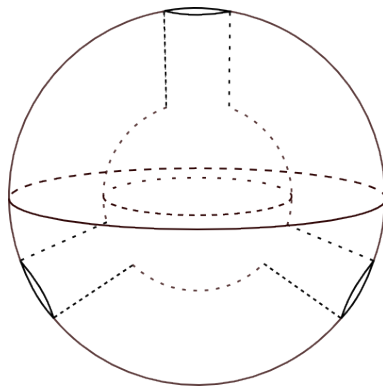
東北大に行ったときに informal seminar をしました．そのときこういう問題を彼が出した．



これは明らかに order 2 の involution, symmetry を持つ, Sullivan が出した問題は, 種数 2 の閉曲面は order 3 の symmetry を持つんだけど, それを図に書いてごらんと言われた. order 3, 120 度回転ですね. これをみてもどうにもならないですね.

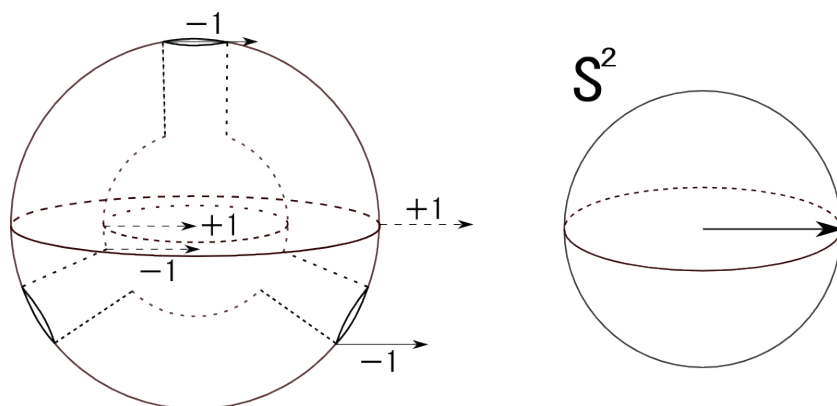
親離れをするか, 親との関係を変えるわけです, そうすると order 3 が見えるんだよと, なるほどと, 答えを聞くと当たり前なんですけど.

円周, 同心の円を書きます. 半径の違う球面, 連結でない球. 連結でないので連結するためにトンネルを開けてつなぎます. 1 回つなげて連結になって位相的には球面になります. 120 度の所にトンネルを掘ってくださいと, 残っている. 一つ穴をあけるとハンドルを付けた事になって種数 1, もう一つ開けると種数 2 になります. そうすると見るからに 120 度回転してください, 親との関係を少し変えた. そうすると order 3 の symmetry が見えるようになる. それを聞いたときになるほど, Sullivan はすごいなと思いました. Sullivan からすればこれぐらいで関心するなよという所でしょうが.



その頃, Sullivan はいわゆる differential topology から少しずつ離れつつあって, Sullivan の minimal model, 微分形式を使ってホモトピー型を研究する. この symposium でもその話をしました.

それはともかく, この曲面から Gauß 写像を考えると写像度は本当に 1 になるかということ, また性質の良い点を見るとすると, 沢山出てきます. さっきは 3 個, 今度は 5 個. 今度は符号を見てみると, これは反対方向を向いているように見えますけれど, 曲率は正なんです. こういう所は全部マイナスで都合総和を取ると, $+1+1-1-1-1=1-2$



これは昔の話でして、その後東京に戻って当時新幹線というのがあって、京都まで隣に座っているいろいろ教わりながら行った。青い色のマジックペンを使いながらいろいろ教わりながら行きました。Sullivan は好敵手がいまして、Daniel Quillen という人です。競合するところも有って、互いに補いながら重なるところもあって、代数的 K 理論の創始者ですね。

話を元に戻しまして、Gauß写像 $\gamma: \Sigma \rightarrow S^2$ 。

そこで2つの事を、1つは先ほどから“親離れ”と言っています。親との関係を変えと言っていますが、親離れというのは、Gauß-Bonnet の定理、先ほど Σ は $\mathbb{R}^3$ の中に入っているとしました、Gaußのびっくり定理というのは、Gauß曲率の最初の定義は $\mathbb{R}^3$ の中で高さ関数の2階微分を使う、 $\Sigma_g \subset \mathbb{R}^3$ 、明らかに親に依っている。ところがGaußのびっくり定理というのは、入っている $\mathbb{R}^3$ から離れて、接線方向、接平面方向だけの言葉で曲率は定義できる。今流に言えば、Riemann 計量、まあ Riemann はその後ですから、Riemann 計量のアイデアをGaußが2次元の場合に定式化した。それが親離れですけども、 $\mathbb{R}^3$ がいらなくという意味ではなく、親は親として永遠に親なんです、自立して自分の中で intrinsic geometry ですね。

それから歴史的には1854年は因縁深い深い年なわけですが、Gaußが亡くなったのは次の年。

1854: Göttingen での Riemann の講演。

Gaußは当時 Göttingen 大学にいたんですが、私も1991年に3ヶ月くらい滞在しました。とてもきれいな街であって、少し歩くと森と畑なんです。

その Göttingen 大学にGaußは教授としていて、その後 Riemann が、Göttingen 大学への就職講演と言われているんですが、講演をしました。幾何学の基礎をなす仮説についてという有名な講演ですけども、今流に言うと、一般次元の多様体、それを本当に今流にしたのは、大分後1930年代 Hasseler Whitney という人の仕事ですけど、それをさかのぼる何十年も前の仕事です。もう一つ計量、各点で変化する。歴史的にも数学で金字塔の講演です。

Gaußは厳しい人であったようで、非 Euclid 幾何学に関しては、例えば Bolyai ですね、Bolyai がGaußに話したら、僕はもう知っていたよと言われて非常にショックを受けるわけです。Bolyai ははじめは疑ったんですけど、そんなはずはないと、Lobachevsky がもう一人いるわけですが、Bolyaiの方がちょっと前です。その後Gaußの事を聞くと、その後知っていたに違いないと、もちろん Bolyai の名前は残った。そういうGaußは厳しい人だったのですが、Riemann の講演には感激した。その1年後に亡くなった。

もう一人、Poincaré という人がいますけれど、位相幾何学の創始者。Euler までさかのぼる人もいますが、基

本群と homology 論, cohomology はまだなかったですが, 微分形式はあったわけですから, 全くなかったわけではないです. この 1854 年に生まれています. 因縁の年なんですね. Poincaré はこの講演を聞くわけじゃないですね.

それでこの親離れという事ですけども, 先ほどの Hopf degree=1-g の証明. あのまま続けるとすると, 親離れしないとすると, 実現の仕方 $\Sigma_g \subset \mathbb{R}^3$ を全部数え上げる必要が出てくる. これ自身は, これに限らず幾何学のテーマであった, $\mathbb{R}^3$ に限らず多様体があってその部分多様体があったときに, その埋め込みの仕方を分類する. 大事な問題ですね. それは有るですけど, この理論の完成を待ってからやるというのは, 悪いというわけでは有りませんが, 別の方法があるのではないかと, それで Topology では分類空間, 分類写像というのが出てきます. その話を少しします.

そこで Grassmann, この人も大変特徴ある数学者. 最近調べたら思ったより前なんですね. 1840 年代に

- Grassmann manifold $\tilde{G}(n, k) : \mathbb{R}^n \supset V^k$.
- 来週出てくる Grassmann algebra. これは exterior algebra とも言います.

非常に数学で重要な概念を 2 つを定式化しています.

Grassmann 多様体ということこれはまず多様体. $\mathbb{R}^n$ の中の k 次元線型部分空間全体. こういうのを Grassmann 多様体 $\tilde{G}(n, k)$ と言います. 先ほどの物差し S^2 は $\tilde{G}(3, 1)$, ただ向きを付けているので $\sim$ を付けます. 先ほどのターゲットを一般化する $\tilde{G}(n, k)$, ものすごく沢山 n, k , 無限個あります.

Grassman はこれを導入したわけですが, 多様体として思っていたというよりは, 実際 Riemann の講演より前ですからね, 多様体というよりは線型代数学と思っていたのではないかと. 線型代数というと大学 1 年で終わっていると思っている人も若い人にいるとすれば, これはとんでもない事で, 数学の中でも線型代数は永遠に大事で, そういう感じで Grassmann も思っていたのではないかと思います.

Grassmann 多様体, これはトポロジー, 幾何学で重要な分類空間というものになります. 曲がっている多様体をまっすぐな空間で近似するベクトルバンドル, 第 1 近似を分類するおまじない, magic のような空間. 先ほどの Gauß 写像は分類空間, これの走りです. S^2 はターゲットで分類空間, Gauß 写像は分類写像. 今曲面ですが, 与えられた曲面に分類写像がどれくらい有るか, 調べればよい. S^2 , Gauß 写像は分類空間, 分類写像のはしりであって, これが実際完成するのは 20 世紀の中頃ですから, 100 年以上必要だったわけです.

bundle の曲がり具合を $\mathbb{R}^3$ の中で数え上げる, それをやらなくても, 別の道がある.

$$\Sigma \rightarrow S^2 = \tilde{G}(3, 1).$$

向きづけられた直線の全体, それが S^2 . 接バンドル $T\Sigma_g$, それは分類写像で TS^2 , これが universal bundle を引き戻す. 分類写像の言葉で言いますと, 分類すべきものが向き付けられた plane bundle, $\mathbb{R}^2$, 構造群が $GL^+(2, \mathbb{R})$, もし計量を入れたとすると構造群は $SO(2)$, 長さを入れたとすると回転だけの自由度になる. 複素数上考えるとユニタリ群 $U(1)$,

$$(\mathbb{R}^2, GL^+(2, \mathbb{R})) \supset (\mathbb{R}^2, SO(2)) \cong (\mathbb{C}, U(1))$$

こういうもののバンドルを分類しましょう. 一番簡単な場合ですが, 別な意味で一番基本的でもある. 一般の場合には $\mathbb{R}^{2k}$, 構造群が $GL^+(2k, \mathbb{R})$, 複素数上考えると $\mathbb{C}^k$ でユニタリ群 $U(k)$ となるわけで, いろいろ分類しようとなるわけです. そういうものをどれくらいあるかを考えるのは, Grassmann 多様体, これが図形としてどれくらい豊富の世界かを調べる事になる. そしてこの一番基本的な場合の分類空間 $\tilde{G}(3, 1)$ は, どうなったかということ, S^2 が一番基底部分にあって, これをどう思うかということ 1 次元の複素射影平面, $S^2 = \mathbb{C}P^1$

で Riemann sphere です。そして $S^2 = \mathbb{C}P^1 \subset \mathbb{C}P^2 \subset \dots \subset \mathbb{C}P^\infty$, これを無限に続けると $\mathbb{C}P^\infty$ となります。これを cell 分割の立場からすると、まず 0-cell があってこれに 2-cell を張り合わせると $\mathbb{C}P^1$, こんど Hopf 写像 $S^3 \rightarrow S^2$, さっきの Hopf ですね、これも多様体の間の写像では未来永劫トップ級の写像です。Hopf map で 4-cell を張り合わせ、これを続けていったものが $\mathbb{C}P^\infty$ です。これが実は分類空間 $\mathbb{C}P^\infty = BGL^+(2, \mathbb{R})$ なんです。分類空間というのは B, B というのは base space ですが、トポロジーでは分類空間に頭文字 B を付けて、その次に構造群、どういう張り合わせかを書きます。これはただ記号を書いただけですから意味はないです。言葉でいうと、構造群はこうなる、2次元の向き付けられた平面を行列式が正の線型変換でぺたぺた張り合わせていって、バンドルを作る、それがどうなるか、universal bundle のこれは底空間 $BGL^+(2, \mathbb{R})$ と書く。これが $\mathbb{C}P^\infty$ となるというのがトポロジーの理論です。

γ をここ $\mathbb{C}P^\infty$ までのばしちゃうと、親離れをすると、実は normal 方向ではなく、接バンドル、接線方向だけで、 $\mathbb{R}^3$ から離れて、 $\Sigma \rightarrow \mathbb{C}P^\infty$ は定義できる。そうすると、

$$\gamma : \Sigma \rightarrow S^2$$

は実現の仕方に依るんだけど、ここまで

$$\gamma_\infty : \Sigma \rightarrow \mathbb{C}P^\infty$$

行くと、分類の理論は何かというと、 γ_∞ のホモトピー類は一意に定まる。どうやって Σ を実現するかで γ 自身は変わる、んだけど、結局分類写像 γ_∞ のホモトピー類は変わらない。親離れして分類の理論を使うようになります。

$$\Sigma \xrightarrow{\gamma} S^2 = \mathbb{C}P^1 \subset \mathbb{C}P^2 \subset \dots \subset \mathbb{C}P^\infty = BGL^+(2, \mathbb{R}) = K(\mathbb{Z}, 2)$$

$$\mathbb{C}P^\infty = e^0 \cup e^2 \cup e^4 \cup \dots$$

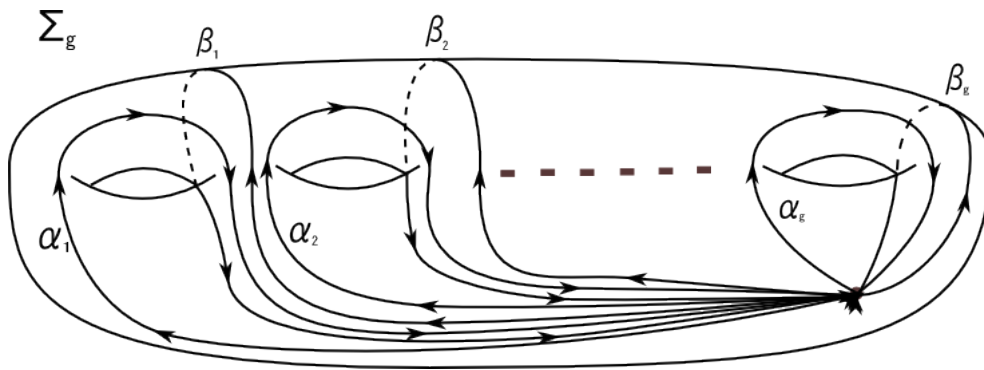
まあこれは後知恵と言いますか、理論をちゃんと作ったから完成したから、定理が簡単になりますよと。注意しなくては行けませんが、メリットもあるわけです。分類空間、分類写像の強力さがわかるわけです。

この Eilenberg-MacLane space という書き方があって、 $\mathbb{C}P^\infty = K(\mathbb{Z}, 2)$, 2次元整係数 cohomology の分類空間。これが Euler 類が住んでいるところです。

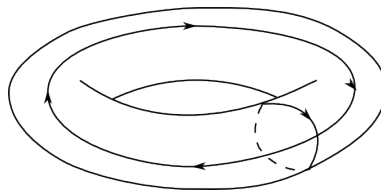
cell 分割から考えると、 $H^2(\mathbb{C}P^\infty; \mathbb{Z}) \cong H^2(S^2; \mathbb{Z})$, Gauß の考えた S^2 の部分で euler 類は実現されている。分類空間としては無限次元になるわけですが、曲面の場合は S^2 で話が終わっていて、なおかつ特性類の Euler 類はここで実現されていた。これは単なる説明ですが、この立場からどうやったとしてもこの γ の mapping degree は 1-g になる。こういう風になります。

それで Gauß 曲面論から時間を取りすぎたかもしれませんが、ちょっと具体的なものに入っていきます。今回は symplectic 群を導入したいのもうちょっとだけやらしてください。

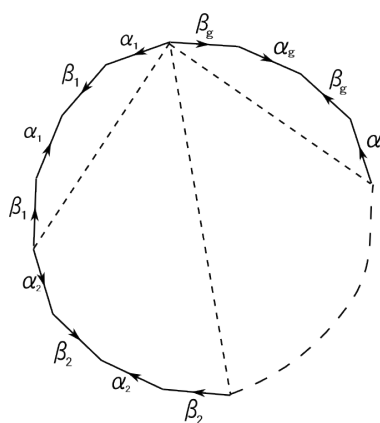
Σ_g のそもそも homology 群はどうなるかというのは、これは、非常によい空間です。cell 分割でやります。



あとの都合上基本群の元として, $\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_g, \beta_g$, 曲面のトポロジーを書いた本には 100 パーセントある絵です. ここで Σ_g を cut する. いきなり一般の g だとわかりにくいので Σ_1 の場合を考えましょう.



ここで cut すると, 普通の torus のここにあって正方形になります. 一般の g のときは $4g$ 角形になって, 4 つが一つの unit になります.



このようになる. それではですね, こう cell 分割をすると, Σ_g というのは, 0-cell, $4g$ 個の頂点がある. $4g$ 個が $2g$ 個のペアになって張り合わせると全部 1 点になる. 1-cell は $2g$ 個有ります. 1-cell の右上が次元, 右下

は名前です.

$$\Sigma_g = e^0 \cup e_1^1 \cup e_2^1 \cup \dots \cup e_{2g}^1 \cup e^2$$

こういうよく知られた cell 分割, cell 複体です.

その前にこれは 2-cell が 1 個ですから, 基本群が表示され, $\alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g$ が生成していて, 1 周すると 2-cell の境界ですから, ゼロになって 1.

$$\pi_1 \Sigma_g = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g; \zeta = [\alpha_1, \beta_1] \dots [\alpha_g, \beta_g] \rangle$$

と one relator group と呼ばれています. もっとも $g = 0$ のときには $\pi_1 = \{1\}$, 単連結. $g = 1$ のときは 2 個の元で互いに可換, π_1 は abel 群 になり rank 2 の $\mathbb{Z}^2$. $g \geq 2$ のときは, ここでも基本群の立場から先ほどの elliptic, parabolic, hyperbolic が特徴付けられ, $g \geq 2$ の π_1 は非 abel 群 になります. 基本群からも 3 つの世界は特徴付けられる.

$$\begin{cases} g = 0 : \pi_1 = \{1\} \\ g = 1 : \pi_1 \text{ abel 群} \\ g = 2 : \pi_1 \text{ 非 abel 群} \end{cases}$$

絵から boundary operator は恒等的に zero.

$$\partial \equiv 0$$

従って homology 群, $H_0(\Sigma_g; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ であって, $H_1(\Sigma_g; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{2g}$, これが話の中では主役の一つになるわけです. 絵に描いた $\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_g, \beta_g$ が独立な cycle に対応して, homology の basis は基本群の元を homology 群に落としたもの

$$a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g$$

となります. 2 次元, これは homology 論のそもそもの motivation だった $H_2(\Sigma_g; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. こういう事がわかる.

$$\begin{cases} H_0(\Sigma_g; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \\ H_1(\Sigma_g; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{2g} \\ H_2(\Sigma_g; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \end{cases}$$

あと一言で終わりますが, H_0, H_2 は $\mathbb{Z}$ ですから, こっちは連結で, こっちは fundamental cycle.

これ H_1 は何度も何度も出てきますから, g はあらかじめわかっているとして, 単に H と書いたら, $H := H_1(\Sigma_g; \mathbb{Z})$. それでベクトル空間とか線型変換の事もやるので, $\mathbb{Q}$ -係数にしたい事もあって, そのときは $H_{\mathbb{Q}} := H_1(\Sigma_g; \mathbb{Q}) = H \otimes \mathbb{Q}$. それから $\mathbb{R}$ の場合で, 葉層構造なんかやるときは自然なので, $H_{\mathbb{R}} := H_1(\Sigma_g; \mathbb{R}) = H \otimes \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} H := H_1(\Sigma_g; \mathbb{Z}) \\ H_{\mathbb{Q}} := H_1(\Sigma_g; \mathbb{Q}) = H \otimes \mathbb{Q} \\ H_{\mathbb{R}} := H_1(\Sigma_g; \mathbb{R}) = H \otimes \mathbb{R} \end{cases}$$

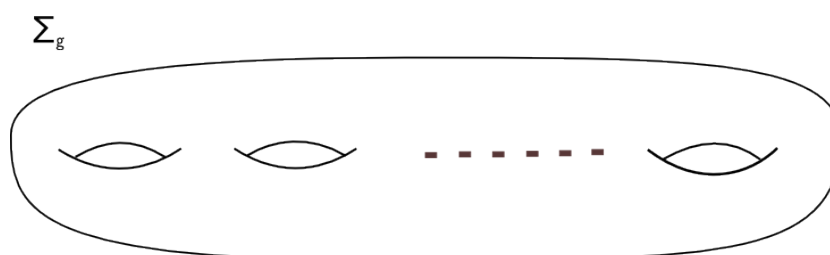
この上にいろいろな構造があるという事をだんだんやります. intersection form をやろうと思ったけど, ちょうどベルもなったし, ここでやめますけれども. いまは単なる自由 abel 群ですが, その上に intersection form があって, それがいろいろと不変量を作りだします.

一言だけ言いますと、この講義の目的なんですが、特性類というと Chern-Weil 理論というのがあります。この講義ではこれを解説することはあまりしません。もちろん時々話します。あえて言うと、symplectic 群、これから Poincaré の考えた intersection form を高次に一般化するといろいろ不変量が出てくる。コンピュータで実験できるので、面白い。Chern-Weil 理論と独立というわけではないが、これを心に、念頭におきながら、intersection form を高次に、高次のテンソルに拡張する。ここから不変量が沢山出てくる。これはコンピュータの計算になじむんです。今日はここまでとします。

2 曲面とシンプレクティック群

この前も言いましたが、まだプランが出来上がっているわけではありませんが、夏休み前まではできています。今日のタイトルですが、曲面と symplectic 群、一応こういうタイトルにします。symplectic というのはいろいろな所に出てくるキーワードの一つです。この話でも大事な主役の一人です。ちょっとだけ復習しておきます。

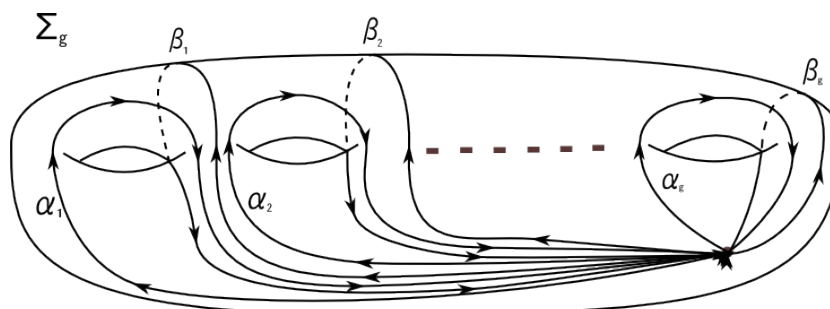
曲面 Σ_g , 絵で描きますと



向き付けられた種数が g の閉曲面. g というのが種数. 前回やったように、曲面は大雑把に3種類に分けるとすると、

- $g = 0$: この場合 Σ_0 というよりは2次元の球面 S^2 .
- $g = 1$: これがトーラス T^2 .
- $g \geq 2$: 2人乗り, 3人乗りの曲面, 無限個.

基本群でいうと単連結, abel 群, abel 群ではない. homology 群に落としますと rank は違いますが, すべて自由 abel 群になります.



それで前回やった基本群の generator と homology に落つことしたものをを使うので、基本群の generators;

$$\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_g, \beta_g.$$

cell 分割の観点では線は離れた方がよいのです。全部は描きませんが、 g 番目の所に行くようになります。これで cut するともう描きませんが、 $4g$ 角形ができて通常の張り合わせの絵が出てきます。

基本群を書きますと、 $g = 0$ のときは何もありませんが、

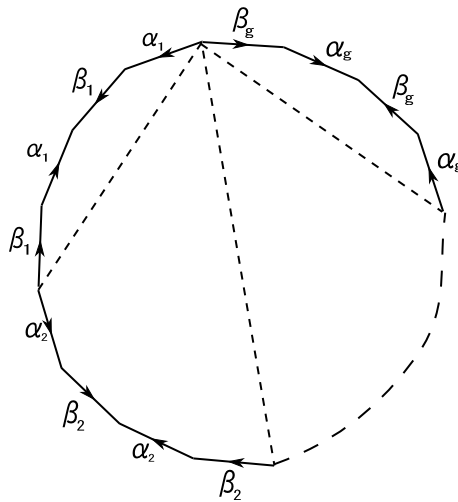
$$\pi_1(\Sigma_g) = \langle \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_g, \beta_g; \zeta_g = [\alpha_1, \beta_1] \dots [\alpha_g, \beta_g] \rangle$$

一つ relation があるので ζ_g , 数学の人が ζ と書いたらまず Riemann zeta を想像する人が多いと思いますが、今日はこちらも出てきますので、両方に使います。交換子, こういう 1 つの relation. $g = 1$ のときは able 群, $g \geq 2$ のときはそうではない。

ここから homology に落とすわけですが, abel 化, 一般に群があったとき重要な abel 化という操作があります。こういう風にやりますと, 抽象的には rank $2g$ の自由 abel 群です。

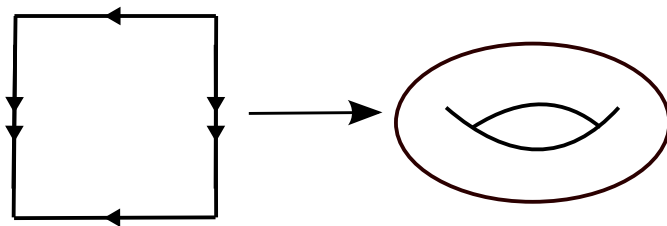
$$H := H_1(\Sigma_g; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{2g}.$$

ここで $\alpha_1 \mapsto x_1, \dots, \beta_g \mapsto y_g$ とやりますと H の基底になる。これは canonical, 自然にあるわけではなく, 絵を描いたら対応して 1 つある。それでこれから $4g$ 角形の cell 分割に行くわけですが、

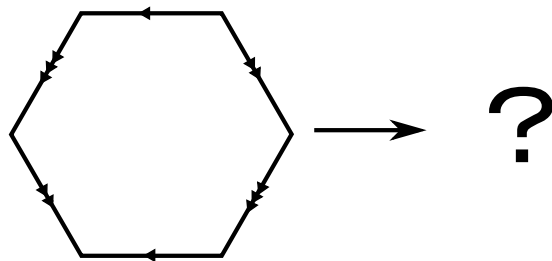


この 4 つが一つの unit になって, $4g$ 角形, cell, この境界が ζ_g , 1 周すると ζ_g でこれが cell を bound しているから基本群の中で自明になる。これは皆さんよく知っている事です。これは standard ですが, cell 分割には多様性がある。

これはいわば 1 番経済的な cell 分割になっているわけですが, cell 分割は多様なわけですが。例えば, トーラスを書きますと,

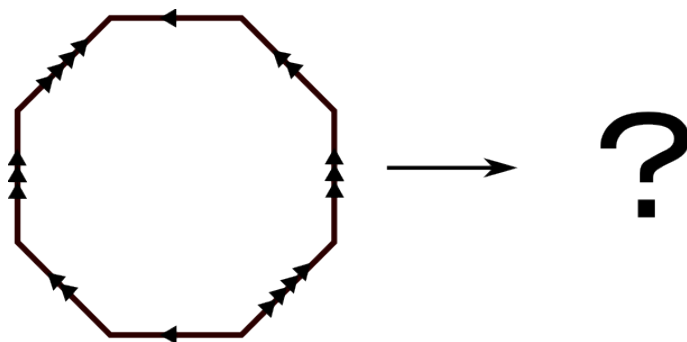


これを unit として, puncture を開けて g 個 connected sum すると, 種数 g の曲面が得られます. これからこういう風にも考えることができます. 4 角形の次にこれを 6 角形にして,



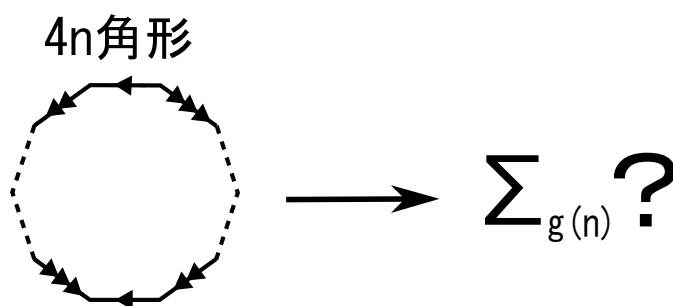
対面を同一視するとある Σ_g が出てきます. これはなんでしょう. 4 年生, 3 年生で, Euler 数を勉強した人は実験して見てください. これもトーラスになります.

次は 8 角形. 一般に $2n$ 角形です.



$\alpha_1, \alpha_2, \dots$, これはすぐ忘れてほしい α_1 . これを張り合わせるとやはり閉曲面. これは何でしょう. 4 年生の人は実験してみてください.

6 角形, 8 角形, 一般に $2n$ 角形も考えられます. $2n$ 個の対面をペアにして張り合わせる.



これはどうなるか. 種数は何でしょう. ちょっとやってみてください.

これはお遊びみたいに見えるかもしれませんが, 曲面の cell 分割から何回か後に出てくる, Riemann 面上の複素構造全体, 種数 g の Riemann 面の moduli 空間 $\mathbb{M}_g$, これの cell 分割, 但し ideal な cell 分割が得られます.

これは 1980 年代に何人かの人が, 大雑把には 2 つの流れがありますけれど, 1 つは複素解析的な流れ, もう 1 つは微分幾何的な流れ. 複素解析的な方は Strebel の理論があって, それを使うと, 名前を書きますと, John Harer, それから代数幾何の Mumford. それから微分幾何的な方という Penner, この間に Thurston も絡んでいます, Bowditch-Epstein.

これは秋頃に moduli の cohomology の話をちょっとするので出すかもしれません. それで定理というのは, 独立の結果で論文は 1986 年. Harer-Zagier のは Inventiones に出た論文, Penner は Journal of Differential Geometry に出ました.

Theorem 2.1 (Harer-Zagier, Penner). $\chi^o(\mathbb{M}_g) = \zeta(1-2g)/2 - 2g$ ($g \geq 2$).

cell 分割をしたからその数の交代和を取れば, Euler 数が出てきます. それで moduli の Euler 数を計算しました. 但し特異点があるので orbifold Euler 数 χ^o . これを Harer-Zagier は計算しました. 答えは Riemann zeta 割る曲面自身の Euler 数. $g = 1$ のときはゼロになってしまうのですが別な話が有ります. これは非常に有名な定理です. 証明もそのアイデアも非常に美しいものですが, その根本に有るのは cell 分割の多様性. 全ての cell 分割を数え上げる事です. 2 次元は非常に理想的な世界なので, cell 分割と複素構造が相性が良い. 非常に大雑把にいうと, cell 分割と複素構造がある意味で 1 対 1. 1 対 1 というか Teichmüller 空間が cell なのです.

これはちょっと先取りし過ぎたんですけども, 今日と次回までは一つの曲面の事をやっています.

特性類と不変量というので, さっき genus がありました.

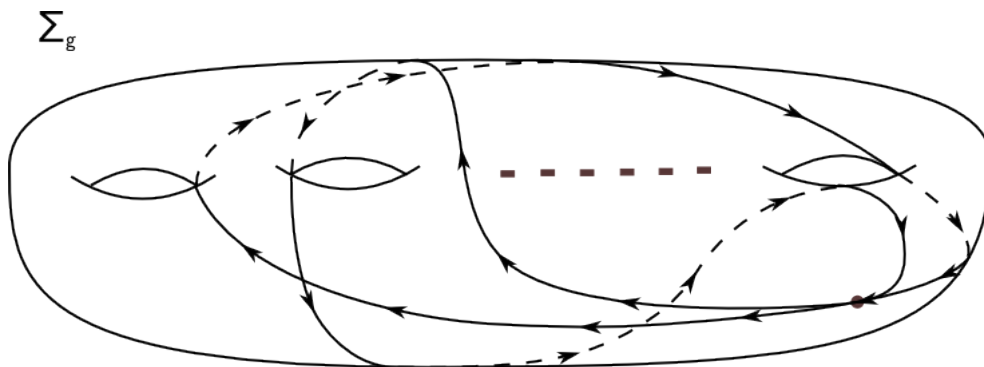
$g = \frac{1}{2}b_1$ ($b_1 = \text{rank} H_1(\Sigma_g; \mathbb{Z})$) であり, $b_1 = \text{rank} H_1(\Sigma_g; \mathbb{Z}) = 2g$. b_1 は一般に位相空間があったときに定義されます. 不変量の代表選手ですね. 絵で描いた浮き輪と思うと g は定員の事です. genus は前回の Sullivan の例もあったように絵からすぐにはわからない. homology 論が展開されて first Betti number, もちろん homology 論が展開されると, second Betti number, third と展開されるのですが, g というのがどのように

出てくるかを説明して、symplectic 群というのを今考えていますが、symplectic 幾何からどのようにでてくるか、それを高次のテンソルへ拡張して不変量を沢山つくろうというのが戦略です。

H , ここに構造が入ります。

$$\iota : H \times H \ni (u, v) \mapsto u \cdot v \in \mathbb{Z}$$

絵で説明しますと、



2つ homology 類 u, v があったときに、homology が u になるような基本群の元があります。もう一つ v に対しても基本群の元を取ります。intersection number がどのように定義できるかと言いますと、ホモトピーで動かして横断的に交わるようにする。今矢印があるから、今の場合は $\pm$, 符号は今の場合は $+1$.

こういうのを intersection number, 交差数といいます。この性質を書きますと、大事な性質、まず

- bilinear(双線型)

$$(a_1 u_1 + a_2 u_2) \cdot v = a_1 u_1 \cdot v + a_2 u_2 \cdot v \quad (a_1, a_2 \in \mathbb{Z}, u_1, u_2, v \in H)$$

後ろの方 v に関しても同じです。

- skew-symmetry(歪対称).

ひっくり返すとどうなるか、歪対称というのは字面もよくないですが、これは

$$v \cdot u = -u \cdot v.$$

一般の多様体の交差理論というのがだんだんその後発達して、偶数次元、中間次元の多様体のサイクルの intersection, 一番大事な、初等的だけど大事なものですね。奇数次元、1 次元の homology なので skew-symmetric. 符号がないと symmetric. 4 次元多様体になると中間次元が 2 次元と 2 次元で intersection number があるけれど、これは 4 次元多様体の最も基本的な一番大事な不変量で、このときは symmetric. 高次のテンソルをやると、この講義はずっと最後まで曲面ですが、曲面の高次のテンソルをやると skew-symmetric pairing から symmetric pairing ができて、そこから実際内積を定義するというのを次回にやります。

- non-degenerate(非退化)

もう一つの性質。

$$u \cdot v = 0 \text{ for all } v \Leftrightarrow u = 0$$

右から左は当たり前ですが、全ての v に対してゼロなら $u = 0$. これが non-degenerate です.

この3つの性質、その3番目、この non-degenerate の性質から準同型写像

$$H \rightarrow \text{Hom}(H, \mathbb{Z}) = H^*$$

が定義される. すなわち homology 類 u に対して,

$$f_u : v \mapsto u \cdot v$$

これ自身が準同型で non-degenerate ということからこれが同型になる. 現在では Poincaré duality という. Poincaré が最初にやった Poincaré duality のとき曲面を想定していたかどうか. その当時は cohomology はなかった. 現代流に言えば,

$$H = H_1(\Sigma_g; \mathbb{Z}) \cong H^1(\Sigma_g; \mathbb{Z}).$$

cohomology というのを我々は知っています. これが canonical に同型で, canonical というのが重要で, 抽象的にはもちろん同型です. 基底とか一切関係なく, いわば, 天与の同型がある. これが Poincaré dual の内容です. この証明, 曲面の場合は3角形分割して2回重心細分すると dual cell 分割がある. これは Poincaré は知ってたのでしょうか. 普通 Poincaré duality というとは3次元をやっていて, 3次元の

$$H_1(M^3; \mathbb{Z}) \cong H^2(M^3; \mathbb{Z})$$

がまず頭に有ったのかな, と思います. 今はこれは位相多様体でも, あるいは Poincaré duality complex という概念も出てきますし, これは向き付け可能でない場合は twisted にして Poincaré-Leftschitz duality も有ります.

秋頃に一つ Poincaré duality がこんなに力があるというのを, 私自身再認識したのをご紹介したいと思います.

さっき homology の基底をあげたのですが, ι との関係は,

$$x_i \cdot x_j = 0, y_i \cdot y_j = 0, x_i \cdot y_j = \delta_{ij},$$

これは非常によい性質です.

$$H = \langle x_1, \dots, x_g, y_1, \dots, y_g \rangle$$

は基底になりますが, intersection number ι に関して, これは非常によい性質なので, このよい性質をもつ基底を symplectic basis と言います.

もちろん, みなさん当然の事で知っている事ですけど, symplectic 基底, これは無限個ある. 大事なことです. それを一番簡単に証明しようとする,

$$x_1, x_2, \dots, x_g, y_1, \dots, y_g,$$

これが symplectic 基底だとすると, 1ヶ所だけ, 任意の n について, 例えば x_1 を $x_1 + ny_1$ と取り替えても symplectic 基底になる. 1万でも100万でも構わないので無限にある. 100万倍は汚いように見えるかもしれませんが, まったく平等です.

この話の飛躍というのは, (H, ι) をペアにするとこれが主役になる. それでちょっと cocycle というか, 秋頃からだんだん群の cocycle というのをやっていきますが, もういちど書くと, これは2次元の cocycle であって, 係数は $\mathbb{Z}$.

$$(H \times H \xrightarrow{L} Z) \in Z^2(H, \mathbb{Z})$$

すぐに Jacobi 多様体というのをやりますが、 $g \geq 2$ のときは

$$(\pi_1 \Sigma_g \times \pi_1 \Sigma_g \rightarrow H \times H \rightarrow \mathbb{Z}) \in Z^2(\pi_1 \Sigma_g, \mathbb{Z})$$

これは曲面の場合には、もともと目に見えて cell 分割もできるし、homology もすぐ計算できるからあえて簡単なものを殊更難しくしているように見えるかもしれません。一般化する場合にはこういう視点が大事なわけです。abel 化してくっつける。

Jacobi という数学者がいますが、その人の名前をとって Jacobi 多様体と呼ばれるものがあります。ひとつの多様体の構造の研究の方向です。一般の位相空間に対して定義されますが、曲面の場合をやります。すぐに一般化できます。Jacobi さんに敬意を表して *Jac* と書きます。定義は簡単でまず実係数の homology $H_1(\Sigma_g; \mathbb{R})$ を取ります。その中に整数係数の homology $H_1(\Sigma_g; \mathbb{Z})$ が部分群として入っていて、その商を取ります。

$$\begin{aligned} Jac &= H_1(\Sigma_g; \mathbb{R}) / H_1(\Sigma_g; \mathbb{Z}) \\ &= H_{\mathbb{R}} / H \\ &= \mathbb{R}^{2g} / \mathbb{Z}^{2g} \end{aligned}$$

一般の場合には torsion が有りますが、torsion は割っておきます。抽象的には $\mathbb{R}^{2g}$ の中の lattice $\mathbb{Z}^{2g}$ で割ったものです。しかし、こう書くのは canonical ではない。座標、さっきのように symplectic basis を取るとこう書ける。しかしこう書くと $\mathbb{R}/\mathbb{Z} = S^1$ ですから、抽象的には $(S^1)^{2g}$ となり $2g$ 次元のトーラスになる。

これは位相空間のある情報を与えているわけですが、Jacobi 多様体をいわば位相空間を調べる第 1 近似として、第 2 近似、第 3 近似、一般に第 n 近似を調べるというわけです。第 n 近似を調べると言いますが、第 2 近似でもすでに難しいですね。それも秋頃やりますが、第 2 近似の homology の計算というものも調べるとあまりないですけど、自由群の場合でも第 2 近似は難しい。2-step nilpotent group といいます。homology は 1960 年代 Schick という人が計算しています。Young 図形を使った計算です。それを symplectic group の作用の立場からどうなるか、computer を使った計算を秋頃紹介します。

それは例えば Riemann 面の moduli の関係でやったのは、Getzler という人が一つだけ仕事があります。多分それぐらいしかないと思います。第 1 近似はトーラスですから homology は簡単です。第 2 近似はトーラス上のトーラスバンドルだからモノとしてはきれいだけど計算できない。

これをもう少し幾何学的に記述するとすると 1 次元の実 homology ですから、1 次元の de Rham cohomology を使うとすると de Rham の定理から

$$Jac = H_{DR}^1(\Sigma_g)^* / H_1(\Sigma_g; \mathbb{Z})$$

となります。そうすると abel-Jacobi map をこれで作る事ができます。 $H_{DR}^1(\Sigma_g)$ を生成するように今 closed 1-forms

$$\omega_1, \dots, \omega_g$$

を取ります。ちょっと余談ですが、abel-Jacobi map の a は小文字。これはもちろん固有名詞ですが、非常に偉くなると普通名詞のようになって偉くなると小文字になります。Galois の cohomology も galoisien. でも Galois group は大文字ですね。これはちょっと余談です。 C^∞ -写像として abel-Jacobi map

$$f : \Sigma_g \rightarrow Jac$$

が定義できます。それはどうやるかと言いますと、まず base point p_0 を取ります。一般の点 p の行き先を基点 p_0 から p まで積分して closed 1-form $[\omega]$ に対して

$$([\omega] \mapsto \int_{p_0}^p \omega)$$

と対応させる事により、 $\Sigma_g \ni p$ に対して $H_{DR}^1(\Sigma_g)^*$ の元が定まります。dual ですから微分形式に対して値を対応させます。

これは Euclid 空間の中だったら closed 1-form の積分は path に依りませんが、いま Σ_g は topology があるので、path に依って値が変わってきてしまいます。それを周期というわけです。周期という $H_1(\Sigma_g; \mathbb{Z})$, 閉じた path 上=サイクル上の積分の値に対応した任意性が出てくる。従って

$$f: \Sigma_g \rightarrow H_{DR}^1(\Sigma_g)^*/H_1(\Sigma_g; \mathbb{Z})$$

が得られました。 $\omega_1, \dots, \omega_{2g}$ を取ると $\mathbb{R}^{2g}/\mathbb{Z}^{2g}$ への写像になります。一般の多様体上でも周期の理論は大切な理論です。

それですね、これは非常に任意性が沢山あって、 Σ_g にひとつ微分構造を選んで基点を取って de Rham cohomology の積分を考えて、任意性が有りすぎる。Riemann 面というきれいな構造があると、

$\mathcal{R}$: genus g の Riemann 面。

Riemann の名前は前回もでした。 Σ_g に複素構造が入るとすると abel-Jacobi map, これがそもそもの abel-Jacobi なんですが、複素構造が入ると任意性を取ることができる。複素構造に対応した正則な 1-形式をとると、

$$f: \mathcal{R} \rightarrow Jac(\mathcal{R}) = H^0(\mathcal{R}, \Omega^1)^*/H_1(\mathcal{R}, \mathbb{Z})$$

こうすると任意性が全くなくなるんですね。もちろん base point は選ばなくては行けないですが、base point を変えたとここの Jac の平行移動の分だけずれていきます。 $\mathcal{R}$ は複素 1 次元の多様体で、 Jac は g 次元の複素多様体、複素トーラスになり、Riemann 面の場合はこの写像が holomorphic な embedding になるわけです。これも 2 次元の世界が理想的という一つの証なんです。

こういうものがあるというのを念頭において、この話は topology の話で十分で homology 論で考えます。

$$f: \Sigma_g \rightarrow Jac = T^{2g}$$

を考える。何を考えるかという種数 g は first Betti number の半分ですが、この種数 g を abel-Jacobi map から再現しましょう。これはよく知られた事ではあるのですが、これを念頭に高次のテンソルにそれを一般化していくといろいろなモノが出てきます。そういう話をします。

これは多様体から多様体への連続写像ですから、homology 群上の写像、homology 上

$$f_*: H_*(\Sigma_g; \mathbb{Z}) \rightarrow H_*(Jac; \mathbb{Z}).$$

同時に cohomology も考えておきましょう。

$$f^*: H^*(Jac; \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(\Sigma_g; \mathbb{Z}).$$

これはどうなるか？

この写像をもとに元々の曲面の homology を調べるのですが、何度も言っているように、曲面の場合は Jacobi 多様体を考えなくても cell 分割ができて、homology は計算できているんだからこの上何をしましょうという事になるんですが、一般の次元に拡張する場合、例えばここに Riemann 面の moduli が来た場合は、cell 分割がわかっているから有限だから、homology は計算できるだろうといっても、種数 7 とか 8 で super computer を使っても、だめになります。memory が問題になり膨大な計算になります。一般の空間では cell 分割すらわからない。

Jacobi 多様体はそれに比べてずっとわかりやすい。基本群は非可換な事が多いですが、可換になるとこちらはトーラスですから、ずっとわかりやすい。わかっているのが abel-Jacobi map から情報が出てくるだろう。そういう戦略です。

そうするとまず $H_*(Jac; \mathbb{Z})$ を書かなくてははいけない。抽象的には $2g$ 次元のトーラスですが、それで Grassmann がでてくるわけです。答えから言ってしまうと、 $\mathbb{Z}$ 上の Grassmann algebra が出てくる。

まず生成元を書きます。 $H_1(\Sigma_g; \mathbb{Z}) \xrightarrow{f_*} H_1(Jac; \mathbb{Z})$. これは canonical に同じもの、同じものというか identity ですから、 $H_1(Jac; \mathbb{Z})$ も H と同一視します。そこで canonical ではないが、基底があったので、

$$H = \langle x_1, \dots, x_g, y_1, \dots, y_g \rangle$$

を一つ固定する。そうすると、

$$H_*(Jac; \mathbb{Z}) \cong \Lambda_{\mathbb{Z}}^* \langle x_1, \dots, x_g, y_1, \dots, y_g \rangle.$$

これを exterior algebra, Grassmann algebra ともいう。Grassmann 多様体といいます。これは前回触れた Riemann の講演より前ですから、多様体という概念は Grassmann にはなかったと思います。なぜこういうものを Grassmann algebra というのでしょうか。

参加者から：Plücker は 1806 年とか 1808 年くらいに生まれて 1860 年代には亡くなった人です。Plucker embedding という仕事があって、この頃多様体という意識があったはずではないでしょうか。embedding ですから。

この講義は数学史の講義ではないので続けましょう。同一視をするから H の元 $x_1, \dots, x_g, y_1, \dots, y_g$ は Grassmann algebra の生成元になっています。普通は体 $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ でやりますが、 $\mathbb{Z}$ 上でできます。この Grassmann algebra, これは何かというと次のような直和

$$\bigoplus_{k=0}^{2g} \Lambda_{\mathbb{Z}}^k$$

になります。ここで

- $\Lambda_{\mathbb{Z}}^1 = H$
- $\Lambda_{\mathbb{Z}}^2 \ni x_1 \wedge y_2, \dots, \text{etc.}$
- $\vdots$
- $\Lambda_{\mathbb{Z}}^k \ni \sum_{i_1, \dots, i_k} z_{i_1} \wedge \dots \wedge z_{i_k} \quad (z_{i_1}, \dots, z_{i_k} \in \{x_1, \dots, y_g\})$

理論的にはこれは定義ではないが、実際計算するときはこれがないと話にならない。定義と思える。これが同型だということですね。 $H_2(Jac; \mathbb{Z}) \ni x_1 \wedge y_2$ という homology 類がありますが、これはどういう homology かと考えると、 x_1, y_1 は $S^1 \rightarrow Jac$ ですから $S^1 \times S^1 \rightarrow Jac \times Jac$. Jac 自身が今群になっていますから、

$$Jac \times Jac \rightarrow Jac$$

を合成すると、

$$S^1 \times S^1 \rightarrow Jac$$

2次元のトーラスから Jacobi 多様体に連続写像があることになります。つまりトーラスの基本類が Jac にどう送られるかです。これは具体的なサイクルになります。そうすると、定義されているのは2次元の多様体ですから、次数が3以上になると $f_* : H_3(\Sigma_g; \mathbb{Z}) \rightarrow H_3(Jac; \mathbb{Z})$ はゼロ、自明な写像になります。そうするとつまらないと思うかもしれませんが、cohomology で考えると自明ではない、2次元の所で考えると $f_* : H_2(\Sigma_g; \mathbb{Z}) \rightarrow H_2(Jac; \mathbb{Z})$ 。いま向きを固定してあるので、 $H_2(\Sigma_g; \mathbb{Z})$ は canonical に $\mathbb{Z}$ と同型です。この中に $1 = [\Sigma_g]$ という基本類があるわけですが、この行き先はなにか？

$$\mathbb{Z} \ni 1 = [\Sigma_g] \mapsto ? \in \Lambda_{\mathbb{Z}}^2$$

Riemann 面だとすると abel-Jacobi map は canonical と言いました。基底の取り方などに依らないわけですね。行った先は非常に格調高いクラスであると思われます。答えは symplectic class と呼ばれる

$$\omega_0 = x_1 \wedge y_1 + \cdots + x_g \wedge y_g.$$

このように書く基底に依っているわけですが、どのように書いたとしてもそのクラスは決まっている。そういう由緒正しいものです。これが symplectic 幾何の全ての源になるわけです。

これは今 homology で書きましたが、cohomology に移りましょう。dual に移ると、これは理論上も実際の計算上も意味があつて

$$f^* : H^*(Jac; \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(\Sigma_g; \mathbb{Z}).$$

そうすると $H^*(Jac; \mathbb{Z})$ も Grassmann algebra ですが、cohomology ですから dual になります。 x_1 は homology 類だったのですが、Jacobi 多様体の座標とも思えるので、その微分、1-形式と思えます。従って

$$H^*(Jac; \mathbb{Z}) \cong \Lambda_{\mathbb{Z}}^* \langle dx_1, \dots, dx_g, dy_1, \dots, dy_g \rangle,$$

こうなります。そうすると先ほどの ω_0 、由緒正しい座標の dual があるわけで、

$$\omega_0^* := dx_1 \wedge dy_1 + \cdots + dx_g \wedge dy_g.$$

こういうものになります。Jacobi 多様体ですから lattice で割っているんですが、2g 次元の symplectic vector space $\mathbb{R}^{2g}$ 、今曲面ですから 2g ですが、一般の場合には 2n. symplectic 幾何が出てきたのは、曲面だけではなく物理学、Hamilton 力学など幾つか源があります。そちらの場合は 2g ではなく 2n になります。その座標が $\mathbb{R} \langle x_1, \dots, x_g, y_1, \dots, y_g \rangle$ 、一般の場合には x, y ではなく p, q と書く事もあります。座標の入った symplectic vector space

$$\mathbb{R}^{2g} \langle x_1, x_2, \dots, x_g, y_1, y_2, \dots, y_g \rangle,$$

いま $\mathbb{R}$ 上で考えていますが、表現論などを使うとき、具体的な計算をするときは、これは理想的な世界なので有理数体 $\mathbb{Q}$ 上でできます。そうすると由緒正しいものの dual ですが、これは一体どこへ行くかといいますと、2次元の場合、 $H^2(\Sigma_g; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ で、ここにある 1 というもの、基本類 $[\Sigma_g]$ の dual $[\Sigma_g]^*$ が生成元です。それで行き先はどうなるかというと、これが種数 g です。

$$f^* : H^2(Jac; \mathbb{Z}) \ni \omega_0^* \mapsto g \in \mathbb{Z} \cong H^2(\Sigma_g; \mathbb{Z})$$

こうやって種数 g が abel-Jacobi map から再現されます。大袈裟な言い方をすれば symplectic 幾何学の中で種数がこのように出てくるわけです。

この講義ではこれを様々に一般化する、具体的に computer を使って高次のテンソルというものが出てくるわけですが、いまこの H の 2 次の外積とか g とか Grassmann algebra、それぐらいしか出ていませんが、それ

を symmetric algebra とか tensor algebra とか, Lie algebra とか拡張していくと沢山あります. それをどうやって取り出すか, computer で実験しながら, 理論と実際の計算を行ったり来たりしながら, いろいろなものができるので, 次回からだんだんその話をしていきます.

まだ symplectic 群がまだ出ていないので, 今日やらないと 2 回目のタイトルが嘘になってしまいますので. Diffeomorphism group, 一般に多様体 M があつたときに, $\text{Diff}M$ と書くと M の微分同相, ここに $+$ と書くと M が向き付けられたときに向きを保つ微分同相,

$$\text{Diff}_+\Sigma_g = \{f : \Sigma_g \rightarrow \Sigma_g, \text{orientation preserving diffeo.}\}$$

これは合成によって群になる. 位相は C^0, C^∞ , Whitney 位相などいろいろ有ります. 位相は大事なんです, この話では位相はあまり使いません. ちょっとだけ使いますが, isotopy, 単位元の連結成分で割るというところを使います. isotopy という relation があつて, 2つの微分同相が isotopy とは微分同相の族で結べる. homotopy よりかなり強いんですね. それで割ったものを mapping class group $\mathcal{M}_g$ といいまふ. これは別な書き方をすると, 単位元の連結成分で割る, あるいは連結成分のなす群になります.

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_g &= \text{Diff}_+\Sigma_g / \text{Diff}_0\Sigma_g \\ &= \pi_0\text{Diff}_+\Sigma_g\end{aligned}$$

こういう場合は自然な位相 C^0, C^1 など, どれを入れても一緒になります. これを写像類群, mapping class group と言いまふ. 今の場合 mapping といっても微分同相, class といっても isotopy class です. 一般の多様体にも mapping class group は定義できますが, isotopy class である事を強調するために, diffeotopy group と別な名前前で呼びまふ. mapping class というと写像の homotopy class になります.

曲面の場合は isotopy class も homotopy class も等価なんです. 但しこれは定理です, 定義ではない. 一般の多様体上で isotopy で割ったものと homotopy で割ったものは違ってきます. 通常は isotopy で割つて diffeotopy group と言いまふ. 2次元は何度か言ってますが, 理想郷なので homotopy class も isotopy class も全部一緒になる. 高次元だとそんな乱暴なという話になるんですが, 理想的な状況になっています.

それでトーラスの isotopy class, これは古典的に, canonical ではないが基底を一つ取つて,

$$\mathcal{M}_1 \cong SL(2, \mathbb{Z}).$$

これは係数を $\mathbb{Q}$ とか $\mathbb{R}$ にすると次回から表現論の話をしますが, Lie 群の表現論で基本的なものになります. 種数が 1 の場合ですね.

それでですね, $\text{Diff}_+\Sigma_g$ は homology H に作用する. homology への作用は $\mathcal{M}_g$ の作用に factor する. これは向きを保つ微分同相から来ているので, ι を保つ, これが大事なところ. そうすると結局表現ができるわけで, homology への作用を通して,

$$\mathcal{M}_g \rightarrow \text{Aut}(H, \iota)$$

が得られます. もし $\text{Aut}(H)$ だと rank $2g$ の自由 abel 群ですから群としての自己同型は $GL(2g, \mathbb{Z})$ ですが, これより小さくなります. これが具体的にどうかけるかということをやります. みなさんが全部知っているとすると時間の無駄, 無駄というか, でも少しだけやりまふ.

symplectic 基底 $x_1, \dots, x_g, y_1, \dots, y_g$ を固定すると, 行列群で書けて $Sp(2g, \mathbb{Z})$ という群と同型になります. この $Sp(2g, \mathbb{Z})$ がどういう群になるか計算しまふ. homology の元 $u, v \in H$ に対して, 基底があるので, 1 次結合で一意的に表せます:

$$u = u_1x_1 + \dots + u_gx_g + u_{g+1}y_1 + \dots + u_{2g}y_g$$

v の方も

$$v = v_1 x_1 + \dots + v_g x_g + v_{g+1} y_1 + \dots + v_{2g} y_g$$

と一意的に表せます. そうするとさっきの intersection number $u \cdot v$ はどうなるか, このとき symplectic 基底を考えているので, x_i たちは交わらない, y_i たちも交わらない. x_i と y_i のみ交わる. そこでこれは $2g \times 2g = 4g^2$ の中でほとんどのところが消えていきます. 残るところは

$$u \cdot v = u_1 v_{g+1} + \dots + u_g v_{2g} - u_{g+1} v_1 - \dots - u_{2g} v_g$$

とこうなります. これを $2g$ 次元の Euclid 空間の元だと思って $2g$ 次元の Euclid 内積で書いたとすると

$$\begin{aligned} u \cdot v &= u_1 v_{g+1} + \dots + u_g v_{2g} - u_{g+1} v_1 - \dots - u_{2g} v_g \\ &= (u, Jv) \end{aligned}$$

となります. ここで $2g$ 次元の行列ですけども,

$$J = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix} \in GL(2g, \mathbb{Z})$$

で E は g 次単位行列. それで H 上の ι を保つ auto の意味ですけども, 任意の $u, v \in H$ に対して, $A \in \text{Aut}(H, \iota)$ とすると,

$$Au \cdot Av = u \cdot v$$

これが ι を保つという事です. ところが $u \cdot v$ は Euclid 内積

$$u \cdot v = (u, Jv)$$

で, 一方左辺の方は

$$Au \cdot Av = (Au, JAv) = (u, {}^tAJAv)$$

となって, ι を保つという条件が任意の $u, v \in H$ に対して,

$$(u, Jv) = (u, {}^tAJAv)$$

という条件になります. この Euclid 内積はもちろん非退化ですから,

$${}^tAJA = J$$

と, これが symplectic 群の定義ですけど, これが出てくる. elementary な計算で出てきます. そこで

$$Sp(2g, \mathbb{Z}) := \{A \in GL(2g, \mathbb{Z}); {}^tAJA = J\}$$

これが定義です. Sp というのは symplectic の Sp です. 今曲面から出発してその曲面上の intersection form を保つというところから, 出てきましたけれども, いろいろ数論でも出てきます. 保型形式とか. 数論の人はこの群を Siegel modular group といいます. さっき mapping class group のとき, 言い忘れましたが Teichmüller modular group とも言うというのを忘れましたけれども, これは Siegel modular group, あるいは $Sp(2g, \mathbb{Z})$ は symplectic group とも言います. 但し $\mathbb{Z}$ 上の symplectic group ですね. この係数を表現論なんかをするとき, $Sp(2g, \mathbb{Z})$ の表現論というのは永遠に終わらない, どうにもならないものですけども, これを体にする, 係数を $\mathbb{Q}$ とか $\mathbb{R}$ にすると, 行列を $GL(2g, \mathbb{Q})$, $GL(2g, \mathbb{R})$ の中で考えるだけで定義式は全く同じです. これがその intersection form を保つ自己同型から出てきた Lie group なわけです. $\mathbb{Z}$ はともかく $\mathbb{Q}$ や $\mathbb{R}$ はですね.

Lie group の系列がありますけれど、 C 型という系列です。 $Sp(2g, \mathbb{Z})$ と書くと基底によっているから、 $Sp(H)$ と書いた方が良くも知れませんが ι は書かれていませんが ι を保つ symplectic Jacobi 多様体との関係を見ると、 $Jac \cong T^{2g}$ で $x_1, \dots, x_g, y_1, \dots, y_g$ は基底ですが、座標とも思えます。曲面上の homology だったのだけれども、Jacobi 多様体上の座標になります。そして Sp の元は行列ですけどここに作用します。線型変換として作用します。これは symplectic 多様体で

$$\omega_0^* = dx_1 \wedge dy_1 + \dots + dx_g \wedge dy_g$$

が symplectic form になります。 (T^{2g}, ω_0^*) 、これが symplectic 多様体の基本的な例になります。symplectic 幾何学というのは今非常に盛んですが、1980 年代 Gromov 以来革命的に変化して、symplectic 幾何学自体は前から有るわけですが、革命的に変化してトポロジー、微分幾何、大域解析、あるいは物理も巻き込んで大きな流れになっています。その一番 standard な例です。そこで ω_0^* を保つ微分同相写像全体を、symplectomorphism group とよび、あまり elegant な呼び方ではないですが、完全に認知されています。一般には symplectic 多様体があったときに、symplectic form を保つ微分同相全体を symplectomorphism group とこう呼び、

$$Symp(M, \omega)$$

とこう書くわけですが、これが非常に大事な幾何学、あるいは代数の対象になっています。

それで次回、あるいは秋にどうなるかということの予定だけ書きます。cohomology の dual、これは次回にまわす事にします。Jacobi 多様体の $\mathbb{Z}$ -係数 cohomology、これはさっき言ったように Grassmann 代数。一方で Jacobi 多様体に $Sp(2g, \mathbb{Z})$ は線型に作用します。線型に作用するから cohomology にも作用します。それで右上に Sp と書いたら、一般に群が作用する module が有って、その右上に作用している群を書いたら、その作用で動かない元の全体を表します。この場合どうなるかということ $\mathbb{Z}$ 上の多項式代数で次のようになります。

$$H^*(Jac; \mathbb{Z})^{Sp} \cong \Lambda_{\mathbb{Z}}^*(H)^{Sp} = \mathbb{Z}[\omega_0^*]/((\omega_0^*)^{g+1}) \cong H^*(\mathbb{C}P^g; \mathbb{Z})$$

この cohomology はトポロジーでは重要、というか、数学全体で非常に重要な複素射影空間の cohomology が出てきます。これはただ単に等しいから一緒になったわけではなく、分類空間の、必然性のある同型です。

先ほどちょっとと言いましたが、今は一つの曲面に付いてやっていますが、これをさまざまに一般化できます。少しだけ書きます。

- moduli space (Riemann surface), ただ moduli space と言ったら Riemann 面の moduli.
- graph の moduli space, これは自由群と関係があります。
- 絶対ガロア群 $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$
- $\Theta_{\mathbb{Z}}^3$, 3次元 homology 球面の 3次元 homology 同境界群
- 4-dimensional topology: Freedman (topological category), Donaldson (smooth category).

4次元では topological category と smooth category が決定的に違う事がわかっているわけですが、これは単連結でわかっている事です。基本群の元がいっぱいあると自由 abel 群の場合など Freedman による結果がありますが、基本群が非常に大きい場合にはあまり結果がない。生物学的に有限なので間に合うかどうかわかりませんが、これを目指す。topological category と smooth category の違いを symplectic の立場からこれを目指す。方法としては representation theory.

今回は表現論の話をしてします。これは一大理論なんですが、まず有限群の表現論。100 年くらい前、1900 年 Frobenius。この人も非常に沢山の事をやっていて、最近では Frobenius 多様体というものも有ります。まず有限群、特に対称群の表現論をほとんど独力でやってしまった。

Lie という人が Lie group, Lie algebra の理論をやり、それを使って、1932 年 H. Weyl, 非常に巨人の数学者です。Riemann 面の有名な本があります。Riemann 面は複素 1 次元多様体であると喝破した。それは今は勉強していれば何でもない事です、それが非常に深い事なんです。

トポロジーの関係でいうと signature という大事な不変量、特に 4 次元多様体の不変量があります。中間次元に symmetric な bilinear form があると、signature という正の固有値の数と負の固有値の数の差。これも Weyl の言葉であって、だんだんこの話に出てきますが、表現論関係でいうと、Lie group です。Lie group の表現論をやって、1930 年代に種数 1 の場合の homology、これは特別な場合ですけれども、高次のテンソルの変形に関する論文があるんですね。

この 2 つ、有限群と Lie group を統一した、もちろん、いろいろな人の仕事があります。Schur という人の仕事、Schur の相互律。有限群、置換群と Lie group の表現論、Frobenius の相互律というものもあります。そして Schur の相互律、基底にある曲面の homology $H(H_{\mathbb{Q}}, H_{\mathbb{R}})$ からいろいろな高次のテンソル、例えばテンソル代数 $T(H), L(H), \Lambda^*(H), S^*(H)$ などの Sp -不変元、特に 2 次元 cohomology, cocycle を一杯作ろうと思ったら、Frobenius, Weyl, を Schur の考えで統一する。

例えば、 $H_{\mathbb{Q}}^n$ に左から $\mathfrak{S}_n$, 右から $Sp(H)$ が作用して、これは交換可能な作用です。これを行ったり来たりしようというのが Schur の相互律です。Weyl が character というもの、もちろん Frobenius が有限群の character は考えていて、対称群の表現論を完成させています。ここら辺を使って勉強しながら、話を進めます。そしてコンピュータを使って証明する。今回はここら辺りの歴史的な表現論の話をして。

第3回 (2010年7月7日)

次回は9月1日ですね。今日は表現論の話をしようと思っていたのですが、最近予想していた事がそうではない、という事を別な人がアナウンスしまして、それについて考えていくともう少し準備した方がよいかなと思いました。それで今日は3回目ですが、前回の「曲面と symplectic 群」の最後のところがまだ終わっていないので、まずそこから始めます。しばらく復習, notation です。

一番の主演, 種数 g の向き付けられた閉曲面の 1 次元 homology 群.

$$H := H_1(\Sigma_g; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{2g}$$

この話では $g = 1$ もときどきやりますが, メインは $g \geq 2$ です. この H 上に intersection form,

$$\iota : H \times H \ni (u, v) \mapsto u \cdot v \in \mathbb{Z}$$

というのが定義されて, これがいろいろな不変量を出すものの大本なのです. skew-symmetric, bilinear, non-degenerate という非常によい性質を持っています.

intersection form に関してよい性質をもつ H の basis を symplectic basis と呼びました. symplectic basis は無限個存在するのですが, 2 回目で絵を描いたように, 絵を一つ描くと定まり, 一つ固定すると $H \cong \mathbb{Z}^{2g}$ となります.

この symplectic form を保つような自己同型を考えていくと, ι がないとすると $H \cong \mathbb{Z}^{2g}$ の自己同型は $GL(2g, \mathbb{Z})$ に同型ですが, symplectic basis を一つ固定すると具体的には symplectic 群というもの

$$\text{Aut}(H, \iota) = Sp(2g, \mathbb{Z}) (\subset GL(2g, \mathbb{Z}))$$

となっています.

種数 1 の場合をときどきやると言いましたが, 表現論をやっていくと symplectic 群の表現は SL の表現に比べて少し難しくなります. $g = 1$ のときは C 型というよりは A 型, $SL(2, \mathbb{Z})$ なので, これは橋渡しをするので remark として書いておきます. 何も言わないで modular 群と言えば, $SL(2, \mathbb{Z})$ で

$$SL(2, \mathbb{Z}) = Sp(2, \mathbb{Z})$$

となります.

次に曲面の写像類群, これがだんだん具体的に出てきますが, 定義はどうだったかという, 曲面の向きを保つ微分同相群を isotopy という同値関係で割った群,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_g &= \text{Diff}_+(\Sigma_g) / \text{isotopy} \\ &= \pi_0(\text{Diff}_+(\Sigma_g)) \end{aligned}$$

離散群で $\mathcal{M}_g$ の自然なトポロジーは discrete, $\text{Diff}_+(\Sigma_g)$ の連結成分のなす群とも思う事ができました. それで写像類群は, 曲面の 1 次元 homology 群 H にも幾何学的な intersection form を保って作用しますから, 古典的な表現

$$\rho_1 : \mathcal{M}_g \rightarrow Sp(2g, \mathbb{Z})$$

が得られます. これを写像類群の第 1 近似と考えるので ρ_1 と書きます. homology への作用を通して行列表現が得られるわけです. 私は原典を当たったわけではありませんが, これが全射だというのは 100 年以上前, 1890 年代に Klein, Fricke たちが活躍していたときにすでに証明されていたそうです.

証明はどうやるかという、1890年代にどうやったかは知りませんが、群ですから、まず生成元というのを見つけるのが大事です。生成元を見つけたらそれが微分同相から来る、という事が比較的簡単にわかります。この群 $Sp(2g, \mathbb{Z})$ の表示というのは Birman さん、結び目とか3次元多様体論の偉い人ですね、もう84歳くらいでしょうか。この表示は1972年頃の Math. Ann. の有名な論文に出ています。

$g = 1$ のとき ρ_1 は同型なのですが、この場合 torus ですから、torus の微分同相の isotopy 類は homology への作用だけで決まってしまう、 ρ_1 は同型になります。

$g \geq 2$ のときはこれが単射からは程遠くて kernel を Torelli 群と言い、

$$1 \rightarrow \mathcal{I}_g \rightarrow \mathcal{M}_g \xrightarrow{\rho_1} Sp(2g, \mathbb{Z}) \rightarrow 1$$

と書きます。Torelli なので Torelli 群を $\mathcal{T}_g$ と書きたいところですが、Teichmüller 空間の事を通常 $\mathcal{T}_g$ と書くので、Torelli 群は $\mathcal{I}_g$ と書きます。これは Dennis Johnson の記号です。これが非常に大きな群になります。写像類群の研究は、まず $Sp(2g, \mathbb{Z})$ があるわけですが、これは比較的小さい群なので、ミステリーの多くは $\mathcal{I}_g$ に埋め込まれていて、それをなんとか取り出そうというのがこの何十年かの研究です。Dennis Johnson という人が1970年代後半から、10年くらいの間に大きく言う3つの結果を出しました。私は1980年代に Johnson の論文を見て感動しました。その後いろいろな人たちと研究・交流する上で、数論、絶対ガロア群とか3次元の不変量とかが出てくるということがわかってきたという、わかってくるであろうという事、これを紹介するのが秋以降の話になります。

Jacobi 多様体というのをやっていましたが、最後の所が尻切れトンボになったので、ここでもう一度取り上げます。

これは abel-Jacobi map,

$$\begin{aligned} f : \Sigma_g &\rightarrow Jac = H_1(\Sigma_g; \mathbb{R})/H_1(\Sigma; \mathbb{Z}) \\ &= (H \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R})/H \\ &= \mathbb{R}^{2g}/\mathbb{Z}^{2g} \\ &= T^{2g}, \end{aligned}$$

$g = 0$ のときはないわけですが、一般に Jacobi 多様体は曲面に限らず多様体、全ての位相空間に対して、 H_1 に torsion part がある場合は H_1 の torsion part を無視することによって、全ての位相空間に対して定義できます。これを空間の第1近似と考えます。

2次元の曲面に対して Jacobi 多様体は $\mathbb{R}^{2g}$ の中に lattice $\mathbb{Z}^{2g}$ を考えているので、 $2g$ 次元の torus T^{2g} になります。 Σ_g は2次元の曲面、 T^{2g} は $2g$ 次元ですから、種数 g が大きくなると次元がどんどん上がっていきます。何度も言っていますが、 Σ_g は cell 分割もわかって、homology も計算できるので、これ以上何をしようかという事になるのですが、 Σ_g の所を Riemann 面の moduli space に変えていくので、cell 分割、Riemann 面の moduli のときは cell 分割はあるんですが、それで homology を具体的に計算するというのは、 g を固定すれば有限の計算ですが、ものすごい量になります。

abel 化をすると計算は易しい、次元は上がってきたけれど、こちらの方が homology の計算等も易しい。これは1個の曲面から曲面の族、曲面束、一般には fiber 束を段々考える、そういう話です。

前回やったのは、Jac の homology がどうなるかという事をやりました。 H の基底を用いて書きますと、

$$\begin{aligned} f_* : H_*(\Sigma_g; \mathbb{Z}) &\rightarrow H_*(Jac; \mathbb{Z}) \\ &= \Lambda_{\mathbb{Z}} \langle x_1, \dots, x_g, y_1, \dots, y_g \rangle \\ &= \Lambda_{\mathbb{Z}} H \end{aligned}$$

$H_*(Jac, \mathbb{Z})$ は外積代数, Grassmann 代数になります. ここでは基底を使っていますが, 基底を考えなければ $\mathbb{Z}$ 上 H が生成する Grassmann 代数になります.

これは homology ですが, cohomology に持って行って, この dual

$$f : H^*(Jac; \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(\Sigma_g; \mathbb{Z})$$

を考えます. torus の場合, Pontrjagin duality があるので, homology と cohomology は等価なわけです. 同じように今度は H^* 上の Grassmann 代数で

$$\begin{array}{ccc} H^*(Jac; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{f^*} & H^*(\Sigma_g; \mathbb{Z}) \\ \parallel & & \parallel \\ \Lambda_{\mathbb{Z}} H^* & \longrightarrow & H^*(\Sigma_g; \mathbb{Z}) \end{array}$$

となります. すぐにわかる事は 0 次元は $\mathbb{Z}$ と $\mathbb{Z}$ で同型です. 1 次元は両方とも H^* で写像も identity になります.

2 次元がどうなるかというところ, g がどんどん大きくなると, $\Lambda_{\mathbb{Z}} H^*$ の rank はどんどん大きくなります. 一方で $H^2(\Sigma_g; \mathbb{Z})$ は g に依らずに $\mathbb{Z}$ と同型で非常に小さいわけです. すぐわかる事はこれは全射です. この kernel はどうなるかというところ, まず f^* を 2 次元 cohomology H^2 に制限した kernel は

$$\text{Ker}(f^*|_{H^2}) = \text{free abelian group of rank } \binom{2g}{2} - 1$$

となります. これは抽象的に rank だけを計算したのですが, 実はですね, kernel 全体がどうなるかというところ, 次はそんなに難しくないので, 興味を持った人は自分で証明を考えてみてください.

kernel 全体はそれらが Grassmann 代数の ideal になるわけですが, fact として

$$\text{Ker } f^* = \text{ideal of } \Lambda \text{ generated by } \text{Ker}(f^*|_{H^2})$$

が成立します. 2 次元 cohomology の所はもちろんそうですが, 上の方は全部それが生成する ideal になります. $H^*(Jac; \mathbb{Z})$ には 3 次元, 4 次元 cohomology など全部出てきますが, これらは全部 kernel に入ります. つまり, 3 次元以上の cohomology は 2 次元の所の kernel の元で全部書ける, 生成されているという事になります. これは $\mathbb{Z}$ 上証明できるのですが, $\mathbb{Q}$ 上でやると表現論が使えます.

$Sp(2g, \mathbb{Q})$ の representation theory, これは今日やろうと思ったのですが, 9 月にやります. 表現論というのは大雑把というか, 言ってしまうと, 非常に洗練された線型代数学ですね. そう思うと固有値があるとよいので表現論はまず $\mathbb{C}$ 上でやる. 9 月以降対称群の表現が出てきて, $\mathbb{C}$ 上で理論を展開するのですが, 全部 $\mathbb{Q}$ 上でもできる, これは定理ですが, それがあるので, Sp の場合も $\mathbb{Q}$ 上定義された表現で展開できます. そちら辺りは表現論の講義をするわけではないので多少曖昧に話を進めます. これが強力な手段になります.

$\mathbb{Q}$ 上でやるとすると Poincaré duality で canonical に $H_{\mathbb{Q}}^*$ は $H_{\mathbb{Q}}$ と同型です. 何も構造のない普通のベクトル空間だとすると外積代数は既約な表現ですが, ところが symplectic なものがあると既約にならずに, cup 積

$$\Lambda^2 H_{\mathbb{Q}}^* \xrightarrow{\iota} \mathbb{Q} \rightarrow 0$$

がある. homology にすれば intersection number です. これが全射であって大事な事は Sp -equivariant, Sp -map になっている. H は symplectic 群が働きます, homology ですから. これは写像類群から来た作用で Sp -map になって, $\mathbb{Q}$ は表現としては自明な表現なので, 表現論の良いところは完全系列がこうあって

$$0 \rightarrow \text{Ker } \iota \rightarrow \Lambda^2 H_{\mathbb{Q}}^* \xrightarrow{\iota} \mathbb{Q} \rightarrow 0$$

があつて、ここに kernel $\text{Ker} \iota$ がありますが、表現としては $\Lambda^2 H_{\mathbb{Q}}^*$ は直和 $\text{Ker} \iota \oplus \mathbb{Q}$ になる。Young 図形でいうと $\mathbb{Q}$ は空集合 $\emptyset$, $[0]_{Sp}$ になって、 $\text{Ker} \iota$ は $\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix}$ で $[1^2]_{Sp}$ と書きます。

GL 上でやると $\Lambda^2 H_{\mathbb{Q}}^*$ は既約になって、 Sp 上でやると cup 積があるという事からさらに細かく出てくるわけですが、 GL -module として既約表現があると、 Sp -module としてはさらに分解され、さっき最近新しい動きがあるといったのは、この辺りから出てくるのであらうと思います。ただそれはちょっと詳細が明らかでないのので、問い合わせた所論文はかなり時間が掛かる、ちょっと待ってくれという事なので、よくわからないのですが、わからないなりに考えてみますと、これはちょっと予想していた事がまあ甘かったというか、それは negative ですが、positive にいうと、もっと豊富である、豊富な世界があるという事だと思います。それはちょっと後の方で 9 月頃に述べます。

cohomology を $\mathbb{Z}$ 上書きますと Jacobi 多様体の cohomology を用いて

$$H^*(\Sigma_g; \mathbb{Z}) \cong H^*(Jac; \mathbb{Z}) / \text{ideal}(\text{Ker} f^*|_{H^2})$$

という同型が得られます。これを表現論的に Sp -module として考えたと思います。これは両辺に Sp が働きます。右辺の方で不変元の全体が自然に同型になり、

$$H^*(Jac; \mathbb{Z})^{Sp} \cong \mathbb{Z}[\omega_0^*] / (\omega_0^*)^{g+1}$$

となります。ここで ω_0^* は Sp -不変元、一個あるわけです。

$$\omega_0^* = \sum_{i=1}^g dx_i \wedge dy_i \in (\Lambda^2 H_{\mathbb{Z}}^*)^{Sp}.$$

もともと曲面の cohomology を考えるために Jacobi 多様体考えたのです。その 2 次元のところは丁度 fundamental cohomology で、上の方にも沢山あるわけですね。1 個の曲面に制限した場合は何も寄与しないわけですが、だけれども曲面の族とかそういうものを考えていくと、こういうものが本質的な役割をするようになっていて、今は Sp -不変元が 1 個あるだけですが、族を考えるともっといろいろなテンソル空間が出てきて、 Sp -不変元はもの凄く沢山あるわけです。それらを使うと、いろいろな多様体、主として 3 次元や 4 次元多様体の不変量、あるいは数論的な不変量が出てくる、そういう戦略です。

一つの曲面の場合はこれでおしまいになります。

3 群の近似 (Mal'cev completion)

前は次に表現論をやると予告しましたが、群の近似というタイトルにします。これは Mal'cev というロシアの数学者がいたわけですが、Mal'cev の完備化と呼ばれる、群の研究の一つの方法ですね、あるいは位相空間の基本群だと思ったら、位相空間の研究の一つの方法です。一言で言うと abel 群というものを基本単位にして、その abel 群で、abel 群の abel 群の拡大、中心拡大ですから、べき零群になって、べき零群で取り出せる限りの事をやろう、それが Mal'cev completion です。

Γ を群としてこれを調べます。ただ代数学というより幾何学なので、群といっても多様体の基本群 $\pi_1 M$ 、特に $\pi_1 \Sigma_g$ 、さらに先ほどの写像類群 $\mathcal{M}_g$ 、Torelli 群 $\mathcal{I}_g$ とか、これの兄弟ですが自由群の $\text{Aut} F_n, \dots$ などが重要なわけです。こういう群を具体的に考えていきたい。

これらを abel 群を基本に近似する、まず出てくるのは abel 化です。

$$\Gamma \rightarrow \Gamma^{ab} = \Gamma/[\Gamma, \Gamma]$$

Γ の abel 化というのは Γ の正規部分群 commutator subgroup で割るわけです。少しだけ定義を書いておくと、 $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ 、交換子 $[\gamma_1, \gamma_2] = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_1^{-1} \gamma_2^{-1}$ が生成する部分群です。群の homology 論というものがあるんですが、それを使うと、

$$\Gamma^{ab} = H_1(\Gamma; \mathbb{Z})$$

となります。ここから群の拡大

$$1 \rightarrow [\Gamma, \Gamma] \rightarrow \Gamma \rightarrow \Gamma^{ab} \rightarrow 1$$

ができます。群の拡大というのは群の短完全系列の事です。 Γ という調べたい群があって、今はまず曲面の基本群ですが、

$$1 \rightarrow [\Gamma, \Gamma] \rightarrow \Gamma \rightarrow \Gamma^{ab} \rightarrow 1.$$

Γ を調べたいわけですが、それで $[\Gamma, \Gamma]$ と Γ^{ab} がわかれば、その組み合わせで Γ がある程度わかるだろうと。しかし一般に $[\Gamma, \Gamma]$ は難しいですね。

Γ の abel 化、さっきちょっと上げたものでどうなっているかというのを書いておきます。

曲面の場合、

$$\pi_1 \Sigma_g \rightarrow \pi_1 \Sigma_g^{ab} = H$$

となっています。

では、写像類群の場合にはどうか。これは近似したつもりなんですが、写像類群の場合は abel 化はほとんど役に立たないという事になります。ほとんどの場合自明であって、例外が2個だけあります。

$$\mathcal{M}_g \rightarrow \mathcal{M}_g^{ab} = \begin{cases} \mathbb{Z}/12 & g = 1 \\ \mathbb{Z}/10 & g = 2 \\ \{1\} & g \geq 3 \end{cases}$$

$g \geq 3$ の場合自明になることは定理で、何人かの人が寄与しましたが、最後の方では Mumford と John Harer です。 $\mathcal{M}_g$ を abel 化を基本に調べようと思ったのですが、何の意味もないわけです。

こういう abel 化が自明になる群を perfect 群といいます。commutator subgroup が自分自身と一致する、そういう群です。perfect 群というのは3次元多様体論でも非常に沢山出てきます。

じゃどうするかというわけですが、 M_g 全体を abel 化すると自明になるわけですが、さっき出てきた完全系列で $Sp(2g, \mathbb{Z})$ がありました。 $Sp(2g, \mathbb{Z})$ の abel 化も有限群、あるいは $g \geq 3$ 以上だと自明になるのですが、 $Sp(2g, \mathbb{Z})$ はすでにあるのでそれは abel 化する必要はないわけで、それはそれで調べましょう。 Torelli 群 $\mathcal{I}_g$ はどうなるか、 Torelli 群の abel 化を調べようと思うと、これに関しては Dennis Johnson の仕事があります。 Dennis Johnson は先ほども名前が出ましたが、大変ユニークな数学者です。 Kirby さんや Birman さんといういろいろなやり取りをしてますけれど、この人の話はいろいろと聞いています。数学者中の数学者と言える、典型の一人ですね。敢えていうと数学界からいなくなってしまった。 Dennis Johnson の大きな 3 つの仕事の一つが Torelli 群の abel 化の決定です。 主役 H を使って、

$$\mathcal{I}_g \rightarrow \mathcal{I}_g^{ab} = \Lambda^3 H / H + 2\text{-torsion}$$

なぜ 3 階の外積が出てくるかは秋頃お話しします。

M_g の homology への作用で Sp が出て来ますが、では kernel の Torelli 群からはもう Sp の情報は汲み尽くしたかというのと、とんでもないわけで、homology への作用に残らなかった Torelli 群の abel 化をするとまた Sp がちゃんと出てくる。 $Sp(2g, \mathbb{Z})$ -module です。 $\mathbb{Q}$ 上で考えると $\Lambda^3 H$ は既約ではありません、 $\Lambda^3 H$ は GL -module として考えると既約ですが、 Young 図形でいうと $[1^3]$ というやつです。 Sp 上は既約ではなくて、 Young 図形でいうと

$$\Lambda^3 H = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}_{Sp} + \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}_{Sp}$$

となります。 $\Lambda^3 H$ の H への contraction, つまり intersection number を取ると、これは 3 次のテンソルですが、そのうち 2 個 intersection number を取り、スカラーに落とすと 1 次のテンソルが出てきて、 GL 上は既約ですが、 Sp 上はこういう分解が出来ます。

さっきから言っている、最近ちょっとびっくりしたのは、 GL -module で既約なものを Sp -module として分解すると、rank が上がるとこの中にもものすごく一杯いろいろ出てきます。この中にちょっと見落としていたものがある、どうもそういう事ようです。

それはともかく、 $\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}_{Sp}$, これは一つの Riemann 面からくるクラスです。重要なのはこちら $\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}_{Sp}$ で、 Riemann 面の moduli space に関係する方です。 tautological な特性類は全てここから来るというのが、河澄さんと一緒にやった仕事です。

2-torsion, これは 3 次元多様体の Rohlin 不変量というのがあるわけですが、これも 3 次元多様体の理論の上で大事な不変量です。これが torsion に出てくる。 2-torsion も Dennis Johnson も完全に決定しています。その後いろいろな人がいろいろな方向に展開している。これは abel 化をするかどうかという例でした。

元の一般の設定に戻って群 Γ です。

$$\Gamma \rightarrow \Gamma^{ab}$$

これを第 1 近似と思う。

では次に第 2 近似は何であろうかという事を考えます。さっき書いた完全系列

$$1 \rightarrow [\Gamma, \Gamma] \rightarrow \Gamma \rightarrow \Gamma^{ab} = N_1 \rightarrow 1$$

があるわけですが、 Γ^{ab} のべき零 (nilpotent) 群の意味での第 1 近似なので $N_1 = N_1(\Gamma)$ と書きます。まず Γ 毎に abel 化 N_1 というのがあるわけです。

今度は $[\Gamma, \Gamma]$ から第 2 近似を取り出しましょうと思うと、それは非常に難しい。 $[\Gamma, \Gamma]$ の abel 化を考えれば第 2 近似的なものが出てきますが、それは solvable, 可解群で近似しようという事になります。しかし、 $[\Gamma, \Gamma]$

は無限生成になることも非常に多い。無限生成でもわかれば良いじゃないかと思うかもしれませんが、これは取り扱いが難しい。もちろん理論は沢山あります。数論でいうと伊原先生は solvable のもので仕事をされた。でもなかなか難しいわけです。そこで nilpotent というものを考えるわけです。

一般の nilpotent 群を考える前に、4 年生とか大学院生とかに専門的な話に行く前にイメージを持って頂くために、群の拡大と 3-dimensional manifold が非常に良い例なので、これについて少し話します。Thurston のプログラムを Perelman が完成させたわけですが、群の拡大の観点から言っても、これは非常によい例なのでこれについて少し話します。

多様体を分類するという事を考えると次元の小さい方から向き付け可能で closed, コンパクトかつ境界の無いものを扱います。

1 次元の場合一つだけあって S^1 。これは未来永劫どんなに数学が発達しても一番基本的な多様体であることは間違いないと思います。

今度 2 次元の場合、2 次元曲面の分類は 100 年以上前で、この話の 1 回目、2 回目でもやりましたけれど、closed orientable でやりますと S^2 , elliptic な世界ですね。次に T^2 , parabolic な世界。一番豊富な hyperbolic な世界 $\Sigma_g (g \geq 2)$ です。

ここから 3 次元多様体。一般にある次元の多様体の例を沢山作りなさい、例えば、大学院の入試問題で 3 次元多様体の例を挙げよ、などというのはよくありましたが、一番簡単なのは積を考える事です。積を考えると曲面と S^1 の積ですね。2 次元曲面の方を横に書きます。

$$\text{積} : S^1 \times S^2 \quad S^1 \times T^2 = T^3 \quad S^1 \times \Sigma_g$$

今度は 1 次元と 2 次元を組み合わせるのですが、fiber bundle という概念があります。これは 20 世紀前半、いろいろな人が寄与していますが、Ellie Cartan が Lie 群との絡みである意味で一番大きな寄与をして、fiber bundle という概念が出てきたわけです。捩じれるわけですね、そうすると曲面上の S^1 -束、曲面の各点に S^1 を載せて、そうすると 3 次元多様体、積になります。

まず S^2 上の S^1 -束、ここで Heinz Hopf の大発見ですね。Hopf の大発見は何かというと、3 次元球面 S^3 は 3 次元多様体としては decomposable ではない、分解できないのではないかと思います。 S^3 は S^2 上の S^1 -束になってしまう。もちろん今では常識ですけども、これはものすごい大発見なわけです。 S^3 だけではなくて、 $\mathbb{R}P^3$ とか lens 空間には S^2 上の S^1 -束の構造が入るわけです。

次は T^2 上の S^1 -束でねじれているものがある。そして Σ_g 上の S^1 -束でねじれているものがある。

$$S^1\text{-束} : M \xrightarrow{S^1} S^2 \quad M \xrightarrow{S^1} T^2 \quad M \xrightarrow{S^1} \Sigma_g$$

いま oriented な category でいうと、 S^1 というのは $SO(2)$, あるいは $U(1)$ で Lie 群になるわけですが、この S^1 の位相的な性質によって、任意の differentiable な S^1 -束は、いつでも Lie 群 S^1 を構造群にする principal bundle, 主 S^1 -束になります。一般に次元があがると全然こうはなりませんし、大体 Lie 群にならないし、難しいわけです。Lie 群は沢山ありますが、 S^1 は abelian だから簡単と言えば簡単ですが、非常に大事な基本中の基本の Lie 群です。

これらは全て主 S^1 -bundle になって、Chern-Weil 理論というまでもなく、Gauß-Bonnet を用いると、いつかは曲面上の unit tangent bundle というのをやりましたが、主 S^1 -束の Euler 類というものが定義されます。それはそれぞれの base space の 2 次元 cohomology 群 : $H^2(S^2, \mathbb{Z}), H^2(T^2, \mathbb{Z}), H^2(\Sigma_g, \mathbb{Z})$ の中に定義されて、これにより分類されます。ここで係数 $\mathbb{Z}$ は $\pi_1 S^1$ から来ます。これらは Chern-Weil 理論の基本中の基本ですね。

Euler 類がゼロのものが直積なわけですが、ゼロでないものが fiber bundle, 捩じれた主 S^1 -束になっています。こういうのが出てきて実際あるというのはわかっているわけです。曲面に限った話ではなくて、位相空間上の主 S^1 -束の同型類と Euler 類を対応させることにより、2 次元 cohomology 群が bijective になっているわけで、ちゃんと存在するわけです。基本定理の一つです。一方、曲面にすると 2 次元 cohomology は $\mathbb{Z}$ に同型ですから、自ずと無限個出てくるわけです。

ここまでで 6 個出てきましたが、ここで立場を変えて、 S^1 上の Σ_g -束で考えます。まずは S^1 上の S^2 -束 $M \rightarrow S^1$ で、3 次元多様体が出てきます。これはどういうものが出てくるかというと、 S^2 -束に限らず、 S^1 上の fiber bundle があつたとすると、1 点で cut すると interval 上の bundle が得られます。monodromy という両端をどう繋ぐかという張り合わせの写像があり、この張り合わせの微分同相写像が up to isotopy, $\pi_0 \text{Diff}_+ S^2$ の元としてわかれば、bundle の同型がわかります。厳密にはその写像の共役類で bundle は決まりますので、 π_0 というのはちょっと語弊がありますので、 ${}^*\pi_0 \text{Diff}_+ S^2$ と書いておきましょう。

与えられた S^2 の向きを保つ微分同相写像が identity とどれくらい離れているか、これは古典的な Smale の結果ですね、古典的な differential topology が華やかだった 1957 年、有名な Smale の定理ですが、

$$\pi_0 \text{Diff}_+ S^2 = \{1\}.$$

これは定理ですが、言われてみればそうだろうという感じはあるわけですね。だからと言って Smale が簡単な事をやったというわけでは全然ありません。

ですからこれは bundle が欲しかったのですが、この場合はねじれられないという事になります。これ $M \xrightarrow{S^2} S^1$ は、いつでも直積 $S^1 \times S^2$ になり、これはすでに数えているので、これはなくなります。

先取りすると、 3×3 , product と fiber bundle で fiber と base space を入れ替えると、全部で $3 \times 3 = 9$ になるんですが、1 つ減って 8, これが Thurston の 8 種類の幾何学という事になります。それが Thurston の 8 種類の幾何学だというと、Thurston は怒るでしょうけれども、こういう風に対応はしているわけです。

$$S^1 \text{ 上の曲面束} : M \xrightarrow{S^2} S^1 \quad M \xrightarrow{T^2} S^1 \quad M \xrightarrow{\Sigma_g} S^1$$

その次の所は S^1 上の torus 束 $M \xrightarrow{T^2} S^1$ 。これは $\pi_0 \text{Diff}_+ T^2 = \mathcal{M}_1 \cong Sp(2, \mathbb{Z})$ の共役類、いろいろあるわけですが、これがまた 3 種類に分かれて、 $SL(2, \mathbb{Z})$ の trace で分かれる。

- $|\text{tr}| < 2$: elliptic, 有限 order.
- $|\text{tr}| = 2$: parabolic, Dehn twists.
- $|\text{tr}| > 2$: hyperbolic (S^1 上の torus 束のなかで)

例えば一年生の講義などでは $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ くらいでやると foliation が出てきてそれを保つなどとやると面白がってくれます。

一番豊富な所は種数 2 以上の曲面束 $M \xrightarrow{\Sigma_g} S^1$ で、monodromy として $\pi_0 \text{Diff}_+ \Sigma_g = \mathcal{M}_g$ の元が出てくるところなわけです。写像類群の各元の性質で 3 次元多様体がいいろいろ変わってくるものなわけです。

写像類群の元の分類というのは Nielsen という人が 1920 年代に Nielsen 理論と呼ばれるものを建設しました。もうちょっとですごい大結果まで行ったのが、難しいからしょうがないのですが、60 年くらい経って Thurston が Nielsen 理論に欠けていたものを付け足しました。この種数 1 のときの elliptic, parabolic, hyperbolic に対応する Nielsen-Thurston 分類と呼ばれるものがあって、

- 有限 order

- reducible
- pseudo-Anosov

となります。ここに出てきた pseudo-Anosov が大事なもので、3次元多様体論、低次元多様体論において、分類だけではなくて力学系でもどれくらい寄与したかわからないほどの大きな仕事のわけです。pseudo-Anosov はこれ自身全く終わっていないくて、pseudo-Anosov ごとにいろいろな数が出てきますが、その研究というのは終わるどころか、まだまだわからないことが多いわけです。

これは Thurston が pseudo-Anosov, 写像類群の分類として 1970 年代の後半にあつというまにやった理論ですけれども、話が前後しますが、これから 8 種類の幾何が出てきます。ここら辺から理論を作って、Thurston program というものを作ったわけです。これは単に fiber bundle の観点からやったわけですが、この 8 種類の基本的な所に 8 種類の Lie 群があつて、それを使ってトポロジーと幾何はある所から分かれてきたわけですが、Thurston によれば 3 次元は微分幾何とトポロジーは切っても切れない、一つである。Thurston program を Thurston 自身はもちろん完成させたかったでしょうが、他の方面から Hamilton の理論、それを基に Perelman が完成させたわけです。arXiv に 3 つの論文が出て、その後の話は皆さんご存知の通りです。

Thurston の program と pseudo-Anosov map の関係でいうと、pseudo-Anosov の場合は由緒正しい 3 次元多様体、monodromy が pseudo-Anosov ならば双曲多様体になる。pseudo-Anosov を monodromy とするような fiber bundle、双曲多様体の基本群は、双曲的な群、100 年以上前からある $PSL_2\mathbb{C}$ に、discrete, cocompact subgroup として入るわけです。双曲的な曲面の基本群の場合は $PSL(2, \mathbb{R})$ に入る、この 3 次元バージョンというものが展開されたわけです。これが 1980 年代の Thurston の Monster と呼ばれる定理の極一部です。

曲面	S^2	T^2	$\Sigma_g (g \geq 2)$
積	$S^1 \times S^2$	$S^1 \times T^2 = T^3$	$S^1 \times \Sigma_g$
S^1 -束	$M \xrightarrow{S^1} S^2$	$M \xrightarrow{S^1} T^2$	$M \xrightarrow{S^1} \Sigma_g$
S^1 上の曲面束	$S^1 \times S^2$ (前出)	$M \xrightarrow{T^2} S^1$	$M \xrightarrow{\Sigma_g} S^1$

これをさっきの話に戻します。基本群の観点から 8 つの幾何を見てみます。

$S^1 \times S^2$	$S^1 \times T^2 = T^3$	$S^1 \times \Sigma_g$
$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}^3$	$\mathbb{Z} \times \pi_1 \Sigma_g$

この次は S^1 -束の total space を E と書きますと、

$$\pi_1 S^1 = \mathbb{Z} \rightarrow \pi_1 E \rightarrow 1$$

この次に出てくるのは、

$$1 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \pi_1 E \rightarrow \pi_1 T^2 = \mathbb{Z}^2 \rightarrow 1$$

こういう拡大が得られて、大事な事はこれが central, $\mathbb{Z} = \pi_1 S^1$ は全空間の基本群 $\pi_1 E$ 中の部分群になりますが、中心、すべての元と交換可能になります。こういうものを中心拡大と言います。abel 群を abel 群で中心拡大、そうすると一般にはねじれたものが出てきますが、それをまた abel 群で中心拡大、こういうものを有限回繰り返して得られる群をべき零群と言います。abel 群の次に研究の簡単な、あるいは研究の手段として用いられる群です。この次は曲面群の中心拡大

$$1 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \pi_1 E \rightarrow \pi_1 \Sigma_g \rightarrow 1$$

で、これは特に言う事はない。ある意味で $\pi_1 \Sigma_g$ とそんなに性質は変わらないような群です。この 2 行目で大事なものは、真ん中にベキ零群が出てきた事です。

第 3 行目に行くと、 S^1 上の S^2 -束はなくて、真ん中の S^1 上の T^2 -束

$$1 \rightarrow \pi_1 T^2 \rightarrow \pi_1 E \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 1$$

これも abel 群の abel 群による拡大になりますが、一見同じになるかなと思うのですが、これは一般に central ではないわけです。だけど abel 群と abel 群で挟んでいるので、ベキ零群よりは性質は悪いけれども全体の中では、なかなか良い、これが solvable、可解群と呼ばれる群になります。

ベキ零で研究したものは沢山あります。例えば Sullivan の minimal model とかですね。それはベキ零群を基本にやっていくのですが、それを solvable に拡張するのは難しい問題です。何人かの人が try もし、結果もありますが、完成したものはあまりない。solvable というのは非常に難しいです。

最後の所は

$$1 \rightarrow \pi_1 \Sigma_g \rightarrow \pi_1 E \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 1$$

となり、 $\pi_1 E$ は Gromov の意味で双曲的さえなりうる、今では皆知っていますが、最初は驚くべき事です。 S^1 上の fiber bundle が双曲的になるだろうというのは、1950 年代、60 年代くらいまではそんなものはないだろうとみんな思っていたと思います。最初に出てきたのは J. J. Milson という人の例です。topological には比較的簡単な構造をしていて、なおかつ双曲的になるというものです。

だけど Thurston のこの pseudo-Anosov の理論からすると、Thurston の予想というのがここにはあって、これはいつ頃解決するのか、Program は解決されましたが、残っている難しい問題、Thurston の予想、first Betti number に関する予想とか有限 covering を取ると云々などという大予想は進展はしているようですが、かなり難しいと思います。

先ほどの群の近似の話に戻りますと、abel 群。一般の abel 群といたら、これ自身理論があるわけですから、これ自身は永遠に終わらない。我々が考えているのは compact な多様体の基本群ですから、有限生成 abel 群、そうだとすると完全に分類は終わっていますね。みんなよく知っているように rank と torsion で分類できます。

この次に簡単なものが Mal'cev の完備化に使われる nilpotent 群です、その次にこれはなかなか難しいのですが、敢えて言うとその次に易しいのが solvable。

それから ...、と行って、ここに出てくるのは amenable 群、日本語では最近、従順群と訳されているようです。元々の日本語の意味は、扱いやすい、素直なという意味です。この定義はちょっと難しいのですが、abel 群、nilpotent 群、solvable 群、全部 amenable です。扱いやすいという定義があるだけあって、扱いやすい、幾何学的には双曲の対極にあるようなものです。ある意味小さい群です。

さらに ...、といって Gromov の定義した双曲群というのがあって、これが非常に大きな群です。

群全体を分類するというのは、それはもちろん未来永劫不可能ですが、こういうあるクラスの群が全体の群から見てどうなのかというのは、なかなか難しい。例えば多様体を分類するときに、次元を上げて任意のものを考えようとするとうとうにもならないものがほとんど全てで、理論を作ろうと思ってもないわけです。そこでいろいろ構造を仮定していくと、例えば、複素構造を仮定して複素多様体、代数的構造を仮定して代数幾何学、その分類の基準も細くなっていった理論はあるわけです。ただ全体の多様体の中でそのようなものがどうなるか、ほんの一部分なわけです。全てのものが知りたいというのはもちろん理想かもしれないけれど、ほとんど空集合なわけで、どのくらいのクラスに、これはもちろん人にもよるかもしれないけれど、ここに興味を持って、手段を使って、人生うまく行かない事もあるって、クラスを小さくしたり、これを調べようと思った

ら、気がついたら違う別な所に来たり、それは日常茶飯なので、こういうものを繰り返していくとうまく行く事も、永遠にうまく行かない事もあるわけですね。ですからいろいろな論文を見るときに、arXiv を毎日見るのは日常になっていますが、非常に若いときと比べると、読み方が大分違ってきました。この著者はどう感じてこういう風にやってるのかなと感じる事もあります。冷めるのはあまり良くないですね。熱した部分がないと、宇宙がどうなるかという話がありますね。膨張速度がどんどん上がって行って、また収縮して元に戻る、これはどうも否定されたようですが、結局は Newton 力学に asymptotic に flat か、これは未来永劫有力な選択肢の一つでしょうけれど、ずっと双曲的だとすると、どんどんすかすかになってしまふ。無くなりほしくないけれど、すかすかになって分類しようにも全部同じになってしまいます。これは理論物理学者は非常にかんがっています。でも敢えて言わせてもらおうと人類がいつまで経っても解決できるはずがないですね。人間は宇宙の中でほんの一部ですね。それが全体を理解できるはずがない、これは negative に聞こえるかもしれませんが、これは positive な事です。そんなに簡単なものではないという事を念頭において研究を進めるのがよいという事です。これはさっきからちらちらと言っている、少しこうではないかと思っていた事がそうではなく、ずっと深いという事がだんだんわかってきたという事にもあるわけです。

それはともかく第1近似を言ったので、第2近似は何かというと、

$$1 \rightarrow [\Gamma, \Gamma] \rightarrow \Gamma \rightarrow N_1 \rightarrow 1$$

commutator subgroup $\Gamma_1 = [\Gamma, \Gamma]$, これは Γ の正規部分群ですが, lower central series, 降中心列というものにだんだんなっています。 $[\Gamma, \Gamma]$ を Γ_1 と書くか Γ_2 と書くかは人に依りますが、ここでは Γ_1 とおきます。 Γ_1 の abel 化は非常に難しい、一般には難しい。そこで

$$\Gamma_2 := [\Gamma, \Gamma_1] = [\Gamma, [\Gamma, \Gamma]]$$

とおきます。2 階目の commutator subgroup を考えるわけです。これも正規部分群になります。これは正規部分群ですから、 Γ を Γ_2 で割ると、こういう事が出来て、

$$1 \rightarrow \Gamma_1/\Gamma_2 \rightarrow \Gamma/\Gamma_2 \rightarrow \Gamma/\Gamma_1 \rightarrow 1$$

となります。 $\Gamma_2 \subset [\Gamma_1, \Gamma_1]$ ですから、これは Γ_1/Γ_2 は abel 群になるのですが、もっといい事は中心拡大になるという事です。これは Mal'cev が考えた事です。中心拡大になると abel 群の単位元は 0 と書くので、中心拡大である事を強調するために

$$0 \rightarrow C_2 = \Gamma_1/\Gamma_2 \rightarrow N_2 = \Gamma/\Gamma_2 \rightarrow N_1 = \Gamma/\Gamma_1 \rightarrow 1$$

と書きます。これは abel 群の abel 群による中心拡大になっていますから、これを 2-step nilpotent group と言います。

nilpotent 群の定義というのはこうやって定義するわけではありません、commutator をどんどん取っていくと有限回で自明になるというものです。abel 群を何回使っているか、abel 群は 1 回、abel 群の abel 群による中心拡大は 2 回ですね。この構成はどんどん続けていく事ができるわけです。 $\Gamma_3 = [\Gamma, \Gamma_2]$ とおくと、

$$0 \rightarrow C_3 = \Gamma_2/\Gamma_3 \rightarrow N_3 = \Gamma/\Gamma_3 \rightarrow N_2 = \Gamma/\Gamma_2 \rightarrow 0.$$

これをずっと続けていって、 d 次”近似”ですね、敢えて近似という言葉を書いたのですが、Mal'cev の完備化の d 次の項、

$$0 \rightarrow C_d = \Gamma_{d-1}/\Gamma_d \rightarrow N_d = \Gamma/\Gamma_d \rightarrow N_{d-1} = \Gamma/\Gamma_{d-1} \rightarrow 1,$$

これは中心拡大で、元の群の d 次の近似と考えます。これは d -step nilpotent group です。この観点からべき零群を定義すると、有限回の所で全体になってしまう、それがべき零群です。

一般の群でやると、べき零群でない限り、これは永遠に終わらない、終わらないというか projective system ができます。これを書きますと、まず調べたい群 Γ がありまして、

$$\Gamma \rightarrow N_1$$

Γ が多様体の基本群の場合は N_1 はその Jacobi 多様体の基本群です。

$$\begin{array}{ccc} & \vdots & \\ & \downarrow C_4 & \\ & N_3 & \\ & \downarrow C_3 & \\ & N_2 & \\ & \downarrow C_2 & \\ \Gamma & \longrightarrow & N_1 \end{array}$$

一般には第 d 近似というのがあって、nilpotent 群の tower ができる。Mal'cev の理論という、この tower 全体に $\mathbb{Q}$ をテンソルしてリー群の中でやるのですが、それはまた次回にします。

この良い所は何かというと、 $\{\Gamma_i\}_{i=1,2,\dots}$ という正規部分の列が出来ましたが、この事を元の群の降中心列、lower central series と言います。それでこの構成のよい所は Γ 、例えば曲面の場合にはその基本群を調べたいのですが、曲面の族、fiber bundle を考えるときには、その monodromy から出てくる曲面の基本群の自己同型を調べます。そうすると自己同型群 $\text{Aut}\Gamma$ と書きますが、この群論的な構成を見ると、降中心列というのは Γ の全ての自己同型によって保たれる。一番強い意味で characteristic な subgroup の列なわけです。従って $\text{Aut}\Gamma$ の作用がこの nilpotent 群の tower の automorphism に拡張する。そうすると

$$\rho_d : \text{Aut}\Gamma \rightarrow \text{Aut}N_d \quad (d = 1, 2, \dots)$$

表現の族が得られます。

Γ が曲面の基本群の場合には、本質的に $\text{Aut}\Gamma$ は写像類群になります。だから $\Gamma = \pi_1\Sigma_g$ のとき、 $\text{Aut}\Gamma = \text{Aut}\pi_1\Sigma_g$ です。ここでちょっとだけ index 2 の部分群、向きを保つ微分同相群に使った記号ですが、基本群にも向きを保つ同型写像が定義できて、 $\text{Aut}_+\pi_1\Sigma_g$ は index 2 の部分群になります。これはですね、Dehn-Nielsen の定理ですけれども、基本群は base point を取らないと定義できないので、* を一つとって、今は外部自己同型とかは言わないで、

$$\text{Aut}_+\Gamma = \text{Aut}_+\pi_1\Sigma_g = \pi_0\text{Diff}_+(\Sigma_g, *)$$

とやれば一致するというのが Dehn-Nielsen の定理です。これは基点を保つ写像類群 $\mathcal{M}_{g,*}$ と書きます。

今どういうものが得られたかと言うと、 $\mathcal{M}_{g,*}$ から projective system への

$$\mathcal{M}_{g,*} \xrightarrow{\{\rho_d\}} \varprojlim_d \text{Aut}_+N_d(\pi_1\Sigma_g)$$

という表現が得られたわけです。ここで ρ_1 はさっきの $\rho_1, \text{Sp}(2g, \mathbb{Z})$ への表現です。 $\rho_2, \rho_3, \dots$ と沢山あるのでこれを調べようというのが、Dennis Johnson, 自由群の自己同型の場合は Andreadakis, そして 3 次元多様体、

トポロジーの観点では Dennis Sullivan も Massey 積の観点から仕事をしています。そういう流れの上であって、この群 $\varprojlim_d \text{Aut}_+ N_d(\pi_1 \Sigma_g)$ を調べましょう。

だんだんどういう事がわかってきたかと言いますと、ひょっとしてこれは同型、というのはまず考えられなくて、 $M_{g,*}$ は可算群ですけど $\varprojlim_d \text{Aut}_+ N_d(\pi_1 \Sigma_g)$ は非可算群なのです。それはあまり面白くない大きな訳ですが、 d を固定したときにこれは全射かどうか。

$d = 1$ のときは本質的には $Sp(2g, \mathbb{Z})$ への表現で、それは 100 年以上前に全射がわかったと言ったわけです。じゃあ $d = 2, 3, 4, 5$ と全射かとまず調べ始めたわけです。そうすると $d = 2$ とか 3 まで、こら辺りは全射なわけです。

段々わかってきた事は cokernel が非常に大きいという事です。一番最初は 1980 年代後半、東工大にいたときに computer で村山さんにも Reduce を教えてもらって計算をしていました。その頃は連続用紙でしたから出力は大変でした。それをいろいろと眺めていると段々わかってきました。trace というのを見つけたんです。これは秋頃にやりますが、その差の中に cokernel がある。

その次に 1980 年代後半に織田孝幸さんが絶対 Galois 群、そういうものがこの差に出てくると言って、実際に証明したのは 1994 年に中村博昭さんと松本真さんです。種数 0 では Grothendieck, Drinfeld, 伊原先生の仕事に関連があるわけです。Gal($\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$)、これがどうあるか、Hain さんとも会う度に議論していて、私なりにトポロジーの立場から少し近づきつつある気がしています。

それでここに 3 次元が出てくるのですが、3 次元 homology 球面と、3 次元ホモトピー球面、これは Perelman によって S^3 しかないことがわかったのですが、この大きな群 $\Theta_{\mathbb{Z}}^3$ 、これは古田さんが無限生成である事を証明したんですが、これがこの cokernel に現れるだろうと予想していて、最近のあれでどうなるかという、これが露と消えると困ったのですが、むしろ逆であってこれをサポートするようにも理解できる、もっと沢山ある、非常に大きい。

これをさらに進めて 3 次元、4 次元の間で C^∞ vs C^0 。これが私の夢の中で一番難しい、これこそ露と消えるかもしれませんが、私の観点からは全部関係していて、自分自身としては大まじめにやっています。

最近アナウンスされた、Karen Vogtmann という人がいますが、この人は 1990 年の始め頃突然電子メールが来て、やりとりをして友達になった人です。有名なのは 1986 年の Culler-Vogtmann の Outer space というのがあって、これも秋頃やりますが、写像類群で言うと Teichmüller space、その写像類群による商空間として Riemann 面の moduli 空間というのがあって、自由群の外部自己同型群で Teichmüller space に対応するのが Outer space といって、その Outer space の商空間、moduli に対応するのが graph の moduli 空間です。非常に大きな仕事ですね。

私の仕事にも興味を持ってくれて、graph の moduli 空間の cohomology を沢山定義したんです。実は $\Theta_{\mathbb{Z}}^3$, C^∞ vs C^0 と関係すると思っているんですが、無限個あるのですがなかなか非自明性が証明できなかった。最初のやつは computer で計算して確かめました。それが Hatcher-Vogtmann の仕事にあるやつと対応するのではないかと思って、いろいろとやりとりしたわけです。Conant-Vogtmann が 2 番目が非自明であることが証明された。3 番目はどうかという事ですが、最近 Conant さんの話によると 3 番目も非自明であることが証明されたようですね。それは私も詳細は聞いていないのですが。

ここにもう一人 Kassabov という人が入ってきます。元々東欧の人でいまは Cornell 大学で Vogtmann さんと同じ所で研究をしています。

私は trace がある Lie 代数の abel 化を与えるのではないかと考えていましたが、どうもそうではないと言ひ出して非常にびっくりしています。私なりにこれを考えてみると、trace と言えば、Jacobian が元々 trace だっ

たわけです。詳細はわかりませんが想像するに、これは higher derivatives をどんどん取っていくみたいです。ね、例えば $\mathbb{R}^n$ の微分同相があったときには $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$ 、こうやって Jacobian, これは基本的です。これを 3 階の Jacobian, $\left(\frac{\partial^3 f_i}{\partial x_j \partial x_k \partial x_l}\right)$, これぐらいにして高次の trace を取るとどうも abel 化が出てきている。いずれにしてもこの差, cokernel がさらに大きくなる。この差を使って Sp の表現論を使って、3 次元 homology 球面とか C^0 と C^∞ とか絶対 Galois 群とかをつかもうとしているわけですが、その観点からすると材料がもっと増えちゃったんですね。だから時間が足りるかどうかなという事があるんですが、それはともかく、そんなに深い構造があるのかなと思っています。それは 9 月くらいにもっと詳しくやりだします。

最後にその関係で、表現論をやると大体組み合わせ論が出てきます。1 つだけこれはクイズみたいなものです。4 年生とか大学院生に、Young 図形の中で even type と呼んでいる

, $2, 2, 2$, が k 個, $[2^k]$, これは対称群の表現なんですが、これ $[2^k]$ があるときに、対称群の表現というのは、hook length formula, あるいは Frobenius の定理と、あるいはこれを numbering するというやり方など、沢山の公式があります。

それと Sp -不変空間の次元、これは Hermann Weyl が 1930 年代にやった仕事ですが、

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & \dots & 2k-1 & 2k \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}$$

こうもってきまして、これは H. Weyl と若い人たちの共同の仕事で、その後 Weyl は全ての Lie 群に対して不変式論を展開したわけです。これは $Sp(2, \mathbb{R})$, あるいは $Sp(2, \mathbb{Q})$ の表現論なんですが、これは多分わかっていると思うのですが、最近気が付いた事は何かというと、これはその中の一つの例なのですが、H. Weyl は種数 1 の $(H_{T^2}^{\otimes k})^{Sp(2, \mathbb{Q})}$ の基底を書いているんですね。どうなるかというと、これは組み合わせ的に書くわけです。pair, pair にする、これは intersection form で相棒を見つける。一番簡単なのは

○	○
○	○

 $\cdots$

○	○
○	○

 $k=1$ のときには、

$$\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{array}$$

で

○	○
○	○

 しかない。 $k=2$ のとき、

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

には intersection を許さない、

○	○
○	○

,

○	○	○
○	○	○

, 上半平面だけにグラフを書いて pair, pair にする。この種数が上がってくると intersection を許した

○	○	○	○
○	○	○	○

 が出てくるんですが、 $g=1$ のときは退化が起こります、つまり、この 2 つの 1 次結合で書いてしまいます。つまり $\dim((H^{\otimes 4})^{Sp}) = 2$ になります。 $k=3$ のとき、5 個出てきます。どんどん k が増えるに従って、複雑になっていきます。一般に k に対して、Weyl はこの $Sp(2, \mathbb{R})$ -不変な部分空間の次元が上半平面に書いた互いに交わる事を許さないこの pairing の数になります。これは 1930 年代の仕事です。

これは表現論の方で知られているのかもしれませんが、この Young 図形の対称群の表現の次元があるのですが、Frobenius の定理とか hook length formula とかこれの関係で言うと、Young 図形の箱を numbering する。

1	2
3	4
5	6
7	8

る。これは一番 standard な numbering ですが、条件は横も縦も単調増大でなくてはいけない。各

column, 各 row は単調増大。どういふのが出てくるかというと、

1	3
2	4
5	7
6	8

, こうやっても良いわけです。これが

Frobenius のやつはある多項式の係数ですが、これは

$$\dim\left(\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array}\right) = 8!/5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2$$

が次元になるはずですが、これは単に組み合わせ的なものですが、computer を使ってやったので、9 月頃に具体的なものをつかって表現論によって Sp 不変なものを見つける。この差の所は Sp の表現空間が沢山でできます。ここに不変式論を使って、不変量を見つける、それを次回にやります。

第4回 (2010年9月1日)

4回目, 2ヶ月くらい前になります, 前回は7月7日ですので, 最後の所を少しだけやります. 曲面と symplectic 群の所をちょっとだけ復習して, 少しのりしろをつけて, 表現論の使い方について入っていきます.

抽象的な群 Γ があつたときに, これをいろいろ調べるわけです. ベキ零群というものを基本に調べる, Mal'cev の completion を使って調べていきます. まずは abel 化というものがあつて,

$$\Gamma \rightarrow \Gamma^{ab} = \Gamma/[\Gamma, \Gamma] = N_1(\Gamma)$$

これは非常によい情報ではありますが, 限られた情報でもあります. この abel 化を第1のベキ零群による近似 $N_1(\Gamma)$, これは abel 群ですけれども, この上に第2の近似 $N_2(\Gamma)$ があつて, 中心拡大になって, 中心は $C_2 = \Gamma_1/\Gamma_2$ となって, この上に $N_3(\Gamma)$ があつて, これは C_3 というやつを中心拡大になります.

$$\begin{array}{ccc} & \vdots & \\ & \downarrow C_4 & \\ & N_3(\Gamma) & \\ & \downarrow C_3 & \\ & N_2(\Gamma) & \\ & \downarrow C_2 & \\ \Gamma & \longrightarrow & N_1(\Gamma) \end{array}$$

ベキ零群のタワーができます. この第2近似, 第3近似と写像もできます.

ここで projective limit というものがあります. ここでは使わないのですが, 一応書いておきますと, $\varprojlim_d N_d(\Gamma)$, こういうものがあるわけです. $N_d(\Gamma)$ を全部集めたようなものです. 与えられた群をベキ零という観点から調べるわけです.

今度は与えられた群があつたときに, その自己同型群というものも大事な対象です. 両方大事なわけですが, この構成が群の自己同型に関して一番強い意味で natural なので, Γ の自己同型写像があると d 次のベキ零商の自己同型写像が誘導されます. ここに ρ_d という写像

$$\text{Aut} \Gamma \xrightarrow{\rho_d} \text{Aut} N_d(\Gamma) \quad (d = 1, 2, \dots)$$

が誘導されます. この $\text{Aut} \Gamma$ は一般には難しい. 例えば Γ が自由 abel 群だったとしても, $\text{Aut}(\Gamma)$ は $GL(n, \mathbb{Z})$ という群で, これは行列ですから, 手段はいろいろありますが難しいとも言えます. 自由群になったりすると, 自由群の自己同型群は組み合わせ群論と呼ばれる分野で言わば永遠のテーマになるわけですから, 永遠に終わらない. 一方で $N_d(\Gamma)$ はベキ零群になるので, 構造は多少簡単になって, いろいろなテクニックが使えるわけです. 非常に重要な対象です.

この話では特に曲面に関するお話をしているので, 向き付けられた閉曲面の基本群 $\Gamma = \pi_1(\Sigma_g, *)$ のとき, この構成をやりますと,

$$\text{Aut}_+ \pi_1(\Sigma_g, *) \rightarrow \text{Aut} N_d(\pi_1(\Sigma_g, *)).$$

$\text{Aut}_+ \pi_1(\Sigma_g, *)$, これ自身曲面の写像類群と呼ばれるものですが, 自己同型全体から index 2 の部分群に, ちょっとだけ縮めます, それは, 微分同相写像で向きを逆にするものがあると, 技術的に少し面倒な事があるのでそ

れを除いて、向きを保つ微分同相写像だけを考えます。その基本群版です。これは群ですけれども、向きを保つ同型写像というものが定義する事ができるので、こういうものが取れます。

写像類群は別に定義するわけですが、Dehn-Nielsen の定理でこの群と自然に同型になるわけでこれを調べる方法として、

$$\mathcal{M}_{g,*} \cong \text{Aut}_+ \pi_1(\Sigma_g, *) \xrightarrow{\rho_d} \text{Aut} N_d(\pi_1(\Sigma_g, *))$$

これは始めの頃に $2g$ 個の元が生成して、1 個の関係があるということをやりました。表示は比較的易しい群ですが、その自己同型は非常に難しくなります。ベキ零商にしたから少し易しくなるんですが、自己同型は難しい。ベキ零商の方の自己同型も難しいのですが、元の写像類群よりは易しいので、これを調べていって d をどんどん深くしていって、もとの写像類群に迫ろうというわけです。これも永遠に終わらないと思います。

この話は新しい不変量を作ろうとしているわけですが、この ρ_d が $d = 1$ のときには、symplectic な条件が出てくるんですが、 GL が出てくるので同型ではないのですが、symplectic なものに制限すると同型になる。 d が段々大きくなってくると、cokernel が段々大きくなって来ます。この cokernel の中にそこに対象の不変量が出てくるだろう。この cokernel に symplectic 群があつて、最終的には $\mathbb{Z}$ 上やるのが理想ですが、非常に難しいので $\mathbb{Q}$ -係数にして、 $Sp(2g, \mathbb{Q})$ の representation theory を使い、これは復習が終わったあとで次の節でやりますが、さまざまな対象の不変量とか、moduli 空間の特性類を定義したい、そしてその非自明性や性質を調べていきたいと思いますというわけです。

対象として moduli 空間 $\mathbb{M}_g$ 、この話ではまだ定義していませんが、種数 g の Riemann 面の moduli 空間、種数 g の Riemann 面は topological には Σ_g 、そこに複素構造を与えたものです。もともとの出方はそうではないんですが、Riemann はもっと複素解析的に自然に出てきたものを考えたのですが、現在の立場では複素構造というものはそういうものです。ちょっと言ったかもしれませんが、定義は未だしていませんので、次回以降段々説明していきます。

これは、閉曲面の基本群の自己同型群ですが、群の立場からいうと写像類群の対応する moduli 空間なわけですが、relation のない自由群の自己同型群。これは歴史的にはさっき言った組み合わせ群論が 100 年くらい前に出てきた頃から、自由群の自己同型群と写像類群は兄弟のように研究されてきました。今でもそれは続いていて、似ている所と違う所を調べましょう、それが一つの研究指針なわけです。自由群の自己同型群の方で相棒というのは graph の moduli 空間 $\mathbb{G}_n$ です。 n というのは自由群の rank ですが、 $n = 1$ のときは abel 群になってしまいますから、それはちょっと例外です。

歴史的にいうと Riemann 面の moduli 空間というのは Riemann に遡る。19 世紀に、Riemann が g が 2 以上のときに Riemann 面の moduli の局所表示、局所的に複素 $3g - 3$ 次元あるということを調べていました。実際にこれが具体的に調べられたのは、複素解析的、代数幾何的、2 つの立場からで、複素解析的には Ahlfors, Bers という複素解析の巨人がいて、代数幾何的には Grothendieck という 20 世紀の巨人がいて、それから Mumford、そしてそれに続いていろいろな仕事があります。

それに比べて graph の moduli 空間は比較的新しくて、1986 年 Culler-Vogtmann, moduli of graphs というタイトルの Inventiones に出た論文が初めです。Outer space という、Riemann 面の方では Teichmüller space というものがありますが、それにあたるものです。Outer space はかなり有名になりつつある空間で、これを導入して graph の metric の moduli というのは Outer space を自由群の自己同型群で割ったものになっています。定義は metric graph の同型類の全体ですね。

これらは 1 次元、2 次元の対象ですが、3 次元になって homology 3 球面というのがあります。その homology 同境界類の群 $\Theta_{\mathbb{Z}}^3$ 。これも敢えていうと Poincaré 球面というのがありますが、homology 球面の特に難しい所は双

曲構造が入ってかつ homology 球面になるものがあるところです。今はほとんど常識ですが、昔はそんなものはないに決まっているという感覚でした。そもそも Poincaré homology 球面の基本群は有限群ですけれども、homology 球面の基本群は無限群になりうるかというのが問題だった。今はものすごく沢山ある、ほとんど全ての homology 球面がそうだとすると語弊がありますが、そんなに遠くはない、非常に沢山あります。

今度は絶対 Galois 群 $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ というのが出てくる。これも段々最近は本腰を入れています。

最後に 4 次元多様体。topological な 4 次元多様体と C^∞ 多様体に差がある。topological な方で Freedman の仕事があって、smooth な方で Donaldson の仕事があって、その後ずっと続いているわけです。単連結の場合にははっきりした分類定理、Freedman の完全な分類があります。smooth な場合は単連結に限っても smooth な場合には非常に難しい。ここを基本群が非常に大きい場合に、こういうものから特性類が定義できるだろう。そこにむかっていくわけです。

そこで今日は表現論というのを使うわけですが、それを少し、表現論の使い方というか、表現論自身は、Frobenius, 対称群の表現など、100 年以上前から連綿と続いているわけです。Lie 群の表現論は Hermann Weyl, Schur の仕事などがあって、いまは主流は無限次元ですが、有限次元でも全部わかったかというとうそういうわけでもありません。

不変量を出すわけですが、曲面、 $H_{\mathbb{Q}} = H_1(\Sigma_g; \mathbb{Q})$, すべてここから来るわけです。本当は $\mathbb{Z}$ 上でやりたいのですが、表現論、線型代数を使うので体でないとなかなか難しい。 $\mathbb{C}$ で最初やるのですが、対称群や symplectic 群の場合には非常に良い性質があって $\mathbb{Q}$ 上に理論が落ちるので、 $\mathbb{Q}$ -係数にしてこれを考えます。これは $Sp(2g, \mathbb{Q})$ の基本表現空間と呼ばれます。

symplectic な基底を、これも無限個あるわけですが、一つ固定します。

$$x_1, \dots, x_g, y_1, \dots, y_g$$

いろいろな計算をするためには symplectic な基底を固定する。そうするとこれもまた復習ですが、Jacobi 多様体というものがある。その $\mathbb{Q}$ -係数 homology が $H_{\mathbb{Q}}$ の生成する Grassmann 代数に自然に同型になる、同一視されます。

$$H_*(\text{Jac}; \mathbb{Q}) = \Lambda^* H_{\mathbb{Q}}.$$

そして $Sp(2g, \mathbb{Q})$ が $H_{\mathbb{Q}}$ に作用するわけですが、intersection number

$$\mu : H_{\mathbb{Q}} \times H_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathbb{Q}$$

というのがあって、すべてはここから来るわけです。曲面、2 次元多様体で 1 次元 homology と 1 次元 cohomology との間の Poincaré duality と等価なものです。これを保つような線型空間の自己同型写像全体が $Sp(2g, \mathbb{Q})$ になるわけです。これが基本表現空間 $H_{\mathbb{Q}}$ に線型に作用するわけですが、線型代数での基本的な演算、Grassmann 代数にも自然に作用します。以後何度も何度も出てくるのでこれを単に Sp と書きます。単に Sp と書いたら、そこで定まっている g に関して、 $Sp(2g, \mathbb{Q})$ の事です。

Sp が働いているから、 Sp 全ての元で動かない元、不変元、これが大事になってきます。それがどうなるかというと、

$$H_*(\text{Jac}; \mathbb{Q})^{Sp} = (\Lambda^* H_{\mathbb{Q}})^{Sp}$$

ここで intersection number

$$\mu : H_{\mathbb{Q}} \times H_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathbb{Q}$$

は

$$\mu : \Lambda^2 H_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathbb{Q}$$

に factor します. skew-symmetric ですから, これは homology で書いたのですが, Poincaré duality があるので cohomology の方にもあるわけです. これを ω_0 と書いて, symplectic な基底は無限個あるのですが,

$$\omega_0 := \sum_{i=1}^g x_i \wedge y_i \in (\Lambda^2 H_{\mathbb{Q}})^{Sp} \cong \mathbb{Q},$$

これが基底の取り方によらない元になります. これが Hamilton 力学というか, これは曲面の方から行っているんで, 力学の方はまた別にあるのですが, 動かないものが 1 個だけあるわけです.

そうすると

$$\begin{aligned} H_*(\text{Jac}, \mathbb{Q})^{Sp} &= (\Lambda^* H_{\mathbb{Q}})^{Sp} \\ &= \mathbb{Q}[\omega_0]/(\omega_0^{g+1}) \\ &= H_*(\mathbb{C}P^g; \mathbb{Q}) \end{aligned}$$

$\mathbb{Q}$ 上の多項式代数で, こういう ideal で割ったものになります. これをよく見ると同型になる事の, 全ての数学で重要な複素射影空間の $\mathbb{Q}$ -係数の homology と同型になる. こういうものに分類空間, 複素直線束の分類空間が自然に出てくるわけです.

ここに Sp の表現論を使って invariant を定義するわけです. これを Jacobi 多様体で考えるとこうなって, この話の一番最初に説明したように, 与えられた Jacobi 多様体から genus が再現されるわけです. 1 個の曲面, Riemann 面の場合にそういう事がある.

表現論を使って, invariant, 特性類を定義します. こういう Grassmann 代数だけではなくて, 別のものも出てきます. どのようなものが出てくるかというと, 最初に出てきた Grassmann algebra,

$$H_{\mathbb{Q}} \leadsto \Lambda^* H_{\mathbb{Q}}.$$

これは線型代数でやるときに, ひっくり返すとマイナスになります, それが無い, symmetric algebra.

$$H_{\mathbb{Q}} \leadsto S^* H_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_g, y_1, \dots, y_g]$$

ひっくり返してもマイナスが出ない, symplectic 基底に関して可換なもの, 多項式代数です. 座標に関する多項式の全体です. Grassmann 代数は skew symmetric ですから有限次元ですが, これは多項式代数ですから当然無限次元です. 通常多項式は可換な環になるわけですが, これを非可換にするとテンソル代数になります.

$$H_{\mathbb{Q}} \leadsto T^* H_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}\langle x_1, \dots, x_g, y_1, \dots, y_g \rangle,$$

あるいは多項式代数の観点からすると, 非可換多項式代数と言う事ができます. これを完備化するというか, 多項式ですから, 途中で切れているものだけを考えているわけですが, 完備化してべき級数にして考えると, 非可換形式的べき級数

$$T^* H_{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{Q}[[x_1, \dots, x_g, y_1, \dots, y_g]],$$

こういうものが出てきて, これらに全部 Sp が働きます. こういうものが出てきて線形代数的な構成ですから Sp が全部働きます. さらに写像類群の構造を調べていくと, これの中の Sp -submodule が出てきて, Sp -表現空間の中の部分表現空間が沢山出てきます. そこから不変量を作っていきますというわけです.

4 表現論の使い方

表現論と書くと、さっきも言いましたが、表現論は歴史があって一大理論ですから、一回でやるというのはあまりにおこがましいので、表現論の使い方、user's guide としておきます。

数学に限らず、研究する上でひとつ微妙な所ですけども、使うものを全部基礎から勉強して使うのは理想でしょうが、いくら時間があっても足りないですね。しかし表層的に勉強しても、はじめのうちは使えてもだんだん使えなくなっていく。その間というのはなかなか難しい。

表現論を道具として使うわけですが、例えば、トポロジーの中に限ってもスペクトル系列というのがあります。これを本当に勉強しようと思うとセミナーでも 3,4 回はかかる。やり方はいろいろありますが、非常に大事なテクニックの一つです。その場でやって 1 ヶ月くらいは使えますが、1 年くらいして使おうと思うと使えない。1 年何もやらないでいると出来ない。

そういうときは勉強した本を取り出して、ポイントなどを見るわけです。道具として使うというのは、例えば、大工さんが家を建てる事を考えます。大工さんでいうと、のこぎりで木を切るわけですが、朝現場に行って切る前の話ですが、のこぎりが錆びて切れないと話にならないですね。これは良い大工さんの絶対条件、必要条件ですが、道具として使う場合には、常に道具を整備しておく。数学も同じです。毎日スペクトル系列を使う事はないでしょうが、半年に 1 回くらいは、あまり使わなくても使っておく。私の立場から表現論というところからいいます。対称群の表現論という大変美しい理論で、どんな数学を学ぶ人も 1 度は学んでおいた方がよいと思います。そんなに難しくなくて非常に美しい理論です。関数論と並んで、関数論ももちろんですね。関数論は絶対 100 パーセント勉強した方がよいですが、対称群の方は 100 パーセントかどうかはちょっと微妙です。ただ関数論よりも対称群の表現だけなら理解しやすい、勉強しやすいと思います。それを最近使ったので表現論をやろうと思ったのですが、すっかり全部忘れてました。キーワード的には character とか、覚えてましたが、何もしてないよりはましで、まだ刃はあるので、それを磨くという事をやりました。前置きが長くなりました。

少しだけ定義をしておきます。ここまで群を Γ と書いていましたが、Lie 群も出てくるのでここからは G と書きます。表現とはなにかという群がベクトル空間に働くわけです。表現論は線型代数学ですから、固有値が主役なので、まず $\mathbb{C}$ でやります。この話では $\mathbb{Q}$ 上の表現だけで良いのですが、展開は $\mathbb{C}$ でやります。無限次元も大事な対象ですが、ここでは全て有限次元ベクトル空間とします。

有限次元ベクトル空間には基底があって、

Definition 4.1. G : 群, V : $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とします。ここで $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$.

$$\rho : G \rightarrow GL(V)$$

が与えられたとき、このとき V を G の表現空間、単に表現、あるいは G -module という。

働くわけですが、群の元 $g \in G, v \in V$ に対して、 ρ を省略して $\rho(g)v = gv$ と簡単に書きます。

いろいろ調べていくのですが、まず 2 つの定義をしておきます。 V_1, V_2 : G -modules が与えられたとき、表現として同型 $V_1 \cong V_2$ であるとは、強調して $V_1 \cong_G V_2$ と書きますが、ベクトル空間としての同型写像 $f : V_1 \rightarrow V_2$ が存在して $f(gv) = gf(v)$ が任意の $g \in G, v \in V_1$ に対して成り立つときです。ベクトル空間としての同型写像が存在して、 G の作用に関して equivariant になっているときです。これは一方向からですが、線型代数学から逆方向にも写像が存在することはわかります。

次に

$$V^G = \{v \in V; \forall g \in G \text{ に対して } gv = v\} : G\text{-不変元の全体}$$

とします。全然動かないベクトル全体、これは非常に大事な G が自明に作用する空間です。

それから linear subspace $W \subset V$ が G -不変であるとは、 G が V に作用しているわけですが、 $G(W) \subset W$ となることです。実際には $G(W) = W$ が成り立ちます。このとき、 W ももちろん G -module、表現空間になります。

もう 1 つだけスタンダードな定義をしておきます。既約表現というものを定義しておきます。

Definition 4.2. 表現 $\rho : G \rightarrow V$ が既約 (irreducible) 表現であるとは、 V の G -submodule が $\{0\}$ と V に限るときです。

G が作用する部分空間、 $\{0\}$ と V はいつでも G -submodule ですが、この 2 つに限るときです。この話では既約表現 (irreducible representation) を irrep と省略して書きます。

さて、それでもうちちょっと具体的に話をしていきます。表現論がどこから始まったかという、やはり対称群の表現、Frobenius の仕事、1900 年頃、110 年くらい前からです。

Example 4.3. $G = \mathfrak{S}_n : n$ 次対称群 (symmetric group of degree n) とします。これはいろいろなものに作用するわけですが、基本表現空間は次のようになります。 $\mathfrak{S}_n$ は n 個の元からなる集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ に permutation として作用しますから、 $x_1, \dots, x_n$ を座標とするベクトル空間 $V = \mathbb{R}^n$ に座標変換として作用します。よって

$$\rho : \mathfrak{S}_n \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$$

が得られます。 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ は n 文字の置換であって、積は写像の合成として定義します。これは permutation $\mathfrak{S}_n \ni \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$ に対して、座標変換として働いて、

$$(x_i \mapsto x_{\sigma(i)}) \in GL(n; \mathbb{R})$$

と作用する。そうするとこの $\mathbb{R}^n$ が $\mathfrak{S}_n$ -module になります。

これは既約かどうかという事ですが、3, 4 年生の人がいたらちょっと考えてみてください。原点だけと全体以外にこれらの座標変換で動かない部分空間があるか。 $n = 1$ のときは明らかに既約になります。 $n > 1$ のときは既約ではない。わかりきった事です。座標変換として働いているので働かないのは全部同じ座標にすれば良いですね。

$$W = \{x = (x_1, \dots, x_n); x_i = x_j \forall i, j\} \subset \mathbb{R}^n$$

と取ります。座標変換として働くので不変になるのは、座標が全部一致しているときです。こうやると 1 次元の subspace になり、この上で $\rho(\sigma)$ は恒等写像になります。従って $n > 1$ ならば既約表現ではない。そうすると、既約ではないとすると分解しようというわけです。自明な表現 W は 1 つ出てきましたが、残りはどうなっているかというわけです。

これに関して Frobenius が、これは特別な場合ですが、全ての有限次元表現に対して完全な解答を与えました。

Example 4.4. $G = \mathfrak{S}_n$ に対して、symmetric product:

$$S^k \mathbb{R}^n = \{x_1 \text{ に関する } k \text{ 次同次 (斉次) 多項式} \}$$

を考えるとここに作用します。有限次元のベクトル空間に座標変換として働くわけです。symmetric power というのは表現論だけではなくここでも非常に重要な役割を果たします。大分先に transversely symplectic

foliation などをやると、3 次、4 次、5 次の *symmetric power* が出てきて、*Hamiltonian function* として出てきます。非常に重要なものです。これで不変なもの、 k 次同次多項式全体に座標変換として作用して動かないものは、何かというと対称な多項式です。

$$(S^k \mathbb{R}^n)^{\mathfrak{S}_n} = \{k \text{ 次対称多項式} \}.$$

ここで線型代数というか、基本定理、常識ですけれども、非常に大事な定理があつて、

$$\begin{aligned} (S^* \mathbb{R}^n)^{\mathfrak{S}_n} &= \{ \text{対称多項式} \} \\ &= \mathbb{R}[\sigma_1, \dots, \sigma_n] \end{aligned}$$

と再び基本対称式で生成される多項式代数になります。いま $\mathbb{R}$ 上で書いていますが、 $\mathbb{Q}$ 上でそうなります。ここで $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ は基本対称式で、それらの生成する多項式代数になっている、これが定理です。これは 1 年生の線型代数ではやりませんが、非常に基本的な事柄です。この辺りは表現空間の不変元というものに慣れるために説明しています。

Example 4.5. この既約表現に分解していくわけですが、今度は行列群 $G = GL(n, \mathbb{R})$, $\mathbb{Q}$ でもよいですが $\mathbb{R}$ でやります。 $V = \mathbb{R}^n$ 、これは基本表現空間と言います。ここに通常の線型変換として働く。これは既約になります。これは定義に戻れば簡単にわかります。いろいろな不変量が出てくるといのはテンソルです。多項式代数、*Grassmann* 代数ですけれども、全てはテンソル代数に入るのでテンソルで考えます。例えば V を 2 回テンソルを取るとこれは既約かどうか？

$$V^{\otimes 2} = \Lambda^2 V \oplus S^2 V$$

と *alternating* なテンソルと *symmetric* なテンソルの直和に分解します。これはちょっと進んだ線型代数で必ずやります。これは具体的にはどうやってやるかという、

$$V^{\otimes 2} \ni u \otimes v = \frac{1}{2} \{ (u \otimes v - v \otimes u) + (u \otimes v + v \otimes u) \}$$

となります。交代テンソルの前にも、 $\frac{1}{2}$ を入れた方が理論がきれいになる場合もありますが、 $\mathbb{Q}$ 上の話のときはあってもなくてもよいという怒られますが、煩雑になるので書かないときもあります。共通部分がない事も容易にわかるので直和分解になっている事がわかります。 GL の作用に関して、これは明からかに GL -同変になっています。答えから言うと GL -module として 2 階の交代テンソルも対称テンソルも両方既約になります。だから 2 階のテンソル $V \otimes V$ はうまく既約なものの直和に分解できました。では、 $V^{\otimes 3}, V^{\otimes 4}, \dots$ はどうなるか。これは線型代数学を道具として勉強した後に、かなり努力すれば独力でわかります。この後どうするかという、ここから先はその人によるわけで、そこで *Hermann Weyl* という巨人が出てくるわけです。あるいは *Schur* の仕事とか、表現論を創った人たちが出てくるわけです。ある意味で *Hermann Weyl* が独力でという語弊がありますが、表現論というものを築き上げたわけです。そこには *Lie* 群という素晴らしい概念がもちろん *Lie* によって出てきていたわけですが、

Example 4.6. この話では GL もやりますが、一番大事なものは Sp です。*Lie* 群には 3 つの系列があつて、行列式 1 の SL の系列、直交群 O の系列、そして Sp の系列です。ある意味パラレルな部分と段々複雑になっていく部分があります。 $G = Sp(2g, \mathbb{Q}) \subset GL(2g; \mathbb{Q})$ は一番複雑で、大雑把にいうと GL の表現論、 SL を 2 回やる、*double* のような感じです。基本表現空間としてはさっきの

$$V = H_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \langle x_1, \dots, x_g, y_1, \dots, y_g \rangle: \text{fundamental representation space}$$

を考えます. *symplectic* な基底 $x_1, \dots, x_g, y_1, \dots, y_g$ を取ると, それを座標というか基底にするような $2g$ 次元の *symplectic vector space* になっていて, *intersection form* を保って Sp が作用しています.

さっきと同じ事を $V^{\otimes 2}$ でやるとどうなるか. まず GL の段階で

$$V^{\otimes 2} = \Lambda^2 H_{\mathbb{Q}} \oplus S^2 H_{\mathbb{Q}},$$

Sp の段階で

$$V^{\otimes 2} = \text{Ker} \mu \oplus \mathbb{Q} \oplus S^2 H_{\mathbb{Q}}$$

と分解します. *symmetric power* は 2 次に限らず Sp 上既約になります. これは 3 次でも 4 次もかなり努力すればわかりますし, 一般の場合も帰納法で証明できます. しかし *intersection form* は $\Lambda^2 H_{\mathbb{Q}}$ に効いてきてこちらには既約ではないわけです. つまり,

$$\mu : \Lambda^2 H_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathbb{Q}$$

は全射になるので, $n = 1$ のときは自明になるので例外ですが, $n > 1$ のとき, μ は全射になってこれは Sp -map になって, 作用に関して *equivariant*. 従ってこれの *Kernel* も Sp の表現空間になります. よって

$$V^{\otimes 2} = \text{Ker} \mu \oplus \mathbb{Q} \oplus S^2 H_{\mathbb{Q}}$$

と分解できてこれが 3 つとも既約になります.

ここに *intersection number* が現れたのですが, テンソルをどんどん大きくしていくとどうなるかというところ, 予想されるように *intersection number* を取る方法は沢山出てきますから, 全部考える事になってだんだん複雑な構造になって, それこそが不変量を取り出す源になるわけです. 全ては *intersection number*, *Poincaré duality* から出てくる. まず GL で分解する事が必要ですが,

$$V^{\otimes 3}, V^{\otimes 4}, \dots$$

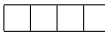
は, そのあとで Sp 上で分解する. これも *Hermann Weyl* がやったわけです.

対称群の表現をやります. これは *Frobenius* が 1900 年頃, 100 年以上前に独力で完成させたわけです. 今これを講義する場合, *Frobenius* のままやるのは難しいですが, *Young* 図形というのがあります. *Frobenius* 自身は少なくとも最初はこれを使っていません. *Young* という人が出てきて, 最近の *Yang-Mills* 理論の *Yang* とはスペルが違います. それから *Schur*, こういう人たち, とくに *Frobenius* と *Young* の仕事をやります.

まず今言った *Young* 図形. これが道具になります. これは表現から出てくるのですが, 組み合わせ的な対象として定義します.

combinatorics というのは, 余談ですが, 大昔から, 敢えていうと *Euler* くらいから始まる. その重要性はますます増してきて, *Fields* 賞受賞者をみても, 数理論理学というものがありますが, *combinatorics* というのはウエイトを増しています. 数理論理的な色彩, *symplectic* 幾何, そして *combinatorics*, 非常に深い所での組み合わせが現れています. *Young* 図形, 例から行くと, 空集合は例外なので除いて, 正方形, $\square, \square\square, \dots$ *Young box* を並べていく. ある規則で並べていきます. この話では *Young* 図形は, λ という記号で書きます. 箱がどんどん増えてくるのですが, $|\lambda|$ を λ の *box* の数とします. そうすると 0 は空集合です. 箱はどんどん増えていきます.

- $|\lambda| = 1$ のときは, *box* $\square$ でこれを表現論の人は [1] と書きます.

- $|\lambda| = 2$ になると, 2 種類になって横と縦  ,  になります. Young 図形を表すのに, だんだん Young box をあるルールで並べていっても良いのですが, 箱の数が多くなると大変なので, これをそれぞれ  = $[2]$,  = $[11] = [1^2]$ と書きます. 1 行目の box は 2 個, 1 行目の box の数が 1 個, 2 行目が 1 個という意味です.
- $|\lambda| = 3$ になると,  = $[3]$,  = $[21]$,  = $[1^3]$.
- $|\lambda| = 4$ のとき,  = $[4]$,  = $[31]$,  = $[22] = [2^2]$,  = $[211] = [21^2]$,  = $[1^4]$.

以下... と行って一般の場合を定義します. Young 図形

$$\lambda = [\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_k]$$

を考えます. ここで λ_1 は 1 行の box の数, λ_2 は 2 行の box の数, ..., λ_k は k 行の box の数, すなわち

- $\lambda_i \in \mathbb{N}$,
- $|\lambda| = \sum_{i=1}^k \lambda_i$,
- $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k > 0$ (広義単調減少)

とします. こういうものの事を Young 図形と言います. そして k の事を λ の高さと言います. これが Young 図形の定義ですね.

これはまた別の観点, 別の見方をすると, λ は $|\lambda|$ の partition とも思えます. これも組み合わせ数論の大事な対象です. partition というのは, ある自然数を自然数の和で書く, その和の書き方の事を partition と言います. 自然数の和で書いたらそれを大小関係で段々減少するようにもっていくと, $|\lambda| = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k$ となるわけです.

従って Young 図形, $n = 4$ まで書きましたが, 一般に箱の数が d のときに Young 図形が何個あるかというと, d の partition の分だけあります. topology ですから, これは無限次元複素 Grassmann 多様体の $2d$ 次元 cohomology の次元に等しくなります. Chern class というのがあって c_1^d とか c_n とかこれがびったり対応しています. 組み合わせ的な数なんです, これ自身組み合わせ的な数論の重要な対象です. いろいろ条件を入れて, 例えば偶数だけとかすると組み合わせ的な数論が出てきます. これが Young 図形というものです. Frobenius の定理をまとめておきますと,

Theorem 4.7 (Frobenius).

1. $\mathfrak{S}_n$ の既約表現は box の数が $|\lambda| = n$ の Young 図形 λ と 1 対 1 に対応する. すなわち与えられた既約表現に対して Young 図形が存在して, Young 図形が異なれば表現としても異なる. また各 Young 図形に対して既約表現が存在する.
2. 完全可約性, すなわち任意の有限次元表現は *irrep* の直和に分解する (順序を除いて一意).

これが対称群の場合の既約表現に関する結果です. この証明は何度も言っているように $\mathbb{C}$ 上でやるのですが, できたものは全部 $\mathbb{Q}$ 上定義できているので, この定理は $\mathbb{Q}$ 上の表現に対して成り立ちます. これを段々使っていきます. Weyl はこれと Schur の考え方を使って, GL , 直交群 O, Sp の既約表現を沢山作った, Weyl 構成と呼ばれる仕事をしました.

その前にさっきの話ですが, あまりに表層的に勉強すると, 既約表現が Young 図形に対応するという事は

わかりましたが、具体的な Young 図形に対応する表現がどんなものかわからないようでは困ってしまいます。具体的な作り方をやります。Frobenius がどこまでやったのか知りませんが、これは Young symmetrizer というのが出てくるので Young でしょう。

大事な材料がもう一つ出てきます。群環, group algebra, これは慣れるまで違和感があります。定義から群が環になるというのはおかしいと思うかもしれませんが、これは非常に素晴らしい概念です。任意の群に対して群環はあつて、体もまずは $\mathbb{C}$ 上でやるのですが、さっき言ったように $\mathbb{Q}$ 上でやることにします。 $\mathfrak{S}_n$ の $\mathbb{Q}$ 上の群環とは何か、これはまず $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間であつて

$$\mathbb{Q}\mathfrak{S}_n = \mathbb{Q}\langle \sigma; \sigma \in \mathfrak{S}_n \rangle \ni a = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} a_\sigma \sigma$$

ベクトル空間の基底として $\mathfrak{S}_n$ の元全てを取ります。次元は $n!$ 次元のベクトル空間、これを群環と言います。 $\mathbb{Q}\mathfrak{S}_n$ の元の表し方ですが、 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ の 1 次結合 $a = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} a_\sigma \sigma$ ですから、これは $\mathfrak{S}_n$ から $\mathbb{Q}$ への関数とも思えます。

そうするとまず和ですけれども、これはベクトル空間の構造ですけれども、

$$\text{和: } (a+b)_\sigma = a_\sigma + b_\sigma.$$

大事なのは群環というくらいですから、積も素直に定義できて、

$$\text{積: } \left(\sum_{\sigma} a_\sigma \right) \left(\sum_{\tau} b_\tau \right) = \sum_{\sigma, \tau} a_\sigma b_\tau (\sigma\tau).$$

誰がやってもこうやると思います。

今は対称群でやりましたが、任意の群で定義できます。これを使うとさっきの既約表現に対応する Young 図形が具体的に書く事ができます。まずその前に群の元の有理数係数の形式的な和 $\mathbb{Q}\mathfrak{S}_n$ は、対称群の表現、 $\mathfrak{S}_n$ -module になります。それは作用を $\mathbb{Q}\mathfrak{S}_n \ni a, \mathfrak{S}_n \ni \tau$ に対して、

$$\tau a = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} a_\sigma \tau \sigma$$

と定義すれば良いわけです。自然な作用です。

既約表現の Young の構成をやります。Young 図形

$$\lambda = [\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_k], |\lambda| = k$$

があつたときに、これに対応する既約表現 V_λ を次のように構成します。群環の中に本当に作ります。群環は $\mathfrak{S}_n$ -module なわけですが、その中に具体的に作る $\mathfrak{S}_n$ -submodule です。これは非常に簡単です。

説明するのを忘れていましたが、Young 図形  に関して行列と同じように横の並びを 1 行, 2 行, 3 行, 縦の並びを 1 列, 2 列と呼びます。そして左上角の箱を原点のように考えて、1 行 1 列, 2 行 2 列などと言います。

Young 図形に numbering を付けます。一番スタンダードな numbering:  を付けたとします。そして

$\mathfrak{S}_n$ の部分群

$$P_\lambda = \{ \sigma \in \mathfrak{S}_n; \sigma \text{ は各行の文字を保つ } \} (\subset \mathfrak{S}_n) \cong S_{\lambda_1} \times S_{\lambda_2} \times \dots \times S_{\lambda_k}$$

を考えます。与えられた λ に従って、最初の λ_1 行に働く、次の λ_2 行に働く、... となっています。さっき線型代数学で基本的なものは、交代的な作用と対称的な作用の 2 つがあります。この P_λ は symmetric なもので、交代的なものも考えなくてははいけません。それが

$$Q_\lambda = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n; \sigma \text{ は各列を保つ} \} (\subset \mathfrak{S}_n) = P_{\lambda^*}.$$

これが Young の素晴らしいところで、Young 図形を行列で言えば transpose に対応する操作をした λ^* , λ の双対 Young 図形と言いますが、それに関する P_{λ^*} になります。もとの λ の列に関する P になります。そこで 2 つ対称群の部分群ができました。

P_λ の方から群環の元

$$a_\lambda = \sum_{\sigma \in P_\lambda} \sigma$$

を考えます。群環の中で $\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sigma \in \mathbb{Q}\mathfrak{S}_n$ を考えると、これは群環の中で非常に良い元になって、 $\mathfrak{S}_n$ の任意の元で不変な元、平行移動しているだけ、になります。その一部分がこの a_λ です。これが symmetric power の方に寄与します。今度は

$$b_\lambda = \sum_{\tau \in Q_\lambda} (\text{sgn } \tau) \tau$$

を考えます。こちらは alternating の方なので符号を考える必要があります。permutation ですから符号があります。 a_λ も b_λ も群環 $\mathbb{Q}\mathfrak{S}_n$ の元です。

それでこれが最後ですが、

$$c_\lambda = a_\lambda b_\lambda \in \mathbb{Q}\mathfrak{S}_n.$$

これを Young symmetrizer と言います。この辺りの事は有限群の表現論の方ならどんな本にも必ず書いてあります。私の話のここでの種本は Fulton-Harris という表現論の素晴らしい本です。

このとき既約表現 V_λ の定義は何かというと、左からは $\mathfrak{S}_n$ -module にしたいので右からは単に c_λ を掛ける、

$$V_\lambda := \mathbb{Q}\mathfrak{S}_n c_\lambda$$

ただこれだけです。これは左 $\mathfrak{S}_n$ -module ですから、表現になるわけですが、既約になる事がわかります。これは Young 図形によるので V_λ と書くわけです。これが Young の素晴らしい定義です。さっきの Frobenius の定理に出てきた、 $\mathfrak{S}_n$ の既約表現が box の数が n になるような Young 図形と 1 対 1 に対応するわけですが、これがその具体的な表示です。

ここら辺りはコンピュータがだんだん出てきますが、これは群環の話になります。

1 個だけ例をやります。

Example 4.8. $\square \square \cdots \square \square$ のとき。

一番最初のやつです。1 行しかないとき、 $V_{[n]}$ 、これが何かはすぐにわかります。

まず $P_{[n]}$ は全体 $\mathfrak{S}_n$ なわけですね、列は 1 つずつしかないですから、文字は移ってはいけなないので、 $Q_{[n]} = \{id\}$ となります。従って、

$$b_{[n]} = 1.$$

また $P_{[n]} = \mathfrak{S}_n$ ですから

$$a_{[n]} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sigma,$$

任意の群の元を全て足したものです。このとき任意の $\tau \in \mathfrak{S}_n$ に対して、 $\tau a_{[n]} = a_{[n]}$ になります。つまり不変元で、これしか出てこない。従って $V_{[n]} = \mathbb{Q}$ というのは自明な 1 次元表現になります。

ここら辺はコンピュータでいろいろ計算できるのですが、時間の関係でここでは省略します。

Fact 4.9. 群環 $\mathbb{Q}\mathfrak{S}_n$ への表現を正則表現といいます。その既約分解の重複度は次のようになります。

$$\mathbb{Q}\mathfrak{S}_n = \sum_{\lambda} (\dim V_{\lambda}) V_{\lambda}.$$

V_{λ} の次元がそのまま V_{λ} の重複度になるという、素晴らしい定理です。対称群の表現論が美しいという事の 1 つの証になるような定理です。

これは有限群、対称群ですが、Weyl が GL , Sp などに対してやるのですが、どうやってやるかという、Schur functor, Weyl 構成というものがあります。この対称群の表現と今の場合でいうと基本表現 $H_{\mathbb{Q}}$ というものがあります。これの n 階テンソル $H^{\otimes n}$ を考えると、左 GL -module, あるいは Sp -module になります。各 n 個の factor に作用します。そして今度は右から $\mathfrak{S}_n$ が作用します。右とか左とか言ってますが、これは悲しいかな、人間には右と左しかないからで、あまり右左という事に意味があるわけではなく、まったく違う方向から作用があるという事です。右からの作用は何かというと座標変換です。このポイントはこの 2 つの作用は明らかに交換可能であって、そこでこの Frobenius のやった対称群の表現の構成を、左からの GL の作用を含めてやると、具体的には Schur による構成を行うと、Weyl 構成と呼ばれる GL や Sp の既約表現を構成する事ができます。それは次回やります。

これだと道具だけ並べて証明も何もしないで話をしただけになるので、少しだけ、最後に次元だけ紹介しておきます。これだけだと対称群の表現の入門にもならないので、次元公式、触りをやって詳しくは次回とします。例でやっておしまいにします。これが研究をしていく上で非常に面白いのですが、全く違う公式が 3 個あります。少なくとも 3 個あって、それはいろいろ長所短所があるわけです。例えば 1,2 はコンピュータに使えますが、3 はちょっと使えない。しかし 3 を使って次回 Sp の種数 1 の場合の不変元の構成をしてある次元公式の証明をします。メリット、デメリットがあるわけです。これらは同じ値を与えるものですから、例えば直接 1 と 2 が等しい事を証明する事が大分前ですが、1 つの論文になっています。詳しくは Fulton-Harris を見てください。いろいろ面白い事が書いてあります。 λ を box の数が n の Young 図形とします。同時に例として  を考えます。

$\dim V_{\lambda}$ の公式.

1. hook length formula:

$$\dim V_{\lambda} = \frac{n!}{\prod \text{hook length}}.$$

対称群 $\mathfrak{S}_n$ の位数 $n!$ を全ての hook length の積で割ったものです。

Young 図形があったときに、hook length とは、Yong 図形の各 box から真横および真下に突き当たるまで線を引き、丁度フックのようになっているので hook と言いますが、その線の上に自分を含め何個箱があるか、を hook length と言います。  の場合、hook length は、4,2,1,1 となりこの積をとりま

す. そして

$$\begin{aligned}\dim V_{\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \end{array}} &= \frac{4!}{\prod \text{hook length}} \\ &= \frac{4!}{4 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1} \\ &= 3.\end{aligned}$$

2. コンピュータに一番載せやすいのは次の Frobenius の公式です. まず Young 図形 λ の高さ $|\lambda| = k$ だけの独立変数 $x_1, \dots, x_k$ を用意します. 1 年生の線型代数で学んだ差積

$$\Delta(x) = \prod_{i < j} (x_i - x_j)$$

というものがここに出てきます. このときに次元は

Frobenius formula:

$$\dim V_{\lambda} = [\Delta(x)(x_1 + \dots + x_k)^n]_{x_1^{l_1} \dots x_k^{l_k}}$$

ここで $[f(x)]_{x_1^{l_1} \dots x_k^{l_k}}$ は多項式 $f(x)$ の $x_1^{l_1} \dots x_k^{l_k}$ の係数です. 但し $l_1 = \lambda_1 + k - 1, l_2 = \lambda_2 + k - 2, \dots, l_k = \lambda_k$ です.

今の場合に具体的に計算してみますと, 高さが 2 ですから

$$\dim V_{\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \end{array}} = [(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)^4]_{x_1^4 x_2} = 3$$

になります. ここで $l_1 = 3 + 2 - 1 = 4, l_2 = 1 + 2 - 2 = 1$ です.

3. これを最後にしますが, 1 と 2 がどう関係あるのか, 対応付けようがありません. そして 3 番目の公式というのは, Weyl の 1930 年代の一番最初の仕事に関係して, 前回少し使いました.

$$\dim V_{\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \end{array}} = \left\{ \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & & \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & & \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & & \end{array} \right\} \text{の個数}$$

さっき numbering は, standard と言ったのですが, これを少し緩めます. 1 から n まで各行各列が狭義単調増加な numbering を考えます. これのどこが次元に関係するのかという感じがしますが, それらの numbering の仕方の個数が次元になります.

これが知られている 3 つの公式です. まだあるかもしれませんが, 有名な 3 つの公式です. これをだんだんコンピュータなんかで実験していくときには, 2 番目の公式が便利です. 100 乗なんていうのもコンピュータは一瞬で計算しますから非常に感激します. この前, 因数分解をやったら Mathematica というのは有能ですね. 1 行に全部書いたような式の因数分解があつという間にできてしまいます. もの凄いののでびっくりして, これはうかうかできないですね. 組み合わせ的なものがあつて, 因数分解すると全く違う系列から同じものがでてくるといふものがあつて, さっきの 100 乗くらいの所でこの因数が出てくるといふと思って, 本当に出てくると感激ものです. 次回, その次々回くらいに出てきます. こころ辺り少し早足になったので, 次回またやります. そして Sp の話をやります.

第5回(10月8日)

今日は5回目ですね。前回表現論を道具として使うという話をしていました。1回半ぐらいで終わる予定でしたが、今日これを1回やって、次回から写像類群とか foliation, 3次元多様体の不変量などに表現論を応用して、どういう特性類や不変量が出てくるかをお話をします。

少し復習をします。 n 次対称群を $\mathfrak{S}_n$ と書きました。その既約表現ですね。表現論は $\mathbb{C}$ 上展開されるものですが、有限群の場合にはよく知られているように、 $\mathbb{C}$ 上の既約表現の分類も、 $\mathbb{Q}$ 上の分類になるので、 $\mathbb{Q}$ 上考える事にします。

$\mathfrak{S}_n$ の既約表現は、

$$\text{Young 図形 } \lambda = [\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_h] \quad \text{で} \quad |\lambda| = \sum_{i=1}^h \lambda_i = n$$

となるものと1対1で対応します。

Young 図形 $\lambda = [\lambda_1 \dots \lambda_h]$ とは何だったかと言いますと、第1行に λ_1 個の box, 第2行目に λ_2 個の box, そして、第 h 行目に λ_h 個の box が並んでいるものです。ここで前回 Young 図形の高さ $h = h(\lambda)$ の事を k と書きましたが、高さ, height なのでこれからは h と書く事にします。また箱の数の総和

$$|\lambda| = \lambda_1 + \dots + \lambda_h$$

を単に λ の総和と呼びます。この箱の数 $|\lambda|$ が n 次対称群の n に対応します。

別な見方をすると Young 図形は総和 $|\lambda| = \lambda_1 + \dots + \lambda_h$ の正の整数による分割に対応します。ここで分割は弱い意味で減少

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_h$$

しているとします。さらに $\lambda_h \neq 0$ とします。

Example 4.10. $\lambda = [321]$.

具体的な図形としては、



で、高さ $h = 3$ であって、総和 $|\lambda| = 6$ となります。

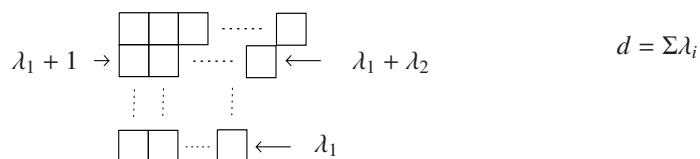
これが対称群の既約表現に関する Frobenius の定理でした。Young 図形 λ に対応する $\mathfrak{S}_n$ の既約表現を V_λ と表します。 V_λ は up to isomorphism でただ1つあるわけですが、だんだん具体的な構成をしていくには、表現を既約分解したとき、どの場所にどの V_λ が現れるかが大事になってきます。

ここで Young 図形 λ の総和を $|\lambda| = d$ とおきます。つまり d の partition が1つあったとします。後でテンソル積や外積代数とか出てきますが、具体的な記述を考えます。群環 $\mathbb{Q}\mathfrak{S}_d$ 上 Young symmetrizer という名前が付いている元 c_λ を右から掛けるという準同型写像に関して、

$$V_\lambda := (\mathbb{Q}\mathfrak{S}_d \xrightarrow{c_\lambda} \mathbb{Q}\mathfrak{S}_d) \text{ の image}$$

でした。これは具体的に構成したものです。ここで c_λ は何だったかと言いますと、Young 図形 λ が1つあるごとに $\mathfrak{S}_d$ の部分群 P_λ と Q_λ を定義します。多項式代数と外積代数、それが基本になります。 P_λ が多項式代数に対応して、 Q_λ が外積代数に対応します。

numbering, これもあとでいろいろ出てきますが, standard な numbering というものを 1 行目は $1, 2, \dots, \lambda_1$, 2 行目は $\lambda_1 + 1, \dots, \lambda_1 + \lambda_2$, と続いて最後の行が $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{h-1} + 1, \dots, \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_h = d$ となるものとします.



標準的な numbering です. d 個の箱に canonical ではないけれど, ordering を 1 つ付けました. ここで

$$P_\lambda = \{ \mathfrak{S}_d \text{ の元で各行を保つ } \} \cong \mathfrak{S}_{\lambda_1} \times \mathfrak{S}_{\lambda_2} \cdots \times \mathfrak{S}_{\lambda_h},$$

と定義します. これは抽象的には h 個のサイズの小さい対称群の直積に同型になります.

また

$$Q_\lambda = \{ \mathfrak{S}_d \text{ の元で各列を保つ } \}$$

と定義します. Young 図形には行と列をひっくり返す, 行列の transpose みたいな操作がありますが, これは transpose したものの P に対応します.

こういう 2 つの部分群を定義したときに,

$$c_\lambda = a_\lambda b_\lambda = \left(\sum_{\sigma \in P_\lambda} \sigma \right) \left(\sum_{\tau \in Q_\lambda} \text{sgn}(\tau) \tau \right) \in \mathbb{Q} \mathfrak{S}_d,$$

と定義します. この具体的な構成は ordering に依っています. こういう V_λ が対称群の既約表現を全て与えます.

そしてこの次元ですが, これについてはいろいろな結果があつて, 3 つだけ前回やりました.

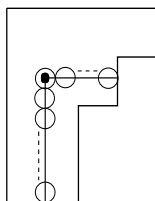
$\dim V_\lambda$ の公式:

これらは全部同じ値を与える公式です.

1. 最初が hook length formula. 代表的な公式ですが, これを少し思い出しておきましょう. Young 図形 λ を取ったとき

$$\dim V_\lambda = \frac{d!}{\prod_{b: \lambda \text{ の box}} hl(b)}.$$

Young 図形の箱, box に対して hook length $hl(b)$ というものを定義します. Young 図形の中で box, 箱を 1 つ取ってきます. このとき b も含めて右, 下に何個箱があるかが hook length といいます.



箱の数が少ないとき, 計算しようとするときこれは一番簡単ですが, 箱の数が増えてくると次のものが簡単になります.

2. Frobenius formula. これは今回は省略します. この話のタネ本は Fulton-Harris です. 表現論が専門の人はわかりませんが, 少なくともトポロジーの人は表現論を勉強しようとする, まず Fulton-Harris です. この公式はある多項式の中の単項式の係数になるので, Mathematica など計算するときは一番簡単です.
3. 3 番目, これはもう少し組み合わせ的なものです.

$$\dim V_\lambda = \#\{\lambda \text{ の admissible な numbering}\}$$

これは何かというと, あるやり方の数です. それは numbering は各 box に数を与えるのだけれども, その numbering が admissible とは各行各列について全て increasing, 単調増大になっているような numbering になっているときです. その仕方の数が次元になります. これはまたコンピュータに載せるのはこれが一番難しいでしょうか.

なんと言ってもコンピュータで計算しようとする, 2 番目が簡単ですね. 多項式が出て来てよくやる特性数 Chern number 等を計算するときなどそうですね. ただコンピュータ上に載せる難しさは Young 図形の表示自体のむずかしさです. 具体的に数え上げるとき, 条件を満たすものの数え上げですから設計はできますね.

これもよく知られたものですが, regular 表現 $\mathbb{Q}\mathfrak{S}_n$ と呼ばれるものがあります. これ自身 $\mathfrak{S}_n$ -module で, 既約表現の直和に分解されますが, multiplicity がどうなるかというと,

Fact 4.11.

$$\mathbb{Q}\mathfrak{S}_n \cong \bigoplus_{\lambda, |\lambda|=n} (\dim V_\lambda) V_\lambda$$

となります.

次も有名なものですが, この corollary として次元だけを計算すると

$$n! = \sum_{\lambda, |\lambda|=n} (\dim V_\lambda)^2$$

が得られます. 次元を具体的に計算するプログラムを書いて, 本当に $n!$ になっているか, 計算してみるのも面白いと思います.

重複度が出て来たときに, 1 個しか出てこないときにはそれでよいのですが, 重複度が出て来たとき, 既約分解したときに, どこにどの既約表現が出てくるかが大事です. この regular 表現, 一番基本的な表現です. 実は上の同型を単に同型ではなくぴったりイコールにする事ができます. これが 3 番目に関わるものです.

$$\mathbb{Q}\mathfrak{S}_n = \bigoplus_{\lambda, |\lambda|=n \text{ and a. n.}} V_{(\lambda, \text{a. n.})}$$

ここで admissible numbering を a.n. と略記しました. λ ごとに admissible な numbering を全て数え上げますが, Young symmetrizer というのは numbering ごとに出て来てます. admissible でないものをやるといろいろ跨がっていますが, admissible なものをやると disjoint で丁度出てくる. こういう事で単に既約表現が何個あるかだけではなく, その位置まで調べる事ができます.

ここを復習した上で対称群の表現論をこれで一応終わらせて, Lie 群の表現論に移ります. これは Weyl がある意味で理論をほとんど一人でというところちょっと語弊があるかもしれませんが, 作りあげました. 与えられた Lie 群に対して既約表現を作る Weyl-construction というものがあります. 具体的に出て来たものには Weyl-module(s) という名前が付いています. これは最初 1930 年代に Weyl がやったのですが, その後 Schur が出て, 今使われている形, 使いやすい形にしました. それは functorial にやったので, Schur functors

と呼ばれます。Weyl module と Schur functor, 今では 2 つはほとんど同じ意味で使われます。Weyl-構成はちょっとだけ primitive です。本質的には同じです。ここでは Schur functor の方を後で使う形でまとめてみます。

写像類群の場合は symplectic 群ですが、 何度か言ったように、写像類群と自由群の自己同型群は兄弟で似た所と違う所があり、パラレルにやっていきたいので、 曲面の場合に

$$H_{\mathbb{Q}} := H_1(\Sigma_g, \mathbb{Q}), H_{\mathbb{C}} = H_{\mathbb{Q}} \otimes \mathbb{C}$$

と書きましたが、以後

$$H_{\mathbb{Q}} := (F_n \text{ の abel 化} \otimes \mathbb{Q}), H_{\mathbb{C}} = H_{\mathbb{Q}} \otimes \mathbb{C}$$

と同じ記号で書いてしまいます。表現論は何度も言いましたが $\mathbb{C}$ 上やるものなので、 $\mathbb{C}$ をテンソルします。

そこに Lie 群 G が働くのですが、曲面の場合は今まで出て来た

$$G = Sp(2g, \mathbb{Q}), Sp(2g, \mathbb{C}),$$

自由群の場合は

$$G = GL(n, \mathbb{Q}), GL(n, \mathbb{C}),$$

となります。 GL はやや扱いにくい、reductive な群なので、

$$G = SL(n, \mathbb{Q}), SL(n, \mathbb{C}),$$

と先に SL の場合を調べて後で GL との差を調べます。

念のために exact sequence を書いておきますと、

$$1 \rightarrow SL \rightarrow GL \xrightarrow{\det} \mathbb{C}^{\times} \rightarrow 1$$

という短完全系列があり、これはスカラー行列で半ば split するようなものです。

Lie 群の系列は、おおざっぱにいうと

- SL ,
- O ,
- Sp

と 3 つありまして、この話ではもちろん一番 Sp が重要です。自由群の自己同型群では GL , SL が重要です。直交群 O は少し特殊です。 SL と Sp , どれくらい違うかというと、ほとんど同じですが、表現のテンソル積の分解が異なり、荒っぽくいうと 2 回繰り返した形です。計算はその分面倒になりますが、構造は豊富とも言えます。

まず $GL(n, \mathbb{C})$ ($SL(n, \mathbb{C})$) の場合を考えます。この場合の Weyl module, Schur functor とは何かというと、次のようなものです。

Young 図形 λ で $|\lambda| = d$ とします。この λ に対応する d 次対称群 $\mathfrak{S}_d$ の $\mathbb{Q}$ 上の既約表現を V_{λ} と表します。 $\mathbb{C}$ 上で考えるときは $V_{\lambda} \otimes \mathbb{C} = V_{\lambda}^{\mathbb{C}}$ と表します。

このとき、Schur functor というのは、Young 図形の箱の数は d ですから、 $H_{\mathbb{C}}^{\otimes d}$ を考えて、この中に $GL(n, \mathbb{C})$ -module を作ります。 G が左から $H_{\mathbb{C}}^{\otimes d}$ の各成分 $H_{\mathbb{C}}$ に座標変換として、従って $H_{\mathbb{C}}^{\otimes d}$ に作用します。左 G -module ですね。Weyl と Schur の強力な所は、 d 次対称群 $\mathfrak{S}_d$ が今度は座標変換として作用します。通常これは右作用

として表します. 左 G -module と右 $\mathfrak{S}_d$ -module, これは交換可能です. 2つの独立な作用があるわけです. ここでさっきの Young symmetrizer c_λ を右から掛ける事ができます.

$$H_{\mathbb{C}}^{\otimes d} \xrightarrow{c_\lambda} H_{\mathbb{C}}^{\otimes d}$$

これは $\mathbb{Q}$ -係数の群環の元でしたから, $\mathbb{C}$ -係数の群環の元と考える事ができます. そこでこれから得られる GL の既約表現は次のように定義します.

$$\lambda_{GL} := \left(H_{\mathbb{C}}^{\otimes d} \xrightarrow{c_\lambda} H_{\mathbb{C}}^{\otimes d} \right) \text{ の image.}$$

これを書き換えると

$$\begin{aligned} \lambda_{GL} &= H_{\mathbb{C}}^{\otimes d} \otimes_{\mathbb{C}\mathfrak{S}_d} (\mathbb{C}\mathfrak{S}_d \cdot c_\lambda) \\ &= H_{\mathbb{C}}^{\otimes d} \otimes_{\mathbb{C}\mathfrak{S}_d} V_\lambda^{\mathbb{C}} \end{aligned}$$

定義は非常に簡単で, 非常に canonical な構成ですね. これが Young 図形 λ と対応する GL の既約表現 λ_{GL} で, 自明でなければ既約になります.

この辺りを勉強した事があれば別ですが, そうでなければちょっとわかりにくいと思いますので, symmetric power と alternating power の場合を例としてやります.

Example 4.12. • $\lambda = [k] = \square \square \cdots \square$ (k 個). この場合どうなるでしょうか. この場合 Q_λ が自明になって P_λ が全体になります. そこで Young symmetrizer は, 学部 2,3 年の進んだ線型代数で学ぶ symmetrizer になって, k 次対称積

$$[k]_{GL} = S^k H_{\mathbb{C}}$$

となります.

$$\bullet \lambda = [1^k] = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \vdots \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \quad (k \text{ 個}).$$

今度は縦に並ぶとどうなるでしょうか. これは Young 図形の書き方では 1 が k 個並ぶので 1^k と書きます. 今度は P_λ が自明になって Q_λ が全体になるので, 全ての群の元に符号を付けて作用させて足し上げるのでこれは alternating tensor を作るものとなります. 従って k 次の外積

$$[1^k]_{GL} = \wedge^k H_{\mathbb{C}}$$

になります. 次元を考えれば, $k > n$ のときは $\{0\}$ になります.

自明になる事もありますが, ともかくこの構成で全ての既約表現が出てきます. これはだれの定理でしょうか. 調べれば書くべき名前は沢山あるでしょうが, ここでは classical としておきましょう.

Theorem 4.13 (Classical). $GL(n, \mathbb{C})$ の既約 (多項式) 表現は, Young 図形で $h(\lambda) \leq n$ となるものと 1 対 1 に対応する.

$h(\lambda) > n$ のときは自明になります. 大変美しい定理です. これが GL の場合です. 非常に覚えやすい形をしています.

これが SL でどうなるかですが, まず $n = 1$ の場合 $GL(1, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$ を考えてみます. $\mathbb{C}^*$ の既約表現は高さ 1 の Young 図形と 1 対 1 に対応します.

$$\boxed{1} \boxed{2} \cdots \boxed{k} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

$[k]$ の対応する表現は k 次の同次多項式全体です.

質問：初等的な質問なんですが、 $\mathbb{C}^*$ の表現は正の方向だけでなく負の方向もあると思うのですが、

そこまで考えた GL の既約表現の分類は次のようになります.

Theorem 4.14 (Classical). $GL(n, \mathbb{C})$ の既約表現は、 $\lambda = [\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n]$ となるものと 1 対 1 に対応する. 但し λ は $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ でかつ $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ は (負やゼロも許す) 整数の組である.

そこで SL に制限するとどうなるか. 群として $SL(1, \mathbb{C}) = \{1\}$ と自明になります. そうすると当然表現はすべて自明です. どこが違うかという、 GL では 0 でない全ての複素数が行列式として出てきますが、 SL では 1 しか出てきません. 行列式は各座標ごとに 1 次の場合はスカラー倍、 2 次の場合はスカラーの 2 乗倍、 k 次の場合はスカラーの k 乗倍になっています.

この例は $n = 1$ の場合だけですが、次が知られています.

2つの Young 図形 λ, λ' からこの構成で得られた GL -既約表現 $\lambda_{GL}, \lambda'_{GL}$ に対して GL -module として同型になる必要十分条件は $\lambda = \lambda'$ ですが、 SL -module として $\lambda_{GL} \cong \lambda'_{GL}$ となる必要十分条件は $\lambda_i - \lambda'_i$ が $i = 1, 2, \dots, n$ に依らずに一定となる事です. GL -module として既約ならば、 SL -module としても既約ですからまとめると次のようになります.

Theorem 4.15 (Classical). $SL(n, \mathbb{C})$ の既約表現は $h(\lambda) \leq n - 1$ を満たす Young 図形 λ と 1 対 1 に対応する.

こういう条件 $\lambda_i - \lambda'_i$ が i に依らずに一定 がある、最後の行が前に繰り込める. それが少しだけ違います. 比較的簡単にわかります. GL -module として既約なら SL -module として既約になります.

GL と SL の違いは determinant だけです. SL の series の一番最初 $SL(2, \mathbb{C})$, これは Sp の series の最初 $Sp(2, \mathbb{C})$ と同じものですが、 $SL(2, \mathbb{C})$ の既約表現は、 $h(\lambda) \leq 1$ を満たす Young 図形 λ と 1 対 1 に対応します. $SL(2, \mathbb{C})$ の既約表現は多項式代数、よく知られたものになります.

SL と GL の違いがそれほど本質的なものではありません.

次にこの話で一番大事な Sp の場合をやります. intersection number があるからですが、これが不変量が沢山出てくる源でもあるわけです.

$G = Sp(2g, \mathbb{C}), Sp(2g, \mathbb{Q})$ の既約表現はどうなるか、Schur の言葉は使いますが、名前をあげるとすると Weyl でよいのでしょうか? Weyl は当然ですが、Weyl だけでよいのでしょうか.

Theorem 4.16 (Classical, Weyl,...). $Sp(2g, \mathbb{C})$ の既約表現は $h(\lambda) \leq g$ を満たす Young 図形 λ と 1 対 1 に対応する.

高さ g 以下ですが、これは $2g$ 次元 symplectic vector space の Lagrangian subspace の次元は半分の g 次元という自然な条件に対応しています.

λ_{Sp} はどうなるかというと、 $Sp(2g, \mathbb{C}) \subset SL(2g, \mathbb{C})$ ですから、 λ_{Sp} は Sp の構造を忘れるとそのまま SL -module になります. さっきやった SL -module の構成から作ります. λ_{SL} というものを考えます. これは Sp -module としては、既約ではないかもしれないが、既約でなご加減は intersection number からくる. これは自然です. 自然だから証明しなくてよいわけではありません. 次は Fulton-Harris の notation をそのまま使いますが、

$$\lambda_{Sp} = \lambda_{SL} \cap H_{\mathbb{C}}^{<d>}$$

これが λ_{Sp} の定義です. $\lambda_{SL}, H_{\mathbb{C}}^{<d>}$ はともに、 $H_{\mathbb{C}}^{\otimes d}$ の subspace で、 λ_{Sp} はその共通部分です.

ここで $H_{\mathbb{C}}^{<d>}$ は何かというと、これは当然そうなるだろうという感じがあります。

$$H_{\mathbb{C}}^{<d>} = \bigcap_{1 \leq i < j \leq d} \text{Ker}(C_{ij})$$

但し $C_{ij} : H_{\mathbb{C}}^{\otimes d} \rightarrow H_{\mathbb{C}}^{\otimes(d-2)}$ は以下で定義します。

いま d 個の座標があるわけですが、そのうちの 2 つを取って、 $\mathbb{Z}$ 上定義されている intersection number を $\mathbb{C}$ 上に拡張した $\mu : H_{\mathbb{C}} \otimes H_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$ で contraction し、残りの $d-2$ 個はそのままにしておきます。

$$C_{ij}(u_1 \otimes \cdots \otimes u_d) = \mu(u_i, u_j) u_1 \cdots \otimes \hat{u}_i \cdots \otimes \hat{u}_j \cdots \otimes u_d.$$

こういう風に i 番目と j 番目を intersection number でスカラーにしてしまっって、線型写像を作ります。全ての方向の contraction, intersection number を取るというもので自明になるものに制限すると、 Sp -module として既約になり、全ての Sp -既約表現が出てきます。

これは写像類群では重要でよく使われていて、いろいろな人がいろいろな状況で使っています。例を 1 個だけやります。

Example 4.17. $\lambda = [k]$. まずは対称積です。

$$[k]_{GL} = S^k H_{\mathbb{C}}$$

これは既約表現ですが、これ上 contraction はないだろうと思われそうですが、実際ありません。すでに symmetric になっていますので、例えば $a \otimes b + b \otimes a$ での μ の値を考えると、

$$\mu(a, b) + \mu(b, a) = 0$$

です。

従ってそのまま Sp でも既約になり、

$$[k]_{GL} = S^k H_{\mathbb{C}} = [k]_{Sp}$$

となります。

一方で alternating power の方は、例えば $\mu(a, b) = 1$ となる元 a, b に対して $a \otimes b - b \otimes a$ を contract すると

$$\mu(a, b) - \mu(b, a) = 1 + 1 = 2$$

になって alternating の方は出てきます。従って

$$[1^2]_{GL} = \Lambda^2 H_{\mathbb{C}} \supsetneq [1^2]_{Sp}$$

となります。 $[1^2]$ でやりましたが、 $[1^3]$ でやってみると

$$[1^3]_{GL} \supsetneq [1^3]_{Sp} = \text{Ker}(\Lambda^3 H_{\mathbb{C}} \rightarrow H_{\mathbb{C}})$$

ちなみに $Sp(2, \mathbb{C})$ の既約表現は高さ 1 の Young 図形、 $SL(2, \mathbb{C})$ の既約表現も高さ 1 の Young 図形に対応していて、 Sp の方で出てくるのは symmetric power のみで、同じ状況になります。実際、ここで $Sp(2, \mathbb{C}) = SL(2, \mathbb{C})$ でぴったりあっていて、全部でてくるのは symmetric power, $S^k H_{\mathbb{C}}$ のみなので $C_{ij} \equiv 0$ となります。

これで Weyl の構成を駆け足でしたが、おしまいになります。

それで来週以降だんだん説明していきますが、Dennis Johnson の Torelli 群に関する基本的な仕事があるのですが、そこで Sp -module が出てきます。

それではここで symmetric part はどこまででてくるかですが、少しだけ説明しておきます。

$S^k H_{\mathbb{Q}}, S^k H_{\mathbb{R}}$ がどこに出てくるかというと, transversely symplectic foliation の特性類というもの, あるいは $\mathbb{R}^{2n}$ という standard な symplectic space 上の Hamiltonian vector field のなす Lie 代数 ham_{2n} の Gelfand-Kalinin-Fuks theory というものがあります。最初に Kalinin が exotic class を見つけ, その次を Metoki さんが見つけました。沢山ある事はわかっていますが, 具体的に書き出したのはこの 2 つだけです。

もう 1 つ全く違う方向から symmetric power が出てくるのは, finite type invariants です。Vassiliev, Ohtsuki, 今でも発展しています。そして Kontsevich ですけれども $S^3 H_{\mathbb{Q}}$ が出てきます。Graph cohomology というのがあって, 3, 4, 5, ... とある cohomology を作って, その generating function がどうなるかが問題です。Gelfand-Fuks cohomology の立場でいうと, stable cohomology を計算する事になるのですが, ここでは unstable などところでどうなるか, それが問題です。

そこで不変量がどうなるかということを考えていこうというわけです。全射

$$\Lambda^3 H_{\mathbb{Q}} \leftarrow H_{\mathbb{Q}}^{\otimes 3}$$

が存在しますが, 同時に Sp の作用を込めて具体的に

$$\Lambda^3 H_{\mathbb{Q}} \subset H_{\mathbb{Q}}^{\otimes 3}$$

submodule として実現されます。表現論的には既約分解すれば出てくるわけですが, 具体的に submodule とも思えるし, quotient とも思えるわけです。

一方, symmetrizer で

$$S^3 H_{\mathbb{Q}} \leftarrow H_{\mathbb{Q}}^{\otimes 3}$$

となっています。同時に対称多項式として具体的に

$$S^3 H_{\mathbb{Q}} \hookrightarrow H_{\mathbb{Q}}^{\otimes 3}$$

と単射が存在します。これらの Grassmann 代数を考えると元のテンソル代数の中に, submodule あるいは quotient として埋め込まれています。このときにこれも Weyl がやっていて submodule とか quotient も基本的に intersection number だけで書きあらわす事ができます。それをちょっとだけ説明しておきます。Weyl の fact として書いておきます。これは大定理ですが, 定理があまりに基本的でだんだん時とともに常識になって, これは定理の格が下がったという事では全くなく, 逆ですね, 事実そのものであるという事です。

Fact 4.18 (Weyl). テンソル積の Sp -不変部分空間に関して

1. 奇数ベキ:

$$\left(H_{\mathbb{Q}}^{\otimes(2k+1)} \right)^{Sp} = \{0\}.$$

奇数次の場合は intersection number は 2 つずつ使うので, 出てきません。

2. 偶数ベキ:

$$\left(H_{\mathbb{Q}}^{\otimes(2k)} \right)^{Sp} \text{ の生成系が与えられた.}$$

さらに $g = 1$ のときには Rumer-Teller-Weyl により具体的に基底が与えられた。この論文は Sp の立場で書かれていて, $SL(2, \mathbb{C})$ の既約表現の基底を与えた事にもなる。

最近わかった事はこの生成系, $g = 1$ のときは基底になるわけですが, これとは別に, 安定域から出発して種数がだんだん減って行って, $g = 1$ の場合に最後に残る部分, これが core になって数論の応用からすると

とっても重要と思えます。その間にどのように減っていくか、全部はやりませんが、こういう考え方をしながら、不変量の構成をしていきます。

もう 1 つ submodule と quotient の関係です。まず submodule の方で書きます。

Fact 4.19 (Weyl). 1. 任意の Sp -submodule $V \subset H_{\mathbb{Q}}^{\otimes(2k)}$, Sp の表現として部分表現とその双対 $H_{\mathbb{Q}}^{*\otimes(2k)} \rightarrow V^*$ を考える。
ここで

$$H_{\mathbb{Q}}^* = \text{Hom}(H \otimes \mathbb{Q}, \mathbb{Q})$$

でこれが定義です。 Sp の世界が構造が豊富になるというのは、Poincaré duality で canonical に $H_{\mathbb{Q}}^*$ は $H_{\mathbb{Q}}$ と同型になります。これが自由群の自己同型群と兄弟と言いましたが、自由群の自己同型群にはない性質です。兄弟ですが、性格が非常に違う所です。intersection のあるのとないのと、どっちが良いという事は全然ありませんが、その違いを調べるのはおもしろい問題です。

最初の単射から双対に移って、線型代数学からこれは全射です。今これだけをやっていますが、Poincaré duality は Sp -module に遺伝します。自分自身の dual は自分と canonical に同型です。大事な事はこれは Sp -不変 part を取ったら、それでも

$$(H_{\mathbb{Q}}^{*\otimes(2k)})^{Sp} \twoheadrightarrow (V^*)^{Sp}$$

は全射である。 Sp の作用で動かないような不変量は全体に延びるという事です。全て intersection number から来るのだからいろいろな方向を組み合わせで出てくるだろうという事です。

2. 本質的に同じですが商の方でも書いておきましょう。全射 Sp -写像

$$H_{\mathbb{Q}}^{\otimes(2k)} \twoheadrightarrow W$$

に対して、その双対

$$W^* \hookrightarrow H_{\mathbb{Q}}^{*\otimes(2k)}$$

を考える。これは単射であるが、 Sp -不変 part を取ったとしても

$$(W^*)^{Sp} \hookrightarrow (H_{\mathbb{Q}}^{*\otimes(2k)})^{Sp}$$

単射である。つまり quotient があつたときに、それ上の Sp -不変元が全体の空間の Sp -不変元に延びるという事です。

結局 Weyl の fact があるので、偶数次の $(H_{\mathbb{Q}}^{\otimes(2k)})^{Sp}$ をどう書くか? という事が問題です。Weyl の定式化して、Vassiliev の finite type invariant の関係で chord diagram という考えがあつて、Bar-Natan たちが発展させた理論があります。これを Weyl の言つた事を chord diagram の言葉で書くとこのように書けるわけです。

その前に k が小さいところがどうなっているか、練習してみましょう。まず

$$(H_{\mathbb{Q}}^{\otimes 2})^{Sp} \cong \mathbb{Q}\omega_0$$

ここで

$$\omega_0 = \sum_{i=1}^g (x_i \otimes y_i - y_i \otimes x_i)$$

ω_0 が生成する 1 次元だけあるわけです。これは g を固定して本当にどうなるか実験してみるのには良い演習問題です。次は $k=2$ のとき、すなわち 4 次のテンソルでどうなるか。この辺りは手計算でもできますし、コン

コンピュータでもおもしろくなります. ordering は人工的なものです. いろいろな基底について線型代数をやっていると、2 番目はマイナスを付けておいた方がきれいになります. 結局この 3 個が考えられます. Weyl が言っている事はこれが生成する. 具体的に計算するとおもしろいと思います. $g \geq 2$ のとき, この 3 個が basis

$$(H_{\mathbb{Q}})^{\otimes 4} = \begin{pmatrix} \begin{array}{c} \omega_0 \quad \omega_0 \\ \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \end{array} & \omega_0(12) \otimes \omega_0(34) \\ \begin{array}{c} \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \\ \text{---} \end{array} & \omega_0(13) \otimes \omega_0(24) \\ \begin{array}{c} \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \\ \text{---} \end{array} & \omega_0(14) \otimes \omega_0(23) \end{pmatrix}$$

になります. 生成するのは Weyl の仕事に依る事にして, 1 次独立を証明する事は線型代数です. 3 年生でも計算できます. おもしろいのは $g = 1$ のときです. $g = 1$ にすると 2 個しかなくて, $g = 2$ で基底だったものに退化がおきます. これは手計算でできますが, 4 次のテンソルがあつて $2^4 = 16$ 次元で, 簡単に計算できます. これは非常に面白い事に 3 つの和はゼロになります. ここで退化が起こるわけです. $g \geq 2$ で独立で基底だったものが $g = 1$ にすると退化する. これは学部生の人, ちょっと進んだ線型代数をやったときに計算すれば, おもしろいかと思います. 4 カ所しかないからそんなに難しくはありません.

そこでこれを一般にすればどういふ事を考えればよいかというと, $2k$ 個のテンソル, $2k$ 個, 場所ですから,

$$H_{\mathbb{Q}}^{\otimes 2k} : \quad \circ \quad \circ \quad \circ \quad \cdots \quad \circ \quad \circ \quad (2k \text{ 個})$$

人為的なものですが, 実数直線上に $2k$ 個の点を 1 直線上に書いて, 複素平面と思つてもよいですが, 2 個ずつ選ぶわけですから, 1 と 3, 2 と何か, $2k$ 個の中から選ぶ, pairing と言います. $2k$ 人いて何か 2 人ずつでやる, 例えばダンスをする. これはどう表せばよいかというと, 一番左にある最初の pair は $\{i_1, j_1\}$, i_1 番目と j_1 番目が pair, i_2 番目と j_2 番目が pair, と続けていくと,

$$\{\{i_1, j_1\}, \{i_2, j_2\}, \dots, \{i_k, j_k\}\}$$

こういう風には書けます. これは集合の記号ですから順序はありませんが, 計算を進める上では条件

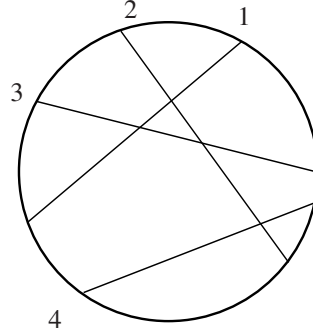
- $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$,
- $i_1 < j_1, \dots, i_k < j_k$,
- $\{i_1, j_1, \dots, i_k, j_k\} = \{1, 2, \dots, 2k\}$

を付けると unique に pairing が書けて, これを linear chord diagram と呼びます. これは Vassiliev の knot 不変量で出て来た chord diagram を真つ直ぐにただけです.

Remark 4.20. 本来の chord diagram, これは Vassiliev の knot 不変量, 1990 年代でしたね. Vassiliev のアイデアに基づいて, 大槻さんたちによって 3 次元多様体の中の knot や link に拡張されて一大理論になっています. もう 20 年も前です. 本来の chord diagram とは S^1 上に $2k$ 個の pairing の事です.

これは graph と思うよりは pairing と思う方がよいです. これを chord diagram と言いました.

chord diagram を 4-term relation で割ると, finite type invariants の空間の次元が出てくるわけです. この次元がどうなるか, generating function はどうなるかが大問題です. Bar-Natan の HP を見てみるとだんだんに更新されています. 今本数何本くらいまでできているのでしょうか.



これがさっきいった symmetric power の Sp -不変量と密接に関係して unstable には Gelfand-Fuks cohomology ですが, stable なところでやると symmetric power と関係していて, これは次回以降やります.

この本来の chord diagram が linear になって, ちなみに大槻さんたち, あるいは LMO です, Le さん, 村上さん, 大槻さんたちの理論, 今では Jacobi diagram, と呼んで拡張されています. univalent も許すなど理論はどんどん豊富になって来ています.

それはともかくとして, linear chord diagram, diagram の d を取って,

$$\mathcal{D}^l(2k) := 2k \text{ 個の頂点の linear chord diagram の全体}$$

とします. これは有限集合です. さらに

$$\mathbb{Q}\mathcal{D}^l(2k) := \mathcal{D}^l(2k) \text{ を basis とする } \mathbb{Q} - \text{vector space}$$

と書く事にします. そうすると Weyl がやった事は, 全射

$$\mathbb{Q}\mathcal{D}^l(2k) \twoheadrightarrow (H_{\mathbb{Q}}^{\otimes 2k})^{Sp}$$

が存在する. 具体的には chord diagram C に対して, 不変元 a_C を作るわけです. C は全部 $\{, \}$ を外すと置換になっていますから符号が定義できます. $\{i_1, j_1, \dots, j_k\}$ は $2k$ 次の置換になっていますので. このとき, Weyl がやった事は次のようになります.

Fact 4.21 (Weyl). 写像

$$\mathbb{Q}\mathcal{D}^l(2k) \ni C \mapsto a_C := \text{sgn}(C) \omega_0(i_1, j_1) \otimes \dots \otimes \omega_0(i_k, j_k) \in (H_{\mathbb{Q}}^{\otimes 2k})^{Sp}$$

は全射

$$\mathbb{Q}\mathcal{D}^l(2k) \twoheadrightarrow (H_{\mathbb{Q}}^{\otimes 2k})^{Sp}$$

を与え, かつテンソルの次元の半分を超える, $g \geq k$ のところで isomorphism, すなわち $\mathbb{Q}\mathcal{D}^l(2k)$ は basis になる.

$g = 1$ のときにはさっきも言ったように, Rumer-Teller-Weyl が別に基底を与えていますが, その間がどうなるかが完全にわかったという事になります.

もう時間がないので, $\mathbb{Q}\mathcal{D}^l(2k)$ の次元だけをやっておきます. これは基底の数ですから, pairing が何個あるかという事を計算しておしまいになります. 組み合わせ的, 数論的に階乗について大事なものの, $2k$ 人の人の間の pairing ですから, 1 番最初の人 $2k - 1$ 人の自由度があつて誰でも選べます. 1 つペアができると 2 人

減って、その次に選ぶ人は自分もいれて 3 人減っていますから、 $2k-3$ 人の自由度があつて、どんどん行くと結局これは double factorial と呼ばれて、

$$\dim \mathbb{Q}\mathcal{D}'(2k) = \#\mathcal{D}'(2k) = (2k-1)(2k-3)\dots 5\cdot 3\cdot 1 = (2k-1)!!$$

と書けます。これは割り算を入れれば通常の階乗を用いて書く事もできます。

次元はこうなつて、これはどのくらいのスピードで増えていくかというと、コンピュータで実験してみると、これは階乗に比べれば小さいですが、結構大きくなります。 $k=1, 2, 3, \dots$ とやっていくと、

$$1, 3, 15, 105, 945, 10395, 135135, \dots$$

となります。この次は 135135 の 15 倍ですから、これはもうどうにもならないですね。これは数だけだからまだ良いのですが、そこにこういう次元のベクトル空間で基底の計算や固有値の計算をすることはなかなか難しい、大変です。という事で基底がわかったと、そこからこれが unstable でどうなるか、それをやっていくと特殊化して、不変量から離れていってしまうので、数え上げはできるという事でここまでとします。

次回以降 5 節に入つて具体的に写像類群, foliation, finite type invariants をやって、基本表現空間の外積と symmetric power がどう出てくるか、それをどう使うと、どういう特性類、不変量が出てくるかをやりたいと思います。

まず Dennis Johnson の仕事、 $\Lambda^3 H$ が出てくる事、Hamiltonian foliation のときに $S^3 H_{\mathbb{R}}$ が出てくるという事、finite type invariants は少しだけやって、だんだん具体的な計算をしたいと思っています。一般論というよりは genus や chord の本数が少ないときに具体的な計算もしてみたいと思っています。

質問：その fact は、左側の linear chord の方は genus とは何も関係ないのですか？

genus とは関係ありません。任意の genus です。任意の genus で全射, isomorphism があります。右側は genus ごとに全部一緒に書いてしまいましたが、genus が k を超えると、空間は違うのですが、これを代表、モデル空間とすると、もちろん genus が変わると ω_0 は違っています。各 genus ごとに写像はあつて、これが $g=k, k+1, \dots$ となると同型になります。元は違います。 $g=k-1$ になるとどうなるか、 $g=1$ のときもわかっています。 $g=1$ のときは、前にやったように linear chord diagram という言葉を Weyl たちは使っていないのだけれども、without crossings で、下半平面を使つてはいけなく、上半平面のみの linear chord 全体が、 $g=1$ で基底になるという事を言っています。その間がどうなるか、crossing がさっきの 4 次元テンソルのときは、genus 2 のときは基底でしたが、genus 1 では交差するから省いて基底になるのです。これは Weyl がすでにやっています。ただ今の立場からだとは canonical ではないですね。order によつています。これを除くというのは、そこがポイントです。これを ordering に依らない canonical な形で基底を与える。それが数論で本質的に一番大事な genus 0 とトポロジーで大事な genus 2 以上を genus 1 が繋ぐわけです。そこで core として出てくるのではないかと思います。ここら辺りは数論の人たち、伊原先生、Grothendieck, Deligne, Drinfeld は、genus 0 から 3 点抜いてやったわけです。それは絶対ガロア群の一番根幹にあるものです。基本群でいうと rank 2 の自由群になります。でも我々が genus 0 で写像類群をやったら何にもないわけです。不変量も何もない、自明ですから。genus 1 もやや例外的でこれは線型代数とイコールなわけです。ところが数論では genus 0 で 3 点抜くと絶対ガロア群という豊富な構造がある。genus 2 以上でいろいろあるだろうというのは、理論を作ったのは伊原先生、織田孝幸さんの予想というのがあつて、genus g である絶対ガロア群が stabilize するだろう、それが中村博昭さん、松本眞さん、伊原先生の school、広い意味で織田予想が解決したわけです。それを繋ぐのは、中村さんも松本さんも、その立場だけではなくて、elliptic curve というのは基本中の基本ですね。トポロジーに限らず数論でも、genus 1 の場合にやると、もちろん 0 と 2 以上の間は 1 し

かないですから、1 の所でなにかあるだろう。私は Torelli 群というときは genus 2 以上でしたが、最近 g は 1 以上というようにしています。1 も含めないと数論の方は絶対そうですが、こういう話でも 1 が基本の 1 つである、という事がだんだんわかってきて、共形場理論とか不変量をやる時、写像類群の relation をやる時にも、それが 1 だけでは足りなくて、1 で braid relation が出て来て、2 でさらに別の relation が出て来て、lantern relation が出て来てと、物理学でもそうですね。有限の所で全部出てきます。

genus 1 の所で Weyl たちが与えたものは氷山の一角で、その下に canonical な基底が隠れています。それを使うといろんな計算ができます。退化だけを表しているのではなくて、 g が stable な所で構造を与えています。 Sp の表現として自明な空間ですから、単に $\mathbb{Q}$ が何個かあるだけのように見えますが、そこに構造が入る。具体的には内積ですけれども、

そうすると固有値分解すると、固有値は g に depend するんだけど、 $g \geq k$ だと全部 positive にならんでいる。けれども、 g が $k-1$ になると 1 カ所だけ、ゼロになる。それが relation が 1 つ出てくる、2 個減ると $k-2$ になると対称群の既約表現の次元がもろに出てきます。

そしてどんどん減って行って、最後に Rumer-Teller-Weyl の basis に出て来た、氷山の一角と言った、本当の基底は違うのだけれども、次元だけ考えると without crossings の chord の数、対称群 $\mathfrak{S}_{2k}$ の既約表現 $[2^k]$ の次元と without crossing の linear chord diagram の数が一致する。これが一致するというのが、ちょっと考えればできるのだけれども（注：これは Catalan number と呼ばれる数の驚くほど多くある解釈のうちの 2 つであることが分かりました）、具体的にもっと深く、基底を取り替えて、既約表現を取り替えて、数論的にはこれが core になって、genus が増えていくとそこに沢山加わっていくのですが、genus 1 のところが core になっているということは間違いないです。固有値からいうとこれは最大固有値です。

質問：isomorphism ではないときに、右辺の次元を与える式は具体的にあるのでしょうか？

それは簡単です。対称群の既約表現で Young 図形が even type で multiplicity 1 です。さっきの regular 表現は multiplicity が沢山出てきました。 g がだんだん小さくなっていくと、Young 図形の条件が出てきます。第 1 行の数が genus の 2 倍を超えない。次元というのはさっきの 3 つの公式があったから、次元公式は出てきます。それは corollary として出てきます。発見的に言うとなんてですね、いろいろ既約成分を調べていったら、multiplicity を調べていったら multiplicity が全部 1 で、even type が出てきました。double factorial が次元にならないといけない。 k をだんだん大きくして行って、これは全ての k で正しいだろうと予想して証明しました。これは有限群の表現論の standard な議論で出てきます。standard な議論で出るといういいましたが、有限群の表現論にはあからさまには出ていないと思います。そこがまず第 1 歩であって、その次に内積を入れます。内積を入れると基底が与えられた空間ですから、ユークリッド空間。そこに positive definite な対称行列がある事になります。そして固有値分解をします。固有空間と Young 図形が完全に 1 対 1 に対応しています。固有空間になっていて genus について Young 図形は辞書式順序が入ります。辞書式順序で最初是对称群の表現としては自明表現、1 次元ある。これが最小固有値。... といって $[2^k]$ のところが最大固有値で $g = k-1$ のときは全部加えたらゼロになって unique relation. g が 1 のときは $[2^k]$ のところだけです。

stable range では全部 1 次独立。さっき 4 次元のテンソルのときにいいましたが、一般に $g = k-1$ のときは基底を全部足すとゼロになります。種数が下がるとどうなるかという、いくつかの既約成分が消えて次元が減っていきます。次元の減り具合は corollary ですが、次元だけではなく構造が全部わかる。

質問：内積の表現行列は g に依っているのでしょうか？

依っています。

質問：もう 1 つ質問は例えば $2g$ を x とおいたら、それは多項式としては g に依らない？

依らない。多項式自体は $2g$ を不定元と思うと g に依らない。依らなくて g が小さくなっていくと、ある部

分がゼロになっていく。例えば、 $2g-6$ という factor があつたら $g=3$ でゼロになる。こういう風になっています。

質問：その多項式は combinatorial な情報で書けるのですか？

その多項式は Young 図形から組み合わせ的に定義できます。さっきの hook length formula みたいに組み合わせ的に、Young 図形があつたときに対応する固有値、固有値は $(2g)$ の多項式、が出てきます。つまり組み合わせ的に Young 図形から出てきます。

これはだから without crossings というのは、intrinsic ではないといいましたが、Weyl 先生ですから、語弊があるといけないので、変えなくては行けないけど、without crossings で氷山の先端部分はわかったという所です。

質問：3 人の名前 RTW を書いてください。

Rumer-Teller-Weyl です。この人たちがどういう人たちなのかは全然知りません。1932 年の論文です。

あともう 1 つだけ、この間に 1998 年 Mihailovs という人の仕事があります。この人が任意の g に対して基底を与えました。どうやったかという、genus 1 から出発します。genus 1 は RTW の基底を使います。これは非常に面白いアイデアでテトリスというゲームを知っていますか？この仕事はテトリスからアイデアを得たそうです。

genus 1 は 1 ページに書ける linear chord diagram が基底、genus 2 にするとどうするか、これは 2 ページにします。但し、3 ページ、4 ページになると書きにくくなるので、添字でページを $3, 4, \dots$ と書きます。そして g ページまでいきます。1998 年に気が付いて彼とやり取りをしました。Farber 予想というものがある、これは河澄さんとの仕事がきっかけになったのですが、relation を数え上げたいというときに、relation があると tautological algebra に relation が出てきます。数え上げをしていたのですが、Farber 予想は 3 つの部分からなっていて、一番難しい部分は未だに未解決です。2 番目は g を固定する毎に初めの $[g/3]$ 個の MMM-class で生成するだろうというもので、さきほどいった $g=k-1$ で現れる unique relation を使って証明できました。そのすぐ後に Mihailovs の仕事に気がついて、結論からいうとこの基底は非常にきれいなものですが、出発点が canonical ではないのです。次元公式を与えているかどうか、なかなか g が小さいときに、ページ数とか、数え上げができれば、これは良いとおもったのですが、結局不十分でした。relation がでてこないんです。下から g を $1, 2, 3$ と付け加えて、線型代数でよくやる subspace に基底をくわえていく、加えたときにどこが消えるんですか？そこがだめなんです。私は逆からいったんです。genus 1 は最後にしました。まず $g=k-1$ で種数が安定域から 1 下がったときを調べる、次に 2 個下がったときに消えるものを加える。最後に Weyl たちのものを、ただしそのままではなく対称群の作用で不変な形にして加える、この黒板の図の場合でいうと 1 番目と 2 番目がいらなくて、私の基底でいうと、これ引くこれと、これ引くこれ、具体的にいうと 4 次の対称群で不変な形にする、私は実をいうとテトリスをしらなかったのですが、改めていうと Mihailov の基底は非常に美しいものです。彼はまず SL でやって S-tris というのをやって、その次に symplectic-tris というのを考えました。ただ、Farber 予想には少なくとも今の所は使えないと思います。

あと構造的に言っても私の作った基底は対称群で不変なものです。canonical です。order というのは人為的なものです。

そうするとどんどんわかりつつあると思われるかと思いますが、これは出発点であつてさっきの submodule と quotient の関係がどう落ちるか、ものすごく組み合わせ的には難しい問題です。どう数え上げられるかは、まだやっている最中でなかなか楽観できるものではありません。

5 Sp -modules と低次元トポロジー

symplectic 群, これが主役です. Sp -module と低次元トポロジー. 低次元という言葉は定着しましたが, 英語で low dimensional という日本語の低次元というニュアンスはありませんが, 日本語で低次元というと低次元. 仕方ないですね. ここで低次元というのは, 0次元はともかく, 1, 2, 3, 4, (n)次元, ここまでです. foliation をやるときは, n 次元を排除するわけではありません. メインに小さい次元をやります.

Sp -modules の出方をちょっとだけ歴史的に振り返って, 表現論を使って不変量を一杯作ろうという事です. まずは曲面の homology とその上の intersection form

$$H = H_1(\Sigma; \mathbb{Z}), \mu : H \otimes H \rightarrow \mathbb{Z}$$

です. 抽象的には H は rank $2g$ の free module です. この話で表現論を使うときは $\mathbb{Q}$ 上, 表現論はそもそも $\mathbb{C}$ 上でやりますが, ここで出てくるような表現は $\mathbb{Q}$ 上定義された表現です. foliation をやるときは $\mathbb{R}$ 上でやります. $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ をテンソルしたものを単に

$$H_{\mathbb{Q}} = H \otimes \mathbb{Q}, H_{\mathbb{R}} = H \otimes \mathbb{R}$$

と書きました. また自由群でやるときは g というよりは n と書きます.

Sp と書いたら $Sp(2g, \mathbb{Q}), Sp(2g, \mathbb{R})$ です. $Sp(2g, \mathbb{Z})$ -表現論は非常に難しいです. 大体の場合は $Sp(2g, \mathbb{Q})$ です.

まず 0 番目として,

(0) Lie 代数 $sp(2g, \mathbb{Q}) \cong S^2 H_{\mathbb{Q}}$.

歴史的には Lie 群ですから Lie 代数というのがあります. 4年生の人, $g=1$ のとき, $sp(2, \mathbb{Q})$ は $sl(2, \mathbb{Q})$ と一致します, 演習でやってみてください.

$$sl(2, \mathbb{Q}) \cong S^2 H_{\mathbb{Q}}^{g=1} \cong \mathbb{Q}\langle x^2, xy, y^2 \rangle.$$

$\mathbb{R}$ とした方がイメージしやすいかもしれません. 一般にもそんなに難しくはありません.

次に 1 番目.

(1) Jacobi 多様体.

Jacobi 多様体に Sp が作用します. 思い出しておくと, 元々は曲面, Riemann 面 R があると Jacobi 多様体, Jacobian が定義されます. Jacobi 多様体は非常に大事なものですが, 位相的には torus になり, その homology は

$$H = H_1(Jac(R); \mathbb{Z})$$

となり, Sp の基本表現空間になります. 1次元だけでなく homology 全体は

$$H_*(Jac(R); \mathbb{Z}) = \Lambda_{\mathbb{Z}}^* H,$$

cohomology で言うと

$$H^*(Jac(R); \mathbb{Z}) = \Lambda_{\mathbb{Z}}^* H^* = \Lambda_{\mathbb{Z}}^* H$$

となります。最後の等式は Poincaré duality ですが、canonical に同型になります。これが Jacobi 多様体の (co)homology で、canonical な symplectic form があって、そこから曲面の種数が出てくる事は以前にお話しました。

歴史的に次は foliation です。

(2) Foliation

その前にさっき standard symplectic vector space と言い、 $H_{\mathbb{R}}$ と書きましたが、 $2n$ 次元のユークリッド空間で symplectic 基底を指定すると、

$$x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$$

が coordinate であって、standard な symplectic form が

$$\omega_0^* = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i$$

となり、

$$H_{\mathbb{R}} = (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0^*)$$

と組にして書きます。これを standard symplectic vector space といいました。これは曲面の本質というよりは Hamilton の力学から出て来たものです。こういうものがあって foliation にあらわれます。

具体的には 1972 年 Gel'fand-Kalinin-Fuchs の論文が出て、それから 40 年近く経ってしまいました。目時さんの仕事等がありますが、あまり進展のないまま時間が経ってしまいました。それが transverse symplectic foliation の特性類です。foliation の定義はあとでやります。一番最初に exotic な特性類があることを発見した論文です。Gel'fand は残念ながら去年亡くなりましたが、大変すばらしい数学者でした。

Kalinin という人はちょっとよくわかりません。最近 arXiv にいろいろ論文を書いている人がいますが、first name が違うので多分違う人だと思います。Fuchsさんはアメリカ西海岸で活躍しています。これはもうちょっと先でやりましょう。

その前に transversely symplectic foliation の定義をやりましょう。念のために symplectic manifold の定義から書いておきましょう。

Definition 5.1. (M^{2n}, ω) が symplectic manifold であるとは、 $\omega \in A^2(M)$ が 2-form で $d\omega = 0$ かつ ω^n が volume form になるときです。

これが定義です。この話でいうと Jacobi 多様体というものが出てきました。 $2n$ 次元の torus であって symplectic form がありました。これが standard な例になります。さっきの standard symplectic vector space も compact ではないですが、symplectic manifold の元々の基本的な例です。

symplectic 多様体はこんなに非常に緩い定義ですが、 ω^n が消えないというのは非常に強い条件になります。ここで簡略化した形で Darboux の古典的な定理を書いておきます。

Theorem 5.2 (Darboux). 任意の symplectic manifold (M, ω) は局所的には $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0^*)$ と symplectical に微分同相である。

最近では symplectically diffeomorphism というのは symplectomorphism と言います。contact structure の場合は contactomorphism と言います。こういう symplectic 多様体の幾何を研究するのが symplectic 幾何です。Darboux の定理は local な不変量は何もないと言っているわけです。しかし global にはいろいろなものが出てきます。最近の最重要キーワードの 1 つです。

次に transversely symplectic foliation を定義します. $\mathcal{F}$ が C^∞ -多様体 W 上の codimension $2n$ transversely symplectic foliation とは, 余次元 $2n$ の部分多様体, 葉っぱ, leaf といいます, 葉っぱの族で埋め尽くす, local にはユークリッド空間が葉っぱの方向と normal 方向と product になっているものです. local には何もないですが, global には沢山あります. 1960 年代, 1 つは 1972 年 Gel'fand-Fuchs 理論, もう 1 つは Chern-Simons 理論からできました. そのあと Thurston です, 爆発的に研究され今も研究は続いています. ここで定義をきちんと書いておきます. まず座標を取って,

$$W = \cup_\alpha U_\alpha,$$

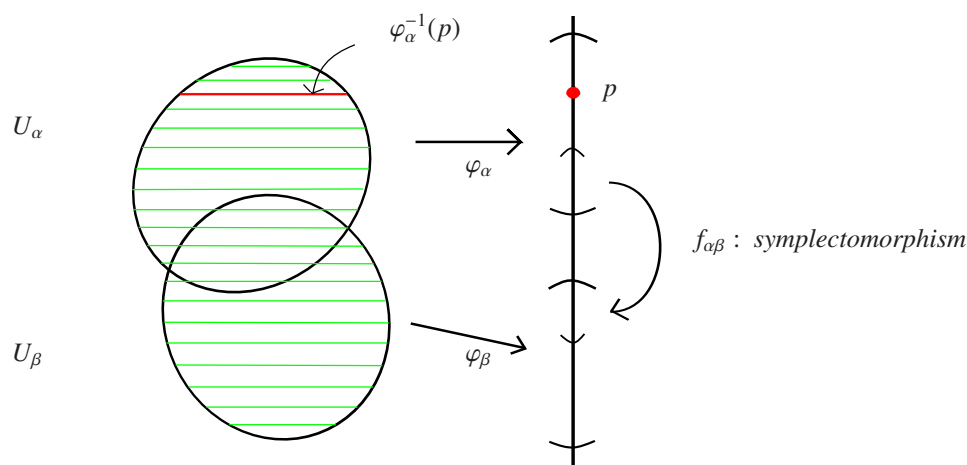
そして各座標から

$$\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$$

standard な symplectic space $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0^*)$ に submersion が存在して以下の条件を満たします. ここで submersion とは微分が全射になる写像です. submersion である事から, 1 点の逆像が部分多様体になっています. それを leaf と呼びました. $\mathbb{R}^{2n}$ の symplectic な構造が W 上に広がっていくわけですが, 条件とは変換関数

$$f_{\alpha\beta} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

が symplectomorphism になるという事です. これだけの非常に緩い条件です.



こういうものの特性類を Gel'fand-Fuchs-Kalinin たちは研究しました.

$n = 1$ のときに $\mathbb{R}^2$ になります. 一番簡単なときです. このときにすでに変な事が起こる事を 1972 年に Gel'fand-Kalinin-Fuchs は見つけました. このような設定でどこに特性類が定義されるかというと $H^7(W; \mathbb{R})$ です. これが GKF class というもので, 非常に exotic な class です. exotic という意味は, 古典的な幾何学では接続, 曲率から特性類を定義しますが, そういう primary なものでは書けない, まずはそういう意味です.

そしてその後東大の坪井先生のところで博士課程の学生だった目時さんが仕事をしました. 同じ設定で 1999 年に Metoki class $\in H^9(W; \mathbb{R})$ を見つけました. この間には亡くなった Bott の学生だった Perchik という人が仕事をしています. 1974,5 年に Topology に出版された論文があります. これの Euler 数を計算しました. このような特性類は無限個あるだろうというのが予想であって未だに予想です. 100 個くらいあるという事は Perchik が証明しています. どこに現れるかというのがまったくわかりません.

こういう流れがあつて今の所 40 年くらい経っていますが、具体的なものはこの 2 つだけです。40 年くらい経っていますが、ほとんど進展がありません。この特性類が定義されると、非自明性が当然期待されるわけですが、従つて余次元 2 の transversely symplectic, この $n = 1$, 2 次元の場合は symplectic structure を保つという性質は, area preserving と同じになりますので, こういう holonomy をもつ foliation で Gel'fand-Kalinin-Fuchs class や Metoki class が 0 でないものを作ろう, 当然 Gel'fand-Kalinin-Fuchs もトライしたようですが, 40 年近く経った今でも未解決です。

ちょっとここで transversely symplectic ではなく, 普通の foliation の話を対比させるためにします。

もともと Gel'fand-Fuchs theory, Chern-Simons theory というものがありました。GKF-class は GF-theory の 1 つの例になります。論文でいくと Gel'fand-Fuchs は 1969 年, Chern-Simons は出版は 1974 年の Annals です。Chern-Simons の非常に有名な論文ですが, イントロを読むと非常に面白い事が書いてあります。

Thurston の曲面の微分同相の理論と hyperbolization の論文は, いろいろな経緯があつて出版の順序が逆になりました。hyperbolic geometry のアナウンスメントは 1982 年, Bulletin に載っています。そこで Haken 多様体に関して hyperbolic structure が入る事をアナウンスしたんですね。ところが 1976 年頃に pseudo-Anosov の非常に有名になった曲面の微分同相の分類理論がありました。Bulletin にそのアナウンスメントが出版されたのは, 1988 年, 12 年も経ってからです。その序文はおもしろいので是非読むと良いと思います。なぜそのように遅れたかですが, 皆さんの興味をそそるためにお話しますと, その当時 1976 年当時 Bulletin はアナウンスメントを出版していなかった。Bulletin だけではなくて他のジャーナルにいろいろトライしたのだけれども, 結局うまくいなくて断念してしまった。じゃあフルペーパーを書けば良いじゃないかと思いますが, もう次の hyperbolic geometry の方に入っていて時間がなかったんでしょう。ただ講義はしたので, フランスに行った講義が有名な Fathi-Poénaru-Laudenbach, フランス数学会から出版されました。本になったわけです。そういう事が全部書いてありますが, それは 1988 年に Bulletin から出版されました。もう 12 年も経っていて, 1976 年当時は measured foliation を使っていましたが, 今は measured lamination を使っています。本質的にはほとんど同じですが, トポロジストにとっては foliation の方がわかりやすいですが, 微分幾何的には lamination の方がきれいな概念です。今はほとんど lamination でやります。

88 年のようやく出版されたアナウンスメントはその後いろいろ展開したけれども, オリジナルのものをそのまま出版すると書いてあります。その引用文献ですけれども, 最近はこれだけの大理論をやると少なくとも 20 くらいにはなります。場合によっては 50, 100 となりますが, それがオリジナルのアナウンスの論文ではただ 1 つ, それは Nielsen のある論文だけでした。よく見るとおもしろいのですが, 曲面の微分同相に関する Nielsen の理論というものがあります。それがいまは Nielsen-Thurston 理論と呼ばれます。76 年当時 Thurston がどれくらい Nielsen の仕事をどれくらい知っていたかがそこに書いてあります。引用文献に挙げてあるのでもちろんそれは知っているわけです。沢山 Nielsen は仕事があります。1920 年代後半から 42,3 年頃まであつて Nielsen 分類と呼ばれるものです。あとほんのちょっとで pseudo-Anosov に届く所まで来ていました。Thurston の立場になればそのちょっとが大変だったわけです。それが天才のアイデアだったと思います。ただあとちょっとの所まで Nielsen は行っていた。だけど Thurston は, Nielsen による曲面の無限遠における挙動に関する理論をよく知らなかった。もう 1 つ Riemann 面の理論, quasi-conformal map, そして Teichmüller 理論をよくは知らなかった, と書いています。それを自分は展開してそれらで今となつては書き直す事ができるけれども, 敢えてそれをしないでオリジナルのままで出版すると書いています。ただ引用文献だけはその後の関連するものを加えると書いてあります。

なぜそういう事を言ったかと言いますと, Gel'fand-Fuchs 理論は 1969 年で大成功を取めた理論です。幾何学的には葉層の特性類です。Chern-Simons は 1974 年, Chern-Simons の introduction にもおもしろい事が書

いてあります。 $\mathbb{Q}$ 上の Pontrjagin class が位相不変量というのは Novikov の定理です。従って Pontrjagin class は piecewise linear な多様体にも定義できます。今でも未解決、最近少し進展があったようですが、定義できるのだけでも、formula ですね、具体的に 3 角形分割された多様体に対して、rational Pontrjagin class をどのように表すか、smooth な場合には tangent bundle に connection を入れて、曲率を使って Chern-Weil 理論から Pontrjagin form が定まります。それは $\mathbb{R}$ 上ではありますが、組み合わせ的な Pontrjagin class の formula というのは大問題です。Chern-Simons はこれは 2 次的な特性類ですが、Pontrjagin form を全空間に持ち上げると exact になって、form の微分で具体的に書くやり方を沢山あるなかで 1 つ指定するというのが、Chern-Simons です。その動機というのはまずは p_1 ですね、first Pontrjagin class を組み合わせ的に出そうと思って、いろいろやってみただけどうまく行かなかった。これは Gel'fand-Fuchs から 5 年も開いているようですが、出版が遅れたのはそういう理由です。Chern-Simons は私がいうまでもなく、幾何に限らず全数学にとっても大事な理論です。

foliation から言うと Godbillon-Vey というクラスがあって、これは foliation の特性類の代表的なもので、Gel'fand-Fuchs 理論からの解釈、Chern-Simons からの解釈もあります。Godbillon と Vey が 70 年代、余次元 1 の場合に de Rham 理論を使って、本当に単純というか簡単な式で出して、なぜこれが well-defined かは、de Rham cohomology を勉強したら今でも良い練習問題です。これは 1971 年頃です。Godbillon-Vey class が自明でないという事を最初に示したのは、Roussarie という人です。 $PSL(2, \mathbb{R})$ 上の locally homogeneous な foliation で計算してみせました。その後間をおかずこれが Thurston のデビューですね。デビュー作であってこれも Bulletin に出たのですが、Noncobordant foliations of S^3 という有名な論文です。3 次元球面上に余次元 1 の foliation、それを連続パラメーターで作って、Godbillon-Vey が動くというものです。

ここで言いたかった事は、こういう特性類が、新しいものが定義されて間髪入れずに発達しました。このあと 1970 年代にさまざま発展しました。それに比べて Gel'fand-Kalinin-Fuchs class の難しさは非常に際立っています。1972 年に定義されている、どれくらいの人がトライしたかはわかりませんが、40 年近く経って未だにそのきっかけすらつかめない。1 つの例も作れない。それは多分、ここで Thurston がうまく行ったのは、双曲幾何というこの頃までの時代までのトポロジーは、双曲幾何、微分幾何を余り知らなくてもできたわけです。ちょっと語弊があるかもしれませんがまああまり勉強する必要はなかった。だけれども Thurston は双曲幾何が如何にトポロジーに取って大事であるか、双曲幾何を使って構成した。それは連綿と続いていて、曲面の微分同相の分類から Thurston の monster の定理、そのプログラムは Perelman によって、トポロジストに取ってはやや微妙な感じで解かれてしまいました。Thurston の 1982 年に載ったアナウンスメントの論文を見ると、沢山 20 を超える予想とか問題が書いてあります。今解かれつつありますが、18 番目に双曲多様体は有限 cover を取ると S^1 上の曲面束になるのではないかという、今では Thurston の予想と呼ばれている問題が書いてあります。これはほとんど途方もないように見えるかもしれないと書いてあるのですが、此の事実が全ての双曲多様体に付いて成立するというが、確信があるという所までは行かないが、そうであっても全然おかしくない、と書いてあります。こういうのがあるから今となつては古典となったものをたまには読むと、特にイントロダクションを読むと研究のヒントが得られる事もあると思います。

話を戻しまして、foliation, Gel'fand-Fuchs, どのように Sp -module が出て来たかを見ていきます。transverse foliation をやると standard symplectic vector space $H_{\mathbb{R}}$ の symmetric algebra,

$$S^*H_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n]$$

それは $\mathbb{R}$ 上の座標 $x_1, \dots, y_n$ に関する多項式代数が出てきます。その derivation を考えると、

$$\text{Der}_{\text{poly}}(S^*H_{\mathbb{R}}) = \left\{ X = \sum_{i=1}^n \left(f_i \frac{\partial}{\partial x_i} + g_i \frac{\partial}{\partial y_i} \right); f_i, g_i \in \mathbb{R}[x_1, \dots, y_n] \right\}$$

ベクトル場です。これは右辺を定義と考えてください。多項式ベクトル場を考えます。そうするともちろんこういう多項式 $h \in S^*H_{\mathbb{R}}$ とベクトル場 $X \in \text{Der}_{\text{poly}}(S^*H_{\mathbb{R}})$ があつたら、

$$X(h) = \sum_{i=1}^n \left(f_i \frac{\partial h}{\partial x_i} + g_i \frac{\partial h}{\partial y_i} \right)$$

と微分する事ができます。通常多項式ベクトル場です。この段階では symplectic form はどこにも書いていませんが、symplectic form を保つ、というか微分ですから infinitesimal に考える。そうすると

$$\text{Der}_{\text{poly}}(S^*H_{\mathbb{R}}, \omega_0^*) = \{ X \in \text{Der}_{\text{poly}}(S^*H_{\mathbb{R}}); L_X \omega_0^* = 0 \}$$

と symplectic form を入れて、ベクトル場があると Lie 微分というものがありますが、symplectic form を infinitesimal に保つというのは、symplectic form を Lie 微分するとゼロという事です。こうやって symplectic な多項式ベクトル場というものを考えます。

次はよく知られた symplectic 幾何学というか、Hamilton 力学の命題です。

Proposition 5.3. $L_X \omega_0^* = 0$ である必要十分条件は、

$$X_F = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_i} - \frac{\partial F}{\partial y_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \right)$$

となる $F \in S^*H_{\mathbb{R}}/\mathbb{R} = \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n]/\mathbb{R}$ が存在する事である。

微分すると定数項はゼロになりますから、定数の任意性があるので modulo $\mathbb{R}$ しています。この関数 F を Hamiltonian function と言います。証明は省略しますが、これは比較的初等的で一般でやると変数がいっぱいあつて面倒ですが、 $n = 1$ のときは4年生の良い演習問題だと思います。これがわかれば一般の場合もわかると思います。この事から良く知られているように、ベクトル場の生成する derivation が多項式で書けることがわかります。

Corollary 5.4. Lie 代数として $\text{Der}_{\text{poly}}(S^*H_{\mathbb{R}}, \omega_0^*)$ は定数項なしの部分代数 $S_0^*H_{\mathbb{R}}$ と同型である。

Lie 代数としての同型ですから、ベクトル場の普通の bracket が関数の方でどうなるかという、Poisson bracket というものが出てきます。今

$$\text{Der}_{\text{poly}}(S^*H_{\mathbb{R}}) \cong S_0^*H_{\mathbb{R}}$$

で $\text{Der}_{\text{poly}}(S^*H_{\mathbb{R}}) \ni X$ に対して、 $X_F = X$ となる $F = F_X \in S_0^*H_{\mathbb{R}}$ が存在し、逆に $F \in S_0^*H_{\mathbb{R}}$ に対して、 $X_F = X$ となる $X \in \text{Der}_{\text{poly}}(S^*H_{\mathbb{R}})$ が存在します。ここにもう1つ $Y \in \text{Der}_{\text{poly}}(S^*H_{\mathbb{R}})$, $G = G_Y \in S_0^*H_{\mathbb{R}}$ があつたとすると、 $[X, Y] \in \text{Der}_{\text{poly}}(S^*H_{\mathbb{R}})$ が定義されています。これが $S_0^*H_{\mathbb{R}}$ の方では通常、中括弧 $\{F, G\}$ で書いて、Poisson bracket と呼ばれています。具体的には良く知られていますが、

$$\{F, G\} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial G}{\partial y_i} - \frac{\partial F}{\partial y_i} \frac{\partial G}{\partial x_i} \right)$$

となります。

完全に Lie 代数として同型になります。そうするとこれは非常にメリットがあつて、transversely symplectic foliation の、ベクトル場というのはもちろんわかりやすいですが、関数をもっとわかりやすいですね、多項式ですから、ベクトル場の方は微分 $\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_i}$ がありますから、少し取り扱いが面倒です。もちろん等価ですから、どっちでやっても同じですが、計算は多項式の方がわかりやすいですね、それぞれメリットデメリットありますが、

そして具体的にここの linear な derivation に対応するのが、1 回微分を取っているので次数が上がって 2 次の多項式ですが、それがさっきの subalgebra になっていて $S^2 H_{\mathbb{R}} (\cong sp(2n, \mathbb{R}))$ 、こういう風になっています。

Gel'fand-Fuchs 理論というのがあるわけですが、それは foliation を扱うときにより詳しくやることにします。Gel'fand-Fuchs 理論は全部大成功を収めてわかったかという、いろいろ条件を付けていくと $\mathbb{R}^1$ の Gel'fand-Fuchs でもわからない所は沢山あつて、例えば、石田君のあるところから jet が消えるようなものの homology の研究等があり、いろいろ面白い事がありますが、3 次元 H_3 から先はなかなか難しいようです。2 番目 foliation でしたが、次に 3 番目として

(3) mapping class group.

ここに symplectic 群の表現が現れます。具体的には D. Johnson の仕事があつて、1970 年代後半からいろいろあつて一番有名なのは Torelli 群の abel 化に関する 1980 年の論文です。それ以降 1985 年くらいまで、Johnson kernel など Johnson の名前の出てくる仕事が沢山あります。具体的にはどうなったかという genus g の写像類群、これは定義は $M_g = \pi_0 \text{Diff}_+(\Sigma_g)$ です。これが homology への作用を通して homology の基底を取ると、 Sp への全射準同型があつて、 $g = 1$ のときは同型ですが、 g が 2 以上のときは kernel があつて、

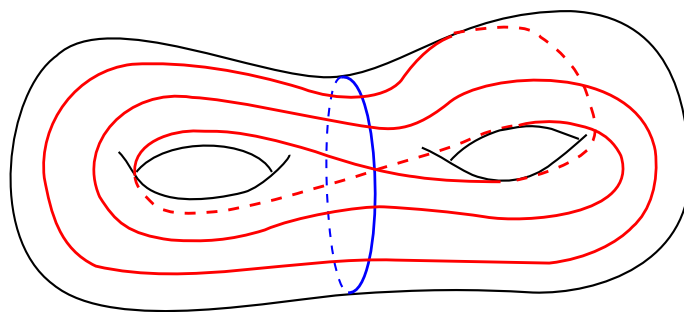
$$1 \rightarrow I_g \rightarrow M_g \rightarrow Sp(2g, \mathbb{Z}) \rightarrow 1$$

となります。

ちょっと前後するようですが、さっき Thurston の 1988 年に出版された論文の、76 年のアナウンスメントで Nielsen の論文を 1 つだけ引用していると言いました。なぜ引用しているかという、Nielsen の出した問題を否定的に解決したからです。Nielsen は代数的な構造で非常に複雑なもの、今で言えば pseudo-Anosov を考えていました。Nielsen の出した問題というのは、もし genus 2 以上で homology に作用しない写像類があったとすると、今の言葉でいうと Torelli 群の元は、pseudo-Anosov ではないだろう、という言い方になります。Thurston はそれを 1 つだけ引用して正しくない事を示しました。その Thurston の出版された論文には図がないのですが、76 年に出版していたものとのプレプリントには図がありました。genus 2 の曲面の上に、真ん中に曲面を 2 つに分ける単純閉曲線が描いてあつて (青)、Thurston は fill up という言葉を使っていますが、これと transverse に交わって埋め尽くす (赤)、そこで cut すると全部 contractible になる、そういうものがあつたとします。

これは separating ではないかもしれませんが、これで separating な曲線の方を Dehn-twist すると、やはり separating curve になり元の separating curve と複雑に交わります。2 つのこの複雑に交わった separating curves の片方で右 Dehn-twist、もう片方で左 Dehn-twist をして合成すると、pseudo-Anosov になることを証明しました。また separating curves に沿った Dehn-twist は、Torelli 群の元になる事も容易にわかるので、Nielsen の問題の反例を与えました。出版された論文には絵は書いていません。片方の Dehn-twist、もう片方の Dehn-twist とやりましたが、2 元生成ですから、 $GL(2, \mathbb{Z})$ へ写像を作つて議論すると、もっと一般的な形で書けます。

いずれにしても Torelli 群に関してはだんだんいろいろな事がわかってきました。Dennis Johnson は 70 年代後半から 80 年代、7,8 年掛けて素晴らしい結果を出しましたが、その 1 つが Torelli 群の abel 化です。



torsion も完全に決定しましたが、ここでは $\mathbb{Q}$ 上で書いておくと

$$H_1(I_g, \mathbb{Q}) = \Lambda^3 H_{\mathbb{Q}} / H_{\mathbb{Q}},$$

ここに Sp の表現が出てきました。但し $H_{\mathbb{Q}}$ は

$$H_{\mathbb{Q}} \ni u \mapsto u \wedge \omega_0 \in \Lambda^3 H_{\mathbb{Q}}$$

と考えると Sp -map になって Sp -submodule になります。これは Young 図形に対応していて、 GL 上では 3 階の外積は既約ですが、 Sp 上は既約ではないわけです。これは Torelli 群の永遠に基本的な結果だと思います。

この仕事を教えてもらったのは東工大の吉田朋好さんです。実は Dennis Johnson の事はこのときまで知りませんでした。最初に読んだ論文は Torelli 群の有限生成を証明した論文です。これは素晴らしい論文です。今まで沢山論文を読んできましたけれど、5 つくらいの内には入る論文です。有限生成を証明して abel 化を決定しました。それはどういうふうに行ったかという Johnson homomorphism

$$\tau_1 : I_g \rightarrow \Lambda^3 H / H$$

が全射であることを証明しました。これは $\mathbb{Z}$ 上で考えています。当時は単に τ と書かれていましたが、その後高次の Johnson 準同型が研究されて来たので、今では τ_1 と書きます。

この abel 化に関しては Rohlin 不変量を使って、Birman-Craggs 準同型を使って、2-torsion を決定しました。この辺りは最近、今日はちょっと触れませんが、homology cylinder など写像類群を拡大したもので合田さんや逆井さんはじめいろいろと研究されています。もっと広がってきています。

Johnson 準同型の構成は次回以降やります。大分前にやった群の近似、Malcev completion, lower central series を使って、まず abel 化で近似する、その次に 2-step nilpotent group で近似する、という戦略があります。Dehn-Nielsen の定理から写像類群は曲面の基本群の automorphisms の群とほとんど同じになり、lower central series に作用していますが、それをうまく解析するとこの Johnson 準同型が得られます。

この kernel $\ker \tau_1$, 通常

$$\text{Ker} \tau_1 = \mathcal{K}_g$$

と書きますが、いまは Johnson kernel と呼ばれるものです。これについては $g = 2$ は無限生成自由群になることが知られていますが、 g が 3 以上では無限生成が予想されています。abel 化は modulo torsion で有限次元という事が最近証明されました。abel 化も無限生成の可能性もありましたが、torsion はわかりませんが、rank は有限ということが極最近わかりました。いろいろあるんですが、なかなか難しいようです。

Johnson filtration というものが lower central series に対応して

$$\mathcal{M}_g \supset \mathcal{M}_g(1) = I_g \supset \mathcal{M}_g(2) = \mathcal{K}_g \supset \mathcal{M}_g(3) \supset \dots$$

あります。定義は一言でいうと Malcev completion への作用ですが、詳しくは次回以降やります。こういうものが定義されて最初の $M_g \subset I_g$ の差は $Sp(2g, \mathbb{Z})$ で、これは完全にものがわかっているわけではありませんが、まあわかっているんで、これを取ってしまいます。こういうものを relative Malcev completion と言い、Deligne が提唱してその後 Hain さんが研究しています。その言葉でいうと Sp は semi-simple part で、その後に続く方が nilpotent part になります。

この nilpotent part の方の直和を考えると、

$$\bigoplus_{k=1}^{+\infty} M_g(k)/M_g(k+1)$$

は一般論で Lie 代数になります。写像類群に限らずある状況で Lie 代数になります。これも次回以降やりますが、どこに入るかというと、

$$\bigoplus_{k=1}^{+\infty} M_g(k)/M_g(k+1) \hookrightarrow \text{Der}(\mathcal{L}(\pi(\Sigma_g)))$$

と曲面の基本群の Malcev completion の derivation のなす Lie 代数に入ります。通常具体的に研究していく場合には曲面上に点を指定したり、disc を抜いて群を自由群にしてその completion を考えます。そうすると自由 Lie 代数になってそのときは symplectic form に関する条件を置く必要がありますが、閉曲面、これでやっておくと relation の中に symplectic form が入っています。その derivation を考えればよいわけです。これを巡っては 80 年代から 30 年間いろいろな人の結果があります。

Johnson 準同型の関係で自分の仕事を書かせて頂きます。だんだん分母にはいろいろ出てくるという事はよくありますが、

$$\tilde{\tau}_1 : M_g \rightarrow \left(\frac{1}{2} \Lambda^3 H/H \right) \rtimes Sp(2g, \mathbb{Z})$$

と拡張できます。拡張した Johnson 準同型です。元々 H は Jacobi 多様体の基本群でした。Hain の立場、代数幾何の立場から言うと、 $\Lambda^3 H/H$ は中間 Jacobi 多様体の π_1 です。中間 Jacobi 多様体とは我々の立場から言うと $PH_3(\text{Jac}(R))$ です。ここで P は primitive part という意味です。既約にするために primitive な homology を取ります。中間 Jacobi 多様体の基本群が $\Lambda^3 H/H$ になるような複素 torus の構造が入る、定義できるわけです。さっき言ったように Hain は Deligne の relative Malcev completion を使って、この nilpotent part の研究しています。Hain だけでなくトポロジーの立場からも沢山仕事があります。ここから cohomology の言葉で言うと、 $H^*(\Lambda^3 H/H)$ という Sp -module があるわけですが、この Sp -module の Sp 不変 part を考えます。イメージとしては非常に次元の高い torus であって、やはり symplectic です。これの Sp -不変な cohomology から写像類群の cohomology へ

$$H^*(\Lambda^3 H/H)^{Sp} \rightarrow H^*(M_g; \mathbb{Q})$$

という写像を構成して、 $H^*(\Lambda^3 H/H)^{Sp}$ の元を具体的にコサイクルレベルで構成したり、河澄さんとの共同で、image がどうなるか、いわゆる tautological algebra に一致することを証明しました。その後河澄さんは、これは cohomology レベルですけれども、Teichmüller 空間、あるいは moduli 空間上でもう少し幾何的に微分形式として構成する仕事をされています。ここで abel 群 $\Lambda^3 H/H$ の cohomology の Sp -module は、ただ H 、1 個だけ出てくるように見えますが、中身は Grassmann 代数ですから、 Sp -module は沢山出てきます。その不変元がどうなるかです。これが写像類群です。これも次回以降詳しくだんだんやっていきます。

(4) Kontsevich の graph (co)homology.

1992,3 年。いわゆる Kontsevich の graph cohomology 理論です。これがあることは知ってたんですが、そんなものかと最初は思っていました。これは簡単に言ってしまうと 3 種類の無限次元の Lie 代数、commutative,

associative, Lie,

$$c_g, a_g, l_g$$

です。定義は半分くらいやっているようなものです。 c_g の Kontsevich の graph cohomology は stable, g を無限大に飛ばすのですが, $g = 1, 2$ とか unstable な cohomology をやるというのが, transversely symplectic foliation の Gel'fand-Kalinin-Fuchs です。 a_g は unstable ではあまりよくわかりません。 もともと stable なものです。 何回かあとにやる Kontsevich の定理で Riemann 面の moduli に関係するわけです。 l_g が Kontsevich 以前からトポロジーではもっとも研究されています。 数論でも Kontsevich 以前からずっと研究されてきている Lie 代数です。

この立場からいうと最初の河澄さんとの仕事, そして l_g , ここからも Riemann 面の cohomology が出てきます。 定義も込めて次回以降やります。 残りの時間で後 2 つ, 歴史的に 5 番目。 出て来た順番ですね。

(5) 絶対 Galois 群 $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$

絶対 Galois 群が出てきます。 これは何回か言いましたが, 織田孝幸さん, この方は数論がメインですが, トポロジーも達人であって, Johnson 準同型とかさっき言ったような Lie 代数などはお手の物なんですね。 私は後から他の人から聞いたのですが, 1980 年代の後半, 85, 6 年にトポロジストは Johnson 準同型なるものを研究しているようだけれども, 数論から言うとも幾何的なイメージの外側には絶対 Galois 群が出てくるにちがいない。 それが実際に証明されたのは 1994 年です。 中村博昭さん, 松本真さんの仕事です。 非常に関係する仕事があつて, 織田予想, 織田 expectation, τ の image の外側, しかも Sp -不変パートに現れるというわけです。 ここを込めて全部証明されました。 だけれども問題はどこにどのように現れるか, 未だにわかりません。 私のもともとの目的はトポロジー, 幾何で数論ではありません。 敢えてトポロジーの人が絶対 Galois 群ということだと思われるかもしれません。 トポロジーは高々 100 年ちょっとです。 Galois ですから, また Gauss も数論は数学の女王と言いました。 私も実際そう思います。 でもこれはしょうがないですね。 これは当然出て来て, これをいろいろ使っていろいろな不変量を考える事になります。 これを避けては通れない。 私の立場から言うと, これは絶対 Galois 群に関係するに違いないと思っています。

1994 年の 3 月に中村さんから証明できましたと連絡をもらったことを今でも覚えています。 そして松本真さんや Hain さん, それぞれの立場からの仕事があり, 織田予想を初めそれに関連するいくつかの重要な問題が解決されたきたわけです。 Johnson 準同型を長く研究している立場からはこれは聞き捨てならないわけです。 言葉は選ばないといいますが, 看過できない。 Johnson 準同型, いろいろ研究して, 全射ではない事はだんだんわかって来たわけですが, そこにあの絶対 Galois 群が現れる。 どこにどう具体的に現れるかという事になるわけです。 その後いろいろ機会があるごとに Hain さん, 松本さん, 中村さんと議論はやっていますが, なかなか難しい問題です。

まずは Grothendieck, Deligne, Drinfeld, 伊原理論, 織田予想, いろいろと絶対 Galois 群に関わる理論があります。 今はその流れで玉川さん, 望月さん, を初めとする深くてスケールの大きな仕事があります。 Grothendieck の anabelian geometry, Soulé element もあります。

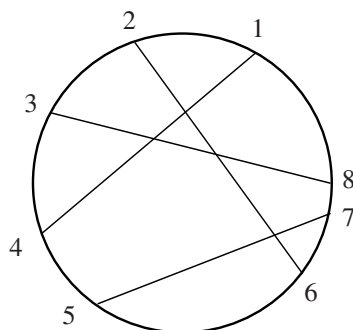
絶対 Galois 群は Johnson image の外側ですが, もともとは genus 0 の所に現れます。 S^2 というか $\mathbb{CP}^1$ マイナス 3 点, 基本群は rank 2 の自由群です。 そこにいろいろ理論があります。 伊原理論などあります。 その derivation, そして Soule 元となるべきものの候補は特定されていません。 ところがトポロジーの立場からのこの候補に迫るのにまずは trace を使うので, genus 2 以上でないと構成できません。 ところが実際には, その候補は genus 1 で定義されることが分かります。 trace は genus 2 以上でないと定義されませんが, その候補の元自体は genus 1 で定義できます。 1 というものはトポロジーとか数論に限らず, 0 と 2 の間, genus 0, 1, 2 以

上と3種類あって、元々は genus 0 が一番均整のとれた世界かもしれませんが、つぎに絶対幾何とか Newton 力学もそうですが、torus, genus 1 が世の中、genus 1 といつか parabolic といつか、Euclidean と信じられて来たわけです。genus 1 というのは parabolic と言って、hyperbolic と elliptic の間にあって、境界で大事な存在です。ここで何かをするしかないだろう、そこで genus 1 に落とすという事をやったわけです。少し近づいたかなと思います。詳細はもうちょっと後で触れます。

最後に6番目。

(6) 3次元多様体

3次元多様体に密接に関係します。これもメインの1つです。具体的には1990年頃出て来た Vassiliev の finite type invariants の理論。これは結び目理論に大変な衝撃を与えました。これを矮小化しているかもしれませんが、symplectic 群の立場から述べます。これは Kontsevich の解釈ですが、knot の Morsification, knot を Morse 関数的に扱って、critical point でいろいろやる。その critical point の configuration として chord diagram が出てきます。前回に linear chord diagram をやりましたが、Vassiliev の chord diagram は circular chord diagram. S^1 の上に偶数個、 $2k$ 個の点があったときにこの pairing を chord diagram と言います。



こういうものが生成する代数であって、relation があります。4T-relation と frame independence relation. 具体的には改めてやっていきますが、こういう relations で割ったら Vassiliev の finite type invariant の generating function になります。それが各次数で何次元あるか、これは free algebra になるのですが、それは今でもわからない。一番最先端は Bar-Natan という人で、この人はこれに限らず沢山仕事をしていますが、その内の1つが Vassiliev invariant の計算で彼の HP を見ると、何次元までに何個 generators があるかわかっている所が書いてあります。いまテンソルのこの本数が何本になるか、公式ができたと思って、いろいろ調べて最初はわかりませんでした。 $k = 1, 2, 3, 4, \dots$ とやって数列を見つけたときには、今サイトがあって、google で sequence, mathematics, number, くらいを入れるとそのサイトは見つかると思います。そこに数列を入れると知られた数列かどうか教えてくれます。できたと思ったのでやったんですね。そうするとポンと出てきました。chord diagram の場合は知られていました。ある意味は残念ですが、ある意味知られていないはずはないと思います。 k ごとに何本あるかというのは結構難しいです。linear chord diagram の場合は $(2k-1)!!$ で簡単に計算できます。これを結んだときにどうなるか、cyclic symmetry があつたら同じになるし、いろいろ cyclic action がちょっと関係します。それで計算できたので plot してみると知られていました。古典的ではなかったですね、2000年に知られていました。10年は経っていますが、ただこれは出版されていないようです。次回以降詳しくやります。

それで今 cyclic invariant と言いましたが、chord diagrams の数え上げと cyclic invariant な linear chord diagrams の数え上げには、少しずれがあります。cyclic invariant を計算するとき、symmetric 群の alternating representation というのがあって、符号をテンソルするかどうかで、いろいろ出てきます。Young 図形という

と 90 度ひっくり返す。行と列をひっくり返す。Young 図形でいうと、



これが symmetric product.



これが alternating product. これとこれは symmetry があって上の二つの cyclic invariants の計算結果は微妙に違うんですね。ただ、1000 くらいの値のときでも 10 くらいしか変わらないのです (chord diagrams の場合は、1,2,5,18,105,902,9749,..., cyclic 不変なテンソルの場合は、0,1,2,17,88,897,9562,...) 二つの数列をサイトに入れてみたところ、chord diagrams の方はいま言ったように 2000 年に公式が得られていました。これは Vassiliev の knot の理論で大事になるわけです。一方、cyclic invariant tensors の数え上げの方、こちらは unknown でした。

Vassiliev の理論は非常に大きくなりまして、任意の 3 次元多様体 M とその中の link L , (M^3, L) に対しての理論です。大槻さんがまず初めに homology 球面に対してやりました。その後 LMO 不変量 (Le-Murakami J.-Ohtsuki) の理論があります。3 次元多様体の finite type invariants の理論です。LMO の理論はこれは非常に精密な理論でいまでも発展中です。

一方で Kontsevich です。さっきの commutative algebra c_g , 具体的には symmetric algebra $S^*H_{\mathbb{Q}}$ のある条件を満たす derivation, ここから 3 に限らず奇数次元の多様体の不変量が出てきます。Kontsevich の観点からいくと、3 次元に限らず $2n+1$ 次元多様体に対する不変量の理論です。といってもいろいろ条件があって、任意の奇数次元多様体に対してできるわけではなく、 M^{2n+1} から 1 点を除いて、そこで tangent bundle の自明化を与えるなど条件が必要です。渡辺忠之さんが具体的には非自明性などいろいろと計算しています。ここでも symplectic 群の表現が沢山出てきています。

さっき knot の Vassiliev invariant の generating function の話をしました。3 次元多様体の generating function, こっちの方が少し大きいのですが、今度 3 次元多様体の場合は Jacobi 図というものが出てきます。relation があって、これの生成する generating function がどうなるかという大問題があります。これは中村さんと Garoufalidis の論文に書いてあるのですが、commutative version の最初の 2 つ $S^3H_{\mathbb{Q}}$, これは abel 化。そして $S^4H_{\mathbb{Q}}$, 1 階の bracket から来る relation で割ったやつが、丁度これが大槻さんたちの 3 次元多様体の generating function に等しいという事が Garoufalidis-Nakamura にかいてあることから (プラス多少の議論で) 分かります。いろいろなものが非常に密接に絡んでいます。

今日は Sp -module が低次元トポロジーに沢山使われるという事をお話しました。次回以降具体的に見ていきます。もともとの講義は具体的に、理論を証明するというよりは計算してみます。

あのサイトは見てみるとよいと思います。Stoimenow が linear chord diagram で parallel なものがない、これを regular と言いますが、regular な chord diagram が何個あるかという事を調べました。Vassiliev invariant の上限を与えたわけです。(2k-1)!! より少し小さい数列が出てきます。それを見た Zagier が興味を持って、このサイトに Zagier が Stoimenow の数列を入れたんだそうです。これは数論で知られたもので、Dedekind η -function, modular form に関連するもので書けるという事が知られていたそうです。それで Zagier は Vassiliev invariants and a strange identity related to the Dedekind eta-function という論文を書きました。Zagier がすごい

う風に言っているのです、それはおもしろそうだなと思って私もやってみました。大体研究をすると大体壁にぶち当たるのが日常的なので、こういう所で気分転換を計れば新しい進展が得られる事もあると思います。今日はここまでにします。

会場から質問:種数 1 は parabolic とおっしゃいますが、symplectic form の ideal で割ればそうですが、割る前は Σ_1 と考えるより、 $\Sigma_{1,1}$ と考えた方が自然だと思いますが。

確かにそうです。具体的な計算は境界を付けて symplectic form を保つという条件を付けて考えます。

会場から質問: だとすると parabolic というより hyperbolic ではないでしょうか。Goldman の仕事等を見ても、 $\Sigma_{1,1}$ が表現されるのが種数 1 の H のテンソル Lie 代数で Σ_1 を表現しようと思うと ideal で割らなくてはいけなくて、それで割ると本当に可換になる、それで parabolic という事ではないでしょうか？

そうですね、genus 2 以上と genus 0 を結ぶときにも genus 1 というのは確かにちょっとあれがあって、tangential base point、数論的にも boundary を考えます。そこから出てくる parabolic という情報は非常に大事で具体的に計算します。

第7回 (2010年12月10日)

Sp -modules と低次元トポロジー, こういう名前を付けてやっていた. Sp というと, $\mathbb{Z}$ 上では $Sp(2g, \mathbb{Z})$, Siegel modular 群とも言います. 表現論をやるときは $Sp(2g, \mathbb{Q})$, 研究する上ではまずここでやります. あるいは foliation をやるときには $Sp(2g, \mathbb{R})$ とします. その都度単に Sp と書いてしまいます. それが働く module を Sp -module と言って, それが低次元トポロジーに沢山現れるわけです.

この2,3回表現論的な所に重きを置き過ぎた感じがあって, 元々の目標というか, 少し離れ気味なので, 少し元に戻ってそもそもの問題, 歴史的に考えてみます.

closed, compact で境界がない C^∞ 多様体を単に M^n と書きます. 歴史的にみれば C^∞ だけでなく, PL とか TOP, 3つのカテゴリーが重要です. M^n の分類というものが, いわゆる differential topology と呼ばれる分野のメインの問題です.

$n=1$ のときには, これがいつかという事はないと思うのですが, 1次元多様体は S^1 しかない.

$n=2$ だと20世紀初頭. この話でも何度も出ていますが, 大雑把に3種類, 曲率でいうと, 正, ゼロ, そして負に分かれて

$$S^2, T^2, \Sigma_g \ (g \geq 2).$$

これは非常に古典的です.

それでは $n=3, 4, 5, \dots$, ではどうかと, これがずっと問題でした.

$n=3$ というと Poincaré homology sphere が出て来て, 有名な Poincaré 予想というものがあってこれも古いわけです. $n=4$ となると比較的新しいかもしれないですね. これはトポロジーというより代数幾何, 複素多様体論, 特に日本では小平先生の複素曲面の理論がありました.

$n \geq 5$, 歴史的にどれ位から調べられたのか分かりませんが, differential topology では $n \geq 5$, $n=3, 4$ が例外的になって, 境界がある場合は $n \geq 6$ となりますが, その分類が手がけられました.

$n \geq 5$, 境界があるときは $n \geq 6$, ただその分類理論は全て分かったかというところはないわけで, 単連結 $\pi_1 M = \{1\}$ の場合, この場合手術理論 (surgery theory) というものがあります. これはどこら辺から出て来たかといいますと, まずは Milnor の exotic sphere の発見から始まるわけです. そしてホモトピー球面の理論というのが Kervaire-Milnor. そちらで手術というものがだんだん意識されてきました. だから1950年代後半くらいからです. あえて言うとも, 微分トポロジーが終わったというわけではありませんが, 1つの区切りは1969年です. これは私が丁度学部を卒業した年です. 微分トポロジーにとっては記念碑的な年になったわけです.

まずは Thom の cobordism 理論というものがあって, それから Hirzebruch の signature theorem というものがあって, Milnor ですね, 微分トポロジーは Milnor が開いたといっても過言ではないと思います. Milnor の exotic sphere というものを発見して, Θ^7 , 7次元 homotopy sphere のなす群, こういうものを研究しました. そして surgery theory, ですが, Milnor とか Kervaire-Milnor の研究から出発して, 理論としてまとめたのは Novikov-Browder-Sullivan-Wall です. Browder というのは兄弟2人とも有名な数学者で, これは弟の方, William Browder, Princeton の教授です. 通常この4人です.

まずは Novikov-Browder 理論と呼ばれました. これを Sullivan が非常に categorical に整理して, 基本群が自明でないときに Wall 群というのがあって, Wall が理論を確立させました. これが1960年代, 50年代後半から60年代. 非常に成功を収めたわけです. 単連結で5次元以上の C^∞ 多様体, piecewise linear も入って, Sullivan の categorical なやつで C^∞ , PL, 3つとも入っているわけですが, その理論が確立したわけです.

そして 1969 年という年が来るわけです. 1969 年に何が起こったかというと, Kirby と Siebenmann, この 2 人の, 大きな仕事があったわけです. 特性類, この話は特性類がタイトルに入っていますが, Kirby-Siebenmann class と呼ばれる, 小文字で書きますが,

$$ks \in H^4(BTOP; \mathbb{Z}/2)$$

を定義して, そして何を解決したかというと, 位相多様体の三角形分割問題, 但し piecewise linear な三角形分割問題をほとんど完全に解決しました. ks はどこに入るかというと, $BGL(n, \mathbb{R})$ だったら, これは n 次元実ベクトルバンドルの分類空間ですが, $BTOP$, これは topological なバンドルの, しかも n が入っていないので stable なバンドルの分類空間です. こういう所に Kirby-Siebenmann class $ks \in H^4(BTOP; \mathbb{Z}/2)$ があって, お話だけですが, 5 次元以上の位相多様体があったら, 定義は 5 次元以上じゃなくてもよいですが, 位相多様体に対して 4 次元の $\mathbb{Z}/2$ -cohomology の元が定義される. これが消える事が 5 次元以上では, 境界があるときは 6 次元以上, その多様体が piecewise linear な triangulation をもつための必要十分条件になります. 三角形分割というのは単体複体と位相同型があったときに言いますが, piecewise linear というのは 1 つ条件があるわけで, 任意の点の link, 1 点の neighborhood の境界が

1 次元下がった通常の球面の通常の分割と PL 同値, これがあるための必要十分条件になります. これは決定的な仕事です. 1969 年に行なわれました.

もう少しホモトピー群の言葉でいうと $\pi_3(TOP/PL) \cong \mathbb{Z}/2$, これは

$$TOP/PL \cong K(\mathbb{Z}/2, 3)$$

PL の category と Topological な category の差が 1 カ所だけにある, これは非常に深い定理なわけで, 3 次元の所に $\mathbb{Z}/2$ だけ差があるという事です. 特性類の言葉で言うと transgression です. これが 1969 年に起こった事です.

さっき言ったように私はこの年学部を卒業して大学院に進学しました. その頃加藤十吉先生, 日本のトポロジーの第 2 世代を引っ張った方ですが, その人がこの頃 Princeton の Institute に滞在していて, 手紙で日本にいろいろ知らせて来られました. 同時期に Siebenmann も滞在していて, 丁度発見したときに居合わせたわけですね. 大定理の発見に立ち会えたという喜びと, 自分もと言う事が先輩たちに手紙できて, 間接に聞いていました.

同じ頃 Thom ですね, Thom の cobordism という概念はおそらく 20 世紀最大の contribution だと思います. cobordism という idea は今でも非常に大きいと思います. その Thom がこの前後 catastrophe の理論に移って, トポロジーは死んだという風にいったと噂で伝わってきました. もう少し前にトポロジーをやろうと思っていましたので, どうしようかと思いました. 私だけではないですが, うーん死んじゃったんだと. 修士入って死んだと言われる分野をやるというのはなかなか微妙です. 今は全く違う意味で流動的ですから困難はあると思いますが, 面白い面もあるので道は必ず開けると思います.

これが 1969 年ですね. さっき 1969 年が区切りだといいましたが, 全部終わったかということとんでもない話で残された問題と書くメインが終わってしまって, つまらない問題と思うかもしれません. 残された問題というのは語弊があるかもしれませんが, つまらないという意味では決してありません. 沢山ありますが, その 1 つ, Kirby が何年か前に講演の中で, この人は他にも沢山仕事をした人で, それらを振り返りながら挙げた問題の中の 1 つです. さっきは piecewise linear な triangulation と言いましたが, 問題は位相多様体の triangulation の存在問題です. これを挙げたんですね. これは日本の人も, 私の先輩も関わっていますので, ここで挙げておきます. 位相多様体が全て triangulable という事の必要十分条件を書いたんですね. それは

松本亮生さん、私が修士の時の先輩です。ほぼ同時期に Galewski-Stern の仕事です。2つ独立で大きな仕事です。Stern という人はこの後 Fintushel と共同で 4次元で非常に大きな仕事をしています。

任意の topological manifold が triangulable である必要十分条件、4次元は例外で、4次元では triangulable でないものがあることは知られていますが、5次元以上で triangulable、これが意外な形になるんですね。oriented homology 3-sphere の、この話でも少し出てきましたが、全体を考えて、もちろん微分同相で割りますけれど、さらに homology cobordism, H -cobordism で割ると、

$$\Theta_{\mathbb{Z}}^3 = \{M : \text{oriented homology 3-sphere}\} / H\text{-cobordism}$$

は connected sum で群になります。これは大文字の H で小文字で h -cobordism と書くと homotopy cobordism です。homology cobordism というのは、cobordism であって homology 的には cylinder になるというものです。そうすると $\Theta_{\mathbb{Z}}^3$ は abel 群になります。この群の構造は未だにミステリーなんですけど、 $\Theta_{\mathbb{Z}}^3$ は無限ランクであるというのは古田さんの有名な 1990 年の Invention に出た論文です。そして Fintushel-Stern も独立に証明しています。これについてもこの話、symplectic というのを使って、homology cylinder というものがあって、Goussarov-Habiro の理論から出発して、homology cylinder, Garoufalidis-Levine が理論の基礎を確立し、Goda さん、Sakasai さん、最近いろいろな結果があります。そこに出てくるものです。

この古田さんたちの結果が出てくるまでは、 $\Theta_{\mathbb{Z}}^3$ に関して Rohlin invariant だけ

$$\Theta_{\mathbb{Z}}^3 \rightarrow \mathbb{Z}/2$$

が知られていました。こういう情報だけが知られていました。

Rohlin invariant と言うのは次のようなものです。homology sphere に対して、それを bound する 4次元の spin 多様体を持ってきて、その signature は 8 で割れるのですが、signature を 8 で割ってそれを mod 2 する。そうするとこれは準同型を与えます。これは全射ですから、 $\Theta_{\mathbb{Z}}^3$ は自明でない事は分かっていたのですが、ある時期まで、これも Kirby の講演の中で触れていますが、これは同型だろうと思われていました。そして homotopy sphere に対して、これが自明でない事はありうるか。もし有ったとするとそれは Poincaré 予想の drastic な反例になるのですが、それはないというのが Casson の 1983 年、Casson 不変量の仕事です。それぐらいしか仕事はなかったのですが、古田さんは無限ランクという事をゲージ理論を使って証明しました。無限ランク、その証明は帰謬法(背理法)です。もし有限ランクだとすると、ゲージ理論を使って、Brieskorn homology 球面を使って、有限ランクだとすると何倍かすると 4次元多様体を bound するのですが、そこから矛盾を導きます。これは凄い定理なわけですが、そうすると無限ランクですから、単純に考えて準同型は沢山あるはずですが、今の所知られているのは、Froyshov、という人が $SO(3)$ -ゲージ理論を使って、1つ準同型を定義しています。また Ozsváth-Szabó の理論からも 1つ定義されています。この 2つは 1次独立かもしれませんが、同じじゃないかと予想されています。Froyshov が第 2 のものを作ったという話もありますが、いずれにしても非常に難しいものです。それで triangulable の必要十分条件、松本さん、Galewski-Stern の定理は、 $\Theta_{\mathbb{Z}}^3 \rightarrow \mathbb{Z}/2$ が split するというものです。従ってこれは無限ランクでミステリアスな群なのですが、低次元を例外として、任意の位相多様体が triangulable, piecewise linear という条件なしで triangulable、単体複体と位相同型になるという必要十分条件は、これが split するというものです。だからここ $\Theta_{\mathbb{Z}}^3$ に order 2 の元があつて、それが生成する群に split する、それが必要十分だということです。もしこれが肯定的ならば 2-torsion があることになります。そういうものになるのですが、この結果が出てからもう 30 年経つわけですが、大きな問題であつてどれくらいの人々がこれにアタックしているかはわかりませんが、いずれにしても differential topology の残されたというよりは、大きな問題です。Kirby も講演の中で挙げていますし、ことあるごとに

微分トポロジーでは取り上げられています。

若い人が surgery theory を例えば勉強して、Browder の単連結な多様体の surgery の有名な教科書があつて、単連結でない場合 Wall の教科書があつて、これは非常に難しい教科書だからなかなか大変ですが、勉強していろいろと微分トポロジーを見ていくと、surgery theory というのがあつて、1969 年ですから、40 年も前に目処の付いた、じゃあそうかやめましょう、という事になるかもしれませんが、こういう問題もあるという事です。非常に大きな問題です。

ただこれにアタックするというのはなかなか難しいです。ゲージ理論を使ってやるのか。ただ 1 つ例を構成したら、もしこれが肯定的のだとするとそれでおしまいです。肯定的でないとなるとこれはなかなか難しいです。こういう事をあまり言うとは、数学、厳密な科学ではあれですが、敢えてこれがどうなるかと言うと split しないのではないかと思います。split したなんて事もあるかもしれませんが、とにかくこれは非常に難しい大きな問題です。そしてこれは松本亮生さんの有名な Orsay の doctor 論文です。

さて 5 次元以上は、単連結の場合ですけれどもある程度目処がついたわけです。そして基本群があるときには、今でも Wall 群などいろいろなものがあつて、発展して algebraic L-theory というのがあつて、例えば Novikov 予想に関連してどんどん研究されて、どんどん代数化されています。代数的 K 理論と代数的 L 理論というのがあつてなかなか難しいですね。

特別な次元だと言う事がわかったのが、 $n = 3$ と $n = 4$ です。Thurston も大きな仕事をしたわけですから、3 次元は geometric であるが、 $n = 4$ は全く geometrical ではないという名言を述べています。

$n = 3$ ではみなさんご存知のように Thurston program というものがあつて、1980 年代でしようかね、program が出されたのは、この話でも大変矮小化した形ではありますが、3 次元多様体は 1 次元の S^1 と 2 次元の S^2, T^2, Σ_g , これらの

- 直積,
- 円周上の曲面束,
- 曲面上の円周束 (Seifert 束空間と呼ばれていて),

都合 9 種類あるのですが、 S^1 上の S^2 -バンドル、向きを仮定すると自明、直積になってしまうので、1 つ減って 8 種類の幾何学になるというものです。こういうものがあつて、それが 2003 年 Perelman によって解決されました。完全に確立されています。ただトポロジーの立場から言うとやや微妙なものがあります。Thurston 自身の気持ちは分かりませんが、もちろん Thurston 自身も自分の program ですから、努力して Haken の場合に証明を与えました。最終的にはいわば外側から黒船という語弊がありますが、外側から解決されました。これはすごく偏狭な立場になるかもしれないから、良いと言えないかもしれませんが、全く意味がないとは思えないのは、学問的には純粋にトポロジカルというか、もう少し普通のトポロジーで理解できる証明があればよいと思います。

そのときにちょっと思い出すのは Thurston のもう 1 つの仕事で foliation の存在です。foliation というのは tangent bundle の subbundle ですが、それが integrable かどうか、subbundle があつたときに各点で接平面がその subbundle になるような部分多様体の族で埋め尽くせるか? Thurston はそれを解決しました。その証明は純粋にトポロジーですが、普通のトポロジストにはちょっと難しい。Bott という人、foliation の特性類でも大きな仕事を、Bott vanishing theorem などありますが、その Bott に会ったときに聞いた事があります。Thurston が integrability を証明した、 Γ -構造という Haefliger の idea を用いて、ホモトピー論的に integrability を証明したという大きな仕事です。homotopy 論的な障害がなければ本当に integrable という事を証明したのですが、どう思いますかと質問しました。Bott は、あれは大変深い定理だが、20 年くらい経ったらもう少し

んなにわかりやすい証明が出るだろう、と言っていたのが非常に印象に残っています。それが 1975 年頃で、20 年くらい経ったらい었지만、それからさらに 15 年くらい経っていますが、別証明はどうでしょうか。

会場から：codimension 1 のときは相当分かりやすくなったと思います。いろいろトンネルは掘るんですが、掘り方とかが分かりやすくなりました。codimension が高い場合は、codimension 2 で 4 次元のときは Haefliger の別証明があります。そのときだけ 4 次元の中だけで証明が書けます。

そうすると Bott の言った事もある程度正しかったという事です。codimension 1 のときは、Haefliger の Γ -構造の必要はないわけで、Euler 数が消えるだけで integrable という定理です。しかも closed の場合ですね、foliation という話から戻りますが、Perelman で終わったかという、Thurston の予想というのがあって、hyperbolic 多様体 M のある有限 cover を取ると、それが S^1 上の曲面束になるか？、そのとき monodromy は pseudo-Anosov になるわけですが、というものがあります。今では Thurston 予想とも呼ばれます。任意の hyperbolic な M^3 までは言っていないですが、Haken なら正しいとアナウンスしている人もいます。これも多少外側からというか、トポロジーというよりは、geometric group theory からのアプローチです。いずれにしてもこの予想は非常に大きな Thurston program が完成する上での最後の関門になると思います。

だけど Thurston も言ったように、 $n=3$ は geometric というか、敢えていうと、topology=geometry で 1 次元と 2 次元の良く知られた直積とファイバーバンドルで書ける、その中に低い次元の基本的な 8 個の Lie 群が出てきて、その geometry を全部もつと、3 次元は分かりやすい。非常にきれいな世界なわけです。曲面に関しては Lie 群がやはりあって、知られた世界にそうなっているわけですが、3 次元もそうなるわけです。

4 次元ではそうではない、というのが、これも良く知られている Donaldson の大定理ですね。これも出たときにはみんなあっとびっくりして Atiyah もたまげたといわれています。ゲージ理論を使って 4 次元のトポロジーの大定理ですね。ちょっとだけ言うと、4 次元の C^∞ 閉多様体 M があって、最初は単連結で intersection form

$$H^2(M; \mathbb{Z}) \times H^2(M; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$$

が positive definite だとする。positive definite な $\mathbb{Z}$ 上の bilinear form はものすごく沢山存在して、数論などで 2 次形式の理論は今でも大問題になっています。そこで Donaldson は 4 次元の単連結 C^∞ 多様体の intersection form として出てくるならば、それは一番簡単なものになっている、つまり diagonal

$$(1) + (1) + \cdots + (1),$$

$\mathbb{C}P^2$ は H^2 が rank 1 で form は (1)、その k 個の connected sum $k(\mathbb{C}P^2)$ と form としては同じ、こういう大定理があるわけです。

ちょっと遅れて位相多様体について Freedman の大定理。これも 26,7 年前になります。Donaldson と Freedman, 4 次元の mystery をこじ開けた、先鞭をつけた定理です。これは M が topological 4-manifold で単連結だとすると、代数的な cup 積、古典的な構造ですが、これに条件が付くというのが Donaldson の定理でしたが、Freedman は条件は全くない、Poincaré duality などがありますが、それだけを仮定するとそれ以外条件はない。与えられた 2 次形式を実現するような 4 次元の単連結位相多様体は存在する、何個存在するかというと、Kirby-Siebenmann が再び登場して、1 個、あるいは 2 個になるわけです。こういう大定理が Freedman の定理です。これでみんな非常に衝撃を受けて、これが 1 つのきっかけになってゲージ理論が登場して、ゲージ理論は物理や数学でも研究されていましたが、低次元トポロジー、4 次元トポロジーでゲージ理論を使って一斉に活発に研究されるようになって、日本でもさっき言った古田さんの仕事を始め、その後の流れが未だに続いているわけです。では、単連結でないときはどうなるか、これは今でも分からない事が多くて、基本群が

$\mathbb{Z}$ のときは仕事はありますが、そうではない一般の π_1 , 4 次元多様体の π_1 ですから非常に大きくなりうるわけですが, open, わからない事だらけ, と言っても良いわけです.

私のある意味では最終段階の夢は, 4 次元の位相多様体と C^∞ 多様体の差をなんとかして捕まえたい, symplectic invariant で捕まえたいというものです. これは 1 つの局面であって, あとからもう少し詳しく言いますが, Goussarov-Habiro, Goda-Sakasai, Cha-Friedl-Kim, homology cylinder の理論, それを沢山勉強した上で, 楽観的というか, まるで的外れかもしれませんが, つかまるのではないかというものです. 最後の方でもうちょっと詳しくやります. これが多様体の分類の方です.

もう 1 つの方はどうなるかという, 多様体 M を固定した上でそれをファイバーとするようなファイバーバンドル, この分類です.

$$E \rightarrow B,$$

total space が E , base space が B , C^∞ -category, トポロジカルでもやれない事は無いですが, 通常は C^∞ , smooth でやります. 微分可能多様体であって, M がファイバーになるファイバーバンドル, こういうものを簡単に M -bundle と言います. この構造群というのは $\text{Diff}(M)$, これもトポロジーの非常に重要な研究対象です. M を固定して $\text{Diff}(M)$ の 1 元毎の性質をいろいろな性質を調べるのが, Smale の力学系の研究, Smale は初め Poincaré 予想, h-cobordism theorem など大きな仕事をした後で, $\text{Diff}(M)$, こちらの力学系に移って行きました. その後大きな流れがあります. これをトータルとして $\text{Diff}(M)$ を考える, これはまた別の研究であって, M をファイバーとするファイバーバンドルがどれくらいあるかという事を調べる. ところがこれは無限次元なわけですね.

構造群が有限次元 Lie 群だとすると, そうすると Chern-Weil 理論というものがあります. $H^*(BG)$, BG は G を構造群とするようなファイバーバンドルの底空間をすべて集めたようなものですが, これが Chern-Weil 理論によって記述される. 完成された理論があるわけです. それでは一般の多様体の微分同相全体, これで貼り合わせたようなバンドルはどれくらいあるか, それを cohomology で扱うのが特性類ですね, それはどうなるか, これは非常に難しいわけです.

$M = S^1$ のとき, $\text{Diff}(S^1)$ は $O(2)$ と homotopy 同値という事が比較的 elementary に分かって, Chern-Weil 理論に帰着します.

S^2 のとき, それは Smale の初期の 1957 年頃の定理で $\text{Diff}(S^2)$ は $O(3)$ に homotopy 同値でベクトルバンドルに帰着する.

S^3 のときは Hatcher の定理で Smale 予想と呼ばれたもので, $\text{Diff}(S^3)$ は $O(4)$ と homotopy 同値. Hatcher の大きな仕事です.

その先行くとうなるか, S^5 はまだわかりません. ただし球面でさえ次元がどんどん上がっていくと $\text{Diff}(S^n)$ の中にはきれいに $O(n+1)$ が入っていますが, homotopy 同値でなくなることは分かっている, さらに Lie 群だと homotopy 群は有限生成ですが, 次元があがって M が複雑になってくると, $\text{Diff}(M)$ の homotopy 群は有限生成でない事が沢山あるという事も分かっています.

一般に M -bundle の特性類の観点からいうと流れは大きく 2 つあって, 1 つは Igusa Kiyoshi さん, Igusa 理論というものがあって, John Klein とか, 沢山の人が関わっている, Reidemeister torsion の理論があります. ただ Reidemeister torsion というのは 3 次元多様体でまず研究されて, 沢山の人が, twisted とかいろいろなバージョンがあって, 今でもメインの 1 つですが, higher Reidemeister torsion という名前を, Igusa さんは higher Franz-Reidemeister torsion という言葉を使っていますが, その理論です. この理論は手っ取り早くいうと一般の M に対して $\text{Diff}(M)$ の特性類を構成した理論です. これは位相的な, あるいは algebraic topological

な手段、特に algebraic K-theory を使って、algebraic K-theory もさらに algebraic と topological と 2 つあって、難しいんですけど、これは topological な algebraic K-theory を使います。topological K-theory というのは元々の K-theory ですが、algebraic K-theory があって、algebraic algebraic K-theory と topological algebraic K-theory、この topological algebraic K-theory を使います。なかなか難しい理論です。

いずれにしても Igusa 理論というものがあるって、別な立場からある意味で等価な理論が、Bismut-Lott, Goette, 他何人かの人の、analytic なもうちょっと解析的な analytic higher torsion の理論があります。だから Igusa Kiyoshi さんの理論、topological な意味での higher Reidemeister torsion の理論、解析的な手法を使う Bismut-Lott, Goette の analytic higher torsion の理論、と分かれています。日本でいうと吉川謙一さんが analytic torsion の専門家です。沢山仕事をされています。トポロジーの立場からというより、代数幾何とか最近は数論との関係で吉川謙一さんが仕事をされています。今の所は一番有力な 2 つの理論ですね。

それで symplectic 多様体 (M, ω) というものが、昔からあるわけですが、Gromov の仕事ですね、1985 年の有名な仕事以来、symplectic 多様体の topology が活発に研究されるようになってきました。この構造群として symplectic 多様体の symplectic form ω を保つような微分同相、これは symplectomorphism とよばれ、その全体 $\text{Symp}(M)$ と書きますが、symplectic な意味での M をファイバーとするファイバーバンドルを考えると、 $H^*(B\text{Symp}(M))$ はその特性類を与えます。これは widely open です。これは大きな流れになっていますが、沢山の事が知られていますが敢えて言うともまだまだ始まったばかり、といっても 25 年も経ってはいますが、まだまだ発展中、どんどん出てくるだろうという状況です。

もう少しだけ話を続けます。BDiff(M)、これは smooth topology というか、普通の fiber bundle を考えていたのですが、foliation との関係でいうと、ここに δ を付けて BDiff $^\delta(M)$ 、位相群があったら δ を付けると、位相を忘れて discrete 位相にしてしまう、貼り合わせが微分同相なだけで locally constant、そういうカテゴリーですね。これは非常に大事なわけですが、symplectic の方でも $B\text{Symp}^\delta(M)$ を考えます。これも大きな問題であって、トポロジーでいうと foliation の理論、Godbillon-Vey 類というものに始まって、Gel'fand-Fuchs 理論、1960 年代後半から大きな流れになっているわけで、日本では坪井先生のスクール、ずっと研究が連綿と続いています。その関係で言うと、 δ を付けて特性類を構成する。これも最近普通の topology と並んで discrete topology を同時にやるとそれぞれの方によりイメージが出来るとなっています。

これはちょっと表現論に偏りすぎたと思ったので、問題意識を戻すために話しました。この流れで言うこの話はどうかというと、 M は曲面 Σ_g 、特に genus 2 以上の曲面になります。さっきの話で分類は 100 年以上前に終わっています。じゃあ bundle の方はどうかというのがそもそもの話です。これは個人的に私自身がどうしてここに興味を持つようになったかというお話ですが、1980 年代初頭の事です。

さっき 1969 年にトポロジーは死んだとか微分トポロジーで区切りが付いたと聞いて、何をやろうかといういろいろ考えていたら、Thurston が颯爽と現れて Godbillon-Vey, foliation の構成をやって、Bott の仕事など沢山あってじゃあちょっとやってみようかと思ってやりました。ちょっと安易だったかもしれませんが、若い頃は時代の流れに乗るというのがあるが悪い事とは言えないかもしれません。いろいろ理論が出て来たらこれもあれも理解できたらよいですが、どんどん時間が経っていきますから、まず面白いと思ったら、多少安易に見えても飛び込んで行く事はまずは良い事だと思います。

foliation をやってたんですが、なんかやっぱ、後から言うところとどんどん発展してたんですが、自分自身としてはこの先何やろうかと思っていました。1979 年から 80 年、Bonn に行く機会があって、そこでもずっと foliation の仕事はしてたんですけど、だんだんそういう考えが芽生えてきて、じゃあどうしようか。バンドルというのが出て来て、foliation の方でさっき言ったように δ をいろいろやっていたんですね。Thurston も codimension 2 の Godbillon-Vey 類の連続変形を、これは Σ_g ではなく S^2 の微分同相写像を使っ

て、codimension 2 の Godbillon-Vey 類を 5 次元多様体上に構成するという仕事をしました。ああ、これはちょっと時代が違いますね、1975 年頃に Bonn から Princeton に行った時のことでした。ともかく δ の付いた方をやっていたんですけども、1979 年にもう一度 Bonn に行く機会があつて δ を取ったらどうなるんだろうと思ひだしたわけです。これは今では専門家には常識ですが、Earle-Eells の仕事があつて、 $\text{Diff}(\Sigma_g)$ は $\mathcal{M}_g$ と homotopy 同値です。Earle は複素解析というか Riemann 面の理論の大家ですね、Eells は微分幾何、大域的な微分幾何の大家です。statement は 0 を書くと identity を含む連結成分ですが、 g は 2 以上のとき、 $\text{Diff}_0(\Sigma_g)$ は contractible、可縮である。こんなことは一般の M に対してはどんどんどんどん起こりにくくなります。曲面の場合には Earle と Eells はこれを証明しました。連結成分は可縮である。

この話で何度か出てきました写像類群、mapping class group というものがあります。省略して $\mathcal{M}_g$ と書く事にしますが、これは可算群ですが、位相は discrete topology でこれと homotopy 同値になります。 $\text{Diff}(\Sigma_g)$ はばかでかい群なんです。これの連結成分が可縮ですから、ホモトピー的には全部 1 点に縮んでしまいます。isotopy で同値関係を入れた、それが写像類群の定義です。それと homotopy 同値になる。繰り返しになりますが、こんなことは次元が上がってくるとほとんどあり得ないことです。私はよく 2 次元は理想郷であるといいますが、素晴らしい事が起こっていて、数学はいろんな分野が沢山ありますが、ほとんど全ての分野が話合えて、しかも互いに協力し合えていろいろな問題を解析することができます。Earle と Eells、この 2 人はトポロジストというよりはリーマン面と大域解析の大家です。

これからどうなるかと言いますと、さっき曲面バンドル、一般に M -bundle、の特性類、 $\text{Diff}(\Sigma_g)$ で貼り合わせたバンドルがどれくらいあるかを cohomology で表すと、これが同型になることの、

$$H^*(\text{BDiff}_+\Sigma_g) \cong H^*(\mathcal{M}_g) = H^*(K(\mathcal{M}_g, 1))$$

となります。位相を完全に忘れて discrete な写像類群と呼ばれる群があつて、その群の cohomology 理論というものがあつて、それと同型になります。こういう事が起こります。群の cohomology 理論というのは Eilenberg とか MacLane とかあるわけですが、それを考えないとすると Eilenberg-MacLane space というものがある。基本群が写像類群になるような Eilenberg-MacLane space、 $K(\pi, 1)$ -space、位相空間、CW-complex の通常の cohomology と同型です。こんな事はほとんどここだけだろうという感じです。こういう事が分かってきました。さらに Teichmüller 空間というのは、Teichmüller 理論と呼ばれる理論があつて、大きな分野になっている事が勉強すると分かってきました。Teichmüller space、 $\mathbb{T}_g$ と書きますが、これは何かというと曲面には複素構造が沢山入ります。oriented で考えるのですが、複素構造に誘導する orientation と一致するものだけを考えます。oriented な多様体としての複素構造、その全体、これは沢山あるのですが、古典的にはこれは分かっていました。代数幾何では curve と言います。それを isotopy で割る、これが Teichmüller 空間の定義です。

$$\mathbb{T}_g = \{\text{complex structure on } \Sigma_g\} / \text{isotopy}.$$

この Teichmüller、1937 年の、これも Teichmüller の doctor 論文です。それで $\mathbb{T}_g$ が homeomorphic になる事の、この人は沢山証明しましたが、 g が 2 以上のとき、 $6g-6$ 次元のユークリッド空間 $\mathbb{R}^{6g-6}$ と homeo である。 $g=1$ のときには古典的に torus 上の複素構造を isotopy で割ると、それは上半空間となります。Poincaré 上半平面ですね。古典的に知られているわけです。 $g=1$ を入れると $6g-6$ は 0 になってしまい、例外的な場合ということにはなりますが Teichmüller 理論はあります。しかし 2 以上の時がメインです。

複素構造というのはテンソルですから、各接空間上に複素構造を入れる、2 次元の実空間ですが、これを $\mathbb{C}$ だと思ふ、つまり i 倍を定義する。90 度回転。これを almost complex structure、概複素構造と言います。2 次元が理想郷だという 1 つの所以ですが、そういうテンソルの条件だけ、2 次元の oriented な plane bundle に

複素構造を入れる、普通は概複素構造というのですが、理想郷たる所以は、2次元ではこれがいつも integrable になる、本当の複素構造になる、高次元になるとそうなるとは限りなくなります。

そうすると写像類群は曲面に向きを保つ微分同相として働くわけですから、その上のテンソルとしての複素構造にも働くわけで、Teichmüller 空間に作用します。作用してこれは Teichmüller が証明した1つの結果ですが、properly discontinuous、被覆変換群みたいな感じで非常に良い性質をもって作用する事を証明しました。そうすると商空間がかなりきれいな構造を持ちます。この商空間を通常 $\mathbb{M}_g$ と書きます。これはどのように書けるかといいますと、 Σ_g 上の複素構造ですね、さっきは isotopy で割ったわけですが、微分同相で複素構造を pull back したというのは、複素構造としては双正則、isotopy よりずっと強くて、これで割ったものになります。

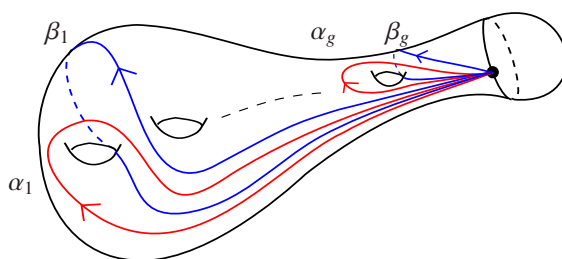
$$\mathbb{M}_g = \{\text{complex structure on } \Sigma_g\} / \text{双正則}.$$

これは Teichmüller 以前、Riemann の moduli 空間、moduli 空間というのは今数学の最重要キーワードの1つですが、moduli 空間というのは沢山あります。何も言わないで moduli と言うと、この Riemann の moduli 空間を指します。Riemann 自身、1850年代、この空間を考えていて、local には複素 $3g-3$ 次元である、この事までも知っていた、これも良く知られた話です。それに厳密に複素解析的な基礎付けを与えたのが、Teichmüller の理論で、この後、Ahlfors, Bers とか、Riemann 面の moduli の方でいくと代数幾何の観点から Grothendieck, Mumford,... と連綿と仕事が続いてる、そういうわけです。

さてそれでですね、ようやく、ちょっともう1時間も経って、motivation を離れた所から少し話しましたが、元に戻って、理想郷、例外的な次元である2次元でどのような事ができるか、その分類、3次元、あるいは4次元にどのように適用していくかですね。写像類群 $\mathcal{M}_g$ ですね、何度か触れましたが、Dehn-Nielsen の仕事でこれは代数的に特徴付けができます。つまり曲面の基本群、自己同型を auto と言いますが、内部自己同型を除いたものを outer auto と言います。向きを保つというのは幾何学的な条件ですが、代数的にも考える事ができて、

$$\mathcal{M}_g \cong \text{Out}_+(\pi_1(\Sigma_g))$$

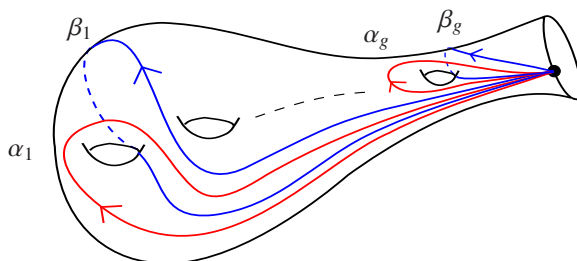
これが自然に同型になるというのが Dehn-Nielsen の定理です。基本群ですが、いつか絵を描いたように $2g$ 個の元で生成されます。



初回か2回目くらいにこういう絵を書きました。技術的に disk を抜いたりしますが、まずは閉じた所で考えます。base point を取って $\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_g, \beta_g$ と取ります。この $\zeta = \prod_{i=1}^g [\alpha_i, \beta_i]$ と書きましたが、commutator の g 個の積、これが自明になるという one relation group という組み合わせ群論で非常に大事な古典的な対象です。

$$\pi_1 \Sigma_g = \langle \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_g, \beta_g \mid \zeta = \prod_{i=1}^g [\alpha_i, \beta_i] \rangle.$$

このような群，非可換でなかなか難しいですね．このような群の自己同型群というのも難しいです．one relater, これはなかなか難しいので，これを忘れたものが自由群になります．曲面は忘れないで曲面上の disk を抜いた所で考えます．



そうすると rank $2g$ の自由群

$$F_{2g} = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g \rangle$$

になります．一般にランク n の自由群 F_n がありますが， $n = 2g$ になるわけです．それでですね，これは $\pi_1 \Sigma_g$ があって，この上に F_{2g} があって，これは abel 化すると両方とも同じになって，それを

$$H := H_1(\Sigma_g; \mathbb{Z})$$

と書きました．自由 abel 群で rank $2g$ です． $\alpha_1, \dots, \alpha_g$ の homology 類を $x_1, \dots, x_g$ ，そして， $\beta_1, \dots, \beta_g$ の homology 類を $y_1, \dots, y_g$ として， $x_1, \dots, x_g, y_1, \dots, y_g$ は symplectic basis というものになります．

$$\begin{array}{ccc} \pi_1 \Sigma_g & & \\ & \searrow & \\ & H := H_1(\Sigma_g; \mathbb{Z}) & \\ & \nearrow & \\ F_{2g} & & \end{array}$$

H の symplectic 基底，これは沢山あるのですが，1つ座標を決めます．これからいろいろなものを作っていくて，テンソル代数とか多項式代数とか，Lie 代数とか，いろいろあるわけです．まだ Lie 代数の事を言っていないので，まずテンソル代数．

$$\begin{aligned} T_0(H) &:= \bigoplus_{k=1}^{\infty} H^{\otimes k} \\ &= \mathbb{Z}\langle x_1, \dots, x_g, y_1, \dots, y_g \rangle / \mathbb{Z} \end{aligned}$$

0 と書いたのは定数項を除いたという意味です．こう書けますけれど，座標，この話はいろいろ命題を証明するというよりは，計算する戦略をやるという事ですから，これが $\mathbb{Z}$ 上の $2g$ 個の非可換変数 $x_1, \dots, x_g, y_1, \dots, y_g$ で生成される非可換多項式代数になります．定数項を除くので， $\mathbb{Z}$ で割る，これはそれほど深い操作ではないのですが，取ってしまうわけです．1 次から始まるわけです．別の言葉で言うと， $\mathbb{Z}$ 上 $2g$ 個の元から生成され associativity だけを許す free associative 代数になります．非可換多項式代数と言った方がおもしろそうですね．言葉だけの問題ですが．

これは $\mathbb{Z}$ 上で，数論的な応用を考えたり，トポロジーでも $\mathbb{Z}$ 上で重要だという事が，合田さん，逆井さんの仕事などありますが，計算する上では $\mathbb{Q}$ 上で考えます．foliation のときは $\mathbb{R}$ 上にします．そのとき非可換

多項式代数ですが、この中に重要な submodule, Lie element というものがあります。名前から書いておきますと、free Lie algebra generated by H over $\mathbb{Z}$.

$$T_0(H) \supset \mathcal{L}(H) = \bigoplus_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}(H)(k)$$

H で生成された自由 Lie 代数。Lie 代数というのは普通体上でやりますが、まずは $\mathbb{Z}$ 上で。これは grading のついた Lie 代数。ちょっと notation が重くなるので、grading k ,

$$\mathcal{L}(H)(k) = \mathcal{L}_g(k) = \mathcal{L}(k)$$

いま曲面から出発しているので、genus を下にかきますが、 g も取ってしまいます。だんだん weight k と言い換えていきます。

$\mathcal{L}(H)$ を帰納的に定義します。これは理論的にはちゃんとした定義があるのですが、自由 Lie 代数というのは、Lie 代数としての公理だけを満たす最大のもの。定義はあるんですが、これは計算の戦略をお話しているので、具体的に書いてしまいます。まず $\mathcal{L}(1)$ というのは H です。この元は何かというと $2g$ 個の生成元の $\mathbb{Z}$ 上の 1 次結合。

$$\mathcal{L}(1) = H \ni 2x_1 + 3y_2.$$

そして $\mathcal{L}(2)$, これは Lie 代数ですから bracket という演算があつて、ひっくり返すとマイナスになります。 H 上の線型代数を使ってなので $\Lambda^2 H$ になります。

$$\mathcal{L}(2) = \Lambda^2 H \subset H^{\otimes 2}$$

$\mathcal{L}(2)$ を $H^{\otimes 2}$ に入れるのですが、まず $[u, v] = u \wedge v$, これをテンソルと思う、どういう風にやるかということ、

$$u \wedge v = u \otimes v - v \otimes u,$$

$\frac{1}{2}$ を付けるという流儀もありますが、 $\mathbb{Z}$ 上でやるということでそれも取ってしまいます。 $\mathbb{Q}$ 上でもその方がきれいになる場合もありますが、いまは全部なくしてしまいます。 $[u, v]$ は非可換多項式としてはどうなるかというと、テンソルの記号は省略してしまつて、 $uv - vu$, これは可換化すると、これはゼロですが、全くゼロではない。これが degree 2 のところです。

degree 3 のところはどうかというと、だんだん Lie 代数が主役になってきますが、詳しくだんだん実践的になってきます。

$$\mathcal{L}(3) = H \otimes \Lambda^2 H / \Lambda^3 H \subset H^{\otimes 3}.$$

まず線型代数的に定義してしまうと、こうなんです。ね、 $H \otimes \Lambda^2 H$ の中に $\Lambda^3 H$ が入るのですが、その商空間です。具体的にはどうなるかというと、例えば $u \otimes (v \wedge w)$, これを Lie 代数と思うと、さっきは忘れましたが、 $u \wedge v$ は $[u, v]$ と書きます。 $u \otimes (v \wedge w)$ は $[u, [v, w]]$ となります。これは $H \otimes \Lambda^2 H$ でこれがどこに入るかというと $H^{\otimes 3}$ です。

$$[u, [v, w]] \mapsto u(vw - wv) - (vw - wv)u = uvw - uww - vwu + wvu$$

これは可換化するとゼロですが、ゼロではありません。開いてみると何がなんだかかわからなくなりますが、Mathematica で計算していても初めは何をやっているんだろうと思いましたが、これは可換化するともちろんゼロですが、非可換なところではゼロではありません。そして $\Lambda^3 H$ で割るんですが、これが Jacobi's identity

$$[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0$$

に対応します。これが Lie 代数の定義です。具体的には $u \wedge v \wedge w$ という元がどこにいくかという、

$$u \wedge v \wedge w \mapsto u \otimes (v \wedge w) + v \otimes (w \wedge u) + w \otimes (u \wedge v)$$

にいくわけで、これが本当にゼロかという事です。ちょっとチェックしてみましょう。こういうのはちょっと天下りというか、逆なんですけど敢えてやってみましょう。

$$\begin{aligned} u \wedge v \wedge w &\mapsto u \otimes (v \wedge w) + v \otimes (w \wedge u) + w \otimes (u \wedge v) \\ &= u(vw - wv) - (vw - wv)u + v(wu - uw) - (wu - uw)v + w(uv - vu) - (uv - vu)w \\ &= 0 \end{aligned}$$

講義をしていくときは、線型代数学でもそうですけれども、どんどん進んで、あれっと思ったときに、実際にやってみると、今日の方はちょっと別ですが、ちょっとゆっくりしたいなというときは、これできれいに消えてくれると良いんです。消えないと悲惨ですが。

具体的に書けるのはこれぐらいであって、ここから先は以下同様と書くんですが、聞いている方は以下同様かと、放っておくと実は同様ではないのですが、だまされないようにしなくてははいけません。

一般に帰納的にどう書けば良いかという

$$\mathcal{L}(k+1) = \langle [\xi, u]; \xi \in \mathcal{L}(k), u \in H \rangle,$$

$[\xi, u] = \xi u - u\xi$ 、こういうものを Lie element、あるいは Lie 多項式と言います、このようにして非可換多項式だと思うわけです。例えば Mathematica を使って計算が出来ます。昔 Mathematica にあまり詳しくないときには、8 次の多項式を手でやっていましたが、計算をだいたい間違えていました。いま考えるとそれも無駄ではありません。最初は手でやった方がよいと思います。これが Lie 代数になる。それは

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(k) \otimes \mathcal{L}(l) &\rightarrow \mathcal{L}(k+l) \\ \xi \otimes \eta &\mapsto [\xi, \eta] = \xi\eta - \eta\xi \end{aligned}$$

具体的に $[\xi, \eta]$ を非可換多項式として実現したときには、 $\xi\eta - \eta\xi$ と書くわけです。Lie 代数というものになるんですね。そして Jacobi の恒等式がなりたっています。これを H が生成する自由 Lie 代数と呼びます。これは実践上の Lie 代数、良いとは言えない導入かもしれませんが、定義とも言えない気がしますが、実は前に群の近似というものをやりました。こう定義したものが、canonical に、群の近似でやった C_k を自由群に apply したのになります。

$$\mathcal{L}(H) = \bigoplus_{k=1}^{\infty} C_k(F_{2g}).$$

一般の群 Γ に対して、今は自由群ですが、一般の group Γ に対して $C_k(\Gamma)$ とは何かというと、

$$C_k(\Gamma) = \Gamma_{k-1}(\Gamma)/\Gamma_k(\Gamma),$$

ここで $\Gamma_k(\Gamma)$ は降中心列

$$\Gamma_0(\Gamma) = \Gamma \supset \Gamma_1(\Gamma) = [\Gamma, \Gamma] \supset \Gamma_2(\Gamma) = [\Gamma, \Gamma_1] \supset, \dots,$$

といって 3 回目くらいにやりました。

これが先に有って群の研究をするのに、Lie 代数で近似するというのが 1 つの戦略です。Lie 代数の方がやさしいというか、手段があるのでそれで記述するというのが、組み合わせ群論の戦略で、これを commutator calculus と言います。これが先にあります。

それでは one relation のある閉じた曲面の基本群, これはどうなるかと言いますと, symplectic form, symplectic な基底の bracket の積を考えると

$$\omega_0 = \sum [x_i, y_i] \in \mathcal{L}_g(2) \cong \Lambda^2 H$$

に入って, symplectic 基底は無限個ありますが, こう書くただ 1 つ元が定まりました. 閉じたときにはどうなるかという古典的な Labute の定理です. 群に対して今の演算は出来るので, one relation group の $\mathcal{L}(\pi_1 \Sigma_g)$ は, Malcev completion ですが,

Theorem 5.5 (Labute).

$$\mathcal{L}(\pi_1 \Sigma_g) = \bigoplus_{k=1}^{\infty} C_k(\pi_1 \Sigma_g) \cong \mathcal{L}(H) / \langle \omega_0 \rangle$$

lower central series の誘導する graded module, これが canonical に abel 化の生成する自由 Lie 代数, modulo ω_0 の生成する ideal になります.

こういう Labute の定理があつて閉じた曲面は最終的には大事になるわけですが, Labute の定理があるのでまず自由 Lie 代数, relation がなにもないですから, computer で計算するときはやりやすい, そこで計算しておいてこの ideal で割る. これはなかなか難しいんですね. ω_0 が生成する ideal というのは, 難しいというよりは, 煩雑というか, 結構面倒なんですね. なのでこの Labute の定理は頭におきつつ自由な所で全部やる. これが究極の目標なんですが, Dehn-Nielsen の定理で

$$\mathcal{M}_g \cong \text{Out}_+ \pi_1 \Sigma_g,$$

これはなかなか難しい, inner の部分があつて, これを具体的に計算するのは難しい. そこで inner の部分を除くと, これも Dehn-Nielsen ですが,

$$\mathcal{M}_{g,*} \cong \text{Aut}_+(\pi_1 \Sigma_g) \sim \text{Der}(\mathcal{L}(\pi_1 \Sigma_g))$$

と automorphism となります. これもなかなか難しい. これは群で難しいので, これを Lie 代数で置き換えて研究しましょうと, そうするとここに出てくるのが Lie 代数の derivation $\text{Der}(\mathcal{L}(\pi_1 \Sigma_g))$ です. さっきの Labute の定理から構造の分かっている Lie 代数の derivation です.

あとちょっとだけ, derivation とは何か, これをやったら終わりにしましょう.

一般に Lie 代数 $\mathcal{G}$ があつたときに, Lie 代数, これは代数的な対象ですから, この自己同型というものはもちろんあります.

$$\text{Aut}(\mathcal{G}) = \{\varphi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}; \text{isomorphism}, \varphi([u, v]) = [\varphi(u), \varphi(v)]\}$$

$\text{Aut}(\mathcal{G})$ というのは何かというと, 無限次元を考えていますが, 有限次元を念頭に $\mathbb{Z}$ 上でやったら $\mathbb{Z}$ 上の, 体上なら線型空間としての同型であつて, 自己同型は通常の Lie 代数の構造, bracket を保つ線型同型全体です. 有限次元で考えるなら $GL(\mathcal{G})$ の部分群になります. $\mathbb{C}$ 上で有限次元だとすると Lie 群になります. これは群ですからまだ難しいんですね. 線型代数が使える Lie 代数が何になるかということ, Lie 代数の derivation というものになります. それは何かというと,

$$\text{Der}(\mathcal{G}) = \{D : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}; \text{linear}, D([u, v]) = [Du, v] + [u, Dv]\}$$

derivation とは $\mathcal{G}$ から $\mathcal{G}$ への線型写像であつて, $D([u, v]) = [Du, v] + [u, Dv]$ となるものです. 2 次を微分すると 1 次になる. 1 つ 1 つを derivation, 全体を derivation algebra と言います. derivation が 2 つ D_1, D_2 があ

ると、これは endomorphism ですから、普通の operator の括弧積というやつで合成が出来て

$$[D_1, D_2] = D_1 D_2 - D_2 D_1$$

により、 $\text{Der}(\mathcal{G})$ は Lie 代数になります。

この outer automorphism の群、これが知りたい、これが究極の目標ですが、inner で割って modulo するというのが結構難しい。そこで modulo しない、automorphism の群を考えると、そうすると群はきれいになりました。Lie 代数は derivation の Lie 代数を調べれば良い。これはまだ難しい。modulo $\langle \omega_0 \rangle$ は具体的に調べようと思うと難しい。基本群で relation を除いて、曲面から disc を除いてしまって、1 つ境界を取って、boundary 上 identity、これの π_0 ,

$$\mathcal{M}_{g,1} = \pi_0 \text{Diff}_+(\Sigma_{g,1}, \partial \Sigma_{g,1}) \cong \{\varphi \in \text{Aut}_+(F_{2g}); \varphi(\xi) = \xi\}$$

このバージョンは Dehn-Nielsen-Zieshang, 穴を開けたから自由群になって、rank $2g$ の自己同型であって ζ を保つ。

あと 1 行書いておしまいにしますが、これは群なわけですが、これの対応する Lie 代数はどうなるかと言いますと、

$$\text{Der}_{\omega_0}(\mathcal{L}(H)) = \{D \in \text{Der}(\mathcal{L}(H)); D\omega_0 = 0\}$$

ζ を保つものを微分する、 g 個の積を微分するから和に分かれる。それが丁度 ω_0 をゼロにする、 $D\omega_0 = 0$, symplectic な derivation です。これが非常に大事な Lie 代数になります。次回ここから出発します。

これが notation が非常に重いので、すみませんが、私がずっと使っている記号なので、 $\mathfrak{h}_{g,1}$ と書きます。 $g, 1$ を省略することもあります。これは $\mathbb{Z}$ 上の Lie 代数です。 $\mathbb{Q}$ にするときは右上に $\mathbb{Q}$ と書いたり、grading があるときは $\mathfrak{h}(k)$ と書いたりします。

ちょっと中途半端になりましたが、この Lie 代数を定義したところでおしまいにします。これがどう書けるか、Kontsevich が定義した formal symplectic geometry, Lie wor(1)ds, parallel に commutative wor(1)ds, associative wor(1)ds も絡み合っていきます。また最近第 4 の Lie 代数も河澄さん、久野さんの研究もあります。今日は抽象的にやりましたが、次回は具体的にやっていきます。はじめの頃はここに計算機を持って来て、などといいましたが、1 回も出てこないと思われているかもしれません。1 回くらいやりたいと思います。次回から具体的な計算をします。

会場から質問: $\mathcal{L}(T)$ は outer derivation になるのでしょうか?

outer derivation, derivation の中で inner な derivation で割ったものです。この ideal の計算は出来るんですが、ちょっと煩雑です。通常最後にしてなるべく自由な所で出来るだけやるというのが戦略です。これも本当は inner で割った outer derivation が目標ですが、最初からそれはなかなか難しいです。商というのは難しいです。だから穴を開けるときも全部忘れて、rank $2g$ の自由群としてもそれは議論があるのですが、symplectic を忘れないで、2 次元の対象です。

会場から質問: boundary が 2 つ以上あるときはどうなるのでしょうか?

境界が 2 つ以上あるとき、そこで貼り合わせるというのはそれ自身大事ですが、Lie 代数がどうなるかは私は考えた事はありません。是非考えてみてください。まず 2 個ですよね。

会場から質問: boundary を増やすと基本亜群になります。そこをどう考えるとよいのでしょうか?

数論的には boundary ではなくて puncture です。base point が 1 個ならここを取ってきますが、 k 個 boundary Dehn twists があると、本当は平等に扱わなくてははいけません。groupoid にすればよいですが、それは取り扱いが難しいですね。

記号だけですが，やるのは非可換多項式ですから，ひたすら調べていくんですね。それが全部ではないですが，1つの方法としてはそういう事です。さっき言った所に行くのは，なかなか，homology cylinder の理論の進展を待っているんですが，なかなか難しいですね。その前に数論の勉強もしておかなくては いけませんね。

第8回(1月14日)

みなさん、明けましておめでとうございます。今年もよろしくお願い致します。良い年になる事を願っています。今日は8回目です。今日でこの節は終わりにします。続きですね。Sp-modules と低次元トポロジーという事で、少し間があいているので思い出しながらやります。これはずっと書いてきてます、この講義の主役ですけれども、 Σ_g と書いたら種数 g の向き付けられた閉曲面、

$$H = H_1(\Sigma_g; \mathbb{Z})$$

と書いたらその1次元 homology 群、抽象的には rank $2g$ の自由 abel 群ですけれども、そこに intersection number というものがあって、それを

$$\mu : H \otimes H \ni u \otimes v \mapsto u \cdot v \in \mathbb{Z}$$

と書いています。 Σ_g 上に2つの homology 類があると、intersection number というものが定義できて、2つの成分に関して linear で skew symmetric、ひっくり返すとマイナス、そういうものです。表現論を使うので、数論的には、幾何学的にもトポロジーでも、 $\mathbb{Z}$ 上で全部話をしたいのですが、難しいので表現論を使う場合は、 $\mathbb{Q}$ 上、foliation を考えるときは $\mathbb{R}$ とテンソルして

$$H_{\mathbb{Q}} = H \otimes \mathbb{Q}, H_{\mathbb{R}} = H \otimes \mathbb{R},$$

それぞれ $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間、 $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間で μ がある、そう設定します。

その自己同型というものはあるのですが、 $\text{Aut}(H)$ 、ここで括弧を閉じると、自由 abel 群の自己同型なので、 $GL(2g, \mathbb{Z})$ という群になりますけれども、こういう pairing を保つとすると、

$$\text{Aut}(H, \mu) \cong Sp(2g, \mathbb{Z}),$$

少し減ります。行列に制限が付きます。これが同型になる。これは canonical ではなく、symplectic basis という μ に関して良い性質を持つ基底、

$$\{x_1, \dots, x_g, y_1, \dots, y_g\}$$

これは無限個あるのだけれども、絵を書くとそこから自然に出てきました。大分前にやりました。そういうものを1個固定すると、 $\text{Aut}(H, \mu)$ が具体的に $Sp(2g, \mathbb{Z})$ 、数論の方では非常に重要な、トポロジーでも重要な、Siegel modular 群と名前の付いた行列の群、具体的に書ける群になります。

$\mathbb{Q}$ 上でやるとすると、

$$\text{Aut}(H_{\mathbb{Q}}, \mu) \cong Sp(2g, \mathbb{Q}),$$

$Sp(2g, \mathbb{Z})$ と $Sp(2g, \mathbb{Q})$ の違いは成分が整数だけか、有理数も許すか、それだけです。 $\text{Aut}(H_{\mathbb{R}}, \mu) \cong Sp(2g, \mathbb{R})$ は実数も許します。 $\mathbb{Q}$ 上、あるいは $\mathbb{R}$ 上になると線型代数群という良い性質をもったというか、整備された理論が適用できる群になります。 $\mathbb{Q}$ 上の、あるいは $\mathbb{R}$ 上の Lie 群ですね。表現論とかそういうものが使えます。最終的には $\mathbb{Z}$ 上でやりたいのですが、それはなかなか当面は難しい。

Sp-module とそこから表現論を使って不変量を出そうとしているわけですが、まず $H_{\mathbb{Q}}$ 、これは表現論的に言うと、 $Sp(2g, \mathbb{Q})$ の元はこれは $2g$ 次の行列ですから、 $2g$ 次元の $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間に働くわけです。 $H_{\mathbb{Q}}$ は丁度 $2g$ 次元のベクトル空間で、これを fundamental representation というものです。そこからいろいろなものを持ってくるわけです。大事なものはこの話に限らず、代数、あるいはもう少し大きく言うと、数学で大事なも

のを作るというのは、まずテンソル代数 $T^*(H_{\mathbb{Q}})$ です。別な言い方をすると非可換多項式代数。こういう $2g$ 個の元 $x_1, \dots, x_g, y_1, \dots, y_g$ に関する非可換多項式の全体。具体的に書くと、直和

$$T^*(H_{\mathbb{Q}}) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} H_{\mathbb{Q}}^{\otimes k}$$

です。 $k=0$ のときは体が $\mathbb{Q}$ なら $\mathbb{Q}$, 定数です。 $k=1$ の時は丁度 H になって、 $k=2$ の時は 2 次のテンソルで以下... です。非可換多項式代数、さらに別な言葉で言うと、自由 associative 代数です。

もう少しわかりやすいものは、普通多項式代数ですけれども、表現論的にいうと symmetric algebra $S^*(H_{\mathbb{Q}})$, 直和で書くと

$$S^*(H_{\mathbb{Q}}) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} S^k H_{\mathbb{Q}}$$

です。ここで

$$T^*(H_{\mathbb{Q}}) \rightarrow S^*(H_{\mathbb{Q}})$$

は able 化です。 $T^*(H_{\mathbb{Q}})$ は全部非可換、これを可換化したら全射, abel 化です。 $T^*(H_{\mathbb{Q}})$ と $S^*(H_{\mathbb{Q}})$ の関係は able 化とも思えますし、一方では $T^*(H_{\mathbb{Q}})$ の中で各 k 次の所で k 次対称群が働くのですが、これに関して不変な元として $S^*(H_{\mathbb{Q}})$ は $T^*(H_{\mathbb{Q}})$ に埋め込む事ができます。この商かつ submodule にもなるのだけれども、かつ Sp の作用に関して各成分に対して全部 Sp -equivariant になる。これは symplectic basis を取るとどのように書けるかという、 $\mathbb{Q}$ 上の多項式代数ですから、

$$S^*(H_{\mathbb{Q}}) = \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_g, y_1, \dots, y_g]$$

こういう風に書くとコンピュータで計算するときは、なかなかよいのです。理論的には $S^*(H_{\mathbb{Q}})$ ですが、具体的に計算するときは、 $\mathbb{Q}[x_1, \dots, x_g, y_1, \dots, y_g]$ と考えます。

またもう 1 つ、この $T^*(H_{\mathbb{Q}})$ の submodule であり、あるいは商になるんだけど、Lie elements 全体のなす Lie 代数 $\mathcal{L}(H_{\mathbb{Q}})$ 。自由 Lie 代数になって、これは前回やりましたが、直和, grading というものがある、

$$\mathcal{L}(H_{\mathbb{Q}}) = \bigoplus_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}(H_{\mathbb{Q}})(k)$$

になります。notation が重くなるけれども graded Lie algebra, k は weight, degree とも言います。grade k , degree k の所を

$$\mathcal{L}(H_{\mathbb{Q}})(k)$$

こう書きます。 $H_{\mathbb{Q}}$ から構成されるこの 3 つの代数が大事です。

$$\begin{array}{c} H_{\mathbb{Q}} \\ \downarrow \\ S^*(H_{\mathbb{Q}}) \leftarrow T^*(H_{\mathbb{Q}}) \rightarrow \mathcal{L}(H_{\mathbb{Q}}) \end{array}$$

それぞれの k の所を書いておきますと、 $k=0$ のとき、 $S^0(H_{\mathbb{Q}})$ は基礎体ですから $\mathbb{Q}$. foliation なんかをやるときは $\mathbb{R}$. $T^*(H_{\mathbb{Q}})$, 非可換多項式の定数は $\mathbb{Q}$, だから等しいわけです。 $\mathcal{L}(H_{\mathbb{Q}})(0)$, ここはないわけです。

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Q} \rightarrow \{0\}$$

次に $k = 1$ のときには、全部同じです。 $T^*(H_Q)$ は非可換と言っても 1 次の所は H 、1 個しかないから可換になって、 $\mathcal{L}(H_Q)(1)$ の所も H_Q 。

$$H_Q = H_Q = H_Q$$

$k = 2$ になるとどうなるかというと、 $S^*(H_Q)$ は 2 次の多項式ですから $S^2 H_Q$ になって、 $T^*(H_Q)$ は $H_Q^{\otimes 2}$ 。 $\mathcal{L}(H_Q)$ は $\mathcal{L}(H_Q)(2)$ となります。

$$S^2 H_Q \begin{array}{c} \longleftarrow \\ \longrightarrow \end{array} H_Q^{\otimes 2} \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longleftarrow \end{array} \mathcal{L}(H_Q)(2) \cong \Lambda^2 H_Q$$

ここで

$$S^2 H_Q \leftarrow H_Q^{\otimes 2}$$

は abel 化で、また同時に

$$S^2 H_Q \hookrightarrow H_Q^{\otimes 2}$$

は submodule にもなっています。右側

$$H_Q^{\otimes 2} \hookrightarrow \mathcal{L}(H_Q)(2)$$

は submodule になっていて、

$$H_Q^{\otimes 2} \rightarrow \mathcal{L}(H_Q)(2)$$

の projection は対称群の範囲で project するというものです。 $S^2 H_Q \leftarrow H_Q^{\otimes 2}$ よりはやや人為的です。

具体的にどうなっているかというと、非可換な $u \otimes v \in H_Q^{\otimes 2}$ を取ると、 u, v は homology 類です。これは可換化すると、これを $u \cdot v$ とすると intersection number になるので、単に $uv \in S^2 H_Q$ と書きます。そうすると u と v がひっくり返せて、 $uv = vu$ 。そして $\mathcal{L}(H_Q)(2)$ は具体的には H_Q の外積代数と同型

$$\mathcal{L}(H_Q)(2) \cong \Lambda^2 H_Q$$

である事が知られています。

$u \otimes v$ はどこに行くかというと、 $[u, v] \in \mathcal{L}(H_Q)(2)$ になります。ここは $\frac{1}{2}$ を付けるか付けないか、敢えて言うとか好みですが、これは submodule

$$\mathcal{L}(H_Q)(2) \subset H_Q^{\otimes 2}$$

だという観点からすると

$$[u, v] = \frac{1}{2}(u \otimes v - v \otimes u)$$

こういうものになります、交代テンソルですね。これを通常 wedge 積 $[u, v] = u \wedge v$ と書いて、

$$H_Q^{\otimes 2} \rightarrow \Lambda^2 H_Q$$

は落つことす写像です。中に入れるものだったら $u \wedge v$ を $[u, v]$ として $u \otimes v$ に対応させます。

$$uv \leftarrow u \otimes v \mapsto [u, v] = u \wedge v$$

こういう風になるわけです。

もう 1 つ $S^2 H_Q$ が $H_Q^{\otimes 2}$ に入るのは、

$$S^2(H_Q) \ni uv \mapsto \frac{1}{2}(u \otimes v + v \otimes u) \in H_Q^{\otimes 2}$$

とこうやれば対称な元として入ります。以下... です。だんだん weight というか degree が大きくなっていくと難しくなっていきますが、ここまでは簡単です。

$$\begin{array}{ccccc} S^*(H_{\mathbb{Q}}) & \longleftarrow & T^*(H_{\mathbb{Q}}) & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{L}(H_{\mathbb{Q}}) \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ S_0(H_{\mathbb{Q}}) & \longleftarrow & T_0(H_{\mathbb{Q}}) & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{L}(H_{\mathbb{Q}}) \end{array}$$

$T^*(H_{\mathbb{Q}})$ の中に $T_0(H_{\mathbb{Q}})$ と書いたらこれは単に定数項を除くというだけの話で、

$$T_0(H_{\mathbb{Q}}) = \bigoplus_{k \geq 1} H_{\mathbb{Q}}^{\otimes k}$$

で、 $\mathcal{L}(H_{\mathbb{Q}})$ は定数項が元々なかったの、 $T_0(H_{\mathbb{Q}}) \hookrightarrow \mathcal{L}(H_{\mathbb{Q}})$ となり、abel 化の方でも、 $S_0(H_{\mathbb{Q}})$, * を付けたり付けなかったりしますが、こうなります。これは多項式代数ですが、定数多項式を除いたもの

$$S_0(H_{\mathbb{Q}}) = \bigoplus_{k \geq 1} S^k(H_{\mathbb{Q}}) = S^*(H_{\mathbb{Q}})/\mathbb{Q}$$

となっています。あるいは foliation なんかをやる場合は、定数を除いたというよりは、定数を modulo にしたと考える方が、 $S^*(H_{\mathbb{Q}})/\mathbb{Q}$, 定数 $\mathbb{Q}$ で商をとる、こう思った方が良い場合もあります。

さてこういう 3 つの algebra, 可換, 非可換な代数, そして Lie 代数, 3 つがあるんですが、それぞれに symplectic element というものがあります。大事なのでこれも何度も出て来ていますが、

$$\Lambda^2 H_{\mathbb{Q}} \ni \omega_0 = \sum_{i=1}^g x_i \wedge y_i$$

これは symplectic 基底で書くところになります。こういう元があって、大事な事は symplectic 基底は無限個あるんだけど、何をとったとしても同じ、この symplectic element は変わらない、 Sp -不変なただ 1 つの元になります。そういう symplectic 元を保つような、symplectic derivation という概念があります。derivation は微分と言いますが、微分というと通常関数の微分というのがあります。多項式代数の時は通常微分と思っていただければ良いです。普通に微分する。非可換な $T^*(H_{\mathbb{Q}})$ のとき、また Lie 代数のとき、それぞれに代数の微分というのがあります。群があったらその自己同型群というのは大事なものです。今場合は自己同型群というのがあって、その自己同型群が分かれば良いのですが、それはなかなか難しい。対応する Lie 代数、微分したもの、自己同型を微分したものを集めたものが Lie 代数です。これは積があったときに微分する $D(fg)$ というのは、積は多項式代数のときは単に多項式 2 つを掛けた多項式、テンソルのときは、テンソル積と思えば良い、Lie 代数の場合、これは bracket と思えば良い。微分というのは通常関数だと思えば、微分の特徴付け

$$D(fg) = D(f)g + fD(g)$$

これが通常微分と呼ばれるものです。通常関数の場合はみんな良く知っている Leibniz rule です。非可換多項式代数、多項式代数、Lie 代数でも同じです。積がテンソル積になるか、bracket になるか、それだけの話です。

そういうものを使って低次元トポロジーの不変量をどんどん作っていきましょうというわけです。一番左の所は前々回やった transversely symplectic foliation の不変量。symplectic 元を尊重するというのは、derivation を、symplectic, これも形容詞ですが、一言でいうと、derivation を D と書くと、

$$D\omega_0 = 0.$$

自己同型でいうと symplectic な自己同型というのは、symplectic 元を保つ、例えばいつかやった symplectic manifold の symplectomorphism というのは symplectic form という 2-form を保つ微分同相です。1 回微分しているの、derivation、保つというのは保ったままですから symplectic form を動かさないの、微分するとゼロ。3 つの worlds でゼロになります。こういう条件を入れて、こういう条件を保つ derivation 全体というのが大事になってきます。

一番左の所でいうと symplectic derivation 全体を

$$\mathrm{Der}_{\omega_0}(S^*(H_{\mathbb{R}}))$$

と書く事にすると、これは foliation で出てきましたが、前々回にやった $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0^*)$ 、この場合は $2g$ というよりは $2n$ 。 $\mathbb{R}^{2n}$ で通常の standard な symplectic form を考えた、standard な symplectic vector space 上の関数、この自己同型は symplectic form を保つもの。それを微分すると、多項式代数、多項式のベクトル場であって、symplectic で非常に大事な所は、Hamiltonian function というものがあって、ベクトル場が関数で表す事ができます。そのとき前々回やった事は、

$$\mathrm{Der}_{\omega_0}(S^*(H_{\mathbb{R}})) \cong S_0(H_{\mathbb{R}})$$

がいつでも同型になる、こういうものになり、定数項はない。 $S_0(H_{\mathbb{R}})$ は Hamiltonian function を書いたのですが、定数項がない。これを微分したものが、実際 derivation になって、多項式ベクトル場になって、定数関数は微分してゼロになるわけですから、とって構わない。この立場から言うと商で考えた方が良いでしょう。1 次関数を微分すると symplectic なベクトル場としては定数係数ベクトル場、それで 2 次の所を微分すると丁度 1 次になって、それが $\mathfrak{sp}(2g, \mathbb{R})$ になって、以下...、こうなります。そしてこれを完備化すると、多項式、具体的な計算は多項式の方がよいのですが、ベキ級数でやると理論的になります。これは Hamiltonian vector 場全体、 ham_{2n} 、こう書いたものになります。 $S_0(H_{\mathbb{R}})$ は直和ですが、 ham_{2n} は直積になっただけです。

例えばこれの cohomology はどうなるかという、Gel'fand-Kalinin-Fuchs, $n = 1$ のときでさえ難しい、もう 40 年くらい経っていますが、未解決なわけです。こういうものがあります。

会場から質問: その derivation algebra を ω の条件を外した場合というのはどうなるのですか?

ここで $\mathrm{Der}_{\omega_0}(S^*(H_{\mathbb{R}}))$ で外した場合、Hamiltonian function とかないから、ものとしては関数の方でなくて、ベクトル場の方でやった方がよいですよ。そうすると $\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_i}$ の多項式ベクトル場全体ですから、どうなるかな。 $2g$ 個のテンソルの直和、 $2g$ 個ありますから、その係数は任意になってしまいます。多項式では $2g$ 個の直和、symplectic でやると $2g$ 個あるのが 1 個になります。それが Hamiltonian function です。

それで真ん中のやつを除いて、真ん中は後でやります。 $\mathcal{L}(H_{\mathbb{Q}})$ の所が、前回やりだしたもともと写像類群の研究において出て来て、Dennis Johnson, 自由群の自己同型群で言う、Andreadakis というパイオニアの仕事をした人たち、

$$\mathrm{Der}_{\omega_0}(\mathcal{L}(H_{\mathbb{Q}})),$$

これが非常に大事なものになります。前回やった事は、これは証明したわけではありませんが、ある部分問いにしまったことですが、これが具体的にどう書けるか、symplectic な状況を書くと、

$$\mathrm{Der}_{\omega_0}(\mathcal{L}(H_{\mathbb{Q}})) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathrm{Ker}(H_{\mathbb{Q}} \otimes \mathcal{L}(H_{\mathbb{Q}})(k+1) \rightarrow \mathcal{L}(H_{\mathbb{Q}})(k+2))$$

で $\mathrm{Ker}(H_{\mathbb{Q}} \otimes \mathcal{L}(H_{\mathbb{Q}})(k+1) \rightarrow \mathcal{L}(H_{\mathbb{Q}})(k+2))$ の部分、自由 Lie 代数ですから、symplectic な条件を除いてしまうと、これは Poincaré duality を経由していますから、各 generator に対してこの $k+1$ 次の Lie element を対

応させる, 本当は $H_{\mathbb{Q}} \otimes \mathcal{L}(H_{\mathbb{Q}})(k+1)$ は $\text{Hom}(H_{\mathbb{Q}}, \mathcal{L}(H_{\mathbb{Q}})(k+1))$ と書くべきですが, Poincaré duality を経由してこうなっています. ここで symplectic を 1 回使っています. こうなりませんが, symplectic を保つという事からこの kernel に入るという条件になります. これはそんなに難しくないですけど, $g=1$ のときに実験してみると, 非常によいと思います.

この事を notation で, 前から書いているのでこう書きますが,

$$\mathfrak{h}_{g,1}^{\mathbb{Q}} := \text{Der}_{\omega_0}(\mathcal{L}(H_{\mathbb{Q}})).$$

こういう notation で, degree k の部分,

$$\mathfrak{h}_{g,1}^{\mathbb{Q}}(k) := \text{Ker}(H_{\mathbb{Q}} \otimes \mathcal{L}(H_{\mathbb{Q}})(k+1) \rightarrow \mathcal{L}(H_{\mathbb{Q}})(k+2))$$

と書きます. こういう非常に大事な Lie 代数になります. $\mathbb{Q}$ 上ですけれども, だんだん $\mathbb{Q}$ を書く事を省略しちゃうかもしれません. これが次回以降, 先延ばしにしてきた, 先延ばしにしてきたわけではないですが, もととの写像類群の研究の出発点で出てくる大事な Lie 代数です.

この Lie 代数の安定 cohomology を考えたのが Kontsevich, この人は一杯仕事がありますので, Kontsevich の定理というところの定理というくらい沢山ありますが, 論文は 92 年と 93 年の有名な 2 つの論文です. notation は, これは associative という意味ですが,

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_g &= \text{Der}_{\omega_0}(T_0(H_{\mathbb{Q}})) \\ &= \bigoplus_{k=0}^{\infty} \text{Ker}(H_{\mathbb{Q}} \otimes H_{\mathbb{Q}}^{\otimes(k+1)} \rightarrow H_{\mathbb{Q}}^{\otimes(k+2)}) \end{aligned}$$

これは定義ですが, derivation には次数というものが定義できて, Lie 代数の derivation と比較すると, 非可換多項式の derivation では, 今度は bracket ではなくて,

$$H_{\mathbb{Q}} \otimes H_{\mathbb{Q}}^{\otimes(k+1)} \ni u \otimes \xi \mapsto u \otimes \xi - \xi \otimes u \in H_{\mathbb{Q}}^{\otimes(k+2)}$$

の kernel になります. 1 番前にあったものを 1 番後ろに持って行って, これが準同型になって, Lie 代数の場合と同じように, 本当は $H_{\mathbb{Q}} \otimes H_{\mathbb{Q}}^{\otimes(k+1)}$ は $\text{Hom}(H_{\mathbb{Q}}, H_{\mathbb{Q}}^{\otimes(k+1)})$ ですが, Poincaré duality を使っています. これを $\mathfrak{a}_g(k)$ と書きます.

この Kontsevich が graph cohomology, あるいは graph homology というものを構成してみんながびっくりしました. それをちょっとご紹介します. さらに具体的には $\mathfrak{h}_{g,1}$ より $\mathfrak{a}_g$ の方が扱いやすい面があって, 結局この kernel にあるのはどういう元かといいますと, 最初にあったやつを 1 番後ろにやって変わらない, cyclic 不変になります. これから直ちに分かる事は, 自然に同型

$$\mathfrak{a}_g(k) \cong \left(H_{\mathbb{Q}}^{\otimes(k+2)} \right)^{\mathbb{Z}/(k+2)}$$

です. $k+2$ 次の cyclic 群が cyclic permutation で働きますが, それで不変, 変わらないものです.

それで Kontsevich の graph (co)homology, Kontsevich は元々 graph homology で論文を書いていますし, 理論も展開していますが, Poincaré duality というか, Lie 代数の homology, cohomology は等価ですから場合によって cohomology を考える方がよいのでこうします. これは 3 つのバージョンというか, Kontsevich 自身論文のなかにまず 3 つがあって, その次に twisting を考えると 6 種類とかいろいろバージョンはあります. 3 つ, Kontsevich 自身,

1. $\mathfrak{c}_g$, commutative, 多項式代数の微分,

2. $\mathfrak{a}_g$, associative, ここで可換性は仮定しない. associativity は通常仮定します. associativity を外すと, だんだん代数的な構造がなくなってくると, だいたい場合は全然面白くなくなってくるわけです. 天才的な idea で良くなる場合もありますが, associativity は通常仮定します. そして

3. $\mathfrak{l}_g$, lie.

これは Kontsevich の論文の中に書いてあって, 何が書いてあるのか, 最初はミスプリントかと思ったのですが, よく見るとなるほどと思いました. この 3 つの words, これは Kontsevich 自身ですが, 1 の所に括弧が入ってたんですね. 3 words, commutative, associative, lie, 最初は何を言っているかわからなかったのですが, 括弧を外すと 3 つの世界があるわけですね, それは数学的に書くと, 3 words, あまり賛成はしたくないけれども, 数学は一番, 言語学とも思えるわけで, そうすると 3 つの言語とも思えるわけです. そういう風に掛けたようです. 誤解かもしれないけれど, こんな風にミスプリをするわけがないですよ. 最近あまりみんな使ってはいませんが.

Kontsevich の定理は何かというと, この notation で, commutative $\mathfrak{c}_g$, これは違うんですね. $\mathfrak{c}_g$ と $\mathfrak{ham}_{2g}$ は違うんですね. $\mathfrak{ham}_{2g}$ はベクトル場という, 定数ベクトル場があって, $\mathfrak{c}_g \subset \mathfrak{ham}_{2g}$ と subalgebra であって, これ自身 Kontsevich の notation ですが, $\mathfrak{c}_g = \mathfrak{ham}_{2g}^0$ と書いて定数項のない subalgebra です. 正確には完備化しているから直積になっていますが, 対応しています.

Lie 代数, Kontsevich, 彼の notation はドイツ文字 $\mathfrak{l}_g$ です. これはちょっと強調したいと思いますが, この Lie 代数は Kontsevich のこの仕事以前からいろいろな所で研究されているのと, 前からの論文の流れも有りますから, $\mathfrak{h}_{g,1}$ と書かせてもらいます. ずっと後で $\mathfrak{h}$ が良いのは homology cylinder $\mathcal{H}$ と関連しているので, $\mathfrak{h}$ が丁度よいかなと.

Kontsevich はこれら 3 つの homology を計算したという意味ではなくて, Kontsevich はこの 3 つの homology を別の言葉で書いたというわけです. Kontsevich は何を計算したかと言いますと, それぞれ, いわゆる stable homology を計算しました. これらは g ごとにあるのですが, $g+1$ に入る. 曲面で言えば種数 g 境界 1 個のやつは $g+1$ で境界 1 個のやつに入る. Lie 代数でもそうなります. 技術的に写像類群の研究でも, 1 個穴をあけて無限の series を考えます.

Kontsevich の理論でもこうやっていて, closed の場合は g ごとにいろいろなものが出てくるわけですが, それはとりあえず考えない. そうすると $g = \infty$ が定義できて, この homology

$$\lim_{g \rightarrow \infty} H_*(\mathfrak{c}_g)$$

を記述しました. graph homology は $\mathfrak{c}_g, \mathfrak{a}_g, \mathfrak{h}_{g,1}$ で 3 つあるんですが, 何も言わないで graph homology と言ったら, Kontsevich 自身 $\lim_{g \rightarrow \infty} H_*(\mathfrak{c}_g)$ の事を graph homology と表します.

graph homology の定義はここではしませんが, 定義して計算できるかということ, それはなかなか難しいです. graph homology というのは簡単に言うと, 有限グラフが生成元になって, valency は trivalent 以上ですね, valency が 3, 4, 5, ... と何でも良くて, もちろん有限グラフで, それが生成する chain complex を作って, その boundary operator を考えたのが, Kontsevich の boundary operator というものです. それは結局の所, こういう $\text{Der}_\omega(S^*(H_{\mathbb{R}})) \cong S_0(H_{\mathbb{R}})$, ここにいきますから, 外積代数, symmetric で定数項を除いているから, あとから考える理由で 2 ではなく 3 から始まるんですが, $(\Lambda^* S^3 H_{\mathbb{R}} \otimes \Lambda^* S^4 H_{\mathbb{Q}})^{\otimes p} \otimes \dots$ となります. これが Lie 代数の homology は定義してないんですが, 定義からこれを計算する事になります. これ $S^3 H_{\mathbb{R}}$ が各頂点ごとに 3 本, これ $S^4 H_{\mathbb{Q}}$ は頂点ごとに 4 本, そういう graph で表される, そもそもずっと言っている Weyl の基本定理ですね. グラフで invariant tensor を表す. だから元々 graph homology は Weyl に遡るとも言えます.

boundary operator を Kontsevich が定義したという事もできます。その homology でその commutative なやつが表される。これは天才的な idea だったわけですが、言われてみると自然であって、全く新しい事が突然出て来たわけではなく、Hermann Weyl の Sp -module の Sp -不変テンソルがどう現れるかを組み合わせ的に表した。じゃあ homology は分かったかという、まったくとんでもない事で、全く分かっていないと言ってもよいくらいです。mystery です。ちょっといろいろと try をしましたけれども、次回、次次回くらいにちょっと言います。これは graph homology には weight というものがありますが、lowest weight というところがあって、そこが大概さんたちがやっている、もともとは Vassiliev の knot の finite type invariant、この場合は 3 次元多様体の finite type invariants に associate した web 図の生成する自由代数、これは大問題です。knot に対してもあります。Bar-Natan が計算していますが、生成元が何個になるかというのは大問題です。この lowest weight に、3 次元多様体の finite type invariant の generating function が現れる。これが Garoufalidis と中村さんの結果です。lowest weight ですから、もっと上の weight の高い所では homology が出ると考えられますが、これに関しては全く何の結果もないですね。mystery です。

associative の所ではどうかというと、これは Kontsevich の定理ですが、Hopf 代数とかいろいろ全部省略すると、実質的にこれは以下に書くものと全く等価であるという驚くべき定理です。

$$\lim_{g \rightarrow \infty} H_*(a_g) \approx \bigoplus_{g \geq 0, n > 0, 2g - 2 + n > 0} H^*(M_g^n)^{\mathfrak{S}_n}$$

genus g と puncture n 個の Riemann 面の moduli 空間というものがあったわけですが、puncture を permute するという事で n 次の対称群が働きますが、その cohomology で対称群の作用で不変なものに同型になります。graph homology を cohomology にすると、moduli の方は homology になります。

Riemann 面の moduli というのはちょっとだけ言いましたが、その cohomology は、まずは代数幾何で非常に重要ですが、低次元の特殊性でトポロジーでも重要です。その cohomology, hyperbolic という条件を入れなくては行けないので、 $2g - 2 + n > 0$. puncture は少なくとも 1 つなくては行けないので $n > 0$. こういう驚くべき結果です。この Riemann 面の moduli の cohomology は永遠に決定されるという事はありません。多分ほとんど不可能です。それを全部集めたもの、これはとてつもないものですが、それがこういうものと同型になります。これが大事な所です。

その証明は 3,4 行で書いてあってどうにもならないのですが、幸いなことに、Conant-Vogtmann, 1990 年代後半突然 Vogtmann という人とメールの交換を始めて、それから交流をするようになりました。その後 Conant さんともやりとりするようになりました。

この 2 人が Kontsevich の 3 つの wor(l)ds を、cyclic な operad という理論があって、最近 operad というのがあちこち出てきますが、元々は loop space の homology をいろいろ計算した J. P. May や Adams、具体的には May が創めた理論です。それが quantum algebra とか代数幾何とか、categorical な道具立てを作ろうという流れがあるわけですが、そこで大事な概念であるという事がどんどん認識されて operad の理論が復活したわけです。J. P. May はシカゴの人ですが喜んでいる、直接聞いたわけでは有りませんが、喜んでいるというか当然だと思っているかもしれません。やっと operad の事がわかったのかという感じかもしれません。

cyclic というのはきれいな条件、今の話の流れからいうと、こういう symplectic 元を保つという所から、自然に出てくる cyclicity、数行の証明が、Conant-Vogtmann によって完璧な証明になってますから、若い人が勉強するときはこちらを見るとよいと思います。この論文は AGT の 2003 に出ています。

最初の頃は、私は Lie 代数の homology は知らないんだけど、outer space と graph の moduli 空間の homology に関係があるよだということからメールが来たんですが、そうなのかと思っていたのですが、あれよあれよという間に自分のものにされて、今では知らないどころかものすごく知っている、専門家の一人です。私も非

常に学ぶ所がありました。私よりは若いですが、establish した人が新しいものを勉強する意欲というものは学
ぶべきものです。

それじゃあこれは終わったかというところ、1つのアプローチとしてはここ $\lim_{g \rightarrow \infty} H_*(\alpha_g) \approx \bigoplus_{g,n, 2g-2+n>0} H^*(\mathbb{M}_g^n)^{\otimes n}$ を調べる事によって元を見つけようというわけです。私はちょっとだけ genus 1 の時に左辺の新しい元をいくつか作って、その結果を arXiv に出して2週間くらいしたら、Conant さんからメールが来て、あなたの作った元達は moduli 上のこういう cycle に対応することが証明できました、次を作ったらすぐ知らせて下さいと言ってきました。いま逆井さん、鈴木さんといろいろ try していますが、なかなか手強い相手です。なかなか手強くて、もうちょっとしたら言えるかもしれません。

会場から質問：それは Sp -不変な part を取らなくて良いのでしょうか？

これは α_g^+ にするとそうですが、degree 0 part を入れている α_g のときは Sp -不変 part を取る必要はありません。

次に I_g について、これもまた Kontsevich の定理ですが、graph cohomology、これが等価であることの Vogtmann さん、もともと geometric topology の大家で、一番有名な論文は Culler、この人は3次元の大家ですが、この人との共著で、1986年に Inventiones に出ました。いわゆる graph の moduli 空間を構成した論文です。一言でいうと、graph の moduli 空間というのは、Teichmüller 空間、Riemann 面の moduli 空間というものがあるけれど、写像類群の所を自由群の外部自己同型群で置き換えたものです。Teichmüller 空間は1937年ですから、graph の moduli 空間は50年後に登場したわけです。outer space は登場して20年ちょっとしか経っていないわけですが、最近その Teichmüller 空間、と outer space、あるいは Riemann 面の moduli と graph の moduli の対比、似た点と違う点の研究がますます重要になっています。その outer space というものが有るわけです。これは Kontsevich の定理で、rank $n > 1$, $n = 1$ のときは abel 群ですから例外にして、群で言う rank n の自由群の外部自己同型群の rational cohomology、

$$\lim_{g \rightarrow \infty} H_*(h_{g,1}) \cong \bigoplus_{n \geq 2} H^*(OutF_n; \mathbb{Q})$$

と等価である。graph の moduli 空間 $\mathbb{G}_n$ でいうと、mapping class group の rational cohomology は Riemann moduli の rational cohomology と同型ですが、

$$\lim_{g \rightarrow \infty} H_*(h_{g,1}) \cong \bigoplus_{n \geq 2} H^*(\mathbb{G}_n; \mathbb{Q})$$

これが等価である。これが Kontsevich の定理です。

私は1992,3年に Kontsevich の論文が有る事は知っていましたが、こんなに重要なものだという事は分かりませんでした。1つは証明が数行ではどうにもなりません。ある事は知っていて勉強しませんでした。あるとき、95,6年頃に graph の moduli, $OutF_n$ の cohomology、これについて Hatcher-Vogtmann の論文があって、rational homology を $n \leq 6$ 以下で全部決定したという論文です。その中に1個だけ自明でないものがあった。 $H^4(OutF_4; \mathbb{Q})$ 、それが rank 1 という論文があったんですね。これとじゃあ Kontsevich のやつをちょっと思い出して、さっきから言ってますが、Lie 代数はずっと研究して来たものなので、これと Hatcher-Vogtmann、どう関係するかなと思ったら、実は非常に密接に関係したわけです。その後の話はそれも次次回くらいにお話ししましょう。Conant, Vogtmann さんたちといろいろ交流した上で最近2010年、まだアナウンスだけですが、ちょっとびっくりするような事もありました。いろいろと流れがあるわけです。

Kontsevich の定理に戻ると、理論的に非常に美しい。まるで関係ないものが同型になるという定理です。具体的に使うとなると行ったり来たりすることができる、左辺で何か分かったら右辺の情報が得られる、右辺で

分かったら左辺に行く。そういう戦略です。今は若い人たちと共同でやっています。これもなかなか難しいですが、非常におもしろい。

これは全部 g が無限大、stable homology というものです。じゃあ unstable にはどうなるか、これは Kontsevich は何も言っていないが、言わないと片手落ちになります。unstable の場合、commutative の所は Gel'fand-Kalinin-Fuchs 理論、但し Hamiltonian な場合ですね。ただ n が 1 の時でさえこれはわからない。この unstable な homology と stable な homology はどうなるかというのは、なかなか難しいのですが、さっきの 3 次元多様体の finite type invariant との関係もあって 2 年くらい前に鈴木さんに頼んで計算してもらった事があります。lowest weight に 3 次元多様体の finite type invariant が出てくるわけですが、そうではない graph homology で trivalent でない cycle がきつとあるに違いないと思って、Euler 数の generating function を高知での研究集会で会ったとき一晩計算してもらいました。一晩経ってどうでしたかと聞くと、止まってしまいましたと。もの凄い計算になって未だにわかりません。これはだから大問題です。unstable homology と stable homology の関係は、 $n = 1$ のときでさえ、 $n = 1$ は plane 上のベクトル場の話ですが、さらに $\mathbb{R}$ 上でさえまだまだわからない事が沢山あります。unstable では分からない事が沢山ある、というか、ほとんど独立なのかもしれない。

associative の所では unstable homology がどういう意味があるか、全く分かりません。

lie の所では、さっきからこれは何回か言っているように、ずっと写像類群の仕事をして来て、特に河澄さんと共同でやった仕事で

$$H^*(\mathfrak{h}_{g,1}^{\mathbb{Q}})_{\text{lowest weight}} \rightarrow R^*(\mathbb{M}_g) \subset H^*(\mathbb{M}_g)$$

graph cohomology の lowest weight part から Riemann moduli の cohomology に準同型写像があるわけですが、その像が tautological algebra になり、そこに全射があります。これで終わったかという、ここにも問題が沢山あります。tautological algebra の構造に関して Faber 予想というものがあるわけですが、Faber 自身を初めいろいろな人の仕事があり、Faber-Zagier conjecture というか、Faber と Zagier がある relations の系列を予想していました。これはごく最近 Pandharipande と Pixton により具体的に証明されました。Faber 予想、これがどういうものかという事は具体的には言っていないですが、 $g = 24$ のときにどうなるかというのがいま大問題です。それも私は topology の立場から try しようとしています、なかなか難しい問題です。これは unstable です。

真ん中の associative の部分、この unstable は分かっていますが、意味が分かったら面白いと思います。河澄さんの名前が出た所で stable な方の α_g と c_g との関係でいうと河澄さん、久野さんが展開している $\alpha_g^- \supset \alpha_g$ という、 α_g を含む大きいもの、さっきの Hamiltonian でいうと、定数ベクトル場を入れたもの、これは Goldman Lie algebra との関係で活発に研究されています。 α_g と α_g^- の関係というのが、 ham_{2n} と c_g の関係は、幾何学的には ham_{2n} は transversely symplectic foliation の特性類で、 c_g は松元さん三松さんたちも C^∞ -foliation で展開している leaf cohomology の symplectic 版で、私は Kotschick さんと研究を続けていますが、三上さんも面白い計算結果を沢山持っておられます。 $\alpha_g^- \supset \alpha_g$ はどうかというと、 α_g は conceptual にいうと、Riemann 面の moduli 空間の cohomology、 α_g^- はどうなるか。非常におもしろい問題だと思います。それはともかく stable, unstable, それぞれに沢山の問題があるわけです。これが graph cohomology です。

さて今日でこの節はもう終わると言いましたが、もうちょっとだけ、 $\mathfrak{h}_{g,1}$ という Lie 代数がなぜ出てくるかをだんだん具体的にやります。base point 付きの写像類群 $\mathcal{M}_{g,*} = \text{Diff}_+(\Sigma_g, *) / \simeq$ 、これを研究しているわけですが、これがなかなか難しいわけです。この Lie 代数バージョンで考えたものが Dennis Johnson の仕事で、 $\mathfrak{h}_{g,1}$ になりまして、

$$\tau : \mathcal{M}_{g,*} \dashrightarrow \mathfrak{h}_{g,1}$$

この間には Johnson homomorphism τ というものがあり、活発に研究、発展中です。Johnson 準同型は filtration を入れていろいろやらなくては行けませんので、ここでは $--->$ で書いておきます。

どうなったかという、例えば有限次元 Lie 群 G に対して Lie 代数 $\mathcal{G}$ というものがある、2 つはもちろん密接に関係しています。cohomology でいうと、 $\mathcal{G}$ の cohomology は G に associate した等質空間、あるいは locally homogeneous space の cohomology と関係して、非常に重要なわけです。密接に関係がある。無限次元ですけれども、このアナロジーを追究しているというのが、モチベーションというか戦略です。ある意味で $\mathfrak{h}_{g,1}$ は忠実に $\mathcal{M}_{g,*}$ を反映していると初めのうちは予想されたわけです。結論から言うと、結論と言っても全部分かったわけではないですが、この Lie 代数は大きすぎた、近似してと思ったのですが、近似している部分もあるのだけれども、大きすぎて別なものが入っている。Johnson 準同型 τ の, Cokerr の意味はどうなるか、全射だったら良かったのですが、大きすぎた。だから Cokerr の意味、それがだんだん知りたくなって来たわけです。

今までに登場したのは全く異なる 2 つの世界から Cokerr の意味として出て来た、最初に出て来たのが数論から $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ です。Grothendieck, Drinfeld, 伊原先生, Deligne, こういう方たちの大きな理論があって、具体的には織田予想というのがあって、Cokerr の中に絶対ガロア群が現れる事を織田さんが予想し、1994 年に中村さん、松本さんが証明しました。具体的には $\mathfrak{h}_{g,1}$ は $\mathbb{Z}$ 上の Lie 代数ですが、 l という素数を取るごとに l 進数 $\mathbb{Z}_l$ をテンソルして $\mathfrak{h}_{g,1} \otimes \mathbb{Z}_l$ で現れる事を証明しました。そうすると問題が出て来て、 $\mathfrak{h}_{g,1}$ は weight が小さい所では表現論を使ってテンソルの形で具体的に見られるわけですが、じゃあどこに現れるのか、数論の人たちは具体的には Cokerr の Sp -不変部分に出てくる、そういう事を証明しました。 Sp -不変 part というのはこの話で表現論で何度も出てきました、Kontsevich の graph homology もそうですが、十分沢山手段があるわけです。それを使って identify しましょう、という大問題ができました。1994 年頃に証明されて少し経ったころ、箱根の研究会があったときに、横浜で東海道線に乗った途端に、そのときは本当かなと思ったんですが、こうやれば（以前発見していた “trace” というものを使って）書けるかもしれないと思ったのです。それからもう 15 年も経って日夜というわけにはいきませんが、ときどきやっています。数論ですから、私は理解できない所もあって、会う度に、中村さん、松本さん、Hain さんに議論というか、教えてもらっていますが、なかなか難しいです。最近 $g=1$ の所でやると、もうちょっと進むのではないかとと思っています。

2 番目、これは私よりはここで合田さん、逆井さん、に具体的に聞いてもらった方がよいと思いますが、そもそものは Habiro 理論、そして Goussarov 理論、全く独立にそれぞれの理論が 90 年代の後半にあって、Goussarov は残念ながら亡くなってしまいました。写像類群の立場からいうと Garoufalidis-Levine です、特に Levine が 2 人の理論を使ってある群を作りました。多分 Levine の命名だと思いますが、写像類群が部分群になるので、拡大する群、enlarged mapping class group と言って、この notation は定まっているわけではないのですが、homology cylinder $\mathcal{H}_{g,1}$ 、最近はこの定着してきています。そもそも葉廣さんは、homology cylinder ではなく homology cobordism と言いました。 $\mathcal{H}_{g,1}$ 、この中に写像類群が入る、これをいままでずっとこれを研究してきたわけですが、これを拡張してしかも重要な群がありますよというのが、Habiro, Goussarov の理論です。

この流れは 10 年くらい、どんどん研究されていて、逆井さんが例えば、この群の Magnus 表現を研究しています。そして具体的に knot や 3 次元多様体に適用する仕事は合田さんと逆井さんの仕事、特に最近 Cha-Friedl-Kim の仕事、これは一言でいうと $\mathcal{H}_{g,1}$ の abel 化に split する 2-torsion が無限個あるという事です。これまでの戦略がちょっと楽観的すぎたというか、ある部分つぶれたのですが、証明したのは、 $\mathcal{H}_{g,1} \rightarrow (\mathbb{Z}/2)^\infty$ という split surjection があるということ、2 というのは topology では非常に歴史的にも重要なのですが、沢山証明をしています、逆井さんの理論を使って、それと密接に関係しています。

2-torsion というのはちょっと話が飛びますが、4 次元多様体で topological manifold と smooth manifold の差

というのは大問題ですが、もう一つ大問題があります。松本亮生さんと Galewski-Stern の結果ですね、任意の位相多様体が三角形分割できるか、Rohlin 不変量, Rohlin 準同型が split するか、による homology cobordism group の 2-torsion の存在と密接に関係しています。その問題は $\mathcal{H}_{g,1}$ の 2-torsion と関係して、この 2-torsion が 4 次元多様体にどう影響を与えるかは、大問題だと思います。

torsion はちょっと難しいのでそのままにして、mapping class group があって、それを拡大する $\mathcal{H}_{g,1}$ があって、 $\mathcal{M}_{g,1} \hookrightarrow \mathcal{H}_{g,1}$ があります。too big である事がわかった Lie 代数 $\mathfrak{h}_{g,1}$ ですが、結論的にいうと、 $\mathfrak{h}_{g,1}$ は $\mathcal{H}_{g,1}$ に丁度マッチします。Garoufalidis-Levine, Habegger の独立の仕事です。これはちょっと曖昧な言い方ですが、 $\mathcal{H}_{g,1}$ に filtration を入れて、graded module を考えると全射になるという驚くべき結果です。

これは 3 次元多様体、大袈裟にいうと Poincaré 予想、Poincaré は homology 3-球面は S^3 ではないかと初めちょっとだけ考えたわけですが、すぐに彼自身が、homology 3-球面を発見して、そうではない事を示しました。3 次元多様体論はどんどん発展して、homology 3-球面はもの凄く沢山あるわけです。ほとんど全てというところとちょっと語弊がありますが、特に hyperbolic manifold, Thurston の geometrization という哲学があるのですが、その一番構造が豊富で昔はそんな所に、homology 3-球面があるとは誰も夢にも思わなかった所に homology 3-球面でなおかつ hyperbolic structure が入るという、とんでもない事が起こっていて、さらに Thurston の予想というのは、hyperbolic manifold は適当な有限 cover を取れば S^1 上の曲面束に必ずなるというものです。歴史というのは、後からの後知恵ですけども、もの凄い事が起こるわけですね。だんだん勉強していくとそれも当たり前になっていって、何を話しているのかわからなくなりましたが、若い人の勉強の仕方ですが、完成した理論をきれいなものとしてみるだけではなくて、それまでの常識を覆す形でどうきれいになったかをみるという事は大事です。さっきの Vogtmann さんの話ではないですが、それは年とは関係ないですね。

それで Poincaré が今いたらびっくりすると思われるくらい、homology 3-球面は沢山あったんですが、この拡張 $\mathcal{M}_{g,1} \hookrightarrow \mathcal{H}_{g,1}$ というのは、簡単にいうと、 $\mathcal{M}_{g,1}$ を S^3 だとすると、 $\mathcal{H}_{g,1}$ は homology 3-球面を入れたという事です。そのおかげで全射

$$\mathcal{H}_{g,1} \twoheadrightarrow \mathfrak{h}_{g,1}$$

になります。全射があるというのは、 $\Theta_{\mathbb{Z}}^3$ の分、これは homology 3-球面の微分同相類を homology cobordism で割った群が出てきます。割ってなおかつ無限 rank というのが古田さんと Fintushel-Stern の大定理です。これがこの差に現れるわけです。

$$\mathcal{H}_{g,1} \twoheadrightarrow \mathfrak{h}_{g,1}$$

は全射で同型が期待されるのですが、全然同型とはほど遠く、これがおもしろい。 $\mathcal{H}_{g,1}$ はいわば monodromy 群ですから、写像類群では monodromy が全て決定していましたが、ここに来ると monodromy では足りなくて kernel が出てきます。それがその簡単に言うと、homology 3-球面 $\Theta_{\mathbb{Z}}^3$ とか knot concordance group, topological category と C^∞ -category と 2 つありますが、 $C^{\text{top},3}$, とか $C^{C^\infty,3}$, こういうのが kernel にあるというのが Garoufalidis-Levine の仕事です。Levine も残念な事に数年前に亡くなりました。この人は一般次元、高次元の knot を研究した人です。最近では Cochran-Orr-Teichner, そして若い人という、S. Harvey. filtration を入れて、graded module は全部無限 rank ということが分かっています。

さっきの $\mathfrak{h}_{g,1}$, これも Levine がやったのですが、これはこの話ではあまりしませんが、associative と lie を graph で表すと、associative spider と lie spider, これは trivalent graph, spider はクモですね。Conant-Vogtmann に書いてありますが、20 年くらい前からあります。graph ですが、テンソルで計算するというのはコンピュータでは良いのですが、両方方を合わせてやるというのがよいわけです。それで、ここに戻りまして、 $\mathbb{Z}$

上で $\mathfrak{h}_{g,1}$ という Lie 代数が定義できて、それを graph 的に Levine もやりだしました。

Q 上では lie spider で書けるというのは誰の仕事でしょうか。Levine よりは前だと思いますが、15 年くらい前でしょうか。Conant, Conant-Vogtmann の Conant ですね。

$\mathbb{Z}$ 上にすると、Levine が最初思い違いしてたというか、erratum に書いてあって、2 というのが、ちょっと違う。Lie 代数にならないんですね。その Lie 代数が topology にとって非常に重要なもので、また具体的に計算できるものです。

この kernel の中に $C^{\text{top},3}, C^{C^\infty,3}$ が現れる。topological category と C^∞ -category で大分違うのだけれども、その差がこの Lie 代数 $\mathfrak{h}_{g,1}$ の構造、あるいは abel 化、前にやった仕事で abel 化を与えると予想していたのですが、Conant-Kassabov-Vogtmann の仕事とかあって、そうではなくて、どんどん発展していて目まぐるしい気がします。 $\mathfrak{h}_{g,1}$ の abel 化が与えられると、そこから cohomology が一杯定義できます。それが $\mathcal{M}_{g,1}$ に行くかどうかというのが、さっき言った河澄さんとの仕事で理論的には分かりました。じゃあこれ

$$\mathcal{H}_{g,1} \rightarrow \mathfrak{h}_{g,1}$$

が全射ですから、cohomology はこの群の構造を反映すると思われます。さらに kernel にこういうものたちがあったとすると、実は中心に入っていて、中心を選ぼうとすると、中心で割った群の中心拡大、一番最初にやったそもそもの Gauß というか、Euler、曲面の Euler 数、曲面上の S^1 -bundle を見ると、種数を見ると 0 と 1 と 2 以上で曲面の曲がり方が全然違う。1 はねじれない、0 と 2 以上でねじれ方が反対になっている。Euler 類というのは群の言葉でいうと、曲面の unit circle bundle、その基本群には fiber に対応する $\mathbb{Z}$ が center として入っていて、それがどう入っているか、ねじれ具合、Euler 類ですね。それをそのまま $\mathcal{H}_{g,1} \rightarrow \mathfrak{h}_{g,1}$ で、 S^1 -bundle、この kernel は無限 rank ですから曲面よりは複雑ですが、無限 rank のもので、割るとわかったというか、具体的に計算できるものになります。cohomology を pullback すると、center で割ったもので定義されているものが、center を入れた所でゼロになるかどうか、これはねじれ具合を表すと考えられます。ここで Freedman、homology 3-球面は smooth では無限 rank ですが、Freedman の定理で任意の homology 3-球面が topological には contractible な 4-manifold を bound しますから、topological でやると自明な群になります。ここから出て来た 2 次元 cohomology でつかまるだろうというのが、戦略です。center が topological category では自明になります。cohomology の定義は純粹に topological。だから予想は topological category では消えない、だけど smooth category では消える。それが丁度 3 次元 homology 球面の群が自明なのか、無限 rank かに対応しているだろうと思います。これはなんとというか数学ですから、証明しないと何の意味もないですね。今は単に夢を語っているという事でしょうか。

$\mathcal{M}_{g,1}$ は perfect ですから、この $\mathcal{H}_{g,1}$ も perfect だったらなかなかよかったのですが、そうではないというのが Cha-Fridl-Kim の結果です。ただ幸いにこの群の abel 化のランクはゼロであろう？という予想あるいは期待が否定されてしまうところには来ていません。torsion というのは何倍かすると自明になりますので戦略を変えなければならない段階にはありません。

これでこの節は終わりにします。次の節で具体的に計算をやります。日々 arXiv を見ているとびっくりする結果が沢山出ていますので、日々更新が必要です。きょうの話も先週や先々週の preprint に多少影響されています。

6 mapping class group の近似

それでは第9回目、この講義は10回で終わりにになります。今日から新しい章です。mapping class group に戻ります。多少一般論を3回くらい、表現論の使い方、 Sp -不変テンソルと低次元トポロジーをやりました。元に戻って、そもそもの研究の発端であった mapping class group の近似の話に戻ります。写像類群というのが出て、大分時間が経っているので定義を思い出しながやります。

写像類群, mapping class group とは、向き付けられた閉曲面 Σ_g の向きを保つ微分同相を isotopy で割ったものです。微分同相の群の連結成分のなす群です。これの構造を調べようというのがそもそもの研究です。これは homology 群 H への作用を通して、symplectic basis を固定すると、 $Sp(2g, \mathbb{Z})$ へ全射があつて、

$$\mathcal{M}_g = \pi_0 \text{Diff}_+ \Sigma_g \rightarrow Sp(2g, \mathbb{Z})$$

種数1のときは同型で、 $g=1$ のときは $Sp(2, \mathbb{Z})$ は $SL(2, \mathbb{Z})$ と良く知られた群と同型。種数が2以上のときは全射なわけですが、kernel が出て来てそれを Torelli 群 $\mathcal{I}_g$ と呼びました。

$$1 \rightarrow \mathcal{I}_g \rightarrow \mathcal{M}_g \rightarrow Sp(2g, \mathbb{Z})$$

これを調べようという話に戻ります。戻るといふか、今までの一般論を適用して、どういう事が知られていて、これからどういう事を目標としているかをお話します。

$\mathcal{M}_g$, これが究極の目標。写像類群の研究に取ってはその構造、あるいは幾何学的には Riemann 面の moduli 空間と呼ばれる空間ですね、曲面 Σ_g を fiber とする fiber bundle の分類空間 $B\text{Diff}_+(\Sigma_g)$ のトポロジー、特に homology, cohomology が知りたい。

だけど技術的な理由で Σ_g 上に基点 $*$ を取って、向きと base point を保つ微分同相のイソトピー類全体

$$\mathcal{M}_{g,*} = \pi_0 \text{Diff}_+(\Sigma_g, *)$$

を考えます。まずはこれを調べる方が便利で、これはちょっと大きくなります。

$$\mathcal{M}_{g,*} \twoheadrightarrow \mathcal{M}_g$$

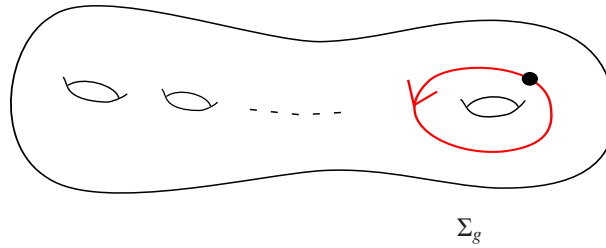
同じように $Sp(2g, \mathbb{Z})$ に全射があつて

$$1 \rightarrow \mathcal{I}_{g,*} \rightarrow \mathcal{M}_{g,*} \rightarrow Sp(2g, \mathbb{Z}) \rightarrow 1$$

これも Torelli 群と言いますが、base point を考えたときの kernel として $\mathcal{I}_{g,*}$ が出てきます。全射

$$\mathcal{I}_{g,*} \twoheadrightarrow \mathcal{I}_g$$

が存在して、この差というのは曲面の基本群 $\pi_1 \Sigma_g$ がここに出てきます。これが出てくるのは g が2以上の時です。 $g=1$ の時は $\mathcal{I}_{1,*}, \mathcal{I}_1$, 両方とも自明になって kernel はありません。 g が2以上のときは全射になって kernel が基本群 $\pi_1(\Sigma_g, *)$ になる。基本群がどうしてこの部分群と思えるかと言いますと、種数 g の曲面 Σ_g とその上に base point $*$ があると、基本群の元があつたときに、微分同相として働く、その isotopy 類ですが、



こういう基本群の元を考えます。これをどう写像類群の元だと思うかというのですね、柔軟な材料で出来た曲面だと思って*をつまんで引っ張って行って元に戻す、これにつられて曲面の微分同相が定義されます。これは isotopy を定義しているようなものですから、identity に isotope で $\mathcal{M}_g$ では自明になりますが、base point はどんどん動いていますから、base point を保った isotopy では同じにならないで $\mathcal{M}_{g,*}$ では自明になりません。戻ったら base point を保ってますが、途中は動いてしまっていますから、 $\mathcal{M}_{g,*}$ の外に出てしまっています。これから基本群 $\pi_1(\Sigma_g, *)$ が base point を保つ写像類群 $\mathcal{M}_{g,*}$ に入る事がわかります。それが基本群の元がここに入るという事です。これは Dehn twist で書けますが、それは今ここでは省略します。

曲面の基本群はある程度分かっている、表示は完全に分かっています。全て分かったかというところではないのですが、 $\mathcal{M}_g$ に比べれば分かっています。

$$I_{g,*} \twoheadrightarrow I_g$$

の差は分かったものという事で、 $I_{g,*}$ を調べたい。あるいは I_g を調べたいのだけれども、技術的な理由で $I_{g,*}$ と $\pi_1(\Sigma_g, *)$ を研究するというわけです。

その元になっているのが Dehn-Nielsen の定理です。これも大分前にやりましたが、思い出しておきます。

Theorem [Dehn-Nielsen]

$$\mathcal{M}_g \cong \text{Out}_+ \pi_1 \Sigma_g$$

写像類群を知りたいのですが、これが自然に基本群の向きを保つ外部自己同型全体の群に同型になります。純代数的にというか群論的にというか、outer automorphism というものが有るのですが、向きを保つ、これは幾何学的な概念ですが、代数的にも考える事が出来て、同型になります。ここで Out 、外部自己同型というのは、群 Γ があると自己同型群 $\text{Aut } \Gamma$ というものがあり、さらに内部自己同型群 $\text{Inn } \Gamma$ 、その群の元で共役を取る、内部自己同型というものが有ります。自己同型の特別なもの、自己同型の立場からするとあまり面白くないものです。これを割ったものを外部自己同型

$$\text{Out } \Gamma = \text{Aut } \Gamma / \text{Inn } \Gamma$$

と言って、曲面の基本群の場合にこれは写像類群と自然に同型になるというのが、Dehn-Nielsen の定理です。これを手がかりに $\mathcal{M}_g$ を純粋に群論的に、表示の分かった群の外部自己同型群として調べる事ができます。但し Out は Inn で割っているので多少技術的に難しくなります。そこでそれがないものが $\mathcal{M}_{g,*}$ 、ないバージョンでやると Out が取れて Aut になって

$$\mathcal{M}_{g,*} \cong \text{Aut}_+ \pi_1(\Sigma_g, *)$$

となり、こういう分かった群の自己同型群と同型になる。これを基に代数的に研究していこうというわけです。

この証明はちょっとだけいいですが、Dehn-Nielsen, Nielsen は 1920 年代から 40 年代、Dehn はやや遅れて 1930 年代に活躍して組み合わせ群論の創始者という事ができます。どうやって証明したかと言うと、今流に言うとなんにも難しくはありません。7,80 年経ってますから、当時どうやったかという、 $\pi_1 \Sigma_g$ は表示が簡単な群ですから、自己同型群 $\text{Aut}_+ \pi_1 \Sigma_g$ の生成元を調べます。自由群の自己同型群の場合、Nielsen generators とか、Dehn, Magnus たちが研究して、どういう元が生成するか、それを研究しました。まずどういう元が生成するかを研究して、 M_g から $\text{Out}_+ \pi_1(\Sigma_g, *)$ へは自然な準同型が存在します。曲面の微分同相写像があると基本群の間の写像を誘導します。 M_g は base point preserving ではないから自己同型は誘導しなくて、外部自己同型しか誘導しない。こちら $M_{g,*}$ は基本群との相性は良くてそのまま基本群の自己同型を誘導します。生成元が有ったらず全射であることはそれらの生成元を具体的な微分同相として実現する。当時は位相同型とか微分同相とか今みたいには完全にはないわけですね。位相同型というのは Hausdorff とか、general topology もその辺の時代ですから、こちら辺は文献を見たわけではないですが、今流にいうともっときれいな自己同型、もちろん Dehn ですから、Dehn twist というものは知っている、知っているというか、彼が見つけたわけです。とにかく幾何学的な自己同型で実現できる事を各 generator に対して証明します。そうすると全射になります。

単射の方がもっと難しいです。2 つの幾何学的な自己同型があつて、基本群に基本的に同じ作用するなら 2 つは互いに isotope という事を証明します。isotopy というのも当時あまり確立した概念ではありません。homotopy とか isotopy というのは微妙に違うわけですが、当時は isotopy というより homotopy でやっていたかもしれません。この辺りちょっと微妙で写像類群の定義は微分同相 modulo isotopy ですが、当時は微分同相 modulo homotopy にするような context もあったと思います。現在はその 2 つの写像類群の定義は同値である事が知られています。それは曲面の特殊性からそうなるわけで、多様体の次元が上がってくると、多様体を modulo isotopy で分類するのと、modulo homotopy で分類するのではどんどん違ってきます。それ自身が研究対象です。いずれにしてもこうして証明されました。これを基に写像類群を代数的に研究する手段が出て来たわけです。第 1 回に書いたと思いますが、基本群の表示を念のため書いておきますと、

$$\pi_1 \Sigma_g = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g; \zeta = \prod_{i=1}^g [\alpha_i, \beta_i] \rangle$$

これは簡単な $2g$ 個の生成元があつて、 ζ と書いた relation が 1 個。こういう表示を持つわけです。この群の自己同型群は簡単に思えるかもしれませんが、これが非常に難しいわけです。relation がないというのは自由群、rank $2g$ の自由群ですが、自由群だと自己同型群はあつと言う間に分かるかというとなんでもない話で、いまでも分からない事が沢山あります。そういうものです。だから $\text{Aut } \pi_1 \Sigma_g$ と書いたら代数的にすぐ分かるかという、1 つ手段を与えるけれども、これ自身研究対象なわけです。

それで大分前に出てきましたが、群の近似ということをやったわけです。これを一般の群 Γ に対してそれを近似する、Mal'cev completion というものでした。一般の群で以前にやりましたが、復習ですが、今からの話は曲面の基本群として聞いて下さい。群をまず近似する、考えたいのは自己同型ですけれども、群を近似します。写像類群の近似の前にそもそもの基本群の近似を与えます。これはまだ復習です。 g が 2 以上、 g が 1 だと基本群は rank 2 の自由 abel 群になるので、それは易しい、abel 群の自己同型群というのは易しい。行列で書けますから。 g が 2 以上になると非可換群になるので、非可換群というのはなかなか難しい。さらに曲面の基本群は hyperbolic group という非可換の極みのような群になっているわけです。ここで可換なもので近似していいというのが、Mal'cev completion でした。

一般の群でできるのですが、第 1 近似というのは何かというと、 Γ から Γ の abel 化、

$$\Gamma \rightarrow \Gamma^{ab} = \Gamma/[\Gamma, \Gamma]$$

でした。曲面の基本群の場合は $H = H_1(\Sigma_g; \mathbb{Z})$. rank $2g$ の自由 abel 群で、これの自己同型はもう分かっています、 $GL(2g, \mathbb{Z})$. これが第 1 近似です。

第 2 近似、ここが今回と次回で、具体的な結果を紹介して、それをどのように一般化して、いままで言ってきた 4 次元の不変量を定義しようとしているわけですが、これは自然な一般化であることをご紹介したいと思います。 $[\Gamma, \Gamma]$ は commutator subgroup と言いましたが

$$\Gamma_1 = [\Gamma, \Gamma]$$

と書きます。降中心列の 1 番目、第 2 近似に出てくるのは、第 1 近似で出て来た $\Gamma_1 = [\Gamma, \Gamma]$ があるわけですが、もう少し深い normal subgroup, これも全体の中で normal subgroup になるのですが、

$$\Gamma_2 = [\Gamma, [\Gamma, \Gamma]] = [\Gamma, \Gamma_1] \triangleleft \Gamma,$$

2 階の commutator subgroup です。そうすると Γ_2 は Γ_1 の normal subgroup でもあるし、全体の normal subgroup でもあります。段々小さくなっていきます。そうして何を考えるかということ第 1 近似よりももう少ししねじれた、abel 群の次に分かりやすい群はベキ零群, abel 群を abel 群によって中心拡大した群です。そうすると

$$0 \rightarrow C_2 = \Gamma_1/\Gamma_2 \rightarrow N_2 = \Gamma/\Gamma_2 \rightarrow \Gamma/\Gamma_1 \rightarrow 1$$

ベキ零, nilpotent という意味で N_2 と書きます。

そして近似が深くなってきて kernel がどれくらい大きくなってきたかということ、 C_2 と書いて、 $C_2 = \Gamma_1/\Gamma_2$ ですね。これ自身 abel 群です。なおかつこれは中心拡大というもので、通常群の拡大のときは 1 と書きますが、0 と書いたら C_2 は abel 群であって中心拡大を表します。中心拡大というのは、群には center というものがありますが、

$$C_2 \subset Z(N_2)$$

すべての元と交換可能な元全体の作る部分群 $Z(N_2)$ の部分群に kernel がなっているときに言います。中心拡大が得られてこれが第 2 近似となります。

まだ写像類群の近似の前にそもそもの基本群の近似を与えています。これを続けて、 d 次の近似、これはどうなるかということ、 d 番目の降中心列を $\Gamma_d = [\Gamma, \Gamma_{d-1}] \triangleleft \Gamma$ と定義すると、これは Γ の normal subgroup なので商 Γ/Γ_d が定義され

$$0 \rightarrow C_d \rightarrow N_d = \Gamma/\Gamma_d \rightarrow N_{d-1} = \Gamma/\Gamma_{d-1} \rightarrow 1$$

でその kernel を C_d と書いて、これは $C_d = \Gamma_{d-1}/\Gamma_d$ で、これが abel 群になります。なおかつこれが中心拡大になります。これで写像類群は曲面の基本群の自己同型群なわけですが、曲面の基本群をこのように近似したわけです。一般の群 Γ に対してこれは成り立つのですが、今の近似を tower のように書くと次のようになります。

$$\begin{array}{ccc}
& & \vdots \\
& & \downarrow C_4 \\
& & N_3 \\
& \nearrow & \downarrow C_3 \\
& & N_2 \\
& \nearrow & \downarrow C_2 \\
\Gamma = \pi_1 \Sigma_g & \longrightarrow & N_1 = H = \Gamma^{ab}
\end{array}$$

これは無限に続きます．そうすると Γ からの，今は $\pi_1 \Sigma_g$ ですが，こういう tower を群の inverse system, 射影系と呼びます．極限を inverse limit といい， $\varprojlim_d N_d$ と書きますが， Γ は

$$\Gamma \rightarrow \varprojlim_d N_d,$$

こういうところに表現されます．ベキ零群の中心拡大の tower, 通常 Mal'cev completion と言います．具体的には torsion があると難しくなるので，abel 群は torsion を無視するためには $\mathbb{Q}$ とテンソルすればよいわけですが，ベキ零群の場合も詳しくは省略しますが， $\mathbb{Q}$ とテンソルすることができます．通常 Mal'cev completion という場合は， $\mathbb{Q}$ とテンソルして

$$\Gamma \rightarrow \varprojlim_d N_d \otimes \mathbb{Q}$$

を考える事が出来ます．もちろん， $\varprojlim_d N_d$ の方が情報は多いのですが，具体的に研究する上ではなかなか難しいので，torsion をつぶしてしまって $\mathbb{Q}$ とテンソルすると $\varprojlim_d N_d \otimes \mathbb{Q}$ は， $\mathbb{Q}$ 上の Lie 群の構造を持つようになって，いろいろな理論が使える，代数群の理論が使える，通常使う場合はこちらです．これでその与えられた群を abel 群，その次に，構造が扱いやすい，研究しやすいベキ零群で近似して調べる，それが Mal'cev completion の考え方です．

これがなぜ自己同型に対してよいかと言いますと，群 Γ が与えられて， $\text{Aut } \Gamma$, これを今調べようとしています． $\text{Aut } \Gamma$ は lower central series, 降中心列 $\{\Gamma_d\}$ に作用するわけですが，群の自己同型があると $\text{Aut } \Gamma$ は $\{\Gamma_d\}$ に一番強い意味で characteristic というのですが，任意の自己同型に対してこの部分群 Γ_d が保たれる，別の所に行かない，だから Γ の自己同型があったら，この Γ_d の自己同型を誘導するのですが，もっと強くてこの tower に対して自己同型として作用します．そこでこれを ρ_d と書いて

$$\rho_d : \text{Aut } \Gamma \rightarrow \text{Aut } N_d \quad (d = 1, 2, \dots)$$

という表現が得られます．これを調べましょう．

$d = 1$ のとき，行った先 N_1 は rank $2g$ の自由 abel 群ですから，

$$\mathcal{M}_{g,*} \rightarrow GL(2g, \mathbb{Z})$$

古典的な準同型になっています．表現が得られたのですが，これは全射ではなくて，image は symplectic 群というものが出来て

$$\mathcal{M}_{g,*} \twoheadrightarrow Sp(2g, \mathbb{Z})$$

となっています．戦略としては $d = 2, 3, \dots$ に対して

$$\rho_d : \mathcal{M}_{g,*} \rightarrow \text{Aut } N_d$$

が得られるわけですが, $\text{Aut } N_d$ の構造はどうなるか, その構造がわかったら $\text{Im } \rho_d$ はどうなるか, ということです. これが研究戦略です. 自己同型なんですがなかなか難しい.

abel 群, その次に易しいべき零群ならば, その自己同型群はもしかするとこの解析が出来るかもしれない, 実際そうなわけで, それを調べて, 調べた上で準同型が得られるからその image を決めたら, ある意味で近似している. その image に対していろいろなものを調べよう, 例えば特性類などです. こういう戦略を取るわけです.

今から中心拡大に関して一般論を少し整理した上で, 今日と次回, $d = 2$ のとき,

$$M_{g,*} \rightarrow \text{Aut } N_2$$

を完全に記述する. 今日半分くらいやって次回, それをどのように一般化するかをやっていきます.

一般論に行く前にもう少し具体的に, $d = 2$ の場合を書いておきます. これ以降 $\Gamma = \pi_1 \Sigma_g$ とします.

$$0 \rightarrow C_2 = \Gamma_1/\Gamma_2 \rightarrow N_2 \rightarrow N_1 = H \rightarrow 1$$

これは中心拡大になるわけです. まずこの N_2 の構造を調べるわけです. この自己同型群を調べるために, H は rank $2g$ の自由 abel 群ですから, 完全に分かっています. 古典的に知られた事実を書きます. C_2 の typical な element はどんなものがあるかという, $[\gamma, \delta] \bmod \Gamma_2$ です. これを homology に落とすと $\Lambda^2 H$ が出てきます.

1. $C_2 \cong \Lambda^2 H / \langle \omega_0 \rangle$. ここで $\omega_0 = \sum_{i=1}^g x_i \wedge y_i$. 対応は予想がつかうと思いますが, $[\gamma, \delta] \bmod \Gamma_2 \mapsto [\gamma] \wedge [\delta] \bmod \langle \omega_0 \rangle$.
2. 次も良く知られた事実ですが, $C_2 = \Gamma_1/\Gamma_2 = Z(N_2)$. 中心拡大ですから $C_2 \subset Z(M_2)$ ですが, 実際イコール, 本当に center 全体になります.

これは組み合わせ群論では, 一番最初に勉強するものです. 一般論としては有名な組み合わせ群論の教科書 Magnus-Karrass-Solitar に書いてあります. 最近は組み合わせ群論が発展して幾何学的群論とも呼ばれています.

会場から質問: これは $\mathbb{Q}$ 上ですか?

いいえ, これは全部 $\mathbb{Z}$ 上の話です.

改めて書くと中心拡大はどのように記述できるか. 群の中心拡大 central extension, これを調べたいというのを動機付けとして, 一般論, Euler 類というものがあります, それをやります. 一般論なので基本群から離れて, abel 群 C があって, 群 G, Q があって

$$0 \rightarrow C \rightarrow G \rightarrow Q \rightarrow 1$$

と exact sequence を考えます. 中心拡大というのは C は abel 群であってかつ G の center に含まれる. center はいつでも abel 群です. 今から Euler 類を定義しますが, 一番イメージして欲しいのは $\mathbb{Z}$ による中心拡大です. このときが一番重要です. 与えられた群 Q を $C = \mathbb{Z}$ で中心拡大して G が得られている場合です.

問題として Q が与えられたときに, Q を C で拡大した群がどれぐらいあるか. 一番簡単, 自明なのは $Q \times C$, 自明な中心拡大です. 自明でない拡大は存在するのか, 存在したとしたらどれぐらい存在するのか. というような事がありまして, これは完全に答えは知られています. それをちょっと紹介します. そこで Euler 類というものが出てきます. こから辺, 群の拡大, これは純粋に代数的ですが, これは今から書く幾何学的なものと全く等価になります. それは何かといいますと, 主 S^1 -バンドルと呼ばれるものがあって, 曲面上の S^1 -バン

ドル, 例えば, 曲面に計量を入れて長さ 1 の接ベクトル全体を考えると出てきます. 構造群の立場でいうと $S^1 = SO(2)$ で一番簡単な compact Lie 群です. これを構造群とする principal bundle と呼ばれるものです. 今の context でいうと, principal bundle は底空間がないといけませんが, 今の場合, 群 Q の分類空間とよばれるもので BQ とかくものですが, そういうおまじないの空間がある, あるいは, 今の場合は多様体 X と思って頂いて結構です.

一般の多様体 X 上で

$$S^1 \rightarrow E \rightarrow X$$

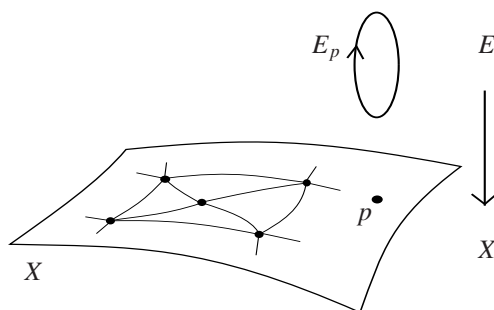
こういう fiber bundle があると, base space の基本群が fiber に働くわけですが, その作用が homotopy の意味で自明になる, そういうものを主バンドル, principal bundle と言います. そうすると Chern-Weil 理論というのは, 今からいう基本的な定理を一般の Lie 群に一般化したものです. 多様体 X があったときに, X 上の主 S^1 -バンドルの同型類全体というのは, $H^2(X, \mathbb{Z})$, 今の場合群との対応でいうと, $H^2(BQ, \mathbb{Z})$ と bijective になります. 主 S^1 -バンドルの同型類全体のなす空間と底空間の 2 次元 cohomology とが 1 対 1 に対応します.

具体的には主 S^1 -バンドルがあったときに, その Euler 類というものがあって, それが 2 次元 cohomology として定義されます. これが特性類のそもそもの原点です.

Chern-Weil 理論は任意の Lie 群に一般化したわけですが, 敢えて言うとも, まだ Euler 類の考え方を本当の意味で超えるような事には未だなっていない, Chern-Weil 理論を一般化して, ある意味究極の一般化ともいえるのですが, Stiefel-Whitney 類, Chern 類, Pontrjagin 類など全ての特性類は line bundle に対して定義されます. 一般の場合にはそれをベクトルバンドルの Whitney sum に対して, 一般化して得られるわけですが, それを本当に超えるような特性類はありません.

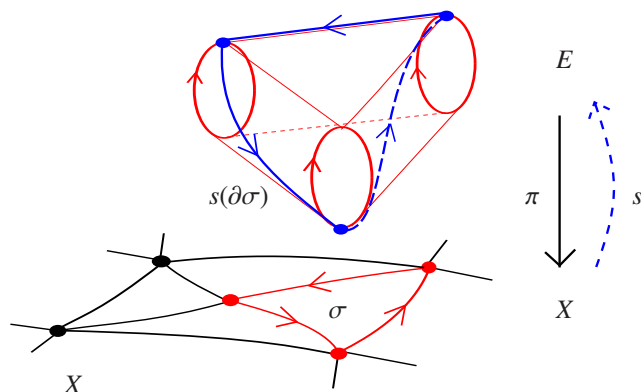
群の場合にもどしましょう. Q が与えられて, C が与えられて, Q 上の C による中心拡大がどうなるかという, $H^2(Q; C)$ と 1 対 1 に対応します. 群の cohomology というものがあるのでこれで良いのですが, 幾何学的な位相空間の方がイメージしやすいという人は $H^2(BQ, \mathbb{Z})$ と 1 対 1 に対応します. ここに出てくる Euler 類というものが具体的にどういう風に書けるかというのを, 今から書いていきます.

そのためにそもそもの古典的な Euler 類がどのように出て来たかを復習しておきます. 大体の idea を説明します. S^1 -バンドルが多様体 X 上にあったとします.



X 上の各点 p 上に fiber S^1 があり, principal S^1 -bundle ですから, 向きが付いている oriented S^1 -bundle が与えられたとします. そのねじれ具合を 2 次元 cohomology で表す. 分かりやすくするために底空間を 2 次元で書きました. 組み合わせ的に, 元々は Poincaré, homology 論の出発点は Poincaré です. 滑らかな曲面ですが, 組み合わせ的に, homology を考えるのは組み合わせ的に考えます. 三角形分割という概念, 点を取って, 2 次元の場合は点を結んで線分にして, 2 次元の場合は三角形ですね. こういうものを三角形分割といいます.

一般の次元だと次の次元は tetrahedra, 3 次元の simplex, 一般には 4 次元の simplex, と三角形で近似していきます. その各点に S^1 があるわけですが, 全くねじれていないのは $X \times S^1$ という自明な S^1 -bundle. 一般にはねじれるわけです. $X = \Sigma_g$ であって長さ 1 の接ベクトルを考えると, S^1 が全部乗っかって来て曲面の各点に S^1 があるわけです. このようなものが出てきます. global な構造が出てきます. みんな良く知っているように, 種数 1 の時にはトーラスというのは global に座標が取れるからこのバンドルは自明ですが, 種数 2 以上のときはねじれてきます. 実際に曲がってきます. その曲がり具合をどのように測ったかというところ, まずもしこれが完全に自明だとすると, つまり $X \times S^1$ だとすると, section というものがあるわけです. section というのは X 上の点に対して, その上の fiber のある 1 点を対応させて, それが X 上で点が動いたときに上でも連続に動いているもの. それが立つか立たないかという事を考える. まず三角形分割して, 組み合わせ的に 0 次元の所で近似した, 近似にもなっていないですが, 0 次元の各点の上では S^1 があるから, 1 点なんでもよいから選べる. 代表元を fiber 上選べる. section が立つわけです. その次に 1-simplex があると, バンドルというのは自明性というものがあって interval に制限するといつも自明になる. だから interval 上の自明なバンドル, cylinder が出てくるわけです. cylinder が出てくるから, 自明化を与えたとなると, 各 fiber を 1 つの S^1 と identify できて, S^1 は連結ですから, 両端上に 2 点があってそれをつなげて section が 1-skelton 上に延びるわけです. 同じ事で底空間上に σ という向き付けられた 2-simplex があつたときに, その境界上に section が立ったとします. それがこの三角形の内部に延びるかという問題です. それが Euler class というもの, そもそもは Euler とか Gauß に遡る考え方です. 曲面が global に曲がっているかを cohomology の言葉で, 当時は cohomology はないのですが, どのように測るか. そうすると X を三角形分割して σ という 2-simplex, その境界を $\partial\sigma$ と書きます. 向き付けられた 2-simplex σ , この境界は, 3 個の三角形の辺, 矢印の通りに 1 周巡るのが $\partial\sigma$ です.



$\partial\sigma$ は矢印が付いていますが, up to homotopy で S^1 と思えるわけです. projection というものをこれまで書いていなかったのを, $\pi: E \rightarrow X$ としましょう.

境界上では section s があって, $\pi^{-1}(\partial\sigma)$ を考えます. σ は可縮なので何か自明化を与えると

$$\pi^{-1}(\partial\sigma) \cong \partial\sigma \times S^1$$

と同型になります.

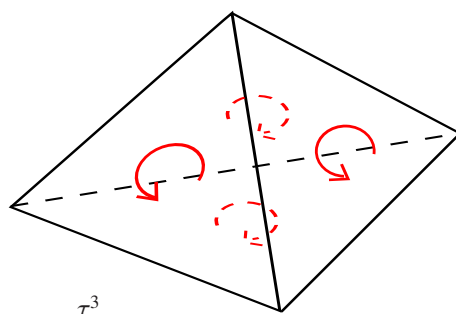
第 2factor, これは fiber なわけで projection があります. 結局 section, 第 2factor への自明化を与えると, $\partial\sigma$ から S^1 へと, こういう S^1 から S^1 への写像が出来ます. そこで σ に対して S^1 から S^1 への写像が出来ると,

その写像度, 何回ぐるぐる回るか, を考える事ができるので, 写像を s_σ と書いたとすると, $\deg s_\sigma \in \mathbb{Z}$ が得られます.

だからこれは組み合わせ的な三角形分割, 単体複体上の 2-cochain が得られた. 2-cochain というのは, 組み合わせ的な構造を与えられた単体複体の, 2 次元の向き付けられた 2-simplex に対して整数値を対応させる $\mathbb{Z}$ -valued function です. この構成が非常に重要なのは S^1 -bundle がどうねじれているかが分かるというのは, これが cocycle になる. homology, cohomology を勉強した人は, cochain だから c と書くと, 2-cochain c が得られるわけですが, 2-cocycle になるというのは

$$\delta c = 0$$

こういう簡単な式になります. 勉強した人はこれでよいのですが, これは Poincaré が homology を見つけた原点です. ということかということ, c が恒等的に $\partial\sigma$ でゼロだとすると, δc は coboundary と言いますが, cohomology はかなり後, 1930 年代です. boundary 上でゼロというのは, そもそも 2-simplex 上値があるわけですが, 3-simplex τ があったときにその境界 $\partial\tau$ というのは 4 個の三角形になります. それぞれには向きが誘導されています.



向きの付いた 4 つの oriented 2-simplex があるわけです. 4 個の整数があるわけですが, これらの和がいつでもゼロになる. cohomology の言葉を使わないで, homology の中だけでやろうとすると, この function というのはこういう良い性質があるわけです. これは cocycle なので, これが表す cohomology class というものが定義できて, 組み合わせ的な構造を入れたのですが, homology, cohomology は位相不変で, section にも依るかもしれないが, 一切何にも依らないで $[c] \in H^2(X; \mathbb{Z})$ が定まる. これは組み合わせ的にやったのですが, Chern-Weil 理論, それは微分形式でやると, connection と curvature というものになって, 一般の G に対して Chern-Weil 理論ということになります. さらに Chern-Simons 理論へととなります. これがそもその源です.

これを群 version でやるとどうなるかというのをやります. 群のとき, これを群にする. 群にすると, 位相空間はなくて全部群になる. abel 群 C があって, $C \subset Z(G)$.

$$0 \rightarrow C \rightarrow G \xrightarrow{p} Q \rightarrow 1$$

一番簡単なものは $Q \times C$. 一般にはねじれているわけですが, それをどのようにねじれ具合を測るかということ, いまの幾何学的な Euler 類を群 version で考えればよい.

まず section をとります. projection は集合論的には全射. だから section が存在する. section は集合論的な全射の right inverse です. 非常にきつくいうと選択公理がでてきますが, section というのは

$$p \circ s = id_Q.$$

通常は群ですから単位元というものが有るので、単位元は単位元に行ってほしいので、それは必要ないですが、通常計算を簡単にしたいので仮定します。

もし section s が準同型で取れると、結論が G は $Q \times C$ 、自明になります。section があるという事と拡大が自明になることが等価になります。主 S^1 -bundle に section が立つ事とその bundle が自明になる事が等価になる。一般にはそうではないので、cocycle が得られる。cocycle というのは、さっきのは X を組み合わせ的な構造を与えて、2-simplex にある整数を与えたわけです。今の場合、 Q という群を C という abel 群で拡大しているので、そのずれというのは群の 2-simplex、拡大する群から 2 つの元を取ったときに、これから C の元が得られる。 C の元がどのように得られるかというと、

$$Q \times Q \ni (q, q') \mapsto s(q)s(q')s(qq')^{-1} \in C$$

もし s が準同型だとするとこれは単位元になります。だけど一般には準同型ではないので、ずれがあります。いわば s の準同型からのずれですね。準同型にならないそのずれを考えると、もともと $s(q), s(q'), s(qq')^{-1}$ は G の元ですが、 $s(q)s(q')s(qq')^{-1}$ がなぜ C に入るかというと、ここに projection p を施すと $p \circ s$ というのは identity ですから、

$$p(s(q)s(q')s(qq')^{-1}) = qq'(qq')^{-1} = 1$$

になり、つまり p の kernel に入ります。だから C の元です。 c というのをさっきの cocycle、同じ文字 c が一杯でてくるのはなんですけれども、まず 2 次元 cochain $c \in C^2(Q; C)$ ですね。これは C に値をもつ群 Q の 2-cochain.

実はこの構成がさっき言った幾何学的な Euler 類の定義と、慣れるまで似てるようだけで全然違うかなと思う面もあるかもしれませんが、考え方は全く同じでこれが実は群の cocycle になる。cocycle とは何かというと、boundary 上常にゼロになる。これが cocycle。もともと homology は cycle というものがあったて、chain があって cycle というものがあります。今はその dual をとって cocycle。boundary 上常にゼロ。では boundary とは何か、さっきは幾何学的には 3-simplex があったときに、その boundary として 4 個の向き付けられた 2-simplex が出てきました。今度の場合、群バージョンでいうと、群の homology 論というものが有るのですが、そういう事はあまり言わない事にして、3-simplex というのは単にその群の 3 個の元 (q, q', q'') 、order のついた 3 個の元、これに対して boundary $\partial(q, q', q'')$ とは何かというと、4 個出てくるのですが、

$$(q, q', q'') \mapsto (q', q'') - (qq', q'') + (q, q'q'') - (q, q')$$

これが boundary の定義です。これ上常にゼロになる。 c というのは具体的に今は

$$c(q, q') = s(q)s(q')s(qq')^{-1}$$

と書いてあります。拡大されるべき群から任意の 3 つの元を持ってきたときに、群 C の元が得られたのですが、それが

$$c(q', q'') - c(qq', q'') + c(q, q'q'') - c(q, q') = 0$$

これが cocycle condition ですが、これを満たす。いま 2-cochain ですから、2-cocycle ですが、3-cochain だと、3-cocycle,... と次元が段々上がっていくやつで、こういうものが出てくる。それでこの c を定義したことを思い出すと、これは定義で set map $s: Q \rightarrow G$ があって、 G の中で積を取って

$$c(q, q') = s(q)s(q')s(qq')^{-1}.$$

cocycle condition の演算は今マイナスになっていますが、 C は abel 群だからマイナスが定義できます。計算上は G の演算としてするので、マイナスではなくて inverse で、これは多少長い計算になるけれども、これがゼロになることが比較的簡単に、おもしろいほどキャンセルするので、やってみてください。本当にゼロになります。

そうすると主 S^1 bundle と同じように、その cohomology class というものがあって、2-cocycle ですから 2 次元 cohomology で $[c] \in H^2(Q; C)$ が定義できて、幾何的な場合と同じように定義は s に依っていますが、 s に全く依らずに定義できて、これを群の中心拡大の Euler 類と呼びます。そして中心拡大の定理というのは、まず群 Q が与えられて、abel 群 C が与えられ、この同型というのは、2 つの中心拡大

$$0 \rightarrow C \rightarrow G \xrightarrow{p} Q \rightarrow 1,$$

$$0 \rightarrow C \rightarrow G' \xrightarrow{p'} Q \rightarrow 1,$$

があったときに、同型写像 $f: G \rightarrow G'$ が存在して $p' \circ f = p$ を満たす。この同型類の全体の集合が $H^2(Q; C)$ と 1 対 1 に対応する、

$$(0 \rightarrow C \rightarrow G \rightarrow Q \rightarrow 1 \text{ の同型類}) \cong H^2(Q; C)$$

bijective に対応する。これが定理です。これは様々に一般化されて、中心拡大でない、 Q の作用が自明でないときなど一般化されていますが、今大事なのは中心拡大の定理です。

今日と次回でこれを具体的に適用して何が出てくるか、 Q と C 、ここに出てくる結果ですね。

まず Q は写像類群 $Q = M_g$ ですね、 C として出てくるのは $C = \Lambda^2 H$ です。 $\Lambda^2 H$ 、これは Sp -module とすると Young 図形で Sp -module を沢山書きましたが、次回やる第 1 Johnson 準同型の像、縦に 3 個箱を書いた既約表現 $\begin{smallmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{smallmatrix}$ 、 Sp の既約表現 $[1^3]$ と書いたと思いますが、この中に Sp の自明な部分表現 $\mathbb{Q}$ が 1 個だけあります。これによる中心拡大、これが ρ_2 を解析するわけですが、これで得られるものは、Riemann 面の moduli 空間、曲面バンドルの特性類と呼んで、1980 年代初等から研究していて、代数幾何学では Mumford がやっていた、それは Chow algebra の元なのですが、私は e_1 という記号を書いています。Riemann 面の moduli 空間 M_g に対して $e_1 \in H^2(M_g; \mathbb{Q})$ 。あるいは写像類群 M_g の場合は $e_1 \in H^2(M_g; \mathbb{Z})$ 、moduli 空間でいうと $\mathbb{Q}$ 係数ですが、写像類群では $\mathbb{Z}$ 係数で定義される。そしてこれは特性類ですね。第 1-MMM 類とよばれているものですね。これが出てくるわけです。これが 1 つ。これを次回具体的にまたやります。

この 10 回にわたって symplectic 群の表現論だとか、群の近似だとか一般化して、いろいろ例をやってきたわけです。今度は Lie 代数 $h_{g,1}$ 、こういうものを定義したいのですが、ここは群の中心拡大ですけれども、Lie 代数というのは群の一番荒っぽく言う線型化なわけで、Lie 代数の中心拡大というものも定義できて、Lie 代数の中心拡大のときも全く同じように Euler 類が定義できてこちらの方が簡単なんですね。線型代数が使えます。これは Lie 代数なわけですが、そこに trace というもの、次回少しだけ出そうと思います。

homology の symmetric power $S^{2k+1} H$ 、これが出てきます。 $k=0$ のときは H 自身です。これは Young 図形で言うと、横に $2k+1$ 個箱を並べたもの $[2k+1] = \square \square \cdots \square$ です。その 2 階の外積、 $\Lambda^2 S^{2k+1} H$ 、これの 2 階の外積を取るとこの中に 1 個だけ自明表現があります。それで得られるものというのが、写像類群は Riemann 面の moduli 空間と対応していますが、1986 年の Culler-Vogtmann の仕事で、グラフの moduli 空間というものを展開していて、それと対応する、Kontsevich の定理を使うのですが、 $\mu_k \in H_{4k}(\mathbb{G}_{2k+2}; \mathbb{Q})$ 。 k 番目の Morita 類と呼ばれているものです。Conant-Vogtmann さんたちがこの notation を使ってくれました。これは自明ではないと予想したのですが、非常に難しくて 1 番目と 2 番目、最近の情報では、3 番目の非自明性までがわかったと。これは無限個ありますが、私は全部自明ではないと思っています。自分でもいろいろな方法

で考えていますが、非常に難しい問題です。これに付いても最近いろいろとありますが、次回にもう少ししゃべれるかもしれません。

何回か言ったようにこの Lie 代数 $h_{g,1}$ は写像類群の Lie 代数みたいなものです。だけどこれは非常に大きすぎて、例えば絶対 Galois 群という数論的なものも出てくるわけです。数論との関係で言うと、Euler 類 $\chi \in H^2(BSO(2); \mathbb{Z})$ というものがあります。これが自明になると Chern-Simons 不変量というものがあって、自明だとすると 2 次の特性類というものが出てきます。 χ は通常 c_1 とも書きますが、 $c_1 = 0$ だと、でてくるものは通常の logarithm、もちろんこれは非常に重要で exponential の逆関数 log というものが出て来て、これを高次でやると polylogarithm というものが出てきます。これは幾何学でも重要だし、数論でも重要です。その流れで言うと、 μ_k は、いわばこの Chern-Simons version で、数論の人たち、中村博昭さん、Hain さん、松本真さん、たちといろいろ議論、まだ議論にもなっていない、教えてもらっている段階ですね。いわば logarithm で Galois 群が出てくるだろう。 $h_{h,1}$ は大きすぎたわけです。写像類群に対応する部分は Johnson image といいます。これは小さいわけです。だけど数論的な構造を入れると、Galois 群は幾何学的な写像類群から来る Johnson image よりはちょっと大きくなります。だけれどもこの特性類は arithmetic な所も入れた所に制限すると、自明なんです。だから flat になって、その logarithm としてこの Galois 群が出て来ると予想しています。これはまだ、いわば、computer で計算できる linear な世界です。

これを nonlinear にした、今のところ一番の最終目標は次のようなものです。Habiro さん、Goussarov さん、1990 年代後半、homology cylinder というものがあって、Garoufalidis-Levine が homology cobordism で割って群にすると、それは写像類群を大きく拡張する群であって、割る前は monoid、3 次元多様体への応用というもの、合田さん、逆井さん、Friedl さん、Cha さん、Kim さん、沢山の人が研究していて、3 次元のいろいろなものと関連しています。この Q としてこれを取って来て、 C としては全く同じですね、trace という $\Lambda^2 S^{2k+1} H$ 、この中に自明表現が 1 つあるわけです。ちなみに $k = 0$ のときに自明表現が $\Lambda^2 H$ の中に 1 個あるというのは、これはそもそもこの話を始めたときに、1 つの Riemann 面の場合に Jacobi 多様体があって、その Jacobi 多様体上の Hodge bundle の c_1 として出て来ました。まさに $k = 0$ のときはそれなんです。その高次の一般化。そうすると何が出てくると予想しているかということ、特性類ですけれども、これは群 version で、Lie 代数 version ではねじれて、

$$\tilde{t}_{2k+1} \in H^2(\mathcal{H}_g; \mathbb{Q})$$

$\mathbb{Q}$ 係数で特性類の series が無限個出てくる。なおかつ 4 次元多様体との関連で言うと、 $\mathcal{H}_g$ は topological category と C^∞ category と 2 つ version がある。群として Q は $\bar{\mathcal{H}}_g$ 、 C は homology 3-sphere の homology 同境界類全体のなす群 $\Theta_{\mathbb{Z}}^3$ です。古田さんは Gauge 理論を使って $\Theta_{\mathbb{Z}}^3$ が無限生成 abel 群であることを証明しました。 $\bar{\mathcal{H}}_g$ 、定義は

$$\bar{\mathcal{H}}_g = \mathcal{H}_g / \Theta_{\mathbb{Z}}^3,$$

$\bar{\mathcal{H}}_g$ とするとき smooth category、これが Q ですね。そうすると $H^2(\bar{\mathcal{H}}_g; \mathbb{Z})$ 。これは topological category にすると、Freedman の定理で任意の homology 3-sphere は可縮な 4 次元多様体を bound するので、 $\Theta_{\mathbb{Z}}^3$ は自明な群になって、smooth なときは無限 rank になって、そこに smooth と topological category の drastic な差があって、古田さん、Fintushel-Stern、その前に Freedman と Donaldson、smooth な場合と劇的な違いがあったわけです。

$\tilde{t}_{2k+1} \in H^2(\mathcal{H}_g; \mathbb{Q})$ は $H^2(\bar{\mathcal{H}}_g; \mathbb{Q})$ の元とも思えるわけですが、ここから写像として準同型

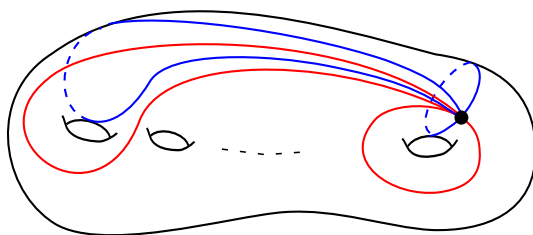
$$H^2(\bar{\mathcal{H}}_g; \mathbb{Q}) \rightarrow H^2(\mathcal{H}_g; \mathbb{Q})$$

があるわけですが、予想としては全てゼロ。これを smooth に制限すると flat になって、これ上 zero で logarithm を取ると、

$$\nu_{2k+1} : \Theta_{\mathbb{Z}}^3 \rightarrow \mathbb{Q}$$

log として homomorphism が得られるだろうと。これは非常に先の長い話なので、20 年くらい経ったときには違うかもしれません。これが最終的な目標です。合田さん、逆井さん、の仕事など、具体的に与えた trace の元を実現するような 3 次元の homology cylinder で実現する、多様体を持って来て、そういうやつは今 S^1 上のホモロジカルな曲面束ですが、最近大分できるようになりました。

それを曲面上にして、これらの S^1 上の bouquet 上に合田さん、逆井さんたちがやっている homological な



バンドルを作って、disk に拡張する。全射であることは Garoufalidis-Levine の仕事で、存在は分かっていますし、具体的な構成も S^1 上では出来ている、段々分かってきたので、1-skelton 上ではあるわけですね。これを disk に拡張する事ができるかという問題があります。smooth では出来ない、しかし位相多様体では出来るでしょう、位相多様体が沢山あるという事を Freedman が単連結の場合に証明しました。knot の concordance 問題など関係します。位相多様体は基本群が大きくなってくるとこういう風になってくると分からない事が沢山ある。Freedman が完全に分類したのは単連結な 4 次元多様体のとき。smooth と topological の drastic な差を考えると、基本群が有ったとしても実現する、ここで nonzero、無限個特性類はあるのだけれども、それを実現するような 4 次元多様体、曲面上のホモロジカルな曲面束があるだろう、しかし smooth category ではそれはできない。これは物理学ではありませんというちょっと語弊がありますが、証明しなければなんの意味もないですが、でもこれはずっと先の話なので、今はこの辺りを具体的に研究しています。それを次回、この 2 番目の 1 番最初のやつをやって、それを一般化する戦略、考え方を紹介して、10 回を終わりたいと思います。丁度時間になりました。

次回 N_2 と書いた群を具体的に書いて、さっきの Euler 類を具体的に書いて、自己同型を完全に記述できません。写像類群からの image が小さくなるのですが、どのくらい小さくなるかを計算して、例えば、3 次元多様体の不変量で Casson 不変量というものがあるのですが、最後は具体的に計算、最初何回かコンピュータを持ってきてやるといったのが、まったく果たせず申し訳ないのですが、今回は具体的な計算をします。大事な事は手を動かすという事です。cocycle condition、本に書いてあるからそうだろうと思うかもしれませんが、1 回はやると体が覚えるわけです。頭で見て理解してなるほどというのは、第 1 段階の理解ではありますが、実際に cocycle だという事を手で確かめる。cochain の値が 3-simplex, tetrahedra の境界でどうなるか、確かにゼロだと見てみる事が大事だと思います。

第 10 回 (2011 年 3 月 2 日)

最終回で 10 回目でなんとかまとめたと思います。前回最後ちょっと途中だったので、復習をしてこの所から少しのりしろを付けましてまず中心拡大, central extension, 群の中心拡大ですね。群 G が中心拡大であるというのは, G から quotient Q に全射準同型写像 $p: G \rightarrow Q$ があって, その kernel C が abel 群でしかも G の center に入っている。

$$0 \rightarrow C \rightarrow G \xrightarrow{p} Q \rightarrow 1.$$

こういうものを中心拡大と言ったわけです。そうすると Q と C が与えられたときに, こうなるような群 G はどういうものがあるか。一番簡単なのは $Q \times C$, 直積, 自明な中心拡大です。

一般にはねじれた中心拡大がありまして, 幾何学的にいうと, 例えば $C = \mathbb{Z}$ というのは大事な場合で, $\mathbb{Z}$ による中心拡大というのは商の群の 2 次元の $\mathbb{Z}$ -係数 cohomology と 1 対 1 に対応する。 $\mathbb{Z}$ というのは S^1 の基本群ですけれども, 幾何学的に言うとき多様体上に principal S^1 -バンドル, 主 S^1 -バンドルがあって, それは底空間の $\mathbb{Z}$ -係数 2 次元 cohomology 類, そういうものを Euler 類と呼びましたが, その Euler 類で分類される。それが群 version でもあるわけです。Euler 類を群 version でどのように作ったかということ, section, right inverse

$$s: Q \rightarrow G$$

但し $p \circ s = id_Q$ を考えます。もしこれが準同型写像で取れたら, 自明になってしまいますから, 一般には準同型では取れない。集合論的な right inverse です。群ですからできるだけきれいに取りたいので, 仮定しなくてもよいのですが, Q の identity は G の identity にいく, 通常はこう取ります。こういう s があると cocycle c ができるんですね。

$$c(q, q') := s(q)s(q')s(qq')^{-1} \in C$$

cocycle c と群 C で, ちょっと notation が被ってしまいましたが, この cocycle で section s が準同型からどれくらい遠いかが表されます。その値 $c(q, q')$ は Q に落とすと自明になりますから, 実は C に入っている。これに依って, cocycle condition を満たして C に値を取る 2 次元 cocycle

$$c \in Z^2(Q; C)$$

になります。cocycle condition を今日具体的に後で使うので, ここで書いておきます。群 Q から 3 つの元 $q, q', q'' \in Q$ を取ったときに, 幾何学的に言うとき 3-simplex (q, q', q'') ですから, (q, q', q'') の境界がここに出てきます。その境界 $\partial(q, q', q'')$ は, 4 個の 2-simplex になりますが, それ上の c の値が zero になる。ですから

$$c(q', q'') - c(qq', q'') + c(q, q'q'') - c(q, q') = 0$$

これが任意のこの 3 つ $q, q', q'' \in Q$ に対して, いつもゼロになる。これが cocycle condition です。

幾何的な Euler 類の場合にも前回か前々回にやったと思いますが, こうなるわけです。cocycle, それを表す modulo coboundaries の cohomology 類として, $[c] \in H^2(Q; C)$ が得られます。群の cohomology の言葉で書くと, $H^2(Q; C)$ ですが, 群の cohomology にあまり慣れていない人は, 幾何学的に $\pi_1 = Q$ となり, 高次の homotopy 群 π_i が全て消える空間, 分類空間 $BQ = K(Q, 1)$ を考えて, その cohomology $H^2(BQ; C)$ と思って同じです。section を変えると cocycle は変わるわけですが, その差は coboundary. そして Q 上の C による中心拡大の同型類と, この群の cohomology 類 $[c]$ も Euler 類というのですが, Euler 類とが 1 対 1 に対応する。主 S^1 束の分類と全く同じです。群の cohomology を勉強するとこのようになります。

それで前回やったように、この Q, C に対して、いろいろなものを考えて、Euler 類から出てくるいろいろな不変量を調べようというわけです。幾つか、確か3つくらい書きましたけれども、口でだけ言うと、 Q を写像類群、 C を Torelli 群の abel 化と考えると Riemann 面の moduli 空間の特性類が出てきます。また写像類群の場合、Lie 代数の abel 化を考えると、ここにグラフの moduli 空間の特性類が出て来たり、homology cylinder、これはまだまだ夢の段階ですけれども、そして homology 3 球面の homology 同境のなす群をやると、homology 3 球面の homology 同境の不変量、4 次元位相多様体の不変量とか、その間に絶対 Galois 群が出てきます。

もう少し具体的に、いまの構成を逆にもって行くと、群 Q と abel 群 C というものがあって、さらに Q の C に値を取る 2 次元 cocycle $c \in Z^2(Q; C)$ があつたとします。こういう cocycle condition を満たす $Q \times Q$ から C への写像、これが有つたとすると、それによって Q 上に c でねじり Euler 類が $[c]$ になるような Q 上の中心拡大

$$G_c := C \tilde{\times}_c Q,$$

が次のように構成できます。集合論的には直積ですが、群の構造は c でねじるので $\times$ と書いておきます。これはどう定義されるかと言えば、集合論的には直積です。これを群にするわけです。だから積を定義すればよい。積をどう定義するか、cocycle c と C の元と記号が重なってしまいましたが、

$$(c, q)(c', q') = (c + c', qq')$$

とやると単に直積ですが、cocycle c があるので

$$(c, q)(c', q') := (c + c' + c(q, q'), qq')$$

とやります。非常に簡単ですね。 C は abel 群ですから、演算は $+$ と書いています。 $c(q, q')$ の項がないとねじれていませんが、これでねじる。そうするとこれは群になる、群の定義を勉強したら、すぐに、cocycle condition を見ると簡単ですが、おもしろい。これが群になる事は 1 回くらい自分でやってみるとよいと思います。

これで群になるわけですが、 $Q \rightarrow C$ を全部つぶすという自然な射影

$$G_c = C \tilde{\times}_c Q \rightarrow Q$$

があります。そしてこの section s_0 として

$$s_0 : Q \ni q \mapsto (0, q) \in G_c$$

とおくと、出てくる cocycle C_{s_0} がありますが、丁度

$$C_{s_0} = c$$

となります。これも各自チェックして下さい。先ほどの群の定義の計算とならんでやると非常に面白いと思います。このようにして、中心拡大の Euler 類と中心拡大の同型類の 1 対 1 対応が具体的にできるわけです。

いろいろやったのですが、今日は最終回なので、写像類群の近似というものをやっていて、以前に一般の群の近似をやりました。その特別なものとして、写像類群の近似というものをやっていました。そこに戻ります。大分前にやった事ですが、このいろいろな考え方で大事な 1 つの結果をあげて、問題を述べておしまいにしたいと思います。

Σ_g 上の base point 付きの写像類群, 向きと base point を保つ微分同相の isotopy 類全体

$$\mathcal{M}_{g,*} = \pi_0 \text{Diff}_+(\Sigma_g, *)$$

これを base point 付きの写像類群といいました.

そうすると Dehn-Nielsen の定理で, これはこの話でも何度も出て来ていますが, 基本的な結果で, base point を考えるというのは, base point を考えない普通の写像類群, それが最終的にはそちらを知りたいのですが, 外部自己同型群になって, 外部自己同型は扱いがやっかいになります. base point を考えると, 自己同型

$$\mathcal{M}_{g,*} \cong \text{Aut}_+(\pi_1 \Sigma_g)$$

となり, 代数的には扱いやすい. 代数的, 組み合わせ群論的にいろいろな結果を使って, $\mathcal{M}_{g,*}$ の研究にもっていきます.

今度は $\pi_1 \Sigma_g$, これを Γ とおきました. 一般の群の Mal'cev completion というものを以前にやりました. それを考えていきます. まず最初は Γ の abel 化,

$$\begin{aligned} \Gamma^{ab} &= N_1(\Gamma) \\ &= \Gamma/[\Gamma, \Gamma] \\ &= H_1(\Sigma_g; \mathbb{Z}) \\ &= H_1(\Gamma; \mathbb{Z}) \\ &= H. \end{aligned}$$

一般論で群の abel 化というのはその群を commutator で割った群です. これを今の場合 H と書きました. これが第 1 近似 $N_1(\Gamma)$ になります. 第 2 近似 $N_2(\Gamma)$ を考えると中心拡大が出てきました. 1 階の commutator を $\Gamma_1 = [\Gamma, \Gamma]$ とおきます. この添字は 1 つずらした方が Johnson 準同型を考えるときはうまく行くのですが, 両方顔を立てるというのはできない. どちらかと言うと今は降中心列に顔を立てます. 今度は $\Gamma_2 = [\Gamma, [\Gamma, \Gamma]]$ で 2 階の commutator subgroup, つまり降中心列, lower central series を考えます. もう 1 つ commutator の commutator $[[\Gamma, \Gamma], [\Gamma, \Gamma]]$ を考える derived series というものもあります. 両方大事なのですが, 技術的には降中心列, こちらの方がずっと易しい. derived series はずっと深い結果が期待されるのですが, これはなかなか難しい, あっという間に無限生成になってしまいます.

第 2 近似ですから $N_2(\Gamma)$, abel 化 $N_1(\Gamma) = H$ よりも少し詳しい近似になっていて kernel に C_2 というものが出てきます.

$$0 \rightarrow C_2 \rightarrow N_2(\Gamma) \rightarrow N_1(\Gamma) = H \rightarrow 1$$

ここで $C_2 = \Gamma_1/\Gamma_2$ で, $\Gamma_2 = [\Gamma, [\Gamma, \Gamma]]$ です.

第 1 近似 H から写像類群の古典的な近似として, H 上に intersection number があって, それを保つ H への作用を考える事により $Sp(2g, \mathbb{Z})$ が出てきました, N_2 はその次のやつです. そうするとどうなるか. Dennis Johnson とか私が, 70 年代最後の方から, 今のような事を考え始めたものです.

一般には第 d 近似 N_d というのがあって, これも中心拡大になって $C_d = \Gamma_{d-1}/\Gamma_d$ で

$$0 \rightarrow C_d \rightarrow N_d(\Gamma) \rightarrow N_{d-1}(\Gamma) \rightarrow 1$$

となります. 結局

$$\mathcal{M}_{g,*} \rightarrow \text{Aut} N_1 \cong GL(2g, \mathbb{Z})$$

が初めにあり, その image は全射ではなく $Sp(2g, \mathbb{Z})$ です. その上に

$$\begin{array}{c}
\vdots \\
\downarrow \\
\text{Aut}(N_4) \\
\downarrow \\
\text{Aut}(N_3) \\
\downarrow \\
\text{Aut}(N_2) \\
\downarrow \\
\text{Aut}(N_1) = GL(2g; \mathbb{Z})
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
\vdots \\
\rho_3 \nearrow \\
\rho_2 \nearrow \\
\rho_1 \nearrow \\
\mathcal{M}_{g,*} \xrightarrow{\quad}
\end{array}$$

となります。2 番目からも全射ではないのですが、ベキ零群の自己同型群が出て来て、だんだん良く近似している。まず群論的に $\text{Aut}(N_d)$ というものを調べましょうという事になります。ベキ零群の同型群ですから、いろいろな理論、特にベキ零 Lie 群の理論が使えます。

それで $d = 2$ のとき、一般の d のときは最後に問題として書きますが、ほとんど解明されていないと言ってもよいかもしれないぐらい難しい問題です。写像類群だけではなくて、最近 $g = 1$ を考えると、数論の人たちの仕事や Conant-Kassabov-Vogtmann の仕事などから、多少少しだけ見えてきた気がします。写像類群を超えた情報がここには入っています。それを最後に少し話します。

まず $d = 2$ のとき

$$0 \rightarrow C_2 \rightarrow N_2 \rightarrow H \rightarrow 1,$$

この N_2 の自己同型群を調べましょう。その前に、自己同型を調べるために、まず群の構造を調べます。これは中心拡大で Euler 類があります。群としては H ですが、幾何学的には $K(H, 1)$ は $2g$ 次元 torus T^{2g} で、多様体と思ってよく、 H はその基本群に対応しており、それ上

$$\text{Euler class} \in H^2(H, C_2) \cong \text{Hom}(H_2(H); \Lambda^2 H / \langle \omega_0 \rangle)$$

となります。この Euler 類がどうなるか。その前にまず群 C_2 がどうなるか。これは組み合わせ群論の自由群、曲面群の 2 大テーマになっていて、次のようになっています。まず定義から $C_2 = \Gamma_1 / \Gamma_2$ で、答えがわかると非常に自然なものになっていて、

$$C_2 = \Gamma_1 / \Gamma_2 \cong \Lambda^2 H / \langle \omega_0 \rangle$$

です。ここで Σ_g は closed surface ですから symplectic 類 ω_0 が存在します。これは H には symplectic basis は無限個ありますが、1 つ $x_1, y_1, \dots, x_g, y_g$ を固定して

$$\omega_0 = \sum_{i=1}^g x_i \wedge y_i$$

と書くと symplectic basis の取り方に依らずに定義されます。 ω_0 は $\Lambda^2 H$ の元ですが、 $\langle \omega_0 \rangle$ は ω_0 の生成する submodule で、 $\Lambda^2 H$ を $\langle \omega_0 \rangle$ で商を取ると、これが C_2 と自然に同型になる。写像はどうかというと、

$$C_2 = \Gamma_1 / \Gamma_2 \ni [\gamma_1, \gamma_2] \mapsto [\gamma_1] \wedge [\gamma_2] \bmod \langle \omega_0 \rangle \in \Lambda^2 H / \langle \omega_0 \rangle$$

が自然に同型になります。これが同型になるというのは組み合わせ群論の最初の定理です。一般の C_d に対してそれが Lie element で記述できるというのが、良く知られた基本定理ですが、その一般の結果の一番簡単な場合です。

そして 2 番目, 中心拡大というのは center に入ればよいのですが, 今の場合は center そのものである. そこまでわかる. こういうものは, Magnus-Karras-Solitar の本, これは組み合わせ群論の古典中の古典ですが, その後のいろいろな教科書などを見れば書いてあります.

Fact

1. $C_2 \cong \Lambda^2 H / \langle \omega_0 \rangle$
2. $C_2 = \text{Center}(N_2)$.

そうすると普遍係数定理を使うと, torsion がないので,

$$H^2(H; C_2) \cong \text{Hom}(H_2(H); \Lambda^2 H / \langle \omega_0 \rangle) \ni \bar{id}$$

一方これは何度かやったように, H は曲面の Jacobi 多様体に対応していて, $H_2(H)$ は $\Lambda^2 H$ と同型になります. そうすると $\Lambda^2 H$ から $\text{mod } \langle \omega_0 \rangle$ していますが, $\Lambda^2 H$ からその商へですから, canonical な元, tautological な元 id があります. ω_0 で割って, id とちょっと違うので, $\bar{id}$ と書きます. 上の Euler 類はこの tautological な $\bar{id}$ に等しい.

$$\text{Euler class} = \bar{id}$$

これは偉い人たちが研究した非常にきれいな結果です. full な証明はそれぞれ考えてもらう事にしまして, 感じだけやります.

Euler 類というのは section を立てて定義されます.

$$s : H \rightarrow N_2$$

H の symplectic basis を 1 つ固定して H は自由 abel 群ですが, H の任意の元は $H \ni \sum_i (a_i x_i + b_i y_i)$ と unique に書けます. それに対して N_2 は非可換です. 第 1 回目にした基本群の元 α_i, β_i を用いて,

$$s \left(\sum_i (a_i x_i + b_i y_i) \right) = \alpha_1^{a_1} \dots \alpha_g^{a_g} \beta_1^{b_1} \dots \beta_g^{b_g}$$

と定義します. これは N_2 への 1 つの lift になります. これは自然なように見えますが, 自然でもなければ何でもあります. 非常に人為的なものです. symplectic basis は無限個ありますし, なぜ α が β より先なのか. あるいは α_1, α_2 の順番など全く canonical ではありません.

準同型からの差を計算すると, $H \ni u, v$ に対して,

$$c(u, v) = s(u)s(v)s(uv)^{-1} \in C_2.$$

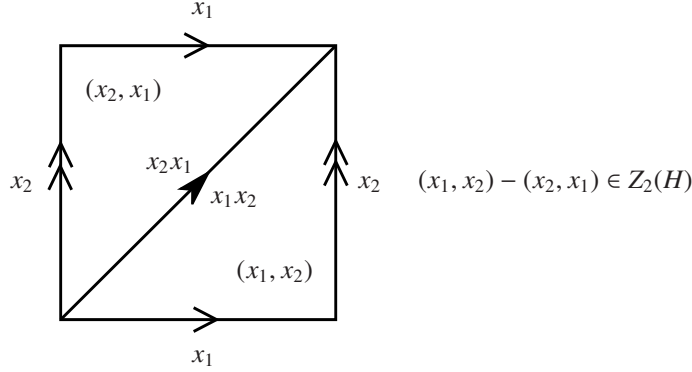
これを計算すればよい. 感じだけをやりますので, 例えば一番簡単な $c(x_1, x_2)$ を計算してみましょう.

$$c(x_1, x_2) = \alpha_1 \alpha_2 (\alpha_1 \alpha_2)^{-1} = id (= 0) \in C_2,$$

abel 群としては 0, こうなります. さっきの普遍係数定理を思い出すと, 1 個だけ計算してもあまり意味がありません. H の cycle 上の値を知らないと意味がない. x_1, x_2 の表す cycle, $2g$ 次元の中の 2 次元 torus, それを計算しようとする. Jacobi 多様体の中で x_1, x_2 が torus を張ります. それを cell 分割するとこういう 2 つの 3 角形になります.

$c(x_2, x_1)$ を計算して差を取ったものが x_1, x_2 の表す cycle 上の値になります. cycle 上値を取らせると section の取り方に依らずに定まる.

$$c(x_2, x_1) = \alpha_2 \alpha_1 (\alpha_1 \alpha_2)^{-1} = \alpha_2 \alpha_1 \alpha_2^{-1} \alpha_1^{-1} = [\alpha_2, \alpha_1] \in C_2$$



と commutator が出てきます. C_2 は $\text{mod } \Gamma_2$ ですから, これは $x_2 \wedge x_1$ になります. 従って Euler 類の evaluation

$$\begin{aligned} \text{Euler}((x_1, x_2) - (x_2, x_1)) &= 0 - x_2 \wedge x_1 \\ &= x_1 \wedge x_2 \end{aligned}$$

となります. 従って identity という事がわかります. 以下同様です. 事実としては正しいらしいという事が感覚的には理解できたと思います.

基本群の abel 群の次の近似 N_2 の群の構造は分かったので, 今度は N_2 の自己同型を決めるわけです. N_2 の自己同型はそんなに難しくないと思いますが, $N_2, N_3, N_4, \dots$ と決めていくと, これはだんだん難しくなります. $\mathbb{Z}$ 上でやると非常に難しい事がどんどん起こります. そこで $\mathbb{Q}$ にします. ここで $N_2 \otimes \mathbb{Q}$ を定義します. abel 群の時は $\otimes \mathbb{Q}$ は定義できますが, ベキ零群の時にどう定義するか. これは先ほどの中心拡大の構成を使います.

$$N_2 \otimes \mathbb{Q} := (C_2 \otimes \mathbb{Q}) \tilde{\times}_c (H \otimes \mathbb{Q}).$$

C_2 は abel 群ですから, $C_2 \otimes \mathbb{Q}$ は定義できます. また $H \otimes \mathbb{Q} = H_{\mathbb{Q}}$ とこの話では書きました. c というのは H 上の 2-cocycle ですが, その形を見ると $\mathbb{Q}$ 上にそのままの形で拡張します. $H_{\mathbb{Q}}$ の $C_2 \otimes \mathbb{Q}$ に値を取る 2-cocycle です. これから中心拡大が定義され, N_2 は 2-step nilpotent group と呼ばれますが, 実は一般にベキ零群があったら $\mathbb{Q}$ と tensor できるというのは Mal'cev の理論の基本的な結果の 1 つです. そうすると自己同型が行列で書く事ができます. もとものの群というのは線型代数群と呼ばれる行列群の中の lattice と呼ばれるものになります. これは第 1 近似の $Sp(2g; \mathbb{Q})$ の中に写像類群の image として $Sp(2g, \mathbb{Z})$ が入っています. この自己同型は線型代数群というものになるわけです.

この群構造ですが, ちょっと notation を変えまして, $\xi, \eta \in C_2 \otimes \mathbb{Q}$, $u, v \in H_{\mathbb{Q}}$ に対して, $(\xi, u)(\eta, v)$ をどう定義するか. この cocycle, ここにあるやつを使えばよいわけですが, 非常に任意性があるし人為的で少し気持ち悪いわけです. しかし $\mathbb{Q}$ を tensor すると, 良い点というのは canonical と言い過ぎかもしれませんが, cocycle としてかなり自然なものが取れます. それはどうしてかという, 有理数ですから, 割る事が出来ます. それで

$$c(u, v) = \frac{1}{2} u \wedge v$$

とおきます. さっきは

$$c(x_1, x_2) = 0, c(x_2, x_1) = -x_2 \wedge x_1$$

と非常に不平等だったのが, 今度は平等に分配できます. こうやると Euler 類としては全く同じものになって, さっきの identity を表す cocycle となります. そこで群構造はどうなるかという, と

$$(\xi, u)(\eta, v) = (\xi + \eta + \frac{1}{2} u \wedge v, u + v)$$

と定義します。両方とも abel 群です。

こう書いておくと自己同型群を完全に記述する事が出来ます。

Proposition

$$\mathrm{Aut}_+(N_2 \otimes \mathbb{Q}) \cong \mathrm{Hom}(H_{\mathbb{Q}}, \Lambda^2 H_{\mathbb{Q}} / \langle \omega_0 \rangle) \rtimes \mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Q})$$

全部 $\mathbb{Q}$ 上の vector 空間ですから homomorphism ではなく、linear map と書くことも出来ます。こういう風に自己同型を記述する事が出来ます。

歴史を遡ると、こういう形ではないですが、idea は Andreadakis, こちらは自由群の場合、そして写像類群の場合は Dennis Johnson の仕事に見られるわけです。これは $d = 2$ の場合ですが、一般にはベキ零群がどんどん複雑になっていきます。

これを証明します。先ほど $\mathbb{Q}$ 上にとするとより自然な cocycle が取れると口で言いましたが、もう少しそれを書いておきます。section

$$s' : H_{\mathbb{Q}} \rightarrow (C_2 \otimes \mathbb{Q}) \tilde{\times}_c H_{\mathbb{Q}}$$

この $s'(u) = (0, u)$ と取ります。これから定まる c' が最初の人為的な c と cohomologous になります。この証明はそれほど難しくないで詳細は省略しますが、自分でチェックして下さい。それはそうだろうという感じがあります。こちらの方がかなり canonical, こう書いたら自然なものと考えています。

そこで半直積の定義をちょっとだけ、皆さんご存知とは思いますが、念のために書いておきます。半直積の定義は、群 A と群 G の半直積 $A \rtimes G$ は $\rho : G \rightarrow \mathrm{Aut} A$ があつたときに、

$$(a, g)(a', g') = (a(\rho(g)a'), gg')$$

と自然に定義します。こうねじるわけです。 ρ が自明な準同型だとすると、単に直積です。 ρ で G が A に働いたとすると、ねじれた群になります。中心拡大と並んで半直積、群の拡大にとってはこの2つが一番最初に出てきます。cohomology で言うと中心拡大は2次元の cohomology と対応しましたが、半直積は1次元 cohomology と対応します。

さて、命題を証明しましょう。一番最初に何を証明するかというと、 $d = 1$ のとき $\mathrm{Aut}_+(N_1 \otimes \mathbb{Q})$ は $\mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Q})$ にはならないのです。これがなぜ Sp になるかというのは非常におもしろい。つまり abel 化で自己同型を考えると $\mathrm{GL}(2g, \mathbb{Z})$ で大き過ぎるわけです。だけど2階の近似をやってその自己同型を考えると、線型部分は Sp しかない。この段階で縮まるというのが面白い所です。まず第1段階は (I)

$$\mathrm{Im}(\mathrm{Aut}_+(N_2 \otimes \mathbb{Q}) \rightarrow \mathrm{Aut}_+ H_{\mathbb{Q}}) = \mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Q}).$$

これが第1段階ですね。 $\mathrm{Aut}_+ H_{\mathbb{Q}} = \mathrm{GL}_+(2g, \mathbb{Q})$ です。これはどうしてかと言うと、ここですべて自己同型写像 $f \in \mathrm{Aut}_+(N_2 \otimes \mathbb{Q})$ があつたとします。これが $H_{\mathbb{Q}}$ に誘導する準同型写像が symplectic になるという事です。そうすると f は $N_2 \otimes \mathbb{Q}$ の自己同型なので、 $N_2 \otimes \mathbb{Q}$ の abel 化上誘導する準同型写像

$$f_* : H_1(N_2 \otimes \mathbb{Q}) = (N_2 \otimes \mathbb{Q})^{ab} \rightarrow H_1(N_2 \otimes \mathbb{Q})$$

があります。 $N_2 \otimes \mathbb{Q}$ は中心拡大で具体的に分かるので、この abel 化 $(N_2 \otimes \mathbb{Q})^{ab}$ は簡単に計算できて、元々の abel 化 $H_{\mathbb{Q}}$ に等しくなります。従ってこの f が誘導する $N_2 \otimes \mathbb{Q}$ の abel 化 $H_{\mathbb{Q}}$ 上の写像が Sp だという事を証

明することになります。ポイントは何かと言いますと、 f は自己同型ですが、これを kernel に制限するとこのとき、

$$f|_{C_2 \otimes \mathbb{Q}} = \Lambda^2 f_*$$

となる。ここで $C_2 \otimes \mathbb{Q} = \Lambda^2 H_{\mathbb{Q}} / \langle \omega_0 \rangle$ でした。

これは当然期待されるわけですが、証明しなくてははいけません。この部分の証明は、 $(0, u), (0, v) \in N_2 \otimes \mathbb{Q}$ の commutator を計算します。これは簡単な計算で

$$N_2 \otimes \mathbb{Q} \ni [(0, u), (0, v)] = (u \wedge v, 0)$$

となります。従って f は自己同型ですから、

$$f(u \wedge v, 0) = [f(0, u), f(0, v)]$$

から

$$f|_{C_2 \otimes \mathbb{Q}} = \Lambda^2 f_*$$

は自然に得られます。abel 化に誘導する準同型の 2 階の外積である事がわかります。

この事から、 $f_* \omega_0 = \omega_0$ となる。もちろん $f_* \omega_0 = \pm \omega_0$ ですが、 Aut_+ にしたらこうなります。

次は symplectic 線型代数の最初に出てくる基本的な命題の 1 つで、

問. $A \in GL(H_{\mathbb{Q}})$ でかつ $A\omega_0 = \omega_0$ であるための必要十分条件は $A \in Sp(2g, \mathbb{Q})$ である事を示せ。

$g = 1$ でやると簡単に初等的な議論で証明できます。一般の g に対しても成立し強力です。 $H_{\mathbb{Q}}$ の自己同型が ω_0 を保つ必要十分条件は Sp の元であるという事です。これで第 1 段階がわかりました。これは symplectic 線型代数です。

次は第 2 段階でここら辺りは Andreadakis と Dennis Johnson の仕事です。最初は本当かなと思うような主張です。Torelli 群の元は自己同型が具体的にどう書けるか。

(II)

$$f \in \text{Aut}_+(N_2 \otimes \mathbb{Q}), f_* = \text{id on } H_1(N_2 \otimes \mathbb{Q}) \Rightarrow f(\xi, u) = f((\xi, 0)(0, u)) = (f_*(\xi), 0)(\tilde{f}(u), u)$$

かけ算を計算してみましょう。これを計算すると、落っことした所は id として働くので第 2 成分は u , 第 1 成分は

$$(f_*(\xi), 0)(\tilde{f}(u), u) = (\xi + \tilde{f}(u), u)$$

そこで

$$\tilde{f}: H_{\mathbb{Q}} \rightarrow \Lambda^2 H_{\mathbb{Q}} / \langle \omega_0 \rangle \text{ "map"}$$

を得ます。簡単な計算から実は $\tilde{f}$ は homomorphism となります。これは自分で確かめてみて下さい。ここに非常に理論がうまく行く最初の兆しがあるわけです。さらに Johnson 準同型の一番最初の議論は、ちょっとだけ Mal'cev completion の言葉で言ってますが、元々は Dennis Johnson の仕事で、ある部分は Andreadakis が知っていた事です。逆に任意の $f \in \text{Hom}(H_{\mathbb{Q}}, \Lambda^2 H_{\mathbb{Q}} / \langle \omega_0 \rangle)$ が与えられたとき、

$$\tilde{f}(\xi, u) := (\xi + f(u), u)$$

とおくと、 $\tilde{f}$ は準同型になり、 $\tilde{f} \in \text{Aut}_+(N_2 \otimes \mathbb{Q})$ となる。これが 2 つめのビックリです。最初のビックリは $\tilde{f}$ が準同型になる事です。これで証明が終わるのですが、この計算は省略します。4 行くらいの計算です。

以上から $d = 2$ の場合ですが、自己同型群が決まって、2 に依らず一般の d に対して、 $N_d \otimes \mathbb{Q}$ の自己同型群は、線型代数群と呼ばれるものになります。これが semi-simple part と nilpotent part の半直積になるというのは、深い理論で Levi-Chevalley の分解定理と呼ばれます。こういう事がいろいろな事が適用できていろいろな事が分かっています。

以上より

$$\rho_2 : \mathcal{M}_{g,*} \rightarrow \text{Aut}_+(N_2 \otimes \mathbb{Q}) \cong \text{Hom}(H_{\mathbb{Q}}, \Lambda^2 H_{\mathbb{Q}} / \langle \omega_0 \rangle) \rtimes \text{Sp}(2g, \mathbb{Q})$$

こういう準同型が得られる。自己同型群が具体的に書いて、semi-simple part は増えない。この作用は Hom があるから、その dual が出てきますが、Poincaré duality で $H_{\mathbb{Q}}$ そのものです。それが 3,4 とどんどん上がってくると、いまは左側は abel 群ですが、ここがベキ零群になって、自己同型が具体的に書けるベキ零群になります。ベキ零群は中心拡大で記述されるので、具体的な cocycle があって具体的に記述できます。問題はどうかと言いますと、一般に

$$\rho_d : \mathcal{M}_{g,*} \rightarrow \text{Aut}_+(N_d \otimes \mathbb{Q})$$

が得られる。問題は群のこの構造の記述や image の記述です。その前になぜこういうものが必要になるかと言いますと、これが今回の最終定理ですが、これは大分前に Johnson 準同型を写像類群全体に拡張するという仕事をしたときの、仕事の一部分です。

Theorem 6.1.

$$\mathcal{M}_{g,*} \rightarrow \frac{1}{2} \Lambda^3 H \rtimes \text{Sp}(2g, \mathbb{Z}) \subset \text{Hom}(H_{\mathbb{Q}}, \Lambda^2 H_{\mathbb{Q}}) \rtimes \text{Sp}(2g, \mathbb{Q})$$

image は $\mathbb{Q}$ 上では完全に記述できて、全射ではなくて finite index で入ります。その後、この辺の詳しい事は Birman-Brendle-Broadbent が調べています。私がやったのは像が $\frac{1}{2} \Lambda^3 H \rtimes \text{Sp}(2g, \mathbb{Z})$ の finite index subgroup という事です。

こうなるという事がわかったんですね。但し

$$\Lambda^3 H \hookrightarrow \text{Hom}(H_{\mathbb{Q}}, \Lambda^2 H_{\mathbb{Q}} / \langle \omega_0 \rangle) \cong_{P.D.} H_{\mathbb{Q}} \otimes (\Lambda^2 H_{\mathbb{Q}} / \langle \omega_0 \rangle)$$

はどうなっているかという、自然に

$$\Lambda^3 H \ni u \wedge v \wedge w \mapsto u \otimes \overline{v \wedge w} + v \otimes \overline{w \wedge u} + w \otimes \overline{u \wedge v} \in H_{\mathbb{Q}} \otimes (\Lambda^2 H_{\mathbb{Q}} / \langle \omega_0 \rangle)$$

となります。 $\overline{u \wedge v}$ は mod $\langle \omega_0 \rangle$ という意味です。

この ρ_2 を Torelli 群 $\mathcal{I}_{g,*}$ に制限すると、これは homology に作用しないので、後ろの行列は無くなって

$$\rho_2|_{\mathcal{I}_{g,*}} : \mathcal{I}_{g,*} \rightarrow \frac{1}{2} \Lambda^3 H$$

に入りますが、こうやると $\frac{1}{2}$ ではなく integral な $\Lambda^3 H$ に入って、

$$\rho_2|_{\mathcal{I}_{g,*}} : \mathcal{I}_{g,*} \rightarrow \Lambda^3 H \subset \frac{1}{2} \Lambda^3 H$$

これがそもそも Dennis Johnson が定義した Johnson 準同型 τ_1 と呼ばれているものです。これが higher Johnson 準同型へと発展していつ、今でも発展中です。私は永遠に終わらないと思いますが、非常に複雑な、多少分かったかなと思ってたのですが、結構いろいろ分かりましたが、分からないものの増大度の方が大きいですね。うれしいようでやや複雑ですね。非常に深いからうれしい面もあります。たかが tensor 代数と言われるものに埋め込まれる自由 Lie 代数の中にどうしてこんな深いものがあるのでしょうか。驚くものがあります。

それでこの証明のスケッチをしようと思ったのですが、それは時間の関係で省略して、最後に展望をお話したいと思います。

この image を考えるわけですが、 $\text{Aut}_+(N_d \otimes \mathbb{Q})$ は大きすぎるわけです。 ρ_2 ですでに大きい。これは次元を計算すれば分かりますが、こちらの方が非常に大きい。そこの所を一般の d に対してうまくやれるというのが、Garoufalidis-Levine の仕事です。これは前回、前々回お話ししました homology cylinder の Habiro-Gussarov の理論、現在は沢山の人、日本では逆井さん、合田さんなど、活発に研究されている群です。アイデアは次のようなものです。Garoufalidis-Levine の論文に書いてある定義です。 d が大きくなるに従って段々近似がよくなって、自然な準同型 $\text{Aut}(N_{d+1}) \rightarrow \text{Aut}(N_d)$ がある事は、Andreadakis が既に証明していましたが、

$$\text{Aut}_0(N_d) := \text{Im}(\text{Aut} N_{d+1} \rightarrow \text{Aut} N_d)$$

と定義しました。この人たちは大体において disk を抜いて自由群の所でやっています。理論的な理由から穴あきではなく点付きでやる方がよい場合もあります。定義、idea は彼らの論文に書いてあります。 $\text{Aut}(N_{d+1}) \rightarrow \text{Aut}(N_d)$ は全射ではないので、 $\pi_1(\Sigma_g)$ の自己同型、global 自己同型があったとすると、全ての d に対して自己同型を誘導します。そこで $\text{Aut}(N_{d+1})$ から来ないものは、言わばいらぬもの、いらぬものと言うと本当は違って、この中にも非常に深いものがあります。この段階ではいらぬものです。自由群の自己同型ではいりません。こう定義すると、そうすると $\text{Aut}_0(N_d \otimes \mathbb{Q})$ は線型代数群になって、 $\text{Aut}_0(N_d) \subset \text{Aut}_0(N_d \otimes \mathbb{Q})$ はその中の lattice になります。この辺りは Garoufalidis-Levine の idea を使って Hain さんとか私が考えました。Hain さんは代数幾何、Hodge 理論の立場から、私はトポロジーの立場からです。とにかく非常によい定義です。この Garoufalidis-Levine の論文を読んだときになるほどと思いました。困っていたんですね、近似しているのに上に行くとう入らないものが沢山でくる。単に捨てればよいのだけれども、algebraic な線型代数群の性質がなくなると困るなと思っていました。単にこの idea をそのまま使うと、よい性質を保ったままできる。結局 ρ_d というのがあって、基本群の自己同型で、one relation を保つので、symplectic な automorphism を利用します。

$$\rho_d : \mathcal{M}_{g,*} \rightarrow \text{Aut}_0(N_d) \hookrightarrow \text{Aut}_0(N_d \otimes \mathbb{Q})$$

これが lattice として線型代数群の中に入ります。lattice というと、これがもし $Sp(2g, \mathbb{Q})$ なら、その中の $Sp(2g, \mathbb{Z})$ といった integral なものです。こういう準同型が得られる。ここで問題を設定する事ができます。

Problems

1. $\text{Im} \rho_d = ?$
2. $\text{Aut}_0(N_d \otimes \mathbb{Q})$ の構造, 特に $H_1(\text{Aut}_0(N_d \otimes \mathbb{Q})) = 0$?

まず ρ_d の image はどうなるか。次に順番は逆だったかもしれませんが、そもそも $\text{Aut}_0(N_d \otimes \mathbb{Q})$ の構造はどうなるか。 $\mathbb{Q}$ が無いやつがわかればよいのですが、そこには数論的には絶対 Galois 群がここに現れて $\mathbb{Z}$ 上いろいろな意味を持つてくると思いますが、まだ時期尚早だと思います。まず $\mathbb{Q}$ 上でやります。この cohomology や abel 化がどうなるか。一番大きな問題は写像類群は perfect なのですが、 $\text{Aut}_0(N_d \otimes \mathbb{Q})$ の abel 化が自明か自明でないかです。私は予想という少し強すぎますが、期待としては、abel 化は自明であると思います。 $\mathbb{Z}$ 上では実は abel 化は自明でないという事が分かっています。 $H_1(\text{Aut}_0(N_d \otimes \mathbb{Q})) = 0$ か? 0 でないならそれは何か。何れにしても深い問題です。群の構造という場合、abel 化はどうなるかというのが、一番最初です。証明しようとする手段がないわけではなくて、こういうものは grading が入って下の方からコンピュータでどんどん計算できます。そうすると下の方ではないだろうという事がわかります。Torelli 群 version でやると、

abel 化は沢山あるわけですが、それが traces と呼んでいたもので尽きているんじゃないかと思っていたのですが、2010 年、Conant-Kassabov-Vogtmann の仕事でそうではないと、

質問:それは d に依らずにですか?

はい、これは d に依らずにです。 $d = 1, 2, 3$ については $\text{Imp}_d^{\mathbb{Z}}$ は知られています。 Zariski dense という言葉がありますが、だから $\mathbb{Q}$ の中に $\mathbb{Z}$ のような感じで、 $\text{Imp}_d^{\mathbb{Z}}$ は $\text{Aut}_0(N_d \otimes \mathbb{Q})$ の中で Zariski dense になります。 しかし $d = 4$ のとき (一般には $2k+2$ のとき)、まず最初 trace というものをやったのですが、Zariski dense ではないという事も分かっています。 この話は時間がなくなって出来なかったのですが、trace というものを構成して証明できます。 実はこれで尽きているかと最初は思ったのですが、話はそうではなくて、 Imp_d はどんどん小さくなっていきます。 最初は traces, これを発見したのは確か 1980 年代の終わり頃でした。 東工大の第 5 演習室と呼ばれる部屋です。 今は違っていますが、

今は base point preserving で理論を展開しているので、結局ここではなくなるのですが、理論の展開で重要だったのは Asada-Nakamura の $j_{g,1}$ に関する仕事です。 disk を除いた場合、 ω_0 がいない場合に、Johnson image というここに変なものがあるという事を示しました。 これより前に $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, Oda さんが予想して、Nakamura さん、Matsumoto さんが実際に現れる事を証明しました。 Asada-Nakamura の仕事があつて、その次に出て来たのが、2010 年、Conant-Kassabov-Vogtmann, これはまだ論文になっていなくてアナウンスメントです (後記: 2011 年 7 月 25 日に arXiv に出ました)。 しかしこれは私にとって非常にビックリというか、traces があるものの abel 化を記述していると思ったのですが、そうではない。 戦略の練り直しを迫られました。 これについては後でもう少し言います。

それからその次に出て来たのが、同じ 2010 年の Satoh-Enomoto の理論です。 Satoh Takao さんの結果は自由群の自己同型に対して展開されていて、1 つ大きな結果として、自由群の自己同型群の場合の Johnson cokernel をある予想、Andreadakis 予想を modulo にして完全に決定しました。 きれいな結果です。 その Satoh 理論を写像類群の場合に適用して Johnson cokernel に関する結果を得ました。 その内の幾つかは Nakamura さんが予想をしていました。 詳しくはこの論文を見て下さい。

これでおしまいかというと、Johnson cokernel, $g = 1$ のとき、Torelli 群は自明になってトポロジーは何もなくなるんですね。 M_1 は $SL(2, \mathbb{Z})$ で disk を除いたとしても、高々その中心拡大で何もない。 ところが数論的には Torelli 群が非常に大きい。 Nakamura さんと 1980 年代にいろいろ議論しました。 その頃から Nakamura さんは、数論的に $g = 1$ のときの Torelli 群は大きいのだと言っていました。 それは一体なんだろうとずっと思っていました。 これについて最近 Nakamura さんが論文を書かれました。 また Hain-Matsumoto さんも種数 1 の理論を展開しておられます。

2 次特性類の理論や Faber 予想、全部 genus 1 に絡んできて、それはトポロジーの立場からいうと、

$$H^1(SL(2, \mathbb{Z}); S^{2k}H),$$

$SL(2, \mathbb{Z})$ は $g = 1$ の写像類群。 これは一番由緒正しい modular 群、単に modular 群と言ったらこの群ですね。 それが genus 1 のこういう story に全部関わってきます。 $S^{2k}H$ は $2k$ 次の symmetric power です。 traces は genus 2 以上で現れて、奇数次の symmetric power が重要になるのですが、genus 1 では偶数次の symmetric power が重要になります。

ずっと昔に torus の微分同相の特性類を計算したときに、これは計算しなくては行かなかったのですが、 $S^{2k}H$ は何かというと、多項式代数 $\mathbb{Q}[x, y]$ の homogeneous part で、それを係数とする cohomology を計算した事があつて、ある論文を書いたのですが、書いた後に、これは数論的に非常に大事なものであつて、Eichler-Shimura 理論というものがあつて、それと密接に関連するということを教わりました。 $S^{2k}H$ 係数の

cohomology の次元はいつも 1 以上の奇数 $1+2r(2k)$, なのですが, 1 に対応する部分, これは Eisenstein series と呼ばれるもので, 後ろの部分は cusp form と呼ばれるものが対応しています. これがそのまま torus の微分同相群の cohomology になります. 写像類群の場合は微分同相群の identity を含む連結成分が可縮になるというのは, $g \geq 2$ で, $g = 1$ の場合は torus と同じ homotopy type になります. 自分自身に translation で働きます. これが出て来て, 私は $\mathbb{Q}$ 係数だけでなく, $\mathbb{Z}/p$ -係数でも計算して具体的に書きました.

これが, 数論の人たちの理論に出て来て, さらに Conant-Kassabov-Vogtmann の理論にも出てきます. 全部に出てきます. まだ半ば手探り状態ではありますが, トポロジーの立場から, これらを考えながら見ていくと, この共通の場所というものが見えて来ました. 2,3 回前に $\mathfrak{h}_{g,1}$ という Lie 代数を書きましたけれど, g を無限に飛ばしたときの構造と, 各 g について非安定な構造の両者の兼ね合いが重要となります. 問題は絶対 Galois 群が現れてくる, それも含めた arithmetic Johnson image です.

traces で絶対 Galois 群の像が記述できるのではないか, これは 95,6 年頃に湘南電車に乗ったときにひらめいた考えです. それから 15,6 年くらい経って, これは妄想ではないかと思われるかも知れませんが, 実はトポロジーや数論の沢山のことに関連していて, 全てが妄想という訳ではないと確信しています. 最後の 4 次元の不変量の所はそうかもしれません. これが一番難しいところです. 途中の Galois 群の所は, それに比べれば研究しやすいと思います.

結論をいえば, 非常に沢山の人の努力によって多くのことがわかってきましたが, わからない事の増大度の方が大きいという事です. どうもありがとうございました.

第 11 回 (2011 年 7 月 27 日)

昨年度 10 回、話させて頂きました。10 回目が 3 月 2 日でした。その後ずいぶんいろいろな事がありました。続きという事で、10 回目まで聞いてらっしゃらない方もおられると思います。10 回目までで予定が終わらなかったのですが、第 6 章までいきました。今日は第 7 章という事でお話します。

7 モジュライ空間

moduli という最近の数学では最重要キーワードの 1 つだと思います。moduli という、moduli という言葉を使ったかどうかは調べたわけではないのでわかりませんが、まず Riemann、彼の名前を取った Riemann 面、Riemann 面の moduli 空間、大体 1850 年代からです。Riemann は Riemann 面とは言わなかったと思いますが、今流に言えば Riemann 面の moduli 空間を導入したのが 160 年前ですね。Riemann と言えば、数学者中の数学者というか、Gauss, Riemann と言ったらもう誰でも知っています。今の未解決問題の一番大きなものも Riemann 予想です。それ以外にも沢山仕事をしています。Riemann 面の moduli 空間 $\mathbb{M}_g$ 、太文字の記号を使ってあらわします。g というのは今まで扱ってきました Σ_g 、種数 g の向き付けられた閉曲面の種数ですね。

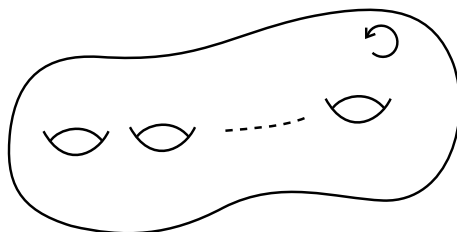


Fig.1 種数 g の有向閉曲面

$g = 0$ の場合は 2 次元球面、これが Gauss の曲面論で、曲面の曲がり具合を測る物差しとして使った単位球面。 $g = 1$ は torus で $g = 2, 3, 4, 5$ と続いて、皆さんもご存知のように大雑把に分けると、

- $g = 0$, elliptic な世界,
- $g = 1$, parabolic な世界,
- $g \geq 2$ の hyperbolic な世界.

こういう 3 つの世界があって、Gauss 曲率 κ で、定曲率でいうと

- $g = 0$ が $\kappa \equiv 1$,
- $g = 1$ が $\kappa \equiv 0$,
- $g \geq 2$ が $\kappa \equiv -1$.

$g \geq 2, \kappa \equiv -1$ が結局一番豊富な世界、値は negative ですが、negative と言うと文字通り negative なニュアンスがありますが、そうではなくて $g \geq 2$ が一番豊富な世界という事が段々わかってきて、negative でもなんでもない。この世の中はこの 3 つのどれかというのは大問題です。永遠にわからないとは思いますが、Newton、それから古典的な物理学もそうですが、Newton 力学ではこの世の中は $\mathbb{R}^3$ だろうと考えたというか、当然だろうと思っていました。ところがそうではないだろうというのが Einstein。そして数学的に言うと Riemann が曲がった空間での Riemann 計量というものを定義して、Riemann 幾何学、そういう流れがあって、もちろんそ

の前に Gauss はいます. 1827 年の Gauss の曲面論, 大きくいうと現代幾何学が始まったのがこの 1827 年です. そしてこの Riemann が有名な幾何学の Goettingen 大学での就職講演をしたのが 1854 年. Gauss はこの翌年に亡くなります. 自分で調べたわけではありませんが, Gauss はその講演を聞いて非常に感激したと言われています. ちなみに 1854 年というのは Poincaré が生まれた年でもあります. そういうことを調べていくと, 歴史の綾とでもいうべきものはおもしろいものがあります. Gauss, Riemann はその二人はもう全数学ですけれども, Poincaré になると解析学と幾何学. 独創的な仕事をしました.

moduli 空間に戻ります. 種数 g の Riemann 面, こういうものがあって, これが何かはすぐに言いますが, 種数 g の Riemann 面の同型類, 双正則同値類,

$$\mathbb{M}_g = \{\text{genus } g \text{ の Riemann 面}\} / \text{双正則}$$

これが集合としての定義です. Riemann 面とは何かというと, これを言い換えますと Σ_g 上に複素構造, complex structure を与えたものです. この complex structure 全体を双正則で割ったものが Riemann 面の moduli 空間です.

さらに Σ_g 上の complex structure というのは何かというと, Σ_g 上の tangent bundle というのは, 今は向きを与えていますから, $GL^+(2; \mathbb{R})$ -bundle です. 向き付けられた plane bundle です. これ上に複素構造, $\mathbb{C}$ -structure を入れます. 複素構造と言っても複素 1 次元ですから, $\mathbb{C}$ -構造です. 通常偶数次元の多様体があったら, その tangent bundle に半分次元の複素構造を入れる, 入らない場合もありますが, 入ったときにはこれは almost complex structure, 概複素構造と言います. almost complex structure と complex structure の間には, integrability と行ってこれまた深いものがあるわけですが, 複素 1 次元の場合にはこれが, 曲面は理想郷と言ってきましたが, integrability の条件が自動的に満たされて, almost complex structure と complex structure は全く同じという理想的な状況です. integrability の obstruction は 2 次元の場合定義されるが, いつでもゼロ. いつでも integrable. これは微分幾何的に言う, 等温座標というものがあって, 角度を変えないで conformal にもっていける, 古典的にもう 100 年以上前にわかっている事です. 複素構造は, topology になじむというか, 構造群もこの部分群ですね, $GL^+(2, \mathbb{R}) \supset GL(1, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$ に reduce するという事です. これは解析学というよりは topology です. 単なる位相的な条件です. 単なるということちょっと語弊がありますが, 複素構造は Σ_g 上, 実 2 次元, 複素 1 次元のときは単なる tensor ですね, そこに何が働くかということ微分同相が働くわけで, 向きを与えていますから, ずっとここで使って来てる, 何か多様体があったら向きを保つ微分同相が働きます. そうすると tensor ですから, 微分同相が pull back で働きます. 微分同相があったら, その微分を考えると, それは tangent bundle の自己同型を与えますが, 複素構造があったら pull back で別な複素構造になる. そういうものは $\text{Diff}_+ \Sigma_g$ で互いに移りうるわけですが, そういう移りうるものを同一視する, それが複素構造の場合の双正則で割るという事と一致します.

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_g &= \{\text{genus } g \text{ の Riemann 面}\} / \text{双正則} \\ &= \{\Sigma_g \text{ 上の complex structure}\} / \text{Diff}_+ \Sigma_g \end{aligned}$$

これは曲面が理想郷で次元が上がってくるとこういうことはなくなります.

C^∞ -位相で $\text{Diff} \Sigma_g$ は位相群になるのですが, 位相群に関して identity の component を $\text{Diff}_0 \Sigma_g$ と書きました. これは開かつ閉部分群, 正規部分群になります. そうするとその商があるわけですが, これは定義で mapping class group になります. 昨年度出てきましたが, $\mathcal{M}_g$ と書きました.

$$1 \rightarrow \text{Diff}_0 \Sigma \rightarrow \text{Diff}_+ \Sigma_g \rightarrow \mathcal{M}_g \rightarrow 1$$

ここからこれを使いますと、 Σ_g 上の複素構造を全体 $\text{Diff}_+\Sigma_g$ で割らないで、もう少し小さい所 $\text{Diff}_0\Sigma_g$ で割るとこれが moduli について話すときに、なくてはならない Teichmüller という人がいますね、その Teichmüller 空間です。

$$\begin{aligned}\mathbb{M}_g &= \{\text{genus } g \text{ の Riemann 面}\} / \text{双正則} \\ &= \{\Sigma_g \text{ 上の complex structure}\} / \text{Diff}_+\Sigma_g \\ &= \left(\{\Sigma_g \text{ 上の complex structure}\} / \text{Diff}_0\Sigma_g \right) / \mathcal{M}_g \\ &= \mathbb{T}_g / \mathcal{M}_g\end{aligned}$$

Teichmüller の $\mathbb{T}$ を取って $\mathbb{T}_g$ と書きます。さらに Teichmüller 空間を写像類群で割って Riemann moduli 空間。こういう風になって、なぜ $\mathbb{T}_g$ を導入するかというと、これの方が調べやすいからです。これは 1937 年の Teichmüller の idea で、この仕事は大変有名で、Gauss から数えると、110 年くらい後です。Teichmüller、ドイツの数学者の素晴らしい doctor 論文です。これ 1 つですと永遠に名前が残ると思います。Teichmüller 空間、これが大事です。それで結局まとめると、Riemann moduli 空間、Riemann 自身がこれを定義したかどうかはややわかりませんが、少なくとも Riemann が証明したのは、 g が 2 以上のとき、moduli 空間には複素構造が入って、local には $\mathbb{C}^{3g-3}$ であることを証明しました。これを Riemann は知っていたと、 $g = 1$ を代入すると、 $3g - 3 = 0$ になってしまいますが、 $g = 1$ のときは parabolic な世界で、後でやりますがまた別な話が必要です。

そして、これを研究するために、これ自身がどういう空間であるかを調べるのが、目標になりますけれども、Riemann の moduli を調べるために、

$$\mathbb{M}_g = \mathbb{T}_g / \mathcal{M}_g$$

から、Teichmüller 空間を経由すると調べやすくなります。Teichmüller 空間を mapping class group で割ったもの、こういうものとして考えます。

なぜ Teichmüller 空間が調べやすいかと言いますと、その元、Teichmüller 空間の元をどう表示するかですが、moduli 空間ではなく Teichmüller 空間の元は次のように表せます。それは同値関係で割った同値類

$$\mathbb{T}_g \ni [f : \Sigma_g \rightarrow R]$$

ですが、まず種数 g の閉曲面を fix します。ここ上に Riemann 面 R があって $f : \Sigma_g \rightarrow R$ は orientation preserving diffeomorphism です。 f を与える事を、微分可能多様体としての marking を 1 つ与えると言います。逆に言うと R 上の複素構造を f で pull back すると、 Σ_g 上に複素構造が定まります。この同値関係によって Teichmüller 空間の元を表します。この同値関係ですが、どのように定義するか、

$$[f : \Sigma_g \rightarrow R] = [f' : \Sigma_g \rightarrow R']$$

f' というと微分のような気がしますが、微分ではなく別の写像です。この 2 つが Teichmüller 空間の元としていつ同じものを定義するかと言いますと、 R から R' へ双正則写像 $h : R \rightarrow R'$ が存在して、Riemann 面として、複素 1 次元多様体として同型で、さらに $h \circ f$ が f' と homotopic になるときです。これが同値関係の定義です。通常 Teichmüller 空間はこのように記述して元を具体的に与えます。それで具体的にどのように調べていくかと言いますと、その前にあのように定義すると、Teichmüller 空間に写像類群が作用して、その商空間が Riemann moduli 空間です。その作用は右作用で書いた方が良いので、右作用で書きます。これは単なる notation、技術的な問題なので、写像類群が Teichmüller 空間に右から作用します。

$$\mathbb{T}_g \times \mathcal{M}_g \rightarrow \mathbb{T}_g.$$

それでどのように書けるかというと

$$\mathbb{T}_g \times \mathcal{M}_g \ni ([f : \Sigma_g \rightarrow R], \varphi) \mapsto [f \circ \tilde{\varphi} : \Sigma_g \xrightarrow{\tilde{\varphi}} \Sigma_g \xrightarrow{f} R] \in \mathbb{T}_g$$

ここで $\tilde{\varphi} : \Sigma_g \rightarrow \Sigma_g$ は何かというと, $\varphi \in \mathcal{M}_g$ は Σ_g 上の orientation preserving diffeomorphism の isotopy 類ですが, $\tilde{\varphi} \in \text{Diff}_+ \Sigma_g$ は $\varphi \in \mathcal{M}_g$ の代表元です. 代表元 1 つ取って, 微分同相として 1 つ与えておいて, そして f と合成する. そうするとこれが右作用になります. これは代表元を取ったのだけれども, 別の代表元を取ったとしても, 差は $\text{Diff}_0 \Sigma_g$, identity と isotopic な微分同相ですから, これは Teichmüller 空間の同値類の中に吸収されて, 代表元の取り方に依らない.

さっき $g = 0, 1$ と 2 以上で分けると言いました. 2 以上が豊富な世界で研究も盛んですが, しかしなんと言っても, parabolic というか, flat な世界. これが全ての始まりです. $g = 1$, これが全ての始まりで, 力学, 物理でいうと Newton 力学, 幾何でいうと Euclid 幾何学. これが全ての基本になって, 中世まではそれが全てである, 宇宙はこれで成り立っていると思われていました.

ところが, まず言ったのは Gauss ですね. 宇宙は曲がっているかもしれない. それが Gauss 曲率です. それを理論的に Riemann が, Gauss は曲がっていると言っても定曲率, この辺は少し分かりませんが, Gauss は各点で変化する事を言っていたのかどうか, いずれにしても Riemann が各点で違う曲がり具合をするという空間を考えました. 1854 年の Riemann の仕事で, それから大分時代が下って Einstein がそれを使って特殊相対論, 実際世の中がそうになっているだろうというのがだんだん宇宙論, 物理学で確かめられてきたわけです.

それで, 全ての基本ですけど, $g = 0$ はどうなっているのだろう. これは一番均整の取れたというか小さくまとまったというと語弊がありますが, これ自身高次元では多様体が沢山出て来てこれ自身の分類が大事になりますが, 複素 1 次元の場合には $\mathbb{M}_0$ ですね, S^2 上の複素構造, S^2 というのはもちろん $\mathbb{CP}^1$, 1 次元複素射影空間であって, これは複素多様体ですから種数 0 の Riemann 面です. これの双正則類を考えるわけです. これは関数論で基本中の基本ですね, S^2 上の任意の複素構造は全て複素射影空間 $\mathbb{CP}^1$ と双正則である. だから種数 0 の Riemann 面の moduli 空間 $\mathbb{M}_0$ は 1 点になります.

$$\mathbb{M}_0 = \{\mathbb{CP}^1\}$$

$g = 1$ でどうなるか. ここから分類が始まるわけです.

$$\mathbb{M}_1 = \{g = 1 \text{ の Riemann 面} \} / \text{双正則}$$

ですね. これは改めて書くと, 種数 $g = 1$ の Riemann 面, こういうやつを全部もって来て, Riemann 面として互いに同じ, 双正則, 一方から他方に微分同相であって複素構造を保つものがあり, 逆向きもそう, これで割るのが双正則同値. 定義ですね. ここで再び関数論を使います. $g = 1$ ですから torus ですから, その普遍被覆を考えると普遍被覆は $\mathbb{R}^2$, plane です. 関数論で勉強したように, このような種数 1 の Riemann 面というのは, その普遍被覆が必ず $\mathbb{C}$ になる. そしてこれを割るわけです.

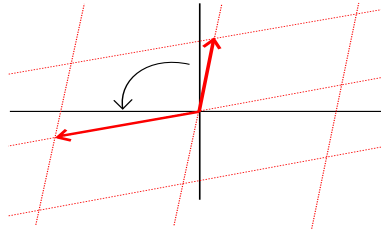
$$\mathbb{M}_1 = \{g = 1 \text{ の Riemann 面} \} / \text{双正則} \ni \mathbb{C} / \text{lattice}.$$

lattice で割る, lattice がどのように書けるかと言いますと, $\mathbb{Z}$ 上 rank 2 の自由 abel 群です. $u, v \in \mathbb{R}^2$ というのは 2 次元実ベクトル空間の基底で,

$$\text{lattice} = \mathbb{Z}u + \mathbb{Z}v,$$

こういうものを lattice といいます. こうやると実は Teichmüller 空間が 2 枚出て来てしまいます. 上半平面を普通使うのですが, このまま使うと上半平面, 向きを逆にすると, 下半平面と, 2 枚出て来てしまいます. こ

ここで条件を付けます。 u, v は実 2 次元ベクトル空間の基底ですね、1 次独立なベクトル u, v があるわけですが、 u から v を反時計回りに測ったときに基底ですから 180 度にはなれないわけですが、これが 180 度未満。 そうすると u から v への orientation が元々の $\mathbb{C}$ の orientation と合致している。 そういう条件です。 v



そうするとこれが種数 1 の Riemann 面の moduli 空間になるわけです。これをこう書き直していきます。種数 1 の moduli 空間は moduli と言っていますが、lattice の全体を考える、lattice の moduli を考えます。lattice というのは非常にマイルドな 1 つの条件のある、実 2 次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^2$ の基底です。その lattice を割るわけです。双正則で割る。双正則で割るというのはさっき $GL(1, \mathbb{C})$ というのがありました。 $\mathbb{C}^*$ -作用で割る。これが $GL(1, \mathbb{C})$ ですね。

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1 &= \{g = 1 \text{ の Riemann 面} \} / \text{双正則} \ni \mathbb{C} / \text{lattice} \\ &= \{\text{lattice}\} / \mathbb{C}^* \text{-作用} / \mathcal{M}_1 \end{aligned}$$

次にこれは高校でもやりますし、大学の入試問題の宝庫である、ここら辺の、 $\mathbb{C}^*$ というものは、絶対値 1 の複素数があってそれから長さがあって群としてこのようになります。

$$\mathbb{C}^* = S^1 \times \mathbb{R}_{>0}.$$

これは何かというと S^1 は回転、 $\mathbb{R}_{>0}$ 、これは拡大縮小、原点中心の拡大と縮小。線型な回転と拡大縮小。これで割るわけです。そして moduli ですから、写像類群で割らなくてはいけないので、lattice を $\mathbb{C}^*$ で割って、なおかつさらに $\mathcal{M}_1$ で割る。

$\mathcal{M}_1$ というのは去年やりましたが、homology への作用で $SL(2, \mathbb{Z})$ と同型です。

$$\mathcal{M}_1 \cong SL(2, \mathbb{Z}).$$

moduli 空間の事をやると必ず出てくるのが、Teichmüller 空間とそれに associate した modular 群。種数 1 の modular 群。modular 群というのは沢山ありますが、 $SL(2, \mathbb{Z})$ は modular 群中の modular 群。単に modular 群と言ったら $SL(2, \mathbb{Z})$ の事です。これは 2 行 2 列の行列で成分が全部整数であって、 SL というのは行列式が 1。こんなものは全部分かっているかというとなんでもない話で、これはもう永遠に構造は完全に解明されるという事はないでしょう。この congruence subgroup など、いろいろな重要な finite index subgroup があって、それらは数論だけでなく、数学のあらゆる分野に涉って重要で、基本中の基本。最近私は昔にやった $SL(2, \mathbb{Z})$ の twisted cohomology というものの威力を再認識しました。そうすると数論との関係も出てきますが、その辺はまた改めてお話ししたいと思います。これはトポロジストにとっても、種数 1 の写像類群は、はい、homology 群への作用で全て分かりました、それでおしまいとやりがちで、私自身もそうやってきましたが、とんでもないという事が段々分かってきました。トポロジーの立場からも重要です。さっきの写像類群の定義の中で

$\text{Diff}_0 \Sigma_g$, これが合ったわけですけど, 写像類群の理論で大事な事は, g が 2 以上のときこれは可縮である.

$$\text{Diff}_0 \Sigma_g \sim \{*\} \ (g \geq 2).$$

これは Earle-Eells の基本的な仕事です. では $g = 1$ のときはどうか, これも Earle と Eells の仕事です. $g = 1$ のときは torus で, torus は torus 自分自身に働いています, 平行移動として働きます. これが $\text{Diff}_0 \Sigma_g$ と homotopy 同値

$$\text{Diff}_0 T^2 \sim T^2 \ (g = 1)$$

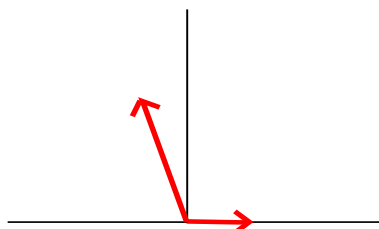
になります.

種数 1 のこの cohomology を考えて, twisted cohomology を考えるとそれが $SL(2, \mathbb{Z})$ の twisted cohomology になって, それは数論, Eichler-Shimura の理論があって, それが最近トポロジーの方にもどんどん出て来て我々にとっても大変な問題になっているわけです. 2つの観点から出て来ているというわけで, ここではこれくらいにしたいと思います.

そうすると複素数は大学入試問題の宝庫と言いましたが, もう少し進んで一次分数変換. これはどうなるか, lattice を $\mathbb{C}^*$ -作用, 回転と拡大縮小で分類しようとする, u, v は基底なのですが, u を正の実軸上にもっていきます. さらに拡大縮小で単位ベクトルにもっていきます. 2 番目のベクトル v は 180 度未満なので上半平面

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C}; \Im z > 0\}$$

に乗ります. そうするとこういう風になりまして,



M_1 , homology 群の基底を決めると $SL(2, \mathbb{Z})$ になります. そうすると, xy -平面で y 座標が正の部分, 上半平面, Gauss 平面であって imaginary part が正. 双曲的な非 Euclid 幾何学の展開される, これも数学では最重要テーマの 1 つです. elementary ですが, いろいろと行き詰まるとここに戻るのが一番良いです. あるいはもちろん $\mathbb{R}^2$ に戻る事もあります. ここに作用するのですが, この作用を計算すると線型作用ではなくて, もちろん $SL(2, \mathbb{Z})$ を平面に線型に作用させると上半平面が上半平面にいくという事はないですから, これはちょっとしたおもしろい計算ですけど, 一次分数変換, linear fractional transformation. これは関数論で勉強する一次分数変換というものになります. こら辺の計算は大学 4 年生くらいでやると非常に面白いと思います.

そうするとこの作用というのはちょっと復習ですけども, さっき Teichmüller 空間に modular 群は右から作用すると言いましたが, ここでは左からの作用で書かせて下さい.

$$SL(2, \mathbb{Z}) \times \mathbb{H} \ni \left(A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, z \right) \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \in \mathbb{H}$$

$$a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1$$

こういう関数論で出てくる大事な作用です．実際には $-I = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ が identity になるので，effective にならない． $PSL(2, \mathbb{Z}) = SL(2, \mathbb{Z}) / \pm I$ の作用というものになります．

これは古典中の古典です．では $\mathbb{H}$ を割ったら結局どうなるのか．種数 1 の Riemann 面の moduli が出てくるのです．

非 Euclid 幾何で Poincaré 計量というものがあって，通常の Euclid 計量は $ds^2 = dx^2 + dy^2$ で，それを y^2 で割ったものが Poincaré 計量

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

で，双曲的な非 Euclid 幾何学が展開するわけです．

測地線は実軸と直交する直線または円になります．

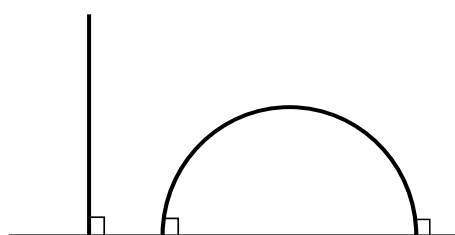


Fig.4 双曲幾何学における測地線

これを直線だと理解すると，非 Euclid 幾何学，すなわち 第 5 公準を否定する，Gauss, Bolyai, Lobachevsky の幾何学です．

第 5 公準を否定する幾何学が出来たというのは，直線外の一点を取って，それに平行な直線が一本だけある，というのが第 5 公準でした．Euclid 幾何学では異なる 2 直線の関係は 1 点で交わるか，平行か，でした．双曲的な非 Euclid 幾何学では，1 点で交わるか，平行か，もっと遠くか，世の中が広がるわけです．それを ultra parallel と言って，それが未来永劫，前世も込めて全く関係ない．

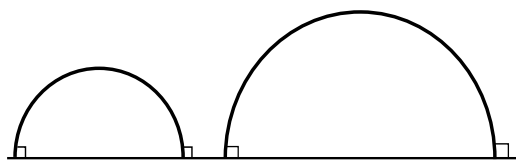


Fig.5-a ultra parallel

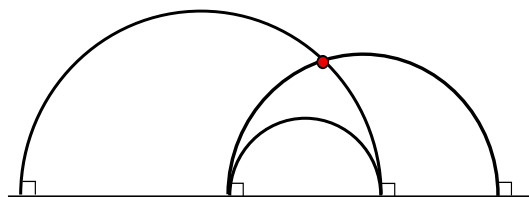


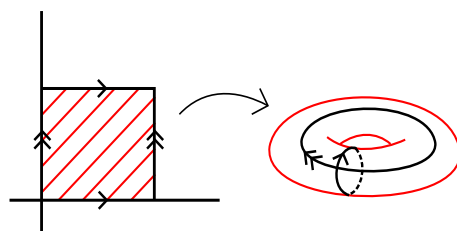
Fig.5-b parallel

parallel というのは直線外の 1 点を通って交わらない．それは平行線の公理を否定する，だけどそれ以外の公理は全て満たす．何千年の大問題が一瞬にして解けてしまったわけです．

Riemann 面の moduli, 種数 1 のときにも出てきます．問題は何かということ，上半平面に $PSL(2, \mathbb{Z})$ が作用していて，割ったらどういう空間か，そうすると基本領域というものが出てくるわけです．一番簡単なのは，例えば閉多様体があったとき，普遍被覆を考えて，そこに基本群が作用して，その商は元の多様体になります．torus の場合には，普遍被覆は $\mathbb{R}^2$ であってスタンダードな lattice で割ったものになります．

$$T^2 = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$$

となります．



人間的な操作をやると Gauss 曲率が正とか負の点が出てきますが、数学的に抽象的に貼り合わせる、こういうものをもってこないで、平らな torus ができる。これが数学の抽象化の 1 つの重要な所です。これは基本領域というものになるわけです。これを種数 1 の Riemann 面の moduli 空間でやるとどうなるか。これは上半平面に、

$$\mathbb{H}/PSL(2, \mathbb{Z}).$$

$T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ の場合は作用は平行移動ですから、アフィン変換で非常にわかりやすい Euclid 幾何です。上半平面への作用は一次分数変換なのでそれよりはちょっと難しい。これがどのような形をするかというのは、19 世紀の数学、トポロジーというより、まだトポロジーはない時代です。20 世紀初等にトポロジーは出来ました。ここにちょっと絵を書いて種数 1 の Riemann 面の moduli 空間を考えます。

これはあの、大学 4 年生か修士 1 年で、基本領域を計算するのだけれども、例えば Euclid 的にも平行移動、こういうものも一次分数変換なんですね。写像類群的にいうと Dehn twist のような元です。基本領域はこの場合にも共通ですから、右に、あるいは左に整数だけ平行移動するものがあつたら、ここに押し込められてあとこれがあるので縮められるわけです。

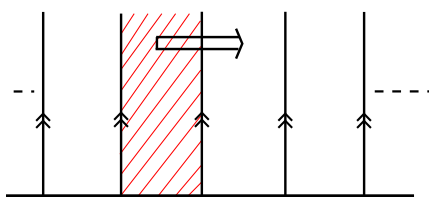


Fig.8 平行移動

そうすると座標を決めて、これをさっきの測地線でこういう風になっていて、そして測地線、ここに無限大という架空の点があるわけです。無限大とこういう風にやりまして、それでそうするとここに今度は実軸上全部有理数を考えて、全部書く事は出来ませんが、有理数を考えます。

半径が倍の測地線があつて、そこが虚数単位 $\sqrt{-1}$ でぶつかるわけです。ここは点線のところは、まあ虚軸を、基本領域というものは、どこでとってもよいわけですが、計算の都合上は 0 や虚数単位は基本領域に入れた方がよい。そうするとこの点線の間に基本領域を縮めて、次に今度は $\sqrt{-1}$ 中心の双曲的回転があります。それで縮めると、この一部分、半径というか、測地線でこの倍の、... と行くのだけれども、ぶつかって、こうなります。

$\sqrt{-1}$ 中心の双曲的な回転がある。回転があるから、例えば後でやる、これが moduli の spine という事になって大事になり、それを種数 2 以上に一般化したのが John Harer の素晴らしい仕事ですね。こいつがこれを中心にした双曲的な回転で貼り合わせる。双曲的な回転で回転して貼り合う。それでここ、 $\frac{1}{2}$ の所は $e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{3}}$ 。結論から言うと、基本領域というものは、種数 1 の Riemann 面の moduli 空間、というか Teichmüller 空間です。

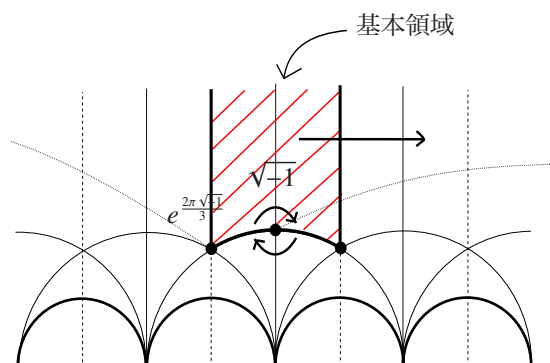


Fig.9 $PSL(2; \mathbb{Z})$ の $\mathbb{H}$ への作用とその基本領域

が、基本領域はこうなる。関数論でどんどん縮めていくと、ただ1つ代表元があって、同一視でいうと、矢印に従って、1だけ平行移動して同一視されて、これがRiemann面のmoduli空間です。これが基本領域です。

そうするとRiemann面のmoduli空間がどういう形なるかというのが、これは証明しなくては行けません。ここら辺が1変数関数論の教科書ですね。

そうすると結論としてRiemann面のmoduli空間というものがあって、こういうものを貼り合わせて、torusの場合は正方形を貼り合わせてtorusになります。moduli空間の場合、無限遠がありますが、これはcusp, moduliを考えると非常に大事でcusp. 何も言わないとelliptic curveのmoduli空間というやつです。ここにTeichmüller空間の点で言うと $\sqrt{-1}$ の同値類、ここが $e^{\frac{2\pi}{3}}$. 有限な点であってこれは枕のような形になります。それが $\mathbb{M}_1$ になるわけです。だから複素多様体、Riemann面ですけれども、複素構造も入っていてcuspと呼ばれるものがある、cone pointであって、角度がとんがってしまいます。ちなみに角度と言いますが、Euclid幾何と非Euclid幾何は角度は同じ。これはconformalな計量、 x 方向と y 方向、点毎に違いますが、平等に縮めています。従って角度は変わらない。だから360度が縮まっていますが、全体の角度は、結局ここここがつながって、このcone pointで、120度。こっちの方がどうなるかというと、半分でくっつけるから、尖って半分でcone pointで180度。

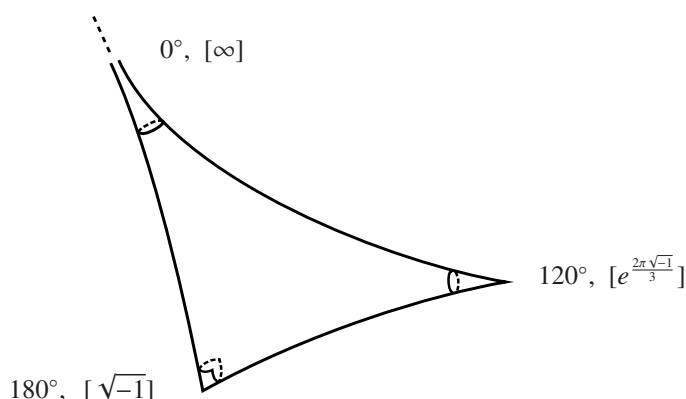


Fig.10 種数1 Riemann面のmoduli空間 $\mathbb{H}/PSL(2; \mathbb{Z})$

こういう風になって、これが種数1のRiemann面のmoduliです。じゃあこれでおしまいかというと、これ上のいろいろな数論、代数幾何、トポロジー、微分幾何、と展開されていて、本当に全て忘れてトポロジーでやるとcone pointなんていうのも関係なくなつて、 $\mathbb{R}^2$ とhomeoになりますね。ですからまずは $\mathbb{R}^2$ なのです。

が、微分幾何的には cone point とか cusp と呼ばれるものになるわけです。

種数 2 以上の Riemann 面の moduli に対する拡張は沢山の人が絡んだ仕事になるのですが、種数 1 の場合に古典的に分かっている事を今から言います。

トポロジーで、moduli 空間を調べる場合は、種数 1 の場合は $\mathbb{R}^2$, plane ですから何もないですね。種数が上がってくると、永遠に終わらないのです。トポロジーを調べようとする、spine といいますか、骨組みが見つかる就非常によい。微分幾何的には、構造があるわけですから、そこから出てくる自然なものがあります。spine というのは、これが spine、骨組みですね。

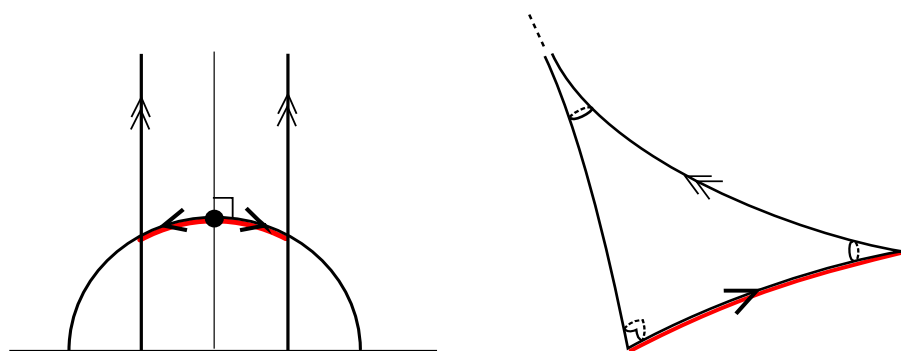


Fig.11 moduli 空間と spine(赤)

今の場合双曲幾何を使って見つけます。これだけだと、左側と右側がくっ付いて、そうするとですね、これは Teichmüller 空間の三角形分割を与えていて、しかし ideal という、頂点は飛び出てしまっている、Thurston boundary, Thurston の意味での boundary と Bers の boundary, 種数 1 の場合は Thurston boundary と複素解析的な boundary と、位相的な boundary と全て一致します。

それから無限遠も上半平面モデルでは特別な点ですが、単位円板モデルではそうではありません。そういう Teichmüller 空間の compact 化というものが出てきます。compact 化する前の段階で実軸上の有理数、これがまず、これはそのトポロジーの立場からいうと、torus 上の単純閉曲線全体、その勾配全体、これが Thurston という、Thurston boundary 上の有理点、つまり measured foliation, foliation ですが、単純閉曲線を全部集めると foliation になります。leaf は全部 closed. 種数 1 の場合の Thurston boundary. Teichmüller 空間で、勾配が無理数なものも考える。そうするとそれは単純閉曲線ではなくなるわけですが、linear な foliation になります。

$$\begin{aligned}\overline{T_1} &= \overline{(T_1 \cup \mathbb{Q} \cup \infty)} \\ &= T_1 \cup \mathbb{R} \cup \infty\end{aligned}$$

この絵をどう考えるかという、Thurston, compact 化する前、単純閉曲線を付け加えたものを三角形分割。2 次元ですから 2-cell で、上半平面の上のいわゆる geodesic 2-simplex. Teichmüller 空間から飛び出ているのですが、ここに対応する単純閉曲線、無限遠を含む、だからこれが 2-cell でその境界が 3 つの測地線で、頂点は Teichmüller 空間から飛び出て compact 化の一部になっています。これを ideal triangulation といいます。Teichmüller space プラス有理数、有理数、これを加えたら本当の cell になります。加えると実際の三角形分割、これを全部描き入れる。cell は三角形分割したわけで全部描き入れると、この辺りは $\frac{1}{4}$, そうすると $\frac{1}{3}$. こういう風になっていて、

いろいろあって、それでですね、これで cell 分割が出来て、Teichmüller 空間の cell 分割が出来て、ideal というのは頂点は飛び出て、torus 上でいうと単純閉曲線になっています。これの dual 分割を考えます。曲面を

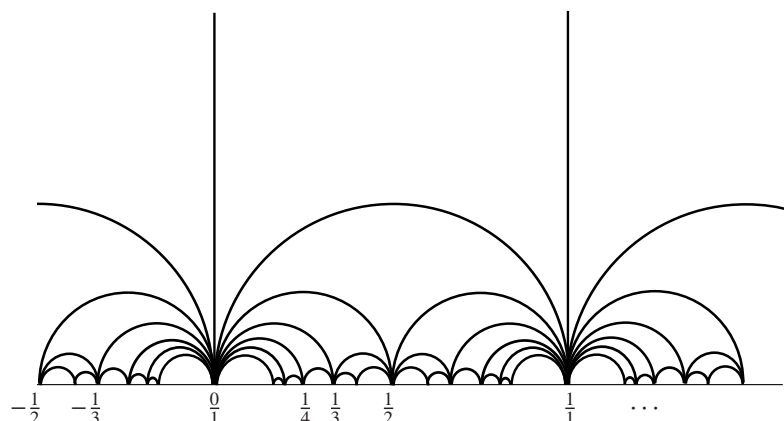


Fig.12 Farey tessellation

cell 分割すると、三角形分割でなくてもよくて、その dual 分割というのは、今は 2 次元ですから、2-cell の双対は 0-cell. これは何か、この点は何かというとは 2-cell の重心です。だから各 2-cell に重心をおくということです。ideal 2-cell の重心ですね、Euclid 的に見ると 2-cell は小さくなっていきますが、非 Euclid 的にはこれは同じ大きさです。無限に延びていますが、面積は有限です。そうするとこの辺りが Milnor-Wood の不等式の起源です。ここに重心がいるわけです。ideal simplex の重心と重心を測地線で結ぶと ideal 1-cell の dual 1-cell. dual 1-cell を描くようになります。そしてここがこの 2-cell の重心、重心と重心を測地線で、今の場合 x 座標が一致しているのでこういう直線になります。次にここに重心があつて、重心があつて測地線で結ぶ。そうすると段々面白い図形が出来ていきます。大事な事はここで上半平面の等長変換である一次分数変換に関する測地線を描いている事です。

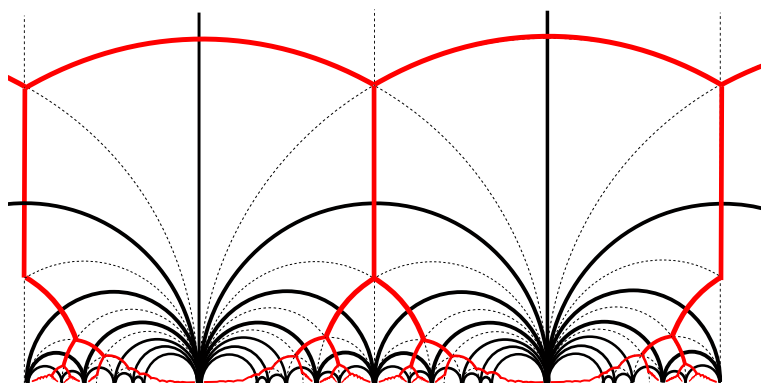


Fig.13 Farey tessellation による理想三角形分割(黒)とその双対理想 cell 分割(赤)

どんどんやっていって、これは永遠に終わらないですが、binary tree というものが出て来て、2 本 2 本に分かれていって、永遠に終わらなくて、最近複素力学系でよくこういう絵を見ます。

ここに注目します。一番左を考えていくと、0 に収束して、そうすると、ここで何をやるかというとは、これはこのときには、この種数 1 の場合に見ると、これはそうなんだと当たり前に見えますが、これを種数 2 以上に一般化したというのが、Mumford-Harar, Strebel という人たちのすごい仕事です。1980 年代ですけれども、結論を言うとうどうなるかというとは、 T_1 の中の、全部描くと描ききれませんが、こういう所にですね、写像類群 $M_1 = SL(2, \mathbb{Z})$ ですが、 $SL(2, \mathbb{Z})$ の作用に関して equivariant に、同変的に、 $SL(2, \mathbb{Z})$ -equivariant に deformation

retract する. 非常にきれいです. どのように deformation retract するかというと, 上半平面一番上は簡単です. 測地線に沿って, 傘みたいな所にどこかでぶつかります.

これとこれは, 上半平面ですから, 双曲的には全く同じです. これはどうなるかと言うと, 無限遠点という仮定の点があってそこから出発する測地線で, これに貼り付けられたもの. こから辺, 小さくなって, これも無限, 極限としては有理数があって, ここから測地線で, つまり $SL(2, \mathbb{Z})$ の双曲的な, 微分幾何に関する等長変換でこうなります.

これで割ると Teichmüller 空間を割ると, これが $\mathbb{M}_1$ なわけですが, $\mathbb{M}_1$ の中に spine が入って, これとこれが同一視されて, これが Riemann 面の moduli 上に flow があって, 無限遠から flow があって, こう非常にきれいになります.

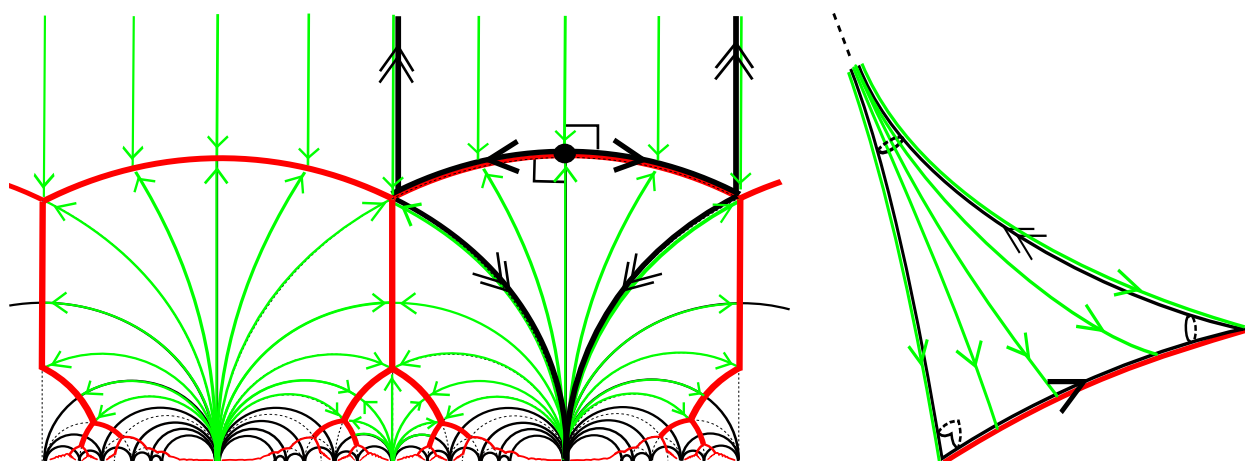


Fig.14 双対理想 cell 分割と spine への ($\mathcal{M}_1 = SL(2, \mathbb{Z})$ -equivariant) deformation retract

種数 1 の場合はトポロジーは何もない, 何も生まれませんが, こんなきれいなものが種数 2 以上に一般化されるというのが, 三角形分割の立場から Harer-Mumford, 解析的には Strebel. トポロジーの立場でいうと Thurston, Penner.

まず, spine の言葉でいうと, spine の前に cell 分割ですね. Teichmüller 空間の三角形分割, 但し, 未解決というか, closed surface に対しては分かっていません. puncture があるとできます. ちなみに種数 1 のときは平行移動があって, どこに点があっても等価であって, 1 点付きの moduli は点なしと等価です. これは例外的です. 種数 2 以上になると点がないと取っ掛かりがなくてできません. これは大問題です. これではないかという案はあるのですが, なかなか難しい.

これをやったのは Harer と Mumford. 論文は Harer ですが, idea は Mumford と Harer. その背景にあるのは Strebel の quadratic differential. これは複素解析的な立場で, これを微分幾何的に構成したのは, Penner, Bowditch-Epstein. これは微分幾何的に構成しました. 組み合わせ的には, これは複素解析的なものと等価ですが, 実際の cell は異なります.

これは cell 分割で spine, これの数え上げをしたのは Harer-Zagier, 独立に Penner. それで moduli 空間は, Riemann は複素 $3g - 3$ 次元, 実は $6g - 6$ 次元であることを知っていました. しかし homotopy 的には次元は小さくなって, cohomology 的な次元, virtual cohomology 次元が $4g - 3$ と決定したのは Harer です. これは 1986 年の論文です. これを紹介する予定です. これの元にあるのが, 種数 1 の話です.

もう1つ別の方法、種数1のときは全く同じ、円板は後で出てきますが、Thurston の compact 化、

$$\mathbb{T}_g \hookrightarrow \overline{\mathbb{T}}_g$$

その境界上に、単純閉曲線があります。

種数2以上になると別な方向に行きます。ちなみに moduli 空間の compact 化は Deligne-Mumford の compact 化、代数幾何学、数論幾何学、私の守備範囲ではないので、ここでは触れない事にします。

種数1のときは単純閉曲線が出てきました。\$g=1\$ の時は有理数。普通の compact 化というのはこの単純閉曲線の空間の compact 化であって、これイコール measured foliation, measured lamination. projectify して projective measured lamination の全体 \$\mathcal{PML}\$, あるいは projective measured foliation の全体 \$\mathcal{PMF}\$ で compact 化が与えられる。

これは驚くべき結果ですが、論文が出版されていないんですよね。アナウンスメントは Bull. AMS に出ています。結局出版されましたがこれも preprint から10数年経っています。理論を作ったのは1970年代ですが、アナウンスメントが出版されたのが1988年頃です。この辺りの事情は、出版されたアナウンスメントの introduction を読むと少し書いてあります。幸いな事にフランスのチーム、Fathi-Laudenbach-Poenaru、がセミナーノートにしてフランス語で出版されました。もうじき英訳も出版されます。

また Thurston で言うと、monster と呼ばれる定理、これも一部しか出版されていませんが、幾つかのグループ、日本では小島先生たちが努力して全体が出版されています。

それで、もう次回にしますが、さっきの、これは Teichmüller の大定理、大定理、\$g\$ が2以上の場合には、\$\mathbb{T}_g\$ が \$\mathbb{R}^{6g-6}\$ と homeo である。これは Teichmüller ですが、Bers とか Ahlfors、1変数関数論、Riemann 面の複素解析的な研究に関する大家、Bers, Ahlfors が、もちろん Riemann に遡るのですが、Teichmüller 空間には複素構造が入って \$\mathbb{C}^{3g-3}\$ の中へ Bers embedding と呼ばれる embedding があって、その境界は Bers boundary, Thurston boundary とは全く違うものになるわけです。Bers boundary は日本では大鹿さんが精力的に研究されています。

それで Thurston はどうやったかという、さっきは Euclid 空間 \$\mathbb{R}^{6g-6}\$ と書いたのですが、disk で書くと \$D^{6g-6}\$ の内点とももちろん微分同相ですね。結論からするとそんな簡単と思うかもしれませんが、大定理というのは、全てとは言いませんが、非常にきれいな形をしている事が多いのです。Thurston は compact 化した、単にといつたら語弊がありますが、自然な disk です。Thurston は怒らないと思います。ただ、通常の disk ではなくて、piecewise integrable, 非常に深い構造が入っています。そこに mapping class group が piecewise integral な変換として作用している。

$$\mathbb{T}_g \hookrightarrow \overline{\mathbb{T}}_g = \overline{D}^{6g-6} \supset \partial \overline{D}^{6g-6} = S^{6g-7} \subset \overline{\mathcal{S}}_g = \mathcal{PMF} = \mathcal{PML}$$

その境界は \$6g-7\$ 次元の球面なわけですが、この中に有理点として、定義していませんが、\$\Sigma_g\$ 上の simple closed curve で、但し essential, constant path と homotope ではないもの、そういうものの isotopy 類全体 \$\mathcal{S}_g\$ が存在しています。これは単なる集合ですが位相を入れて、\$g=1\$ のときは \$\mathbb{R}\$ の中の位相空間としての有理点全体、dense だけど全体ではないのですが、種数1の場合には、勾配有理数の linear foliation を勾配はなんでもよい、無理数でもよいとすると、今度は leaf は \$S^1\$ ではなくて、これらを付け加えると、measured lamination になります。Thurston は最初は foliation と言いましたが、最近は lamination の方が多く用いられます。定義は違いますが、本質的には全く同じものです。ここに写像類群の作用が延びます。古典的な topology の大定理、Brower の定理、可縮な空間上作用したら固定点が必要に存在する。固定点があると3種類に分かれます。内点なのか、境界上の有理点なのか、境界上の無理点か。さっきの種数1の場合は、まさにそうであって、内点が elliptic な変換で有限 order、境界上の有理数になるのはこれは Dehn twist, irrational foliation, 境界上の無

理点になるのが modular 変換でいうと, hyperbolic な trace の絶対値が 2 を超える場合です. 種数 1 の場合は古典的な分類がある. 種数 2 の場合に一般化したというのは, 今でこそみんな Thurston の定理だとなって, Brouwer の定理を適用するんでしょう, となりますが, そこに至る道というのはものすごい, それこそ天才の道です. 種数 2 以上では単に 3 種類というか, 一部分双曲的というか, ちょっと難しいのですが, だけど基本的には, finite order, それから双曲的というのは pseudo-Anosov というのが出て来て, それらの組み合わせとなる reducible, と 3 種類になります. これが Thurston の大定理です.

こういう種数 1 の非常にきれいなものを種数 2 以上に一般化した, まとめると 2 つの大きな方向ですね. Teichmüller 空間の cell 分割, 写像類群-equivariant ですから, moduli の cell 分割ですね. moduli の cell 分割があると cell を数え上げるという事が問題になります. そうすると行列積分が出て来て, 積分を実行したのが Harer-Zagier ですね. Penner にも独立の仕事があります. 積分を実行すると moduli 空間の Euler 数が計算できる.

第 2 の方向が Thurston. これは今でも発展中です. pseudo-Anosov には dilatation という数があったり, pseudo-Anosov の場合には S^1 上で suspend すると双曲構造が入って, volume というものを考える事が出来る. volume と dilatation, その他いろいろな不変量が 3 次元には出てきます. finite type invariant, knot の Vassiliev invariant, ありとあらゆる所に不変量が沢山あります. そのような事を次回以降, まずは Harer の仕事, cell 分割があつて, spine があつて, 写像類群の virtual cohomology 次元の計算, それを複素解析的な立場で紹介します. そして Harer-Zagier, Penner の Euler 数の計算, それと並行して, 最近, Teichmüller は 1937 年ですけれども, 1986 年, Culler-Vogtmann の仕事で, Outer space という Teichmüller 空間と並んで, 兄弟と呼ばれている空間, 50 歳くらい年下, かなり若い弟分ですが, 最近弟がいろいろと主張して, お兄さんとけんかはしてないですが, だんだん近付きつつあります. こういうものも parallel に, Outer space の中にも Harer の spine の類似のものがでてきます. 時間が来たので今日はここまでにしたいと思います.

質問:Riemann は複素構造が入るというのをどういう風に知っていたんでしょうか?

そうですね. こころ辺は微分形式を通してでしょうね. Riemann の Riemann 行列, 周期積分とか.

第 13 回 (2011 年 9 月 14 日)

第 13 回 (2011 年 10 月 5 日)

第 14 回 (2011 年 11 月 11 日)

8 モジュライ空間のサイクル, コサイクルの作り方

第 15 回 (2011 年 12 月 21 日)

第 16 回 (2012 年 1 月 25 日)

9 低次元トポロジーの謎

ちょっと話を変えまして、低次元トポロジーの謎という事でお話したいと思います。少しお話的な事をやろうと思います。低次元トポロジーというと、メインは 3 次元、4 次元だと思いますけれど、その前にもっと低次元の 1 次元、2 次元もあります。その中で 3 次元多様体、これは皆さんご存知のように最近大きな仕事の締めくりとか、ちょっと大袈裟かもしれませんが、Poincaré から始まって Thurston までで一つ区切りがついたという感じになっています。

まずここから話を始めようと思います。Poincaré が生まれたのは 1854 年。これは後で触れますが、トポロジーとか数学の歴史にとって記念碑的な年だったと思います。Poincaré が亡くなったのは 1912 年。それで Thurston は 1946 年 10 月 30 日に生まれて、非常に残念な事ですが、2012 年 8 月 21 日に亡くなりました。あと 2 ヶ月ちょっとで 66 になる所でしたが、65 で亡くなりました。

1854 年というのが画期的な年だというのは、その前に Gauß がいるわけですが、Gauß、そして Riemann。Gauß は 1777 年に生まれて、亡くなったのはこの次の年 1855 年に亡くなりました。Poincaré の生まれた次の年です。Riemann は 40 になる前に亡くなってしまいました。1826 年に生まれ 1866 年に亡くなりました。この前にはもちろん Euler、そしてもちろんその前には古代ギリシャの数学、Euclid とかいますが、現代幾何学はこの辺りから始まっていて、発祥の地というやはり Gauß、そして Riemann。この 1854 年という Riemann の有名な Göttingen の就職講演があります。現代幾何学は 2 本柱があるのですが、一つは Riemann 幾何学ですね、それが創始されて今という Riemann 多様体が導入された画期的な年ですね。Gauß はこの講演を聞いたようですが、感激して、自分がいろいろ考えて来た事、Gauß 曲率などを大きく発展させるという予感を持ったと思います。時代が 1854 年から 2012 年まで、今 2012 年ですから大分経っていて 150 年以上ですね。その間に 3 次元多様体論というのが一つの区切りです。

3 次元多様体の側からいくと、Poincaré がもちろん Poincaré 予想を提出したわけです。一番最初の段階では homology 球面というもの、3 次元ですね、homology 球面はもちろん一般次元であります。ここでは 3 次元、何も言わなければ多様体は closed orientable を仮定する事にして、homology 球面 W^3 とは homology が、integral homology ですが、homology が 3 次元球面と同じ；

$$H_*(W; \mathbb{Z}) \cong H_*(S^3; \mathbb{Z})$$

多様体を homology 球面と言いました。そして Poincaré の予想は、homology 球面は S^3 か？これが最初だったわけですが、すぐに自分自身で誤りに気が付いて、それで Poincaré 球面を発見したんですね。基本群は非自明な有限群ですけど、homology 群は S^3 と等しいものを発見して、Poincaré 予想を

$$\pi_1(W^3) = \{1\} \Rightarrow W^3 \cong S^3?$$

と修正したわけです。基本群自身も Poincaré が考え出しました。単連結ならば S^3 か？これが Poincaré 予想であってこれが正しいというのは、みなさんご存知のように Perelman が 2002,3 年頃に解いたわけです。Poincaré が予想を修正したのが 1904,5 年頃ですからほぼ 100 年弱で象徴的な Poincaré 予想が解決しました。

これは単に Poincaré 予想が解かれたというわけではありません、ここに Thurston の革命、1980 年前後から、があります。後でもう少し詳しく述べますが、私自身、Thurston が Princeton 大学で教授になったときに、幸運

にも最初の講義を聴講する事が出来ました。それは 1974 年の事です。そのときは Thurston は foliation をやっていた。その後、曲面の微分同相群についてやって、Teichmüller 空間の Thurston コンパクト化をやって、その後にこの 3 次元多様体論を展開しました。3 つ目の大きな仕事です。そして 1980 年代に geometrization conjecture というものを提出しました。3 次元多様体を 2 次元と同じような感じで完全に理解できるという理論を作って、どんどんと自分でも証明しつつあって、そこら辺の所は Thurston に関する思い出とか、Cornell 大学、最後は Cornell 大学の所属でしたから、ここの HP を見ると、Thurston に関する情報があって、いろいろな人の Thurston に関する思い出なども書いてあります。そこで最後の講演ではないですが、いま見る事の出来る事実上最後の講演、この後も Cornell 大学で Cornell Topology Festival でも講演していますが、ただネット上で見られる最後の講演は、2010 年の Paris での講演です。これは Clay 研究所が主催し、Perelman の Poincaré 予想の解決を機に、錚々たるメンバー、Smale とか Gromov とか集まって講演をしました。video で沢山見られるのですが、その中の一つが Thurston の講演、geometrization conjecture です。こういうものについて、思い出というわけではありませんが、印象的なのは、彼自身 Haken とか条件を付けた上で証明したわけですが、それが付かないときに、いわばその外側から Ricci flow, Hamilton の Ricci flow, 外側というところと語弊がありますが、topology proper から見るとちょっと外側から証明されました。そこら辺、どういう考え、感想をもっていたか、難しい所です。印象的な言葉もあって、99 パーセント、この辺りが英語だから実際に聞いて頂くのがよいと思いますが、私はこれを証明した、とまで強く言っていないのかもしれませんが、確信したというような事を言っています。100 パーセントという証明した事になりますが、99 パーセント確信をもっていたというような事を言っています。これはもちろん Perelman の仕事、いわば外側からというのがあるわけです。これは是非まだ見ていない方は、沢山ダウンロードされているので、知っている人も多いと思いますが、2010, Clay, Paris, Thurston くらい入れて検索するとすぐ見つかると思います。

Gromov とか Smale とか錚々たる人が沢山しゃべっています。簡単に geometrization conjecture、皆さんご存知かと思いますが、話の都合上少しお話しします。3 次元の幾何学ですが、3 次元は、 S^1 しかない完全にわかっている 1 次元と曲面、これは古典的というか、前々世紀に分類はわかった曲面、2 次元の組み合わせでできるというもので、

$$3 = 1 + 2$$

です。まず簡単な場合が product, $S^1 \times S^2, S^1 \times T^2, S^2 \times \Sigma_g$. これが正の世界、零の世界、負の世界、elliptic, parabolic, hyperbolic. この次に来るのが Seifert. S^1 -bundle, これをちょっと一般化したのが Seifert です。 S^1 -bundle で base が曲面になる。 S^2 上の S^1 -bundle, T^2 上の S^1 -bundle, Σ_g 上の S^1 -bundle. 一番おもしろいのは base space が S^1 であって、fiber が 2 次元、曲面になります。これが最も面白い所であって、これは写像類群が出てきます。

ところが S^2 の場合は Smale の最初の仕事で S^2 の向きを保つ微分同相は identity と isotope になります。従って S^1 上の S^2 -bundle は trivial で product と一緒になります。次が S^1 上の T^2 -bundle で $SL(2; \mathbb{Z})$ の元を monodromy とするような bundle.

その次に写像類群 M_g が出来て来て S^1 上の Σ_g -bundle です。ここが最も豊富な世界であって、結局 hyperbolic 3-manifold というものは有限 cover を除けば、 S^1 上の Σ_g -bundle と一緒というのが、最近の virtual fibration conjecture の解決です。

hyperbolic 3-manifold というそういうきれいなものが S^1 上の曲面バンドルの構造を持つなどというのはまずありえない、というのが大分前の見方でした。J. Millson やその他の人たちが、first Betti number が零でない、そういう例を作り、例を作るという事自体が大変な仕事でしたが、今では有限 cover を取れば全部そうだ

という事になってきました。それが virtually fibration conjecture, その前に virtually Haken conjecture というものがあって、この2つが Perelman の Poincaré 予想の解決以降残った Thurston geometrization conjecture の大きな問題で、これらが2012年に解決されました。これがまた一つ、先ほどの Perelman の仕事がトポロジーの外側からと言いましたが、こちらは外側と言え外側ですが、それほどでもない geometric group theory ですね。ここに寄与している人は沢山います。全部知っているわけではありませんが、Wise, Markovic, Kahn. Markovic という人は、曲面の写像類群が homeomorphism の群としては実現されないという有名な仕事があります。ずっとイギリスで活躍していましたが、今は CalTech にいます。それから Agol, 最後はこの人がこの2つを完全に証明しました。virtual fibration conjecture を Wise はある部分証明をしましたけれど、完全に証明したのは Agol です。これが外側というか、geometric group theory から来たわけです。いろいろな概念が、一般的な metric space とか Gromov 流の概念が沢山あって、topology proper でずっとやって来た私にはなかなか難しいですね。

それはともかく3次元多様体論, Poincaré から出発して、ずっと長い歴史があって、Seifert とかいろいろ仕事をしているわけですが、Thurston が1980年代に3次元多様体論に革命を起こしたわけですね。それまでの3次元多様体論と全然違う、微分幾何というか、もうちょっと rigid な双曲幾何を導入して、それが3次元多様体論に如何に力を発揮するかを示して、まさに革命なわけですね。それが意味取まって2012年、一つの締めくくりがなされて、非常に残念な事に Thurston はこの世を去ってしまったわけです。

じゃあ全て終わったかということと全然そんな事なくて、例えば、Thurston 自身言っている事です。volume という非常に大事な不変量があります。 $\mathbb{Q}$ に hyperbolic 3-manifold の volume 全体を添加し、volume という大事な不変量、volume は正の実数ですが、これを vector space と思うと、volume は $\mathbb{Q}$ 上一次独立か、この次元は無限大か：

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}\langle \text{volume}(M^3) \rangle = \infty?$$

これは幾何だけの問題ではなく数論とも絡む問題です。この volume, 幾何と arithmetic というか、算術的な数論、両方に跨がる重要な不変量なわけですね。これはまだどういう風にやったら良いか、なかなか分からないわけです。

Thurston にまた戻ります。さっき言いましたように1946年に生まれて2012年に亡くなりました。ちょっと個人的な事を言います。私は1973年から1975年、2年間、最初 Bonn に行って、アメリカに渡ったのは確か74年7月、西海岸であるシンポジウムがあって、9月に Princeton に行きました。そのとき講義を、さっき言ったように、Thurston の講義を聞く事ができる幸運に恵まれたわけですね。1974年の秋学期です。そのとき、Thurston が Princeton 大学の full professor になりました。1974年の9月、27才ですね。これは非常に若いのですが、じゃあ Princeton 大学の full professor, これが一番若いかと言いますと、実はこれは私が駒場にまだいた頃2009年か2010年に、談話会の係をしたときに、C. Fefferman が、Fefferman は兄弟で有名な数学者ですが、C. Fefferman が駒場の談話会で話をしてくれたときに聞きましたが、彼は Thurston と同時に full professor になった、そのとき彼は24才だったそうです。これは今でも Princeton 大学の記録だそうです。ただ Fefferman は24才で教授になったわけですが、実はその前はすでに full professor なんですね。22才で Chicago 大で full professor になったそうです。調べたわけではないですが、これは Chicago 大で多分記録でしょうか。年だけみると非常にちょっと俗っぽい話ですが、若ければよいかということもちろんそうではありません。この二人が関心するのは、Fefferman はまだ現役ですが、Fefferman も Thurston もずっと連続的に仕事をしていますね。Fefferman の事はあまりよく知らないのですが、最近日本で言うと平地さん、 $\mathbb{Q}$ -curvature など、幾何学と物理学とも関係する新しい問題を出しています。

Thurston に戻りますと、革命を起こしたのですが、その前に既に普通の人的一生分の仕事を 2,3 年でしてしまいました。最初にやったのは foliation の理論であって、この話でも時々出てきましたけれど、デビュー作というのが、1972 年の Bulletin of AMS, 実際に仕事をしたのは 1971 年頃です。Non cobordant foliations on S^3 という非常に有名な仕事です。構成したんですね、パラメータ付きの codimension 1 foliation $\mathcal{F}_l$ を S^3 に構成しました。そして、こういうものに対しては Godbillon-Vey class, gv と書きますが、これは出版は 1971 年、定義されていました。これが零でないというのは Lie 群 $PSL(2; \mathbb{R})$ を使って証明されました。

それから 1 年も経たないうちに Thurston は何をやったかと言いますと、これ $gv(\mathcal{F}_l) \in H^3(S^3; \mathbb{R})$ はどこにあるかと言いますと、定義されている多様体、今は S^3 ですが、これの実係数 3 次元 cohomology 群、これを基本類で evaluate する、 S^3 の実係数の 3 次元 cohomology を S^3 の fundamental class で evaluate すると、 $\langle gv(\mathcal{F}_l), [S^3] \rangle \in \mathbb{R}$ と実数になります。これを Godbillon-Vey number と呼びます。画期的だったのは、これが連続的に動く、これは特性類なのですが、例えば Euler 類、Chern 類、Pontrjagin 類などは、微分形式を使うと実数 $\mathbb{R}$ 上定義されますが、実は $\mathbb{Z}$ 上定義されていて、幾何学的な構造を動かしてもこれは整数ですから動きようがないわけです。これは初めて幾何的に定義された特性類が連続的に動く、非常に画期的なデビュー作でみんなはあつと驚いたわけです。そこに使った構成、ここに双曲幾何学を使ったわけです。群で言うと $PSL(2; \mathbb{R})$ 。

非ユークリッド幾何学というのはもちろん 1820 年代から 1840 年代、Gauß, Bolyai, Lobachevskii が独立に見つけて、ユークリッド幾何学の第 5 公準が他のものから出てこない。まあ、例を一つ作ったといえおしまいです。現代幾何学への今から思えば出発点だったわけです。それはもうみんな知っているわけですが、トポロジー、これは 1950 年代くらいから進歩していてあとでうちちょっとやりますが、手術の理論などがあって、differential topology というものは、metric とか長さは敢えて無視して、それでも出てくる、それがトポロジーの魅力だったわけです。differential topology の。ところが、これを構成するのに、Thurston は古典的でちょっとお蔵に入ったというと語弊がありますが、双曲幾何を持って来てみんなをあつと言わせたわけです。その辺の事は Milnor が大分後に同じ Bulletin に、双曲幾何学の 150 年という論説を書いていますので、それを見るとよいと思います。

トポロジーの強力な武器の一つに分類空間があります。何でもかんでも分類空間にしてしまいます。何でもかんでもというであれでしょうか。それで Haefliger が foliation にとつての分類空間、 $B\Gamma_n^r$ ($r = 0, 1, \dots, \infty, \omega$) を導入しました。ここで r は differentiability です。これを使うと Thurston の仕事は、Haefliger space の言葉でいうと、 $B\Gamma_1$ の 3 次元の integral homology から $\mathbb{R}$ へ Godbillon-Vey は準同型写像

$$H_3(B\Gamma_1; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\langle gv, \rangle} \mathbb{R},$$

を与えますが、これが全射だという事になります。

さっき言った 1974 年の秋の Princeton での最初の講義でのとき、そのとき私は Princeton の Institute の方にいました。Princeton の大学と研究所は日本流にいうとほとんど境界が接しているの、歩けなくはないでしょうが、広大な国ですから歩く人はほとんどいない。近くなのに私は車で通いました。確か木曜か金曜だったとおもいます。朝 9 時頃から始まりました。Princeton University の Fine Hall という有名な Princeton の数学教室の部屋で週一で Thurston は講義をしました。聴講者がどれくらいいたかという、確か 10 人もいなかった、8 人くらいだったと思います。9 時頃行くと Thurston がラフな格好で coffee cup を片手に現れて、軽く挨拶をして話を始めます。だけど数式はほとんどなくて、数学の講義というよりは、画家が絵の書き方を書くようななかば、そういう感じで、結局は S^2 上のベクトル場の絵だったんですけど、私は必死でノートを取り、それを今も持っています。懐かしい思い出ですね。そこで何をやったかという、結局これの言葉で

いうと

$$H_5(B\Gamma_2; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\langle gv, \rangle} \mathbb{R}$$

今度は codimension 2 の foliation ですが、ここにも Godbillon-Vey というのがあってこれが全射であることを講義しました。gv は別の 2 次特性類の言葉で書くと $h_1 c_1^2$ です。

具体的には何を使ったかという、3 次元多様体上の S^2 -bundle, foliated S^2 -bundle, ですから構造群は discrete なので、 S^2 上の向きを保つ微分同相写像全体で、discrete topology, これは topology を入れないとさっき言った Smale の定理で、 $SO(3)$ と homotopy 同値になるわけです。

$$H_3(\text{Diff}_+^\delta S^2; \mathbb{Z}) \rightarrow H_5(B\Gamma_2; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{R}$$

で具体的に証明したのは、この合成

$$H_3(\text{Diff}_+^\delta S^2; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{R},$$

これが全射だという事です。もっとも、これを使うというよりは、実はベクトル場を使うわけなので、ベクトル場全体のなす無限次元のベクトル空間 $\mathcal{X}(S^2)$ を使って、この foliation の特性類というのは、ほぼ同じ頃 Gelfand-Fuchs の、これも非常にビックリするべき理論が展開されたわけで、それとの関連で Thurston は完全にその事を知っていて、Godbillon-Vey の仕事はベクトル場、もうちょっと古典的に微分形式の段階で展開されていますけれども、そこで S^2 上のベクトル場を使って、それを perturb するという事をします。結局だから 3 次元サイクルを作って、しかもパラメータ付きで作って、動くという事を証明した。

時々講義の合間に、わかりますかという、わかりますよね、と相槌を求めるのですが、我々は非常に苦しいですね、絵ですから。絵を見ればそうかなと思うけれど、最初の Bulletin の論文はこれはわかりやすいですけど、結局彼はこれは論文に書かなかったですね。

Topology に Rasmussen という人が、これは foliation の人、今は不変量、結び目に別な人がいますが、Rasmussen が論文を Topology に出版しています。結局 2 つ 1 次独立な特性類があって、 $\mathbb{R}^2$ への全射：

$$H_3(\text{Diff}_+^\delta S^2; \mathbb{Z}) \xrightarrow{(f_{h_1 c_1^2}, f_{h_1 c_2})} \mathbb{R}^2$$

を証明しました。これを Topology に出版しました。私は Rasmussen は Thurston の弟子なのかなと思ってましたが、さっき言った Cornell 大の HP 上の Thurston の情報を見ると geography, Thurston の子孫というか、数学上の子孫が書いてあるのですが、どうも Rasmussen は入っていないので、Rasmussen は Thurston の学生だというわけではないようです。誰の学生だったのか、Bott は Harvard にいたのでこの辺りででしょうか。

ここら辺りは Heitsch とか、どんどんいろいろな人が展開してずっと大きな理論になっています。これが 1974 年の秋学期なのですが、私は次の年 1975 年の 8 月に日本に帰りました。このときはパーティなどでも Thurston に会ったりしてました。そのときに家族で一緒に出て来て、Thurston が背負子というか、子供を載せるリュックサックのようなものを背負ってパーティに出て来たので、非常にビックリしました。今は父親のそういう姿は珍しくないですが、当時の日本では大体母親でしたね。それが多分 Thurston の長男の人だと思います。Nathaniel Thurston でしょうか。この Nathaniel Thurston も Topology の論文があります。今はどうもコンピュータサイエンスの方にシフトしているようです。Dylan Thurston は皆さんよくご存知のように Topology proper です。それはともかく、話しはしましたけれど、その後 Thurston を見たのは、小島先生が東工大に呼んだときですね。

それでですね、これは foliation をやった。さっきの Cornell 大の HP で見てそうなのかと思ったのですが、1975 年にこれは lecture とは書いてないのですが、talk を、いろんな人が Thurston の思い出を書いている所

に、これも有名な人ですが、Howard Masur という人がいますよね。その人が書いていてなるほどと思ったのですが、さっきの3つの仕事、foliation と surface diffeomorphism と 3次元多様体、いつ頃何処ら辺でそうなったのかなと思ってましたが、すでに次の年、Thurston の talk を聞いてビックリしたという事が書いてあります。この Masur も一流の仕事をしていますけれど、この Thurston の talk に自分自身の数学の生き方を完全に決定付けられた。どういう話をしたかと言うと、ここで既に pseudo-Anosov の話が出ている。さらに measured foliation $\mathcal{MF}$ という概念、その後はほとんど同値ですけど、measured lamination、こちらの方が topological なんですね。さらに Teichmüller 空間の boundary $\partial\mathbb{T}_g$ 、Thurston の compact 化もすでに、完成していたかはともかくこの3つの話をした。1回かどうかはわかりません。この話がこれまでのどの人の話にもない、決定的に違った革命であった。一言でいうと、surface diffeomorphism の全体、その isotopy 類全体が写像類群なわけです。

$$\text{Diff}_+\Sigma_g \rightarrow M_g$$

これについて、もちろん Nielsen という 1910 年、1920 年代の仕事も有ったのですが、surface diffeomorphism の研究を始めた頃は、これを Thurston は知らなかった。多分全く独力でこの理論を完成させました。有名な論文ですが、いまはその後のバージョンになったので、引用文献は 10 本くらいありますが、最初に出回ったものは引用文献が全くなかった、ゼロでした。その後 Nielsen の論文を 2 つくらい引用しているバージョンがあります。本当に一人で Thurston の surface diffeomorphisms に関する理論を作ってしまった。その後の Thurston の仕事は私はあまり詳しくなくて、小島先生に聞いた方がよいと思います。70 年代、77,8 年には 3 次元多様体、まあ、すでにここで、pseudo-Anosov ならばその suspension は hyperbolic という定理がありますから、ここから 3 次元多様体に入っていくわけですね。その後は皆さんご存知のような 3 次元多様体論の革命が起こっていった、自分自身も推進したし、いろいろな人が集まって、2012 年、一つの区切りの年になりました。そういう感じになっています。

Thurston についてはまた後で出てくると思いますが、あとの話の都合上 notation で $\mathcal{H}(3)$ と書いたら、homology 3-sphere, oriented, closed はいつも仮定しますが、それらの oriented diffeomorphism class 全体、可算集合になります。そして $\mathcal{M}(3)$ と書くと 3 次元多様体全体、closed, oriented ですけど。

$$\mathcal{H}(3) = \{\text{homology 3-sphere}\}/\sim \subset \mathcal{M}(3) = \{3\text{-manifolds}\}/\sim$$

今は単なる集合ですけども、空間であるかのように、Thurston は既に考えていたわけです。volume であるとか、Gromov の simplicial volume であるとか、不変量がありますが、不変量はいずれの関数です。これは単なる集合というよりは、位相というちょっとと語弊があるかもしれませんが、単なる集合以上の構造があるだろうと。volume に関して言えば、最も重要な volume conjecture というものがあります。この解決にはかなり時間がかかるとおもいますが、これは Thurston というよりは違う事から来ている、不変量ですね。不変量の方から言うと元々は Euler number があります。3 次元多様体は closed oriented だと、euler number は全て消えてしまいます。そして secondary で Chern-Simons の不変量というものがあって、そして volume, hyperbolic の場合は volume があって、あるいは、 η -invariant というものがあって、Atiyah-Patodi-Singer ですね。そして Gromov が出て来て simplicial volume $\|M\|$ 、これは 3 次元に限らず simplicial volume という不変量があるわけです。こういういろいろな流れがあって、そして Vassiliev の 1990 年くらいの革命的なアイデアですね。knot の不変量、Vassiliev 不変量というものが、knot 全体を space だとおもってそこに singularity の理論を適用する画期的な Vassiliev の考えが出てきました。knot に対してですね。それを大槻さんが 3 次元多様体、あるいはその中の knot に対して一般化して 3 次元多様体の有限型不変量というものを展開しました。そして、それがどんどんどんどん発達して LMO ですね、Le さん、村上順さん、大槻さん、というものになったわけです。

この volume conjecture の方は Kashaev と 2 人の村上さんですね, Hitoshi Murakami, Jun Murakami. この 3 人の人が出したという事です. volume というものは transcendental な不変量なわけですが, それがこの有限型不変量というか, 多項式ではないけれど, いわばこういうものの極限として現れるだろうというものです. これが今どんどん展開されていて, Sergei Gukov さんが先頭に立って, これを理論をどんどん広げていって, 複素数値, あるいは A -多項式などとも絡めて非常に大きな予想だけでなく, 理論になりつつあります. これはいま 2012 年でさっきの virtual Haken conjecture, virtual fibration conjecture が解かれちゃったわけですから, また外側という用語がありますが, まあ 2015 年くらいに解決する可能性もあるかもしれません. 私は門外漢ではありますが, 非常に深い予想だと思います.

これはだから 3 次元多様体, この homology 球面, Poincaré が一番最初, homology 球面は S^3 か?と言ったときは, これ, homology 球面はいわば S^3 だけ, 1 点しかなかったわけですから, 3 次元多様体を調べるにはいろいろな事をしなくてははいけなかったわけです. Poincaré が自明でないものを最初見つけて, 今では皆さんご存知のようにこれはもの凄く沢山あるわけです. 幾何学の中でも elliptic なものは元々の Poincaré 球面だけですが, 次にでてきたものは Brieskorn homology 球面, これは特異点論, 1960 年代くらいからですね. 特異点のトポロジー, 代数幾何とトポロジーの橋渡しをする非常に大きな仕事があります. Brieskorn sphere, 一般次元で exotic sphere が出るのですが, 由緒正しい代数幾何の所にこういう homology sphere が出て来た. 非常に重要な仕事です. ただこれは Seifert です. hyperbolic な中に homology 3-sphere があるというのは, ものすごい, さっきも言ったように, 最初の頃はそういう事はありません, と思われていたということがあったわけです. 今では敢えていうとほとんど全て hyperbolic な homology 球面, ある意味ほとんど全てという事です. この世界がこんなに広いというのは, Poincaré がいま天国から見たらビックリしていると思います. 最初は 1 個しかない, 彼自身自明でない例を最初に見つけたからものすごい天才としか言いようがないのですが, 今やこんなに沢山ある. hyperbolic な homology 球面.

それでちょっとここは思い出というか, さっきは Thurston が出てきましたが, 今度は Hirzebruch の思い出を少しお話します. この人も残念な事に今年の 5 月に亡くなってしまいました. 1927 年 10 月 17 日に生まれて, 2012 年の 5 月 27 日に亡くなってしまいました. 84 才でした. この人は, もちろん, 名前はみんな知っている偉大な人です. Hirzebruch の signature theorem, トポロジーと代数幾何の垣根をとったというか融合させた一番偉い一人です. Atiyah とか Armand Borel とかいますけれども, Hirzebruch ですね.

video のあれで言うと, Max Planck Institute Bonn の HP を見ると, さっきの Cornell 大の Thurston のいろいろな記述と同じような感じで Hirzebruch について書いてあります. 亡くなる 1 ヶ月くらい前, 今年 2012 年の 4 月頃ですが, Max Planck で講演, lecture をしています. 2 つありまして, 1 回目, 2 回目と分かれています. これは original な話なんですね. real な実構造をもつような代数曲面の involution, $\mathbb{C}$ 上で考えて involution, conjugation がある, involution があるときに, その conjugation といろいろな不変量との絡み, euler 数が一番大事ですね, そして signature, Hirzebruch ですから, その絡みについて original な話をしています. 私は 1 回目しか見ていませんが, いろいろな事を思い出しました. 彼は 1973 年に日本に来て, IMU lecture をやったんですね. これは Hilbert modular surface という大きな仕事になりました. そのときに私は助手だったと思います. 私は非常に感銘を受けたわけです. その秋から幸運にも Bonn に行く機会を得ました. その頃はまだ Max Planck はなくて, 日本でいうと大型の科研費, SFB というのがあって, 幸いそこに行く事が出来たわけです. そこで 1 年間近くにいる事が出来ました. この original のこの話ですね, 2 つ, 是非, 特に若い人は見ると参考になると思います. やや不自由な感じの動きではあるのですが, 数学に対する情熱というか, 力強さというのは, 70 年代に彼自身の講義を受けましたけれど, ある意味, ほとんどその勢いについては変わらないという感じです.

それでその前から微分トポロジーというものがあって、黄金時代、こういう名前で黄金時代があったのですが、それは 1950 年代、1960 年代で、敢えていうと、これは敢えてですから、その後何もなくなったというわけではないので、敢えていうと 1969 年で締めに入ったという事です。ここに出てくるのが Kirby と Siebenmann の画期的な仕事です。後で詳しくやります。

ここら辺をちょっとだけ歴史的に振り返りますと、最初に微分トポロジーというものの誕生を宣言したのは Thom, Thom の仕事です。Thom は cobordism というアイデアを出して、今でも誰でも知っています。トポロジストはもちろん知っていますが、数学をやっている人で知らない人はほとんどいないと思います。アイデアとしては非常に簡単で、次元の等しい 2 つの多様体が cobordant であるとは、2 つが協力して次元が 1 つ高い多様体の共通の boundary になるか、これが cobordism です。向きなんか入れているいろいろなバージョン、これの複素構造、概複素構造、いろいろなバージョンありますが、アイデアとしてはこういうものです。これはその後 1980 年代後半に Witten が出てくる辺りから、トポロジー、数学、これもいわば外圧というか、非常に変革を迫られているわけですが、その中でも cobordism、これは最も重要な概念、これは永遠にそうだと思います。cobordism 群の計算は終わっていますが、じゃあもうないかという、これが全ての基本だというのは永遠に変わらないと思います。これが要するに cobordism Ω_* 。幾何学ですから、多様体を分類するわけですが、いわば非常に荒っぽい分類をするわけですが、Thom の偉いところは、全部がわかればそれが良いですが、それは望めない、曲面ではわかった、3 次元多様体でも Perelman の仕事でいわば分類は終わった。しかし、一般次元で全ての多様体がわかるということはありません。問題設定が良くない。

そこで cobordism という relation を入れて、非常にきれいな relation を入れて分類するとどうなるか、それがそもそもの考え。これだったら誰でもというわけではないが、考えつく人は結構いると思います。それをですね、homotopy 論に帰着させたんです。Thom spectrum MSO 、これがさっき言ったトポロジーで最も重要な概念、分類空間というのがありますが、その分類空間上の universal bundle で Thom 構成というものがあって、これも非常に他分野から見ると、乱暴なと思うかもしれません。vector bundle があつたら metric を入れて、長さ 1 以下を取って disk bundle にして、その境界 sphere bundle を 1 点に縮める、だなんていうそういう乱暴な事をします。だけどトポロジーではそれが非常に強力なものでこれを Thom spectrum と言います。そしてその homotopy 群、homotopy 論というのはトポロジーの 1 分野、代数的な方でこれも発達して来て、いわばちょっと disjoint な部分もあるわけですね。homotopy 群というのは計算が非常に難しい。Thom の偉い所は幾何学的な分類と代数的な homotopy 論を融合させて、homotopy 論が非常に強力な力を発揮する、Thom space の homotopy 群 $\pi_*(MSO)$ がこの分類を完全に与えるという事をやったわけです。homotopy 論が十分発達していたわけです。一般に homotopy 群の計算は homology 群に比べると格段に難しい、ほとんどいつも不可能です。まあ基本群を考えれば分かると思います。単連結としても $\pi_2, \pi_3, \dots, \pi_2$ くらいはなんとかなるかもしれませんが、一般の homotopy 群というのは無理なわけです。だけど Eilenberg-MacLane space とか homotopy 群の計算に強力な、Henri Cartan とか topologist だけではなく 50 年代ですから数学総動員ですね、理論があつて、Eilenberg-MacLane space $K(G, n)$ 、これの cohomology を計算するというのがあって、それが十分発達していて、それを使って Thom は Ω_* を決定したわけです、まあ 2-torsion は Milnor とか Wall の仕事があつて、テンソル $\mathbb{Q}$ したものを完全に決定しました。答えは偶数次元の複素射影空間の生成する多項式代数であるという、非常にきれいな大定理ですね。それを Thom は証明したわけです。それは 1952 年 Comptes Rendus に発表したんですね、Thom は。

そのとき Hirzebruch は Princeton の高等研究所に居て、これは彼自身が reminiscence というか、昔を、signature theorem が出たときのいきさつを彼自身の論文の中に書いていて、有名な話ですね。1952 年に Institute の、今は新しい建物が沢山ありますが、古めかしいというかある建物の中に図書室があつたんです

ね、図書室、そこに行って *Compte Rendus Paris*, Thom の速報を見て、そこに書いてあるのですが、直ちに今でいう Hirzebruch の signature theorem の証明が分かった。これが有名な Hirzebruch signature theorem, これが 1952 年ですね。Hirzebruch はその後、Hirzebruch の Riemann-Roch とか、トポロジーと代数幾何、複素多様体論、そこら辺の垣根を取って、一級の仕事をするまで続けました。

これが今で言うところの微分トポロジーの誕生を宣言した仕事です。一般に言われるのは、もう少しわかりやすいデビューというか、さっきの Thurston の foliation のデビューに匹敵するというか、それは全然劣らない大衝撃だったのが、Milnor の例の exotic sphere の仕事ですね。1956 年です。\$S^7\$ と homeo だけでも diffeo ではない。どう書くんでしょうか、Brieskorn とかいろいろ絡んでますが、homotopy sphere ですね。homotopy 型が sphere であるような微分可能多様体を分類するという理論があって、Milnor, 最初の例ですね。それが群になるという事、そして有名な Kervaire と Milnor の仕事が出て来て、\$n\$ 次元の homotopy 球面の作る群 \$\Theta^n\$ が定義されて、これがまた homotopy 群が出てくるのですが、あるいは Bernouille 数とか整数論的なものも出て来て、一言でいうと有限群であって、\$n \bmod 4\$ についていろいろな違いが出て来て、\$4n-1\$ 次元の所が一番豊富なんですね。\$4n\$ 次元, signature があるところから一個下がったところに homotopy sphere が一杯出て来て、\$4n+1\$ 次元では、次元を 1 上げて \$4n+2\$ 次元の所に Kervaire 不変量というものがあって、それは最近 2 年くらい前、Hopkins, Ravenel, Hill の一大仕事があって、これも大団円、大問題が一個の次元だけを除いて解決されました。126 次元の framed manifold で Kervaire 不変量 1 のものがあるか、これは未解決です。これ以外は全部解決しました。非常に難しい理論であれを理解している人は世界中で 10 人くらいでしょうか。Fermat 予想もそうでしたけれど非常に難しい。

そしてこれは球面、homotopy 球面ですけども、手術の理論、surgery theory というものが一世を風靡しました。名前を挙げると W. Browder, Princeton で活躍して、ロシアで Novikov, そして Wall が出て来て、最初は homotopy 球面ですから、単連結です。Browder は単連結な surgery theory を完成させました。有名な教科書があります、Novikov はちょっと違う、場所も全然違いますが、彼の一番有名な仕事の 1 つは rational Pontrjagin class の位相不変性です。Wall は基本群が一般の場合に Wall 群という、彼の名前を取った、この algebraic L-theory, トポロジーと代数の境界ですね、今は Algebraic K とか L とか、沢山あるわけです。その理論を作って、そして Sullivan ですね。この 4 人の名前を取って、普通 Browder-Novikov-Wall-Sullivan theory と言います。この Sullivan は、さっきの Thom の考えですね、分類を何かの space の homotopy 論に帰着するという事を、これを surgery theory の中で究極、これ以上はできないという感じで実現しました。そうすると、カテゴリーとしては微分可能多様体 \$BO\$, orientable なら \$BSO\$ ですが、こういうものがあって、その次は piecewise linear な、PL topology というのがあって \$BPL\$, その次に位相多様体というものがあって \$BTOP\$, その次に多様体ではなくて今度は Poincaré complex というものがありますね。分類空間で言うと \$BG\$ という、sphere の self homotopy 同値全体のなす群 \$G\$ です。こういう物があってこの間に自然な写像があります。

$$BO \rightarrow BPL \rightarrow BTOP \rightarrow BG$$

微分多様体の分類、組み合わせ的多様体の分類、位相多様体の分類、それらの間の関係、これらが fiber bundle みたいになって、それぞれの fiber は \$PL/O, TOP/PL, G/PL, G/TOP\$. 例えば、Sullivan の初期の一番の有名な仕事は、\$G/PL\$ の homotopy 型を完全に決定した仕事です。

そして後でやる Kirby-Siebenmann, 1969 年に終わったと言ったのは、Kirby-Siebenmann が \$TOP/PL\$ を完全に決定したという事になって、Thom の幾何学的な問題を homotopy 論に帰着して、その homotopy 論を解くというのが、究極にまで高められた、それが 1969 年です。

1969 年、何が起こったかといいますと、さっきも書きましたが、Kirby と Siebenmann, 何を解決したか

と言いますと、Milnor が挙げた、ある時期に Milnor が挙げた 7 つの問題の中の有名な一つ、Hauptvermutung、これは基本予想と呼ばれます。これは一言でいうと、piecewise linear, combinatorial な多様体、PL manifold というものがあって、それは三角形分割された位相多様体であって、各点の link が次元が 1 個下がった球面のスタンダードな三角形分割と組み合わせ同値、そういうものを PL manifoldと言いますが、そういう構造は unique だろうというのが基本予想です。

もう一つの予想は triangulation problem、これは conjecture といっているのか、problem、そもそも位相多様体は三角形分割できるのか、というものがあって、結論的にはこれは今でも未解決の、多分、歴史的にみると微分トポロジーで今残っている、残っているというところとちょっと語弊がありますが、もっとも重要で難しい問題です、triangulation problem。この 2 つに piecewise linear, combinatorial な観点から完全な解答を与えたのが、Kirby-Siebenmann です。これは唯一つの特性類、4 次元に特性類があって、

$$ks \in H^4(BTOP; \mathbb{Z}/2),$$

Kirby-Siebenmann class と呼ばれますけれど、これだけで決定できる。例えばまず次元は 5 次元以上で、境界がある場合は 6 次元以上の位相多様体があったとすると、その 4 次元 $\mathbb{Z}/2$ -cohomology にある特性類 ks が定義される、Stiefel-Whitney とか Chern とかそういう感じで、位相構造のみによる特性類が定義されて、この位相多様体が piecewise linear な意味で triangulation, triangulable である事の必要十分条件は、この特性類が消える事。決定的な仕事ですね。

Hauptvermutung の方は、この次数が 1 つ下がって 3 次元に、2 つの組み合わせ的な構造が互いに同値かどうかという obstruction が入る、そういう形で完全に解決してしまう。それが Thom から始まった微分トポロジーという分野の黄金時代の締めくくりの仕事になっています。

この 1969 年というのは個人的になって申し訳ないですが、私は修士に入った年なのです。そしたら大問題は解けた。微分トポロジーはどうなるんでしょう、そのちょっと前に Thom 自身が大仕事をした後で、皆さんご存知の Catastrophe の理論に移ったんですね。そしてこれはニュアンスはわからないのですが、巷で言われた事は、Thom はトポロジーは死んだ、と言っている。トポロジーは死んで、しかも微分トポロジー、これを一生懸命大学 3 年生、4 年生くらいから、Minor の理論に魅了されてですね、勉強を始めて修士に入ったと思ったら、いわばそのときの最後の問題を解かれてしまった。途方にくれましたよね、どうしたらよいか。後付けですけど、foliation の理論がまさにこの辺から始まっています。Gelfand-Fuchs 理論は論文がすでに出ています。Godbillon-Vey は 1970 年くらいにあって、1971 年には Thurston が現れるわけです。けどここでこれを聞いたときは、まだそういう事は全然、少なくとも私は知らないで、ああ終わってしまったなと。そのとき加藤十吉先生ですね、この年、これが解決された時にさっきの Institute にいて、1 階、あそこはメンバーは、若いメンバーは 2 階建ての日本流にいうと長屋みたいな所に入ります。一棟に 4 人くらい。加藤十吉さんは 1 階にいて 2 階に Siebenmann が居た。これが解かれたというところで加藤さんから、私が直接もらったわけではありませんが、多分松本幸夫さんかだれかに知らせて来て、それを我々は間接に聞いたのだとおもいます。最近 2 階で Siebenmann がうろちょろしてるのが分かって大変なんだという事が書いてあって、後から見ると、これが解かれたんだというふうな事がありました。そういう非常に歴史的な年です。

この章が低次元トポロジーの謎と題名を付けましたが、今日の締めくくりは Milnor が挙げた、Milnor の問題集というのがあって、Milnor の問題集は 1960 年代前半ですね。ですから Smale や Zeeman が高次元の Poincaré 予想を解いた頃に提出したとおもわれる 7 つの問題があります。それをちょっと書きます。

1. double suspension problem
2. simple homotopy type は位相不変量か?

3. $p_i \in H^{4i}(BO; \mathbb{Q})$ は位相不変か？
4. Hauptvermutung.
5. topological manifold は triangulable か？
6. Poincaré 予想 in dim. 3,4.
7. annulus conjecture

1 番目が double suspension problem, それはさっきの 3 次元 homology 球面 W^3 があつたときに, それを 2 回 suspend する $\Sigma^2 W^3$, 2 回 suspend すると, これは一見とんでもないように見えるのですが, 5 次元球面 S^5 と homeo か? という問題です. もちろん S^3 だったら, 1 回 suspend して S^4 ですから, もう 1 回 suspend して S^5 になります. こういうとんでもない予想というか, 問題です.

2 番目に, simple homotopy type というものがあつて, これは基本群も考えにいたした上での homotopy 型ですけれども, simple homotopy type, これは組み合わせ的多次体に対して定義されますが, これは位相不変か? 2 つの組み合わせ的多次体があつたときに, simple homotopy type があるのですが, 互いに位相同型ならば simple homotopy type は同じか? これが 2 番目です.

3 番目は Pontrjagin class というものがありますが, この Pontrjagin class は $\mathbb{Z}$ 上定義されますが, $\mathbb{Q}$ 上にとるとこれは位相不変か? torsion では位相不変ではないということは, もう例として分かっていたんですが, rational cohomology にすると位相不変か.

4 番目は, これがさっきの Hauptvermutung ですね, 組み合わせ的多次体の組み合わせ構造は一意的か?

5 番目が topological manifold, 位相多次体は triangulable か? だから単体複体の構造を持つかどうか.

そして後 2 つですけれど, 6 番目がこれが Poincaré 予想ですね, さっき言ったように Smale と Zeeman, smooth と PL category ではもう解いてますから, 高次元では, dimension が 3 と 4. これが残ってました.

7 番目にこれが annulus conjecture. これも有名な予想だったのですが, 簡単にいうと $\mathbb{R}^n$ の中に, locally flat という条件を満たすような codimension 1 の球面 S^{n-1} が 2 つ disjoint に入ったときに, この間の部分が annulus か? standard か? $S^{n-1} \times [0, 1]$ と homeo か?

これが Milnor のある時点での問題だったわけです. それに対してその Milnor 自身が後日談というか 2006 年のさっきの Institute に属する PCMI, Park City Mathematical Institute, Utah 州にあるのですが, 毎年テーマを決めて夏に大学院生向けのサマースクールとコンファレンスがあります. 今年は geometric group theory で, 去年は Riemann 面の moduli 空間, 2006 年は低次元多次体がテーマでした. そこで Milnor は一般向けの講演をしていて, 60 年代に出した 7 つの問題のその時点での総括をしています. ちょっと簡単にそれを書きます.

double suspension theorem は Edwards, Cannon の 2 人によって, 肯定的に解決しました. Edwards は geometric topology, 今ではなく昔の, wild も入れた geometric topology の人です.

simple homotopy type は位相不変量か, これも Yes です. Chapmann と Edwards ですね, 独立に.

それから $p_i \in H^{4i}(BO; \mathbb{Q})$ は位相不変か? これは Novikov の Fields 賞受賞の主な理由になった一番有名な定理の一つです.

Hauptvermutung と topological manifold の triangulation. これは combinatorial のとき No であつて, これは Kirby と Siebenmann が解決しました.

Poincaré 予想, これは smooth のときに Smale, PL のときに Zeeman がそれぞれ証明して, 次元が 5 以上ですね, Poincaré 予想を証明しました. dimension 3 は Perelman によって解決されました. アーカイブに論文が出たのは 2002,3 年ですね, Milnor のこの 2006 年の論文ですすでに言及されています.

そして annulus conjecture は $n \neq 4$ のとき Kirby が証明して ($n = 4$ のときは Quinn), これも Kirby の有名

な仕事の一つです。

こういうふうになっていて、結局残ったのは何かというと、残ったのは、大問題は、1 番目は combinatorial, PL ではない、こういう条件を取ったときに triangulable か、位相多様体は triangulable か?

それともう一つはこの Poincaré 予想の dimension 4 です。また、dimension 4 の topological category では Freedmann の仕事があって、これは 1982 年ですね。結局残ったのは Poincaré conjecture, dimension 4 の C^∞ category, これが残った。詳しくは Milnor の論文を読んで頂きたいのですが、こんなふうになっています。

時間が来ましたのでちょっと中途半端ですが、今日はここまでにしたいとおもいます。この位相多様体は triangulable かというのは大問題ですが、4 次元の、さっきの 3 次元の革命は Thurston が起こしたと言いましたが、4 次元の革命は Donaldson と Freedman が起こして、その事を少し、私は門外漢ですが、そのあくまでもその立場からですが、今回はこの続きですね、4 次元の革命が起こって、どうなってその後、にしたいとおもいます。

後一つだけ、foliation はどうなったか、というのですが、これは私が言うよりは、坪井先生とか足助さんにその解説をお願いする方が適切だとおもいます。一個だけ、私は foliation はやっていないかということ、ずっと気になっている問題があります。それは Godbillon-Vey で

$$B\Gamma_1^\infty \xrightarrow{gv} K(\mathbb{R}, 3),$$

ここにこういう写像があるわけですが、これが homotopy 同値か? というのは大問題なのです。ここは実解析的にすると違うというのが Haefliger の定理があります。これは C^∞ で考えます。これは differentiability が小さくなると codimension に限らず、坪井先生の大定理がありますから、この homotopy 型について分かっていることも沢山あります。smooth で homotopy 同値かというのは大問題で、ちょっと大袈裟に言う、 $\mathbb{R}$ と $\mathbb{Q}$ の違いがトポロジーでも絡んできます。というのも、

$$K(\mathbb{Q}, 3) = (S^3)_{\mathbb{Q}}$$

になります。 $(S^3)_{\mathbb{Q}}$ は 3 次元球面 S^3 の rational type, S_0^3 と書く事もありますが、 $\mathbb{Z}$ 上 S^3 と変わらなくて高次元 cohomology なんかは何かはないわけです。しかし $\mathbb{R}$ はものすごいバカでかい abel 群

$$\mathbb{R} = \bigoplus_i \mathbb{Q}_i \quad (\mathbb{Q}_i \cong \mathbb{Q})$$

であって、連続体濃度、 $\mathbb{Q}$ 上の次元が連続体濃度ある。homotpy 群は和になりますと、Eilenberg-MacLane space は直積になりますから、

$$K(\mathbb{R}, 3) = \prod_i K(\mathbb{Q}_i, 3)$$

となります。 S^3 が連続体濃度の product, そうすると cohomology がとんでもなく出てきます。3 次元の cohomology が $\mathbb{R}$ だけあって、Thurston は GV で実現したわけです。 $S^3 \times S^3$ だと 6 次元 cohomology はあるわけです。直積をどんどん増やすと S^3 が、3 の倍数の cohomology がとんでもなくあるわけです。それが foliation, $B\Gamma$ -structure で実現されるか、というものを含んでいて、これがいつ解決されるか、100 年かかるかもしれないし、永遠に分からないかもしれない、もしかすると解けない問題、答えのない問題かもしれませんね。これはずっと頭の中に有んですが、どういうものなのか、differentiability が小さいときは坪井先生の結果があるのですが、 C^∞ , また実解析的になると全然違うというのもまた面白い所です。integrability に絡む homotopy 論ですね、これは分からない事が沢山あるわけです。では、今日はこれでおしまいにします。

会場から質問: Kirby-Siebenmann の仕事で微分トポロジーが終わるというのはなぜでしょうか? Kirby-Siebenmann の仕事は位相多様体の三角形分割の問題で微分トポロジーではない気がするのですが。

Thom, その後の一連の仕事を見ると、微分可能多様体と PL 多様体と位相多様体、それが同じ土俵の上で同じ理論で展開できた。微分トポロジーであるから最初のうちはもちろん微分構造が問題でしたが、そのうち PL 構造があつて、PL 構造の smoothing の問題や位相多様体の triangulation の問題が同じ同列の問題として出て来て、だから微分トポロジーというところちょっと言い過ぎかもしれませんが、まあ一つの時代が終わった、1969 年に、と言えとおもいます。differential topology というのは、今でも使う人は沢山いますし、最近では geometric topology とか differential geometry, metric topology とか、differential topology は 50 年代、60 年代に比べれば無くなって来てますよね、言い方が。60 年代は differential topology か homotopy 論、どっちかしかなかったです。大学院生もやりやすかったですね。

今はだからトポロジーと言つたって、トポロジーだけではなかなか難しいですね。gauge 理論とかやるなら微分幾何とか global analysis も必要だし、あるいは解析学も必要だし、だから全く感じは違う時代になっています。まあでもそれは当たり前ですよ。ずっと同じ事が続くわけではないので、その時代時代の特色があるわけで、いまからどうなっていくかというのは、それは私には分かりません。というより、それは若いみなさんが作っていくものだとおもいます。なかなか先が見えない時代です。数学だけではありませんが、でもそういうときは良い仕事が出る可能性は高くなります。

あとここでもう一つ transversely symplectic とか transversely volume preserving は、40 年ほとんど進歩がなくて、transversely holomorphic については足助さんが精力的に研究を続けて来て、smooth とは違うという事がわかりつつあります。transversely symplectic とか transversely volume preserving はなかなか難しいですよ。それともうちょっと 10 章くらいで少し触れたいとおもいます。

会場から質問：Milnor の問題というのはどこかでしゃべったのでしょうか。

それは調べたのですが、そうではないようです。2006 年のは PCMI の年次報告に入っていますが、そこを見ても論文もないようです。1960 年代前半に書いて circulate したと書いてあったと思います。引用はしてなかった、論文は出版はしてないと思います。

第 18 回 (2012 年 10 月 23 日)

それでは、今 9 章です。低次元トポロジーの謎というタイトルでお話していてその 2 回目です。まだ途中で
すね。

微分トポロジーと呼ばれる分野というか、これが華々しく開花したのは、1950 年代初頭です。そして敢えて
いうと前回言ったように、1969 年の、今日改めてもう一度詳しくお話しますが、Kirby と Siebenmann の仕
事があって、一つ節目になりました。

それですすね、Milnor の 1957 年の exotic 7-sphere ですすね、それがこの微分トポロジー、その前には Thom
がいたんですが、微分トポロジーの開花を華々しく宣言した仕事ですすね。その Milnor が 1960 年代に 7 つの問
題を提出しました。これは出版されているわけではなくて、preprint というか、今みたいにネット時代ではな
いので、コピーもゼロックスとかではなくてなかなか難しい、青焼きみたいなものでした。それでいろいろな
所に流布していたようです。

Milnor 自身が 2006 年にこの問題の現状について、6 年前ですが、これは前回言いましたので改めて全部は
書きませんが、錚々たる問題があったのです。2006 年時点でかなり、何パーセントというのはそれほど意味が
ないですが、7 分の 1、だから 6 題は解かれた、0.5 題、0.5 題残ったという感じなんです。残った問題を、これ
は残った問題は今日の主題なので後でもう一度詳しくやりますが、残った問題は 2 つなんです。これは大問題
であって、この先 10 年で解決するのか、50 年経っても解決しないのか、なかなか難しいですが、後で詳しく
やりますけれど、ここで書いておきますと一つは Poincaré conjecture, dimension 4 で C^∞ -category, 7 つのうち
の一つの問題は Poincaré 予想で、この微分トポロジーで Smale と Zeeman がそれぞれ smooth と PL category
で 5 次元以上の Poincaré 予想を解いたわけす。そしてこの時点で、この問題の時点で 3 次元と 4 次元が残っ
たわけですすね。3 次元は皆さんご存知のように、Thurston の革命、3 次元トポロジーの革命、geometrization
conjecture を Perelman が完全に解いて、Thurston 自身 90 何パーセントか、本人は 99 パーセントくらい確信
していましたが、最終的に 3 次元 Poincaré 予想を解決したのは Perelman。3 次元は解決されて 4 次元がその
時点で残ったのです。これが 2002,3 年。4 次元が残ったわけですが、それより前に、後でやりますが、1982
年に Freedman が topological category では 4 次元 Poincaré を解きました。従ってこれだけが残っています。
いま大問題、どのくらいで解決するかどうか、2002,3 年頃には絶対反例が出るよと言っていた人もいました。

2 番目ですすね、これが何かというと topological manifold の triangulability, 位相多様体ですすね、これが半分だ
というのは、Kirby-Siebenmann のこの 1969 年の有名な仕事に関連するわけで、位相多様体の triangulability
はずっと大問題だったわけですすね、この微分トポロジーより前に、例えば 3 次元多様体が triangulable とい
うのは Moise の仕事です、2 次元、曲面はどうかというと、それはいつ誰がやったかというよりは、今はみ
んな当たり前のように思っていますが、完全に当たり前ではないですすね。Kirby-Siebenmann は 1969 年に
combinatorial な triangulation, 条件付きの triangulation, だから各点の link が、次元が一つ下がった sphere の
スタンダードな triangulation と PL equivalent なものを combinatorial な triangulation といいます。その存
在とその一意性について完全な解答を与えた、Kirby と Siebenmann の仕事です。だから半分、強いて言う
と半分解かれたわけですが、その条件がないときに位相多様体が triangulable か、というのは、大問題であって、
これもいまから何十年かかるのか、それとも機が熟しているのか、ちょっとわかりませんけれども、ともかく
この 2 つが残ったわけす。これについては後でもう少し詳しくやります。

3 次元多様体ですすね。低次元多様体というのが、いまトポロジーのメインの研究対象ですけども、3 次元多
様体と 4 次元多様体、この対比というのが段々、非常に対照的だということがわかってきました。これ両方と
も革命が起こったわけす。革命を起こしたのは、前回やったように 3 次元はもちろん Thurston (1946-2012),

非常に残念というか悲しい事に今年亡くなってしまいました。Thurston が革命をおこしたのは 1980 年代初等だったのです。70 年代初めに foliation の仕事で華々しくデビューして、前回ちょっとやりました、70 年代の後半に surface diffeomorphism の分類で、いまでは Nielsen-Thurston theory という大理論を独力で作りました。そして 80 年代、それにつながる形で、Pseudo-Anosov というのができたら双曲幾何が出てくるわけです。3 次元多様体の geometrization conjecture, これを完全に解いたのがさっき言った Perelman. だけど Perelman が解いたというあまり良くないですね。Thurston が非常に多くの場合、Haken の場合ですね、そして残りの場合という Perelman があれですが、方法が全く違うわけですから、Thurston はいわゆる topology proper な方法、もちろん、革命を起こしたわけですから、それまでのトポロジーとは違って双曲幾何、微分幾何的観点が入ったわけですが、でもまあ classical なトポロジーの延長線上の大革命だったわけですが、Perelman は外からくる感じで Ricci flow, Hamilton の仕事があったわけで、いわば全く違う手法で解いてしまった。これが 2002,3 年ですね。

これは今では完全に認知されて、これにもいろいろな人間的なドラマがあったわけですが、アーカイブに 3 つ preprint が載った段階で、もちろんすぐにみんなビックリして、これは全部知っているわけではありませんが、3 つくらいのグループがそれぞれ独立に検証を始めて、今では完全に認知されているという事です。

何れにしても Thurston が革命を起こして、そして言いたかった事は Perelman が geometrization conjecture を解決したわけですが、Thurston 自身が 1982 年出版の Bulletin of AMS に survey というか、有名な論文ですけど、3 次元多様体と Klein 群に関する有名な論文を書いてそこで 24 の問題を挙げています。Thurston の問題、Milnor との対比で言うと、Milnor は 7 つの問題で残り 0.5, 0.5, 0.5 と言いましたが、0.5 というよりは 0.25 かもしれませんが、一方で Thurston は 24 の問題を挙げていますが、ほとんど解決しています。

最初に解決したのは Klein 群に関する Ahlfors 予想とか ending lamination 予想とか、それがほとんど粗方 2004,5 年でしょうか。これは大鹿さんに聞くのが一番よいですが、粗方全部証明されて、関わった人は、Canary, Calegari-Gabai, それからもう一人、これは私の専門ではないですが、Agol ですね。この人、Agol は後でまた出てきます。これは大体前半の問題です。

そしてこのごく 2,3 年、今年が最後 2,3 年、劇的な進展を見せて、Thurston の geometrization conjecture を超える幾つかの問題があったのが、粗方完成してしまったというのが、2,3 年前から今年ですね、問題でいうと 15 番から 18 番、この 4 題。

これは Agol の、Agol は最近いろいろな所でもう 10 回以上、いろいろな talk ですね、1 時間 talk とか survey talk をしていますけれど、それをみるとわかるように Agol は Thurston の Bulletin に載った 15 番から 18 番、これを Agol だけではなくて、Wise とかいて、これもいわば Perelman 程ではないですが、topology proper というよりはちょっと外側というよりは隣ですね、geometric group theory から来た Wise とか Agol, virtual Haken conjecture, virtual b_1 conjecture, virtual fibration conjecture, この 3 つを完全に肯定的に解いてしまいました。これが 2012 年初頭で終わった。いま Agol が精力的にいろいろ講義をしている、そういう段階です。じゃあ 24 あるうちで全部解決したかという、敢えて言うと残った問題ですね、2 つ 3 つあるのですが、大きな問題とおもうのは 22 番と 23 番。24 番も大きいかもしれませんが、この 2 つに比べるとやや、22 番というのがこれが何かという、3 次元多様体全体を $\mathbb{Z}/3$ と書いたとおもいますが、その中でこれが 8 つの幾何学で統制されるというのが Thurston の geometrization conjecture です。その中で一番豊富な世界ですね、hyperbolic な 3 次元多様体の世界、ここに volume というのが、まあ volume 自身は hyperbolic でなくても、Gromov の仕事で simplicial volume というものがあるから全て定義されているから、しかし hyperbolic の場合はここに η -invariant というものがあって、あるいはこれを mod $\mathbb{Z}$ すると Chern-Simons invariant,

$$\mathcal{M}(3) \xrightarrow{(\text{volume}, \eta\text{-invariant})} \mathbb{C}.$$

$$\text{Knot} \rightarrow \mathbb{C}$$

本当はこれを順番をひっくり返した方が、Lie 代数の cohomology からすると自然になります。いずれにしてもこの組で plot 下さい、というのが Thurston の問題。あるいは knot の問題、knot の空間から volume と Chern-Simons, これは Thurston 自身書いていて、もうちょっと具体的にいうと computer program を開発してこういうものを plot 下さい、特に knot に関しては knot table 毎に全部 plot して、Thurston の有名な仕事、closed manifold の場合でいうと hyperbolic manifold の volume 全体の集合は ω の ω 乗という order type をもつというのが Thurston の大定理の一つですが、それを観察下さいと書いてあります。そして volume はこれは bijective ではないけれども、かなり近いわけです。finite to one ですが、そうすると 3 次元多様体全体がいわば virtual に複素平面全体に plot されるわけです、hyperbolic の世界、これがどうなるかを computer を使って観察下さい。これはそれほど進んでいるとはおもえないですね。これに関連して前回言ったように volume 予想というのは非常に広がりを持ってきて、これは元々 Kashaev が物理学的な考えである不変量を定義しました。そしてそれを村上順さんと村上斉さんが、だから Kashaev-Murakami-Murakami と呼ばれる volume 予想というのがあって、knot の場合、Jones 多項式、これは finite type 不変量になっていますが、volume がそのある asymptotic な振る舞いで書けるだろう。volume 予想、これが大きな広がりをもっているのは、Sergei Gukov, Caltech の、この人が A 多項式の理論との関連を付けて非常に大きな流れとなっています。大問題になっています。敢えていうと 22 番に関係するとも言えます。

23 番は前回少しやりましたが、これは整数論的で、トポロジーの範囲ではどうにもならないものです。Q 上 hyperbolic manifold の volume を添加する。Thurston の 23 番に何て書いてあるかということ closed hyperbolic manifold の volume の比はいつも有理数か? rationally related, 多分違うという事を想定しているのだとおもいます。

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q} \langle \text{volume of } W^3 \rangle = \infty?$$

大方の人は無限次元であることを予想している、次元が 2 以上である事を証明しただけでも大定理ですね。だけどそれは Topology の範囲だけではどうにもならない。Q 上一次独立だという事を証明しなくては行けない。

これが 23 番、24 番が Thurston の有名な仕事は knot の Dehn surgery をすると、ほとんど全て hyperbolic になる。knot の Dehn surgery, genus 1 の surgery ですが、24 番は genus を上げて Heegaard 分解を固定したときどうなるか、ほとんど hyperbolic か、

これが残った問題。しかしまあ全体から言うと、Klein 群に関する Ahlfors 予想を含む大予想ですね、これがあれよあれよという間に解かれてしまいました。virtual 予想、これもまた 5,6 年しないうちに、Thurston が存命中に完全に解決してしまいました。それが 3 次元の革命、Thurston の革命に関わる現状です。

それで 4 次元の革命というのが、これはもちろん、私は 4 次元が専門ではないので、こら辺は耳学問がほとんどですが、皆さんがご存知のように革命を起こしたのは Freedman と Donaldson。このほとんど間を置かずに出たこの大結果、衝撃を与えました。これを見てみるとほとんど同じ時期なんですね、3 次元と 4 次元に革命が起こったのは、Freedman は 4 次元 Poincaré 予想を topological category で証明した、これは大定理。Donaldson は C^∞ で 4 次元多様体というものが、topological manifold と違って微分構造が algebraic topological な非常に強い制限を与える事を証明したわけです。最初は単連結で definite な C^∞ -多様体、definite だったら standard である事をいったわけです。standard でない definite な form はもちろんすごい沢山あるわけですから。しかも Freedman は 4 次元 Poincaré を証明しただけではなく、単連結な 4 次元位相多様体を完

全に分類しました, その corollary として C^∞ -structure が algebraic な structure に大きな制限を与えるのですが, topological manifold には全くない. 4 次元では topological category と C^∞ -category が全く違うということを証明しました. それは 3 次元では古典的に知られているように, topological category と C^∞ -category は全く等しいという事が分かっていたわけですから, 3 次元と 4 次元の drastic な違いというものがこの 2 つの革命によって明らかになっていったわけです. 先ほどの大きな問題, 4 次元の smooth Poincaré と位相多様体の三角形分割可能性の問題が, クローズアップされてきて, と言っても, これをまともにやっている人はそんなに多いかどうか分かりませんが, そこをちょっとやります.

1969 年の Kirby-Siebenmann, 特性類の観点からいうと $ks \in H^4(BTOP; \mathbb{Z}/2)$, こういう特性類があつて, combinatorial な多様体にもその tangent bundle, stable な normal bundle と言った方がよいかもしれません, 構造群が piecewise linear な homeomorphism のなす群の vector bundle, smooth なときは Grassmann, PL の Grassmann みたいなものです. これがあつて, 位相同型で分類する. この差を考えるというのが微分トポロジーの常套手段です. 幾何学的な問題をこういう分類空間という universal な空間のホモトピー論に帰着して解く. surgery theory の一つの帰結だったわけです. Kirby-Siebenmann はこれを完全に解決したわけで, fiber は TOP/PL , こういう等質空間みたいなもので, Kirby-Siebenmann の定理はこれが, 分類空間のホモトピー型を決める, それは Thom が始めたもので, 微分可能な多様体の分類を tangent bundle, normal bundle のホモトピー論に帰着して, そのホモトピー論を解くというのが, それが基本戦略です. 敢えていうと現在まで続いています. 段々難しくなっていますが,

Kirby-Siebenmann の基本定理は, 非常に信じられないくらい簡単に 1 箇所だけホモトピー群が order 2 の群になって, 3 次元 homotopy 群が $\mathbb{Z}/2$ であとは自明ですから

$$TOP/PL = K(\mathbb{Z}/2, 3).$$

fibration, これは右の方に無限につなげる, この分類空間ですから, 逆にいうとこれの loop space $\Omega K(\mathbb{Z}/2, 4) = K(\mathbb{Z}/2, 3)$ がここにくるわけです.

$$TOP/PL \rightarrow BPL \rightarrow BTOP \xrightarrow{ks} K(\mathbb{Z}/2; 4)$$

これは Eilenberg-MacLane space への写像というものがその cohomology と等価なわけですから, ここから $H^4(BTOP; \mathbb{Z}/2)$, これは非自明であつてこれが Kirby-Siebenmann の特性類の定義する連続写像,

$$M^n \rightarrow BTOP$$

これは fibration, 左に無限に続いていくわけです.

そして位相多様体があつたときに, 低次元はこのときでも, surgery をするので, 特に 4 次元は出来ないのですが, 次元が closed の場合は 5 次元以上, boundary があるときは 6 次元以上, 条件はありますが, ここに位相多様体があつたら stable な tangent bundle, それは topological bundle ですから分類写像はあるのですが, combinatorial な triangulation をもつかどうかの必要十分条件は, これが lift するか,

$$M^n \rightarrow BPL$$

これは Thom 以来のものですね, bundle が reduce するとあとは surgery してこっちになる. この homotopy 型が決まったわけですから, lift があるための必要十分条件は, こういったときに null homotope, つまり 4 次元 cohomology, Kirby-Siebenmann 類,

$$ks(M) \in H^4(M; \mathbb{Z}/2)$$

これが消える事が必要十分である、完全な形でさっきの *trianagulability* を解いてしまった。同時にその uniqueness も基本予想, *Hauptvermutung* と呼ばれた、これも大問題だったわけですが、これも同時に解いてしまった。敢えていうと、微分トポロジーの終わりというところちょっと問題ですが、大きな節目であった。

さてそうすると Milnor の 7 つの問題, 2 つ残ったわけですが, *mystery* としてクローズアップされてきます。改めて書くと, *topological manifold* は三角形分割可能か、これは大問題なわけで、これは全く条件がないわけですから、言い換えると、任意に与えた位相多様体は、単体複体の *underlying space* を多面体と言いますが、多面体と同相か？というわけです。それが *mystery*, $n=4$ のときはこれ自身 No なわけです。Freedman や Donaldson の結果を使うと、いわゆる E_8 -manifold というものがあります。それはそもそも 4 次元多様体でもし単体複体の構造を持つならば点の link は 3 次元ですから、3 次元は Poincaré 予想は正しいですね。だから 4 次元がもし何の条件もなく *triangulabe* としてもそれは組合わせ的多様体になります。 E_8 -多様体は組み合わせ多様体になると *smoothable* ですから、 C^∞ になって Donaldson の結果に矛盾します。だから No というのはわかっています。

問題は $n=5$ のとき。これが今でも分かっていない問題です。境界があるときは 6 次元以上。これについては Kirby がいろいろな節目の講演で事ある毎に挙げています。1969 年に自分自身 Siebenmann と一緒に証明したけれども、そもそもなんの条件もないときに *triangulable* かというのは大きな問題で Kirby の *problem list* にももちろんあって、またことあるごとにいろいろな節目に挙げていて、もちろんわからないですが、どうなんでしょうね。やり方がないから、実質的にやっている人がいないと言えるかもしれません。これについてですね、こういった 3 次元, 4 次元が全然違うというのに出てくる大きな *mysterious* な群というのは、

$$\Theta_{\mathbb{Z}}^3 = \{\text{oriented homology 3-sphere}\} / H\text{-cobordant}.$$

普通 *integral homology 3-sphere*. これは *integral* な *homology 3-sphere* 全体、こう書いたら、全部 3 次元多様体は *oriented*, *oriented* な *homology 3-sphere* を持って来て、これは可算個あるわけですが、これを *homology* 同境. 大文字の H -同境, 小文字で書くと h -同境, *homotopy* 同境です。 *homology* の意味で *product* になる、そのときに両端を H -cobordism, そういう同値関係で割ったら群になる。これは非常に、いま 2 つの問題とか、3 次元とか 4 次元の差について、 *mysterious* な群、もともとあったのですが、これについてですね、問題をほとんどある意味で、ほとんどというところちょっと語弊がありますが、構造がわからない、まずこれが自明でないというのは、4 次元多様体の Rohlin の有名な定理を使うと、これは *able* 群ですが、ここから *order 2* の有限群へ全射が出来る。

$$\Theta_{\mathbb{Z}}^3 \xrightarrow[\text{Rohlin}]{\mu} \mathbb{Z}/2 \rightarrow 1$$

これは Rohlin 不変量 $\mu(M)$ というものですが、念の為に書いておきます。 *homology 3-sphere* M があつたとすると、その *homology cobordism* 類があつて、それはまず任意の 3 次元多様体 M はある 4 次元多様体 W の境界になるという事が古典的に知られていて、もちろん *oriented*, *differentiable* で取れます。 W に *spin* 構造が入る、 w_2 も消える、 *oriented* だから w_1 は消えますが、 w_2 も消えるようにできます。これはそんなに難しい事ではありません。そうして W の *signature* というものが定義できます。境界はあるのですが、 *sphere* みたいなもの、 *homological* には *sphere* ですから、 *homological* には *disk* を貼って、 *signature* が定義できます。この *signature* が代数的に 8 で割れる事はわかるのですが、8 で割ったときにその *mod 2*, これは W の取り方に依らないというのが Rohlin の定理の帰結です。

$$\Theta_{\mathbb{Z}}^3 \ni [M^3] \mapsto \frac{\text{Sign}(W^4)}{8} \bmod 2 \in \mathbb{Z}/2$$

そしてこれが全射になるという事も Poincaré 球面を考えるとこれは非自明になり、全射である事がわかります。これはかなり早い時期にわかったのですが、ある時期、これが同型か？と考えられたときがあります。ある時期、非常に弱い形ですけど、同型だったらいいな、というくらいですが、No だというのが分かって、Casson 不変量もこれに関わって出てきました。1983 年頃です。これが同型でない事を証明しようとして出てきました。Casson 不変量自身、非常に大事な不変量だという事はどんどん明らかになって、これと関係ないところで理論がどんどん発展しました。これが決定的に No という事を証明したのが古田さん、1990 年の Inventiones, 有名な論文ですね。やや遅れて Fintushel と Stern, この 2 人、4 次元の gauge 理論と古典的なトポロジーを使った、息の長い仕事をしているコンビです。やや遅れて、論文出版は同じ年でしょうか、古田さんが証明して、やや遅れて独立に証明したと言われています。何を証明したかという $\Theta_{\mathbb{Z}}^3$ は abel 群だから rank が定義できるわけですが、その rank が無限大である事を証明しました。同型であるどころの騒ぎではありません。無限群であるばかりではなく、rank が無限である事を証明しました。この証明はやっぱり Donaldson の流れを汲んだ証明で、gauge 理論を使う証明であって帰謬法なんですね。

homology 球面の作り方としては一杯あって、今では hyperbolic な homology 球面というのが研究の対象であって、なかなか難しいですが、その前に Seifert の homology sphere, 1960 年代に Brieskorn という人が、Hirzebruch の近くですね、Bonn にいた人が、Brieskorn singularity という大きな流れをつくったんですね。その Brieskorn sphere というのが一杯出て来て、その中の系列が $\mathbb{Z}$ 上 1 次関係があるとすると gauge 理論を使って矛盾を導く、両方とも同じ、帰謬法です。無限 rank だから、ここから $\mathbb{Z}$ へ準同型を作ったら一番よいのですが、今の所 1 つだけあって Floer 理論という人の準同型が一つだけあります。もうちょっと最近、もう大分前になりますが、大分前 Ozsváth-Szabó, この理論を使ってもできる、これはまだ証明はされていないようですが、これは同じじゃないか、古田さんに聞いたら同じだろうといわれてますね、でも証明はされていませんと。何れにしても有っても 1 個か 2 個しかありません。そもそも abel 群で rank が無限だったら $\mathbb{Z}$ への準同型が無限個あるか、というそれはわかりません。divisible という事はあるのでわかりません。無限 rank だけで $\mathbb{Q}$ みたいな形だったら、どうにもならないですが、多分そうではないだろうと、いくらでも divisible だったらどうしようもないですが、でも証明はまだないですね。

無限 rank だから $\mathbb{Z}$ への準同型が無限個あるなんていう事にはすぐにはならない。もう一つ幾つか candidate, 候補は幾つかある。Neumann-Siebenmann, Furuta-Ue-Fukumoto, それから Floer の instanton Floer homology, 最近 Lagrangian Floer とか Heegaard Floer とか、一番盛んに研究されていますが、その前に instanton Floer homology, $\mathbb{Z}/8$ -graded. 8 個の Betti 数が出てきます。その 8 個を、普通の Euler 数は交代和ですが、weight $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$, +, +, -, -, +, +, -, -, こういう weight で加えると Seifert 上 Neumann-Siebenmann, Furuta-Ue-Fukumoto と同じで準同型になるのですが、問題は hyperbolic のときどうなるかわからなくて、こういう weight を付けた instant Floer homology の Euler 数がもう一つの candidate, それを具体的に言ったのは Saveliev. だけどこれは全部 candidate で一番難しいのは hyperbolic な homology 球面に対して方法がない、additive かどうか調べる方法がない。Seifert では additive というのは証明されています。

いずれにしてもそういう神秘的な群、 $\Theta_{\mathbb{Z}}^3$ というのがあります。位相多様体の triangulability に関して決定的な仕事というのは、2 つのグループ、まず Matumoto Takao さん、さっきの Fintushel-Stern の Stern, Stern という人は、数学者は沢山いますが、Stern は本当に紳士の Stern ですね、そして Galewski, Galewski-Stern の 2 人、この 2 つのグループがほとんど同時に、松本堯生さんの仕事は Siebenmann の下での Doctor 論文。これが 1978 年から 80 年くらいでしょうか。松本堯夫さんは Symp. in AMS, Galewski-Stern は Annals of Math に出ています。どちらも超一流の雑誌に出ています。

これを書きますと、任意の位相多様体 M^n , topological manifold, これは n が 5 以上で境界が空でないとき

は n は 6 以上, こういう条件付きですけれども, 全ての M^n , こういうものが triangulable である必要十分条件は, これは非常に強い美しい定理ですが, $\mu: \Theta_{\mathbb{Z}}^3 \rightarrow \mathbb{Z}/2$ が split する.

Theorem (T. Matumoto, Galewski-Stern, 1978-80)

任意の topological manifold M^n ($n \geq 5, \partial M \neq \emptyset$ のとき $n \geq 6$) が triangulable $\Leftrightarrow \mu: \Theta_{\mathbb{Z}}^3 \rightarrow \mathbb{Z}/2$ が split する.

こういう statement もきれいでわかりやすい, 群論的にこういう全射があったら, Kernel, 普通はねじれた extension ですが, それが半直積になる, 言い換えるとこの中に order 2 の元が存在して, Rochlin 不変量が zero でない. 1980 年ちょっと前ですから 30 年たちますが, これを元にさっきの残った問題にアタックするとよいとおもいますが, なかなか難しいですね. Galewski-Stern は, 松本さんも principle としては同じだと思いますが, 分類空間の言葉で言っていて, これは Galewski-Stern の書き方ですが, *BTRI*, これは triangulable の *TRI*, こういう Grassmann 多様体みたいなものがある, これが *BTOP*, これは位相多様体の tangent bundle, そして一方, ここに *BPL* というのがあって, これが Kirby-Siebenmann によってこの fiber は $K(\mathbb{Z}/2, 3)$ であって, 一方でこの fiber がまた Eilenberg-MacLane space になって, Kernel の, Rohlin 準同型の kernel, これはいま構造のわからない, 無限 rank ですが, それ以外の事がまったくわからない abel 群が π_4 に出てくる,

$$\begin{array}{ccccc}
 & & BPL & & \\
 & & \downarrow K(\mathbb{Z}/2, 3) & & \\
 BTRI & \xrightarrow{K(\text{Ker}\mu, 4)} & BTOP & \xrightarrow[\text{Bockstein}]{\delta ks} & K(\text{Ker}\mu, 5) \\
 & & \downarrow ks & & \\
 & & K(\mathbb{Z}/2, 4) & &
 \end{array}$$

従ってこの写像は何かというとこれは Bockstein という準同型, $\delta ks, K(\text{Ker}\mu, 5)$, Bockstein, これは何に associate した Bockstein かというと,

$$0 \rightarrow \text{Ker}\mu \rightarrow \Theta_{\mathbb{Z}}^3 \xrightarrow{\mu} \mathbb{Z}/2 \rightarrow 1$$

です. 一般に homology や cohomology の係数として, 係数の完全系列があったら, これ係数の Kirby-Siebenmann があるから, long exact sequence を使って, degree が 1 つシフトした, 5 次元の cohomology が定義できます. こういうものが, これがこの定理の言い換えなわけです. こういう風になっています. これは 1980 年頃ですが, その直後に, さっきの, もう一度書きますが, 4 次元の革命が起こって, Freedman と Donaldson になるわけです. Freedman は単連結な位相多様体を完全に分類して, 特に topological な 4 次元 Poincaré 予想を解決しました. もう一つ大きな仕事があります. それは何かというと, $\Theta_{\mathbb{Z}}^3$, これは 3 次元の oriented な homology 3-sphere を, 大文字の H, homology cobordism という同値関係で割って得られる abel 群です. cobordism は 4 次元なので何も言わないときは smooth manifold を仮定しますが, それが位相多様体でもよいとしても定義できます. これは何かというと, homology 3-sphere で, oriented ですけれども, mod homology cobordism ですが, だけど 4 次元の cobordism なので, topological な位相多様体でよい.

$$\Theta_{\mathbb{Z}}^3(\text{top}) = \{\text{homology 3-spheres}\} / \text{Top. H-cobordism}$$

Freedman が証明した事は, 4 次元においては位相多様体は微分可能多様体よりもものすごく沢山ある, algebraic な条件さえ満たせばよい. 少なくとも単連結な場合は, そうすると topological な H-cobordism, これで割ったとすると小さくなる. Freedman が証明した事はこれは自明な群になるという事です. 実は Freedman はもっと強い事を証明しまして, さらに強く任意の homology 3-sphere, これは境界になる事の,

さっき Rohlin 不変量の所で、4次元の smooth な多様体が存在して、spin まで仮定でき、さらに単連結までできるけど、homology は消せるか、homology 4-disk になるか、なるならこの群の中ではゼロになります、それは分からないけれど、Rohlin 不変量が消えたら、smooth な homology disk の boundary になるかどうか、これは大問題ですね、smooth な homology 4-disk の境界になるかどうか、この群の中で自明になるかならないか、だけど Freedman が証明した事は、位相多様体は驚くほど自由にあつて、任意の homology 3-sphere M^3 に対して、topological 4-manifold W^4 が存在して、これは contractible 4-manifold で、homology disk というよりずっと強く可縮な 4次元位相多様体の境界になる、 $M^3 = \partial W^4$ となるものが存在する。これが homology disk だったら homology cobordism の群の中で自明になる、もっとずっと強くて可縮な多様体の境界になる。

Theorem 9.1 (Freedman).

$$\Theta_{\mathbb{Z}}^3(top) = \{1\}.$$

私は門外漢ですけども、本当かなというと言弊がありますが、どんなふうに証明するのかなとおもって、Scorpan という人の AMS から出ている、The wild world of 4-manifolds というタイトルの、かなり分厚い本を見ました。あとで聞いたのですが、この人は Kirby さんの弟子で、もの凄い勉強をして Donaldson と Freedman、両方勉強をして完全に理解して本を書きました。両方書いてあります。その後数学者にはならなかったようですが、この中にこの証明の概略は書いてあります。これは構成しているんですね、constructive なんです。wild world ですからアメリカの南部で発達した Bing 以来の wild topology、その流れに Casson handle とか、モダンなトポロジーとアメリカの wild topology、Casson の大きな仕事は出て来たんです。読んだときは納得したんですが、凄い関心してなるほど可縮なのかとおもいました。どんどん消していくんですね、homotopy 群を消していかなければいけない。何れにしてもこれは大定理なわけで、4次元の世界で topological、これは smooth にすると Furuta、Fintushel-Stern の定理があるから無限 rank、決定的に違う。

それからちらっと言いましたが、4次元 Poincaré, smooth ですが、ちょっとだけ、これのお話的な事をいうと、2003 年京都で foliation の symposium がありました。そのときにある人といろいろと話をしました。4次元では Donaldson 以降、Betti 数がだんだん小さい所で、位相多様体は一つ固定したときに、微分構造が無制限個はある、 $\mathbb{C}P^2$ を blow up して、 $\mathbb{C}P^2$ 自身、 S^4 は、これもまだ未解決ですが、これを blow up していくと、exotic structure が 1 個入ると大体無限個入らしいのです。Kotschick がブレイクスルーをやって、いまどんどん減って来て今 Betti 数 2 ぐらいでしょうか。

最新の仕事は、Park さんとか Stipsicz さんとか、この辺りの人がどんどん下げて来て、この辺りは Stern さんが去年 2011 年 5 月ですね、毎年ある Cornell Topology Festival で話をしています。Stern は 4次元 smooth では大御所の一人であつて、このときのタイトルが、4次元 smooth なんかかんとか 2011、ですね、毎年やるかどうか分かりませんが、来年は少なくともしゃべるんじゃないでしょうか。どんどん exotic structure が入ってきている。Cornell, Topology Festival, Stern で検索すれば video が見られます。大問題は S^4 、これが最終的な大問題、 S^4 , CP^2 , $S^2 \times S^2$, こちら辺りの homology 群が非常に小さい所でどうなるか、大問題。2003 年に京都である人に会ったときに、4次元 Poincaré 予想が、うわさでもう解かれるのではないかと議論したら、あれはもう来年くらいには反例が出来ますよ、とその人は言っていました。次の年にまた会ったので、反例できました？と聞いたら、なかなか難しいようなので、1,2 年あつたら出来るでしょう、その次にあつたら、なかなか難しいですね、と。どんどんトーンダウンして行きました。その人がどうかという事ではないですが、一時反例が出るだろうという機運が高まりました。いろいろな新しい homology 論がでてきたから、構成、候補はいろいろある。ことごとくいまの所全部 S^4 になっているわけです。新しい homology 論が出来たから、3,4 次元で今でも発展中なものがある。一方で反例の候補はあるから、新しい homology 論を適用する

と S^4 と違うという形でできるだろうと、これは正しいとおもっている人も多いでしょう。言ってもあまり意味のない事ですが、非常に難しい問題で何年かかるかわからないという状況になっています。この 2 つの問題、4 次元 Poincaré と Triangulability, これも Thurston の 24 の問題をほとんど、2,3 つはまだ解かれていませんが、解答を見たというのがどういう感じなのかわかりませんが、例えば Riemann 予想というのがありますが、これが解かれたとすると、わからないなりに感激するでしょうが、数学にとっては大ピンチだともいます。黒川さんの文章を見ると、問題はいくらでもありますよ、ということですが、Riemann 予想が仮に解かれたとすると大ピンチだと思います。問題は解かれていくという運命にありますが、1950 年代から、Thurston の問題にしる、Milnor の問題にしる、大ブレイクスルーがおきて 2,30 年のうちにどんどん解かれています。これが続いて行くと有り体にいうと問題が無くなってしまいます。もちろん問題を解くことは醍醐味ではありますが、新しいものを作って、Hilbert の問題にしる、Fermat にせよ、あたらしいブレイクスルーを引き起こすような問題を提出する、そういう事が求められると思います。

幸い新しい動きというのは、例えば Khovanov homology, Cluster algebra, Cluster algebra は最近脚光を浴びていますが、両方とも、その前に Vassiliev とか、これは偶然ではなく全部ロシア系の人ですね。なんとというか新しいアイデア、アイデアじゃないな、新しい構造が求められています。Cluster algebra が出てもう 10 年くらいになります、Khovanov も 10 年くらい、大体 10 年に 1 回くらい新しいもの、ブレイクスルーが起きます。Vassiliev は 1990 年くらい。

次は何か、日本発で何か出てくるといいのですが、というわけで主観的な低次元トポロジーの謎というものをやってきましたけれど、それで少し元の方に戻って、章はそのまま少し手前味噌になるかもしれませんが、逆井さん、鈴木さんとずっと一緒にやっている問題を、2 つの問題、さっきの問題と多少は関係があるのですが、これの紹介、これに少しずつ入っていきたいとおもいます。だからこれは 9 章の敢えていうとセクション 3 です。多分逆井さん、鈴木さんとの仕事、これは 10 章になります。

次は mapping class group です。これはこの講義の主人公です、 $\mathcal{M}_g$ と書いて、これは isotopy class であって、種数 g の曲面の向きを保つ微分同相の isotopy 類の群。これがいわばちょっと大袈裟にいうと、Poincaré 予想というのがあって、そもそも初めは homology が S^3 と同じならば S^3 と homeo か、ほんの一瞬だけですがこういつて、彼自身が homology 球面を構成して、100 年くらい経って Poincaré 自身、いまいたらびつくりするくらい homology 球面だらけ、hyperbolic な homology 3-sphere というものがあるというのは、Poincaré も夢にも思わなかったのではないのでしょうか、Thurston 自身だって、Thurston がつくったのですが、どうおもったのでしょうか。そういう事があるので、homotopy と homology の違いが全然あるわけです。 $\mathcal{M}_g$ はいわば homotopy の世界だとすると、いわば homology の世界に広げる群というのが $\mathcal{H}_g$ という群です。これは Garoufalidis と Levine によって導入されたのが、2000 年くらいですかね、まだ 10 年ちょっとしか経っていないですね。Garoufalidis は比較的若い人で今 Georgia にいます。Levine は私とほぼ同世代、高次元も含めた Knot の有名な大家ですけれども、Jerome Levine です。数年前に亡くなりました。homology と homotopy の違いというのは、定義を、写像類群の定義を次のようにすればよいわけです。これは cylinder ですが、 $\Sigma_g \times I$ を持って来て、曲面があつて product を取って、0 の方は Σ_g から identity でいくけれども、1 の方は Σ_g からこれは結局 monodromy になるわけですが、 φ という diffeo を持って来て、これを isotopy で割ります。こういうやつ全体を考えて、これはもともとは微分同相の isotopy 類だったわけですが、cylinder 上の marking、左側は identity、右側は自由に動かす、同値類によってこれで mapping class を定義して、これを φ で貼付けると S^1 上の fibration になって、一つの fiber が Σ_g と identify されている、monodromy がかつちり決まる。

$$\mathcal{M}_g := \pi_0 \text{Diff}_+ \Sigma_g$$

こう考えると、これは homotopy の category ですが、homology の category にして得られるのが、Garoufalidis と Levine であって、左側は Σ_g があって、cylinder ではなくて、今度は homology cylinder W^4 があって、homology の意味で、homological には $\Sigma_g \times I$ 、左側は identity、そして右側には monodromy みたいなものがあるわけです。あるんだけど cylinder ではなくて homology product.

一番簡単な例としては 3 次元多様体 $\Sigma_g \times I$ ですが、内部において homology 3 球面、何でもよいから持って来て connected sum する、homological には何もないので、これを 4 次元の cobordism でわる。これが定義です。

$$\mathcal{H}_g := \{W^4 \underset{H_*}{\cong} \Sigma_g \times I\} / H - \text{cobordism}$$

Garoufalidis-Levine の導入した、Levine は enlargement と呼んでいますけれども、写像類群の拡大。この base にあるのは 1990 年代後半に展開された Habiro 理論、独立に Goussarov 理論があって、これに基礎をおいて、Habiro さんの論文は 1999 年の Geometry and Topology、有名な論文で 90 ページくらいの大論文です。名前が、これが homology cylinder という命名は Levine なのかな、Habiro さんは homology cobordism、という別な名前で呼んでいます。clasper surgery、強力な理論があって、写像類群が部分群になるような大きな群を定義しました。

そうするとさっきの homology cobordism の作る群の定義、これは 4 次元の cobordism ですから、topological でつかうか、smooth でつかうか、2 つバージョンが出てきます。notation として smooth は何もつけないとするとこの商として $\mathcal{H}_g^{top}$,

$$\mathcal{H}_g \twoheadrightarrow \mathcal{H}_g^{top}$$

こういうものが定義できる。この 2 つの群の topological category, smooth category は 4 次元で劇的に違うという事がわかっているわけです。これはいわば 2 次元、3 次元の幾何なのですが、群として現れるその差を研究するとすれば、さっきの 2 つの大問題、triangulability と Poincaré 予想、Poincaré 予想はさすがに直接というわけにはいきませんが、triangulability の方は直接関係する、これを調べましょうと。

homology cylinder は研究が始まってまだ 10 年くらいしか経っていませんが、逆井さんが世界的なリーダーの一人であって、合田さんとか幾何的な研究、逆井さんの場合は代数的な研究も込めてすすんでいるわけですが、なかなか難しいですね。写像類群の場合もそうでしたが、これ自身が最終的な研究なのですが、代数的に表示しようとする外部自己同型になるからなかなか難しい、基本群、base point をとるとやや簡単になります。曲面から disk を 1 個引っこ抜いて基本群を自由群にして

$$\mathcal{M}_{g,1} \rightarrow \mathcal{M}_{g,*} \rightarrow \mathcal{M}_g$$

この差というのは Birman とか Dennis Johnson の仕事で完全に分かっている。完全にわかっているの、これは研究しやすいので、これを研究して、落っこして、落っこしてと。

homology cylinder の場合もそうであって、あんまり書かないですかね、disk を除いて、

$$H_{g,1} \rightarrow \mathcal{H}_{g,*} \rightarrow \mathcal{H}_g$$

こうやらないとなかなか難しいですね。この差はわからないのですよね、Habiro-Massuyeau の仕事で手術の言葉ではわかっている。Massuyeau は Strasbourg の人ですね。わかっているけれどもそんな簡単な形にはならない。それでですね、 $\mathcal{H}_{g,1}$ 、これの topological version、 $\mathcal{H}_{g,1}^{top}$ ですが、これに $\Theta_{\mathbb{Z}}^3$ がどう絡むかという、ほとんど定義から

$$H_{0,1} = \Theta_{\mathbb{Z}}^3 \subset \mathcal{H}_{g,1}$$

は central となります. injective でさらに大事な事は central, 中心, すべての元と交換可能. この部分群としての取り方は簡単であって, homology 3-sphere があって, 一方で homology cylinder があつたら, 代表元は 3 次元多様体. connected sum はどこでやっても同じというので central になります.

従って中心拡大が得られる. こういう拡大が得られる. ここで Freedman の定理を使って, これを同じ topological category でやるとこれが自明になるわけですから, 全射が, forgetting homomorphism があるのですが, ここを factor する. これは Freedmann の結果からこうなる.

$$0 \rightarrow \mathcal{H}_{0,1} \rightarrow \mathcal{H}_{g,1} \rightarrow \bar{\mathcal{H}}_{g,1} = \mathcal{H}_{g,1}/\Theta_{\mathbb{Z}}^3 \rightarrow 1$$

これは Freedmann の定理. これとこれの差の中にこの神秘的な群, Furuta さん, Fintushel-Stern の無限 rank ぐらいしか分かっていない群がここに現れる. 一方で中心拡大というものがあつたとすると, これはそもそもこの話の初回にやったとおもいますが, 一つの曲面があつたときにその unit circle bundle を考えたときに,

$$T_1\Sigma_g \xrightarrow{S^1} \Sigma_g$$

これは principal S^1 -bundle になって, 基本群でいうと中心拡大,

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \pi_1 T_1\Sigma_g \rightarrow \pi_1\Sigma_g \rightarrow 0$$

これは g が 2 以上のとき自明でない central extension, 中心拡大になる. $g = 1$ のときは torus になるから, split してしまいます. $g = 0$ のときは単連結で, Eilenberg-MacLane space にならない. 違いが出ます.

Euler 類 $\chi(T_1\Sigma_g) \in H^2(\Sigma_g; \mathbb{Z})$ が定義できます. この Euler 類, これが曲面の世界が種数 0, 1, 2 以上に 3 つ分かれる事を体現するわけです. Gauß-Bonnet の定理です. というわけでこれの family version を考えると, これは中心拡大ですから, Euler class $\chi(\mathcal{H}_{g,1}) \in H^2(\bar{\mathcal{H}}_{g,1}; \Theta_{\mathbb{Z}}^3)$ が定義できます. ここにこの神秘的な群が出てきて, どのようにねじれているか, ちょっと大袈裟に言うと Poincaré が予想しなかったように沢山ホモロジー球面があるのだけど, その homology 球面が, この 3 次元と 4 次元をつなぐこの homology cylinder というもののなす群に, topological category と smooth category の差として現れるわけです. その差として中心拡大なので, こういうその Euler class として現れる. だからこれを研究するという事と, 1 個の曲面に対して, これは Gauß, Riemann 以来, 1 個の曲面でこれがブレイクスルーになった, Euler class, 特性類の理論になった. これを family に対してやるとこれが 3 次元と 4 次元をつなぐ mystery の究明, 研究にとって突破口になるのではないかと思います. これが一つのスローガンなんです. これを調べましょう.

今日はもう時間になりましたが, ここに Kirby-Siebenmann class がでるわけですが, ここに Rohlin 不変量で, $\mathbb{Z}/2$ があって, 松本堯生さんとか Galewski-Stern の $\text{Ker}\mu$ というのがありますが, 従ってこの Euler class をこれは非常に分かりにくいのですが,

$$0 \rightarrow \text{Ker}\mu \rightarrow \Theta_{\mathbb{Z}}^3 \rightarrow \mathbb{Z}/2 \rightarrow 1$$

から, $\mathbb{Z}/2$ に落とすとどうなるか.

$$H^2(\bar{\mathcal{H}}_{g,1}; \text{Ker}\mu) \rightarrow H^2(\bar{\mathcal{H}}_{g,1}; \Theta_{\mathbb{Z}}^3) \xrightarrow{\mu} H^2(\bar{\mathcal{H}}_{g,1}; \mathbb{Z}/2).$$

これは 2, 3 年前からずっと Scorpan, あるいは Freedmann-Kirby なんかの仕事をみてやろうとしています. まあ Kirby-Siebenmann class との関係がでるわけですが, 4 次元の, Kirby-Siebenmann class はもう 69 年のあれですから, なかなか表立って研究されているというわけにはいかないのですが, この観点からすると非常に重要で, また改めて研究した方がよいかなとおもいます.

今回は今日はできませんでしたが、数論との関係が3つ、4つ、あきらかに non trivial な関係が出ると思うのですが、これも逆井さん、鈴木さんとの仕事の中から出て来た。これを Thurston の問題、volume についても数論ですが、それとは全く違う観点から出てきます。こういうものを込めて次回以降やりたいとおもいます。

会場から質問: $\mathcal{H}_{g,1}$ の定義は、10 章でやるのでしょうか。

定義はさっきの定義です。homology cylinder を 4 次元の cobordism で割ります。割らないと monoid になりません。cylinder と cylinder をくっつけると cylinder にはなりますが、それが群になるためには同値関係で割らないといけません。それが 4 次元の homology cobordism です。

genus はいつも固定していますが、 $\mathcal{M}_{g,1}$ にしたら写像類群がそうですが、 $\mathcal{M}_{g,1}$ があつたら $\mathcal{M}_{g+1,1}$ に包含写像があります。これも同じで boundary で自明化されたら、genus が 1 個上のやつになって各 g ごとにあるのだけれども、多分 stable cohomology と思われま。 g によらない形になる。いま戦略はさっき言ったように、これが無限 rank が予想されるので、 $\mathbb{Z}$ への無限個の準同型が予想されるので $\mathbb{Z}$ 係数の 2 次元 cohomology が無限個あるはずですね。これは torus の場合は T^2 の unit tangent bundle はねじれてないので、Euler class は定義はされますが、ゼロです。これはさすがにゼロではないだろう、もちろんゼロでないという証明はまだありません。ゼロではなくてなにか hyperbolic、適当な意味で、そうすると無限個こういうものがでてくるのですが、写像類群で展開してきた理論を使うと無限個の元が定義できる。いま予想としては、無限個の元が、定義自身はこういうものは全然何も出てこない、いわば外側くる homotopy 論、表現論からくるんだけど、これがいわば体現しているというのが夢というか、なんですけど。

これは本当は、さっき数論的といいましたが、2-torsion も必要だし、 $\mathbb{Z}$ 上でいずれはやらないといけないですが、いまは $\mathbb{Q}$ 上でやっています。全部 $\mathbb{Q}$ 上で、symplectic 群の表現論を使って、構成して、ただ定義されたら自明でない事と証明したいんだけど、今のところどうにもならないですね。これの写像類群の場合には H^2 は rank 1 で、それが signature なんですね、それがゼロでないというのが、そもそも Atiyah と小平先生の surface 上の surface bundle の構成で、そもそも難しいんですよ。今はみんなわかっているから ramified covering、本質的な構成を使って surface bundle なのに signature がゼロでないものを作った。そのいわば higher version. signature というのは cup 積から出来る不変量ですけど、無限個のやつはこれは Massey 積、homology cylinder 上の Massey 積からくる self intersection を実現するような 4 次元位相多様体があるか、という問題です。ゼロでないことを証明するためには構成しなくては行けない。だけど Freedman を見ればわかるように、単連結の場合でさえ wild な無限の反復をしないといけません。これは基本群が非常に大きいので、surface 上の surface bundle くらい大きい所で、そういう事をやらなくては行けない。我々はどうしているかというところでもう一人の天才 Kontsevich が登場し、素晴らしいプレゼントというか、これは群の cohomology であつて、それに対応する Lie 代数があつて、Lie 代数の cohomology が定義できる。それを最初定義したんですが、そうするとそれは今の所関連は見つかっていない、それが全く違う所で意味をもってそれが graph の moduli の特性類、それがゼロでないという事は証明、これは無限個あるのだけれども、Lie 代数ですから、computer、線型代数で計算を始めるわけですが、無限個あるやつですが、3 個までしか自明でないというのは証明できていません。一番最初が、定義と同時で 99 年、その次が 2004 年、3 個目が 2011 年の Ph D 論文、Gray という人です。少し間隔が広がってきているから、この調子でいくとどうにもならない。僕は見られないかもしれません。それじゃちょっと困るので、逆井さん、鈴木さんと頑張って 4 番目と思っています。

会場から：昔の Casson handle、下から順番に頑張っていたのがあるとき Freedman が突然現れて全部そうだと証明しましたような。

そうそう、群ではさすがにできないとおもいますが、Lie 代数でも cycle を作らないといけない。群の場合は surface 上の homological surface bundle をつくらないといけない。Massey 積が高次の意味でゼロでない、

小平先生の surface 上 surface bundle の構成だって出来たときはビックリだったわけです。それよりさらに、高次のどんどん深い、無限個の series が深くなっている、Massey 積のいわば higher な self intersection がゼロでない 4 次元多様体があるか、という問題です。

ですからここで定義したんだけど、段々詳しくやっていきますが、ここで逆井さんは、いわば algebraic な homology cylinder を使った $\mathcal{H}_{g,1}^{alg}$ を定義しました。Freedman がやった事は、少なくとも単連結では topological と algebraic は同じ世界。だけと homology cylinder の場合は、これが同じ世界ではないという事はもうわかっています。knot の concordance とかでわかっています。わかっているけれども、無限個の series の cohomology はここで定義できて、まず最初は algebraic な surface 上の homological surface bundle で非自明を証明したらよいのだけでも、それでも難しい。予想としては topological category では全部非自明だけど、smooth な category ではそういうものはない、smooth な category では higher Massey 積の self intersection がゼロ、Kähler 多様体で Massey 積がゼロ、という有名な Deligne-Griffiths-Morgan-Sullivan という定理がありますが、全部消える、しかも uniform に消えるというんです。smooth な所で Massey 積が消えるという兆候は今の所ないので、ないんだけど、夢としては、非常に深い Massey 積なので、smooth structure がそういう obstruction になるだろう、ある世界的な大家に以前聞いてみましたが、言下にそんなものはないよとはいわれませんでした。100 年かかるとおもっています。だから僕はどうにもならないとおもっています。若い人たちが頑張つてさっきの Thurston ではないですけど、最初のやつくらいはゼロでないという事が分かって欲しいですね。

そこはほとんど同じに見えてくる、knot の topological concordance という群があつて、そこら辺はもう一つのグループがあつて、Peter Teichner, 4 次元の強力なグループですが、Conant, Schneiderman, Teichner, Whiteny tower の 4 次元の、Whiteny の trick をいろいろな filtration をいれて topological category, ここ Ker が自明でないということはわかっています。だけれどもそれはこういう 2 次元的なねじれには影響しない。それが影響するのは smooth, drastic な違いがこの群に現れて、Euler, Gauß, 古典的なあれで、捕まえられよう。それは 10 年くらいいろいろな所で言ってきたけど、だんだんはつきり言うようになってきましたけど、率直に言ってだれも信じてないでしょうか。我々に取って幸いな事は、さっきの Kontsevich の Lie 代数 version は意味があつて、最初の 3 つはゼロでないことが証明されたという事です。

10 夢

9 章まで行って、低次元トポロジーの謎、という事で幾つかの問題についてお話をしました。今日は新しい章、どういうタイトルをつけようかと思いました。本当は夢に向かってとかいろいろ考えたり、予想とか書くとも思ったのですが、それにはあまりになんとかいうか、理論的とか実験的なので、「夢」としました。

それで 19 回目ですが、多少、前の復習から入ります。今日は 1,2,3,4 まで用意しました。初めに 4 つ全部書いておきます。

1. 一つの曲面の場合.
2. 曲面バンドル (mapping class group $\mathcal{M}_g$)
3. homology cylinder
4. $\mathbb{G}_Q = \text{Gal}_{\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}}$ との関連

この講義の一番始めに戻りまして、まずは一つの曲面、Gauß, Riemann の話題。そして曲面の family ですから曲面バンドル、monodromy, mapping class group です。これが 2 番目。この話では $\mathcal{M}_g$ と書いています。だから family です。3 番目はこれも何回か、前回も出しましたが homology cylinder。これは homology 的曲面バンドル、bundle と書く fiber bundle みたいですが、これは私が一人勝手に言っているものであって、本当は Habiro さん、Goussarov さんの homology cylinder です。Habiro さんは homology cobordism という名前を付けてました。これは通常の fiber bundle から homology 的 fiber bundle へ。Poincaré 予想の解決から象徴的に書くと、homotopy から homology へ。最初の Poincaré 予想、3 次元の場合、敢えていうと homotopy と homology に差がない、敢えていうとそれは正しくなくて、homology 球面で homotopy 球面でないものはいくらでもある。bundle の方も従って広がって、特性類がどんどん広い世界に延びていく。ここでは何回か名前を挙げていますが、最近ずっと共同研究している逆井さんと鈴木さんとのプロジェクトですね、2,3 年前から始めて 2,3 ヶ月前に一つ新しい柱をさらに立てて、プロジェクトを走らせ出してそれが軌道に乗り出した所で、それについても少しお話ししたいと思います。

現在、それは今現在ですが、カナダの Banff という所で研究集会が行なわれていて、鈴木さんと逆井さんは参加しておりリアルタイムでやりとりをしています。これは video で瞬時に見られるようになっていますので、興味ある人は見て下さい。今行なわれている研究集会は、Vogtmann, Farb, あと組み合わせ群論の人が 2 人の合計 4 人が organize したものです。この Banff はドイツにある Obelwolfach 程は有名ではないかもしれませんが、こちらの方が新しいですが、ほとんど毎週世界的な研究集会が行なわれています。Oberwolfach は video はみられませんが、report があります。こちらは on time で見られて、今の研究集会に限らず HP に行くと昔のやつも video で見られます。解像度も凄く良いですね。MSRI のも同じように見られますが、東大数理もかなり充実してきましたね。遠くにいる人間にとっては、リアルタイムで video で見られるというのはすごく助けになりますね。

そして 4 番目が数論、絶対 Galois 群、 $\mathbb{G}_Q$ と書きます。絶対 Galois 群。数論とトポロジーとの関係というのは、遡ると、現代数学で出てきたのは Grothendieck だと思います。そのあと伊原先生、Deligne とか Drinfeld とか。現在いろいろなものがある関連があります。ここで言うのは直接の関連ですけど、数論とトポロジーの間のパラレルな類似も B. Mazur とか日本では森下さんが、arithmetic topology といって研究しています。

Reznikov という人がいて、この人が一つ先鞭を付けました。彼は残念ながら亡くなってしまいました。

この後 5,6 と、今日は書かないけれど、5 は Kontsevich の graph homology というものがあって、それがこれらとどう関連するかというのは、結構複雑な関係です。graph homology については 10 回目くらいに、2,3 回お話ししました。3 つの世界があって、大きくいうと 3 次元多様体の不変量と、foliation, transversely symplectic foliation の特性類、それから Riemann 面の moduli 空間の cohomology, それから Outer space, graph の moduli 空間の cohomology, それがこの関連で言うと、associative と lie, もう一つが commutative ですが、Kontsevich の graph homology というものがあって、これは 1992 年くらいからずっと展開されてきています。

数論との関連でいいますと、Willwacher という人がいます。フランスに Fresse とか Lazarev とか Hamilton とかいう人がいて、こういう人たちは homology 代数とか数論とかいう関連ですけど、graph homology と絶対 Galois 群との関連については大きな仕事は沢山あります、特に Willwacher, 若い人です。この前 Utrecht で賞、André Lichnerowicz prize in Poisson Geometry をもらった人です。2 年に 1 回の Poisson geometry の国際会議で若い人にあげているみたいです。スイスの ETH の出身で、先生は homology 代数というか、symplectic 幾何の ETH の人。Willwacher の講演も video で見ることができます。Willwacher の講演を見ると、例えば日本でいうと村上順さんとかそういう LMO 不変量との関連もあるので、3 次元多様体と絶対 Galois 群というのはいろいろな関連があります。我々是一个の立場からですね、これは直接の関連というものを立ち上げて、またコンピュータを使っていろいろやっています。

1. 一つの曲面.

まずは、これはもう敢えていうと Euler, 18 世紀ですね、それから Gauß, そして Riemann, Poincaré. 現代幾何学の発祥の地です。

そこで曲面 Σ_g です。 $g = 0$ のときは例外的であって、但し Gauß は Gauß 曲率の曲がり方のものさしとして S^2 を使ったわけです。少し大袈裟に言えば Grassmann 多様体, 分類空間の原点ですよ、 S^2 というのは、Gauß はそれを使ったのですが、一般化する立場からいうと、 S^2 は基本群がないので、本質的に全部群の話になりますから、 $g \geq 1$. 本質的には $g \geq 2$ のところが大事になります。

fundamental homology class, homology の原点ですね、これは $g = 0$ でももちろん成り立ちますが、大事な 1 というものが、 $H_2(\Sigma_g; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \ni 1$, fundamendal cycle というもので

$$H_2(\Sigma_g; \mathbb{Z}) \ni [\Sigma_g] \mapsto 1 \in \mathbb{Z}$$

fundamental というだけあって、fundamental cycle ですね、homology をとれば class, これは homology の原点です。これをどうするかというと、dual にすると $H^2(\Sigma_g; \mathbb{Z}) \ni [\Sigma_g]^*$, これは homology と cohomology の dual です。ここに fundamental cohomology class があって、どっちにしてもこういうものをどうつかむか、捕まえるか。 S^2 の場合は捕まえるものにも、そのまま見るしかないのですが、 g が 1 以上の場合にはこれが分解できる。その分解に使うのは基本群が出てくるので、 $g = 1$ のときには基本群は abel 群ですから、 $\mathbb{Z}^2$ の分類空間をとれば自分自身 T^2 にもどるので、ここから全ての情報が出てきます。

$g \geq 2$ になると、abel 化は

$$r : \pi_1 \Sigma_g \rightarrow H_1(\Sigma_g; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{2g},$$

これは表現になるので r と書きます。abel 化は rank $2g$ の自由 abel 群になります。 $\mathbb{Z}^{2g}$ は topological には何かというと $2g$ 次元の torus T^{2g} になる、これが $\mathbb{Z}^{2g}$ の Eilenberg-MacLane space になる、次元は上がるけれどずっと簡単なものになります。そうすると r で homology を取りますと、

$$r_* : H_1(\Sigma_g) \rightarrow H_1(T^{2g})$$

だから Jacobi 多様体, その cohomology を取ると,

$$r^* : H^*(T^{2g}) \rightarrow H^*(\Sigma_g).$$

係数は今 $\mathbb{Z}$ ですが, しばらくすると全部 $\mathbb{Q}$ になります. 数論的には最後は $\mathbb{Z}$ にしたいのですが, それは私が生きているうちは無理でしょうから $\mathbb{Q}$ でやります.

Jacobi 多様体 $T^{2g} = \text{Jac}(\Sigma_g)$, $2g$ 次元, g が増えていくと, cohomology は一杯あります. これは exterior algebra

$$\Lambda^* H^1(\Sigma_g; \mathbb{Z}) = H^*(T^{2g})$$

であって, これが Poincaré duality $H^1(\Sigma_g; \mathbb{Z}) \cong H_1(\Sigma_g; \mathbb{Z})$ より, $\Lambda^* H^1(\Sigma_g; \mathbb{Z}) \cong \Lambda^* H_1(\Sigma_g; \mathbb{Z})$ です. 以後簡単のため $H = H_1(\Sigma; \mathbb{Z})$ とおきます.

すでに何回かお話ししましたが, これは本当に歴史の綾というか, Poincaré が生まれたのは 1854 年, Gauß が亡くなったのは 1855 年です. Gauß が亡くなる 1 年前に Poincaré は生まれたのですが, さらに Riemann との絡みでいうと, その一年前 1854 年に数学史上最大の講演の一つですよ, Göttingen 大学への Riemann の就職講演というものがあって, ここで Riemann 幾何学と高次元の多様体論, これが両方出て来たという有名な講演です. これを Gauß が亡くなる一年前に聞いて, Poincaré はもちろん生まれた年だから聞けないけれど, その年に生まれた, そういう年です. Poincaré duality というのは, 高次元, 一般次元であります, 根本はこの曲面においては, 1 次元 homology と 1 次元 cohomology が canonical に同型になる, そういうものです.

そうするとですね, H と書いたんですが, H は単なる $\mathbb{Z}$ -module ではなくて, ここに symplectic 群 $Sp(2g; \mathbb{Z})$ というものが作用します. それは H には intersection form というものがあるからです. intersection form を μ と書くと,

$$\mu : H \otimes H \rightarrow \mathbb{Z}.$$

intersection theory というものは, 例えば H_2 と H_2 の intersection というものは, 4 次元 topology では Donaldson 理論とか 4 次元トポロジーの根本的な構造ですが, ここにもすでに出てきている. これは Poincaré. H には Sp が作用するので, 作用があるのでそれを込めると Jacobi 多様体の cohomology $H^*(T^{2g})$ の Sp -不変 part を考える事ができます. 表現論を使っていくと $Sp(2g; \mathbb{Z})$ の表現論というものは未来永劫終わらない, というか, 難しすぎてどうにもならない. なので後では全部 $\mathbb{Q}$ にしますが, こころ辺は $\mathbb{Z}$ でできます.

$$r^* : H^*(T^{2g}; \mathbb{Z})^{Sp(2g; \mathbb{Z})} \rightarrow H^*(\Sigma_g; \mathbb{Z})$$

$Sp(2g)$ -不変な cohomology はどうなったかという, 自然に g 次元の複素射影空間の cohomology に同型

$$H^*(T^{2g})^{Sp(2g; \mathbb{Z})} \cong H^*(\mathbb{C}P^g)$$

になって, $g = 1$ のときは S^2 で Gauß に戻って, 分類空間で一番重要な line bundle の分類空間になります.

ここに 2 次元の generator があるわけですが, $* = 2$ にすると, $H^2(\mathbb{C}P^g) \cong \mathbb{Z}$, これは Chern class. こちらの言葉でいうと symplectic form,

$$H^2(\mathbb{C}P^g) \cong \mathbb{Z} \ni \omega_0 = c_1(\xi) \mapsto g[\Sigma_g]^* \in H^2(\Sigma_g; \mathbb{Z}).$$

どういう事かという, $H^2(T^{2g}) \cong \Lambda^2 H$ ですが, Sp -不変 part を取ると, これは $\mathbb{Z}$ になってこの生成元 ω_0 が symplectic form というものになって,

$$(\Lambda^2 H)^{Sp} = \langle \omega_0 \rangle \cong \mathbb{Z}.$$

symplectic 幾何学, symplectic 幾何というのは, 2つあり, 物理的, 力学系というか Hamilton, ともう一つは Poincaré. その間の関連がどうなっているかは詳しくはわかりませんが, 現代数学からいうと, 2つ, もろん密接には関係するけれども 2つ, 物理学的なものと Poincaré duality から来るものとあります.

そうすると $g = 2$ のときは symplectic form, universal line bundle の c_1 , こいつがどこに行くかという, genus が曲面の根本的な不変量になりますが, fundamental cohomology class の g 倍. これをもって私は ω_0 は square root of $[\Sigma_g]^*$ と言っています. 2次元にある cycle の dual, cocycle, これが homology 論の根本的なものですが, その square root が取れる. 1次元の cohomology と symplectic 群の作用で canonical に出てくる. canonical なもので, 捕まえられる. これが一つの曲面の場合です.

さらにここから不変量を出そうという, 別の不変量ですね. それは何かという未来永劫, 数学で一番重要な多様体は S^1 だと思いますが, $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$, homology もこの場合 $\mathbb{Z}$ ですが, 基本群, homotopy の意味でも $\mathbb{Z}$ ですね, これが最重要. これが曲面との関係でどうでてくるかという, 長さ 1 の接ベクトル全体を集めて unit tangent bundle $T_1\Sigma_g$ を考えます.

$$S^1 \rightarrow T_1\Sigma_g \rightarrow \Sigma_g,$$

これは Σ_g 上の principal S^1 -bundle, 主 S^1 -bundle というものになって, そしてこの基本群をとると中心拡大

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \pi_1 T_1\Sigma_g \rightarrow \pi_1\Sigma_g \rightarrow 1$$

になります. これは g は 1 以上です. その場合にこうなる.

$g = 0$ のときには

$$S^1 \rightarrow T_1 S^2 \rightarrow S^2$$

になって homotopy 完全系列で $\pi_2(S^2) \cong \mathbb{Z} \rightarrow \pi_1 S^1 \cong \mathbb{Z}$ が出てくるので, S^1 が S^2 の cohomology を誘導しなくなるんですね.

g が 2 以上のときは fiber の S^1 の基本群, だからこれがちょっと大袈裟ですけど, fiber bundle の cohomology の spectral 系列から transgress という概念があり, transgress to Euler class $\chi = (2 - 2g)[\Sigma_g]^* \in H^2(\Sigma_g; \mathbb{Z})$. こうなって Euler class は Gauß-Bonnet の定理によって, $2 - 2g$ 倍の fundamental cohomology になるわけです. これは g が 2 以上ですね.

$g = 1$ のときは product ですから, spectral 系列もなにも直積になるわけですから, fiber と base space の間には関係がないといえば言い過ぎですが, 影響しない, 寄与しない. パラレルに S^1 がずっといる.

従って g が 2 以上のときには本質的にねじれて来て, fiber の fundamental cocyle が spectral 系列の中で生き残って, $2 - 2g$ というところにいくというわけです. こうなります.

逆に Euler class χ を cocycle だと思うとどうなるか, 群の cohomology で書くとうどうなるか, 基本群の元を 2つ α, β をもってきたときに, χ の表す cocycle は $\pi_1\Sigma_g \ni \alpha \mapsto [\alpha] \in H$ を用いて

$$\begin{aligned} \chi(\alpha, \beta) &:= [\alpha] \cdot [\beta] \\ &= \mu([\alpha], [\beta]) \end{aligned}$$

これに等しい. これが cocyle になって, その表す class は Euler 類に等しい. これは cocycle なので, この up to constant かもしれませんが. これを projection

$$\pi_1 T_1\Sigma_g \rightarrow \pi_1\Sigma_g$$

で pull back $\chi \in Z^2(\pi_1 T_1\Sigma_g)$ すると, Σ_g 上ではもちろん g が 2 以上の場合には, cohomology は non zero ですが, $T_1\Sigma_g$ 上に pullback すると $\mathbb{Q}$ 上では coboundary になって,

$$\pi^*\chi = \delta d$$

となる d が存在します. これが secondary class になって, d は何かというと, $d: \pi_1 T_1 \Sigma_g \rightarrow \mathbb{Q}$, もともとは 1-cochain, $d \in C^1(\pi_1 T_1 \Sigma_g)$ ですから, 要するに群上の関数になります. これは単なる cochain, cocycle ではない. これを部分群 $\pi_1(S^1)$ に制限すると homomorphism になります. なぜなら cocycle δd はもともと底空間から来ているから fiber に制限すると cocycle としてゼロになります. 従って $\delta d = 0$, つまり d は準同型, nontrivial な準同型. $\mathbb{Q}$ 上では準同型

$$d: \pi_1 T_1 \Sigma_g \supset \pi_1 S^1 = \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}.$$

ねじれ具合から未来永劫一番重要な不変量 $\pi_1 S^1$ が捕まえられた, 曲面の曲がり方を通して捕まえられた, という事になります. これで 1 がおしまいです.

2. 曲面バンドル

次は mapping class group の場合, これを族に一般化します. そうすると $\mathcal{M}_g$ というのが出て来て, これはどう理解したら一番良いかという曲面バンドルがあるわけですから, 曲面の族がある, その monodromy 群と思うのが一番良いです. universal な意味ですけども, こう思うのが一番良くて, 1 個しかないときは, ねじれようがなくて自明な群です. そしてこれが intersection form を保つという事から古典的な準同型

$$\mathcal{M}_g \rightarrow Sp(2g; \mathbb{Z})$$

が存在します. $g = 1$ のときはこれは同型. g が 2 以上のときは大きな Kernel があって, これが Torelli 群と呼ばれています.

$$1 \rightarrow \mathcal{I}_g \rightarrow \mathcal{M}_g \rightarrow Sp(2g; \mathbb{Z}) \rightarrow 1$$

いろいろな研究があるわけですが, 特にトポロジーの研究は D. Johnson の 1970 年代後半ですね, それに続いて J. Harer の仕事があって, その前から moduli の研究はずっと昔から, 複素解析的には Teichmüller, Fricke-Klein がいて, もっと言うと Riemann がいて, ただ Riemann は local に moduli を考えていました, 1850 年代に, moduli を考え出したのは Fricke-Klein, 1900 年くらい. 基本群など, 直接の moduli ではありませんが, Poincaré. そして Teichmüller, 1937 年, その後は数論と複素解析と今言った D. Johnson, J. Harer, とトポロジー, Witten を経由して数理物理, どんどん広がって来ています. 数論の前に Bers, Ahlfors, 代数幾何的には Grothendieck, そして Mumford. Mumford の school があって, Joe Harris, Carel Faber も Mumford school ですね, そしてトポロジー. 私は 1980 年代にここら辺に参入しました. 1990 年に Witten, そして数理物理学, 弦理論, という展開があって, これはずっと終わらないですね.

ここに出てくるのは数論で, $\mathbb{G}_\mathbb{Q}$, これを出したのも Grothendieck です. Grothendieck-Teichmüller, 前からあったのですが, トポロジーとか homology 代数とか巻き込んで大きな展開を見せた. 伊原先生の school が一番大きな貢献を日本ではしています.

それでですね, そういうものはまたいろいろあります. 1 のこれを一般化, ただ一つの側面ですけども, monodromy, $\mathcal{M}_g$ は群として perfect になります. さっきの一つの曲面の場合 Σ_g の基本群は非可換になって, g が 2 以上で難しいから abel 化して, とやりました. $\mathcal{M}_g$ は曲面の基本群よりずっと難しいのですが, abel 化して調べようと思うと abel 化すると何もなくなってしまふ. こういう状況になっています. ところが mapping class group, これは Siegel modular 群 $Sp(2g; \mathbb{Z})$ へ全射準同型があって, $Sp(2g; \mathbb{Z})$ の研究も未来永劫終わらないと思いますが, ただ stable cohomology で言うとは Borel の仕事があって, 古典的な Chern class で stable cohomology は生成される, stable cohomology は分かっている. unstable は終わらないでしょうね. $\mathcal{M}_g$ の stable cohomology は MMM class, Madsen-Weise によって, MMM-classes によって生成される多項式代数

という事がわかっています。それは 2002,3 年、一つ区切りがついたのですが、いまは unstable cohomology に研究が移っています。

これは写像類群だけでなく、今日はしゃべれませんが、自由群の自己同型群、これとパラレルにあつて、これと似た所というかこれを念頭に爆発的に研究が進んでいます。unstable な cohomology. さっきいった Vogtmann の Banff で昨日と一昨日の講演は、 $OutF_n$ の unstable cohomology というのがタイトルでした。

またちょっと戻りまして、さっきの M_g は難しいから able 化しようと思ったら、何もなくなる。そこでこれに関する D. Johnson の決定的な仕事があつて、Johnson homomorphism

$$\tau: I_g \rightarrow \mathcal{U} = \Lambda^3 H / \omega_0 \wedge H$$

これが Torelli 群の able 化を与えるわけです。3 階のテンソルで、通常は ω_0 を省略して $\omega_0 \wedge H$ を H と書いてしまいましたが、submodule として入っていてこれが自然な Sp の表現になります。これが Torelli 群の $\mathbb{Q}$ 上の abel 化

$$H_1(I_g; \mathbb{Q}) \cong \mathcal{U}_{\mathbb{Q}} = \mathcal{U} \otimes \mathbb{Q}$$

を与える。これが Dennis Johnson の大定理です。

そうするとこれ自身、mapping class group 自身 abel 化すると何もないわけですが、その代わりに Sp の研究と Torelli 群の研究と twisting, で M_g に迫ろう、これが自然に考えられる基本的な戦略です。Johnson は何をしたかという、これは今でも非常に神秘的な群ですが、この Torelli 群は abel 化が非常に大きい、abel 化が非常に大きいと、ここからさっき言った 1 個の曲面の場合と同様に Sp が作用するわけですが、 Sp -不変な cohomology は何か。そして 1 番大事なものは、moduli があつたときに一番大事なものは 2 次元 cohomology なわけですが、 M_g の 2 次元 cohomology は $\mathbb{Z}$ 上でわかっていますが、 $\mathbb{Q}$ 上で今日はやると、

$$H^2(M_g; \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q},$$

これは rank 1 でこれは John Harer の基本定理の一つです。その generator というのが、私は e_1 と書かしてもらいますが、これは最近では段々 κ クラスと呼ばれるようになっていて、MMM tautological class というやつです。代数幾何的には κ と書かれます。今日は一応 e_1 と書きます。 κ というのは Mumford の notation で写像類群の cohomology の元というよりは、moduli 空間の Deligne-Mumford compact 化のしかも Chow algebra の元、これが generator なわけ。そしてこれがさっきの 1 個の曲面の場合には Euler class に対応するもので、大分前の仕事でこれの square root が

$$[\tilde{\tau}] \in H^1(M_g; \mathcal{U}_{\mathbb{Q}}) \cong \mathbb{Q} \ (g \geq 3)$$

前にやった仕事です。

それをどのようにしたかという、ここで書きますと、 τ という Johnson homomorphism, τ_1 とも書きますが、これは Torelli 群という M_g の部分群、normal subgroup 上定義されています。これが M_g 全体に extend するかというのが、大きな問題になります。幾何学的には fiber に何か構造があつたときに、total space にどういう形で extend できるか、これは大事な問題です。 $\tilde{\tau}$, 昔の論文では $\tilde{k}$ と書きました。今日は話の都合上 $\tilde{\tau}$ と書く事にします。この extension が存在する、但し extension という場合に、 M_g は perfect だから、準同型として拡大する事はありません。abel 化が自明ですから、ねじれた crossed homomorphism として拡張する。これを大分前に証明しました。

そしてさらにこれが 1 個の曲面の場合には、 π_1 から abel 化にいくやつ、それは crossed ではなく準同型で、monodromy がなかったから曲面の基本群があつて able 化がいて、それが Sp -module になったわけです。

family になったときには全体からは準同型はないのだけれども, crossed homomorphism としてある. そして更に証明したことは,

$$[\tilde{\tau}] \in H^1(\mathcal{M}_g; \mathcal{U}_{\mathbb{Q}}) \cong \mathbb{Q} \ (g \geq 3)$$

これが実は rank 1 だと言う事を証明しました. $\mathbb{Q}$ 上でやりますから, $\mathcal{U}_{\mathbb{Q}}$ と書きます. $g = 2$ のときは例外的になってこの module が自明になります. g が 3 以上で rank 1. 実は e_1 の square root が取れるというのですが, $\tilde{\tau}$ が e_1 の square root として取れる, これはどういう意味かという $H^1(\mathcal{M}_g; \mathcal{U}_{\mathbb{Q}})$, これが rank 1 なのですが, ここに $\tilde{\tau}$ という crossed homomorphism があります. これを cup する, 自分自身と cup する. 通常, constant cohomology だと奇数次元 cohomology は自分自身と cup するとゼロになりますが, こういう twisting があるから, $\tilde{\tau}^2$, 正確には $\wedge^2[\tilde{\tau}]$ は, Sp -module $\mathcal{U}_{\mathbb{Q}}$ の 2 階の wedge product $\wedge^2 \mathcal{U}_{\mathbb{Q}}$ に値を取り非自明です. $\wedge^2 \mathcal{U}_{\mathbb{Q}}$ の Sp -不変 part を取るとこれが rank 1, $(\wedge^2 \mathcal{U}_{\mathbb{Q}})^{Sp} \cong \mathbb{Q}$ なんですね.

$$\wedge^2[\tilde{\tau}] \in H^2(\mathcal{M}_g; (\wedge^2 \mathcal{U}_{\mathbb{Q}})^{Sp}).$$

1 個の場合にはこれが曲面の homology H , つまり, Jacobi 多様体の 1 次元 homology と思えますけれども, その 2 階の wedge $\wedge^2 H$ の所に ω_0 というものがありました. これと同様で rank 1 でしかも $\omega(\mathcal{U})$ で生成される. これは higher な intersection number, 代数幾何的にいうと中間 Jacobi 多様体というのがありますが, これは自然に symplectic 多様体になって, その symplectic form になる. そうすると, up to constant で本質的に e_1 になるというのが前に証明した事です. この square root が取れる.

ここからさらに cocycle level でこれを考えると, S^1 という多様体の不変量 $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ が出てきたと言いました. その idea をここに作用させる, cocycle level でこれを考えるとこれから Casson 不変量が出てきます. これは自分自身でも思いがけない応用として出てきました. Secondary class ですね, どういうふうに出てくるかという, Torelli 群というのがあって, 写像類群があって, $\mathcal{K}_g$, これは写像類群の bounding simple closed curve に関する Dehn twist が生成する部分群. 通常 $\mathcal{K}_g$ と書いて Johnson Kernel と最近呼ばれる事が多いです.

$$\mathcal{K}_g \rightarrow \mathcal{I}_g \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}_g.$$

つまり Johnson 準同型の Kernel です. τ の Kernel です. そしてここに τ というか, $\tilde{\tau}$ があるので, cocycle が出来ます. $\wedge^2 \tilde{\tau}$ と書きますが,

$$\wedge^2 \tilde{\tau} \in Z^2(\mathcal{M}_g; \mathbb{Q}).$$

mapping class が 2 つあったときに, $\tilde{\tau}$ で送るとこれは $\mathcal{U}_{\mathbb{Q}}$ の元ですが, 3 階テンソルになる. intersection, constant の場合は, これは曲面の homology の元があったときには intersection number を取らせたわけですが, これは高次の表現になりますが, symplectic 多様体の基本群なんです, symplectic form $\omega(U_{\mathbb{Q}})$ がある. $\mathcal{U}$ は Young 図形で書くと縦に 3 つ



これで表すものになる. $\mathcal{U}_{\mathbb{Q}}$ に関する intersection number を取ると, twisting があるからそのままだと cocycle にならない. twisting があるからここに φ_* を掛ける. crossed homomorphism の流儀が右から作用するか, 左から作用するか, 2 つありますが, 本質的には同じで

$$(\wedge^2 \tilde{\tau})(\varphi, \psi) = \tilde{\tau}(\varphi) \cdot \varphi_* \tilde{\tau}(\psi).$$

そうすると signature cocycle と呼ばれる cocycle になって e_1 を represent する. moduli の特性類としては一番大事なものです. そして一方で, Grothendieck の Riemann-Roch の定理から, 大袈裟にいうと Hodge bundle の Chern class c_1 と proportional になる. これは $Sp(2g; \mathbb{Q})$ 上にある, principally polarized な abelian variety の分類空間, Riemann 面があると Jacobi 多様体, Riemann 面の族があると Jacobi 多様体の族があつて, Hodge bundle が定義され, その c_1 , それは Sp から来るもの, これに proportional になる. この cocycle を Torelli 群に pullback すると coboundary になります.

ここで e_1 を表すもう一つの重要な cocycle, Meyer cocycle というものがあります. 今の話でこれを使うと, Meyer cocycle は monodromy の homology への作用の行列で表されますから, Torelli 群の元の像は自明な行列ですから cocycle は出てこない. Meyer cocycle と signature cocycle, これらの差は coboundary ですが, Torelli 群に制限すると, Meyer の方は恒等的にゼロになりますが, signature の方は消えない. 従って

$$\pi^*(\wedge^2 \tilde{\tau}) = \delta d.$$

これをやると coboundary の δd というのがあつて, d は何かというと Torelli 群上の関数

$$d : I_g \rightarrow \mathbb{Q}$$

になって, Torelli 群上自明ではないから, Meyer cocycle でやるとゼロになって coboundary になるけど, zero cocycle ですから, ゼロの coboundary は何も出てきません. これは non trivial な単なる写像ですけれども, これを $\mathcal{K}_g$ に制限すると, この signature cocycle というものは I_g では非自明ですが, ここに制限すると自明になる. Bounding simple closed curve の Dehn twist の Johnson homomorphism の像はゼロ. そもそも Johnson Kernel ですから, ここに制限すると

$$d : \mathcal{K}_g \rightarrow \mathbb{Q}$$

が準同型になります.

$\mathcal{K}_g$ というのは曲面上の bounding simple closed curve に沿う Dehn twist ですから, これを 3 次元との関連を付けるために, S^3 の Heegaard 分解を考えます. standard な Heegaard 分解, ある同値関係の下で unique ですが, そういうものを考えます. この $\mathbb{K}_g$ の元で与えられる mapping というのを 3 次元多様体のトポロジーと関連させます. S^3 を忘れると Heegaard surface 上の写像でねじれるわけですが, その bounding simple closed curve の tubular neighborhood を考えてやると, bounding simple closed curve が丁度 S^3 内の knot と思える. するとこの Dehn twist は丁度 knot に関する Dehn surgery になり, それとの関連でいうとこれは本質的に Casson だと, 私は core of Casson と書いています. 一番大事な第 1 特性類の square root が構成できて, 1 個の場合に曲面の Euler class を unit tangent bundle に持ち上げてやると, S^1 の不変量が出て来たのと同じように, 今度 family でやる. moduli の第 1 特性類を pullback すると, Torelli 群, $\mathbb{K}_g$ までもうちょっと小さくしますが, knot と深い関連があつて, それを経由して homology 3-球面の不変量である Casson 不変量が出て来たという事になります. これが 2 番目の話です. ここまでは既に得られている話です. これを 3 番目と 4 番目に拡張しようというのが今進んでいるプロジェクトです.

3. homology cylinder

3 番目に拡張するのは homology cylinder の群です. これは写像類群を含んだ非常に大きな群です.

$$\mathcal{H}_g \supset \mathcal{M}_g$$

homology cylinder の monodromy のなす群というべきものです. 写像類群は曲面バンドル, Σ_g -bundle の monodromy のなす群です. これは homology 的な fiber bundle ですから, たくさん出てきてその monodromy も沢山でてきます. ここに拡張する.

4. 絶対 Galois 群

4 番目は絶対 Galois 群 $G_{\mathbb{Q}} = \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. 多分今日は最後まで行けないで、こちらを先にやります.

これに絡んでこの不変量, 具体的には Grothendieck の motivic Lie algebra というものがありまして, 具体的に現れているのは Soulé 元, Soulé element というものがありまして, これは crossed homomorphism, さっきの τ と書いたやつに対応するものです.

絶対 Galois 群というのは $\mathbb{Q}$ の algebraic closure $\bar{\mathbb{Q}}$ の自己同型ですから, 1 のべき根に作用するわけですが, その $\hat{\mathbb{Z}}$ の unit 全体 $\hat{\mathbb{Z}}^*$, ここへの全射が定義できて, cyclotomic character というものがあるって,

$$\text{Ker}\chi_{\text{cyc}} \subset G_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\chi_{\text{cyc}}} \hat{\mathbb{Z}}^*.$$

敢えて言うと写像類群があったら $Sp(2g; \mathbb{Q})$ へいくようなものです. そして, この cyclotomic character の Kernel が大事になります. Torelli 群みたいなものです. 数論で深い予想は沢山あります. その一つがこれは pro-群ですが, その意味で free ではないか, という予想, Shafarevich 予想と呼ばれています. Torelli 群は free ではなく homology を沢山持っていますので, 全然違います. でも似た所もあります. D. Johnson は Torelli 群という神秘的な群について最初の情報 abel 化を与えたわけですが, このそれに対応する Kernel が free だとすると abel 化はもの凄くたくさんある. 無限個準同型を与えて, target は今度は p 進, p 進の群にするわけです.

$$\text{Ker}\chi_{\text{cyc}} \rightarrow \mathbb{Z}_p$$

これを構成したのは Soulé です. Soulé の p -adic regulator という本質的な仕事があつて, そしてこれは $G_{\mathbb{Q}}$ に extend するか, という問題になります. これは Kernel は normal subgroup ですから, 準同型があれば extend するか, 写像類群のときは perfect ですから, 今度は perfect ではないですが, $\hat{\mathbb{Z}}^*$ は topologist にもわかるような abel 化であつて, そんなものとは全然違う, 全然違うとは言えないですね, この中に入っていますから,

会場から: それは p 毎にそういうものがあるのですか?

はい, 任意の prime p に対して, さらに p ごとに無限個, odd Tate twist というのがあつて, だから素数が無限個あつて, 各奇素数, $3, 5, \dots$, 各 p と各 3 以上の奇数に対して, p 進 regulator というものがあるって, twisted cohomology ですけれども,

$$H^1(G_{\mathbb{Q}}; \mathbb{Z}_p(2k+1)) \cong \mathbb{Z}_p,$$

これは constant cohomology ではなくて, さっきの写像類群の場合は Sp -module でしたが, これは cyclotomic character を経由して作用します. weight が $2l+1$, こういうものがあるって, これは constant cohomology ではなくて Tate twist と呼ばれます. $2k+1$ は Tate twist の weight です. Soulé が証明した事は, これが $\mathbb{Z}_p$ と同型, Soulé の大定理です. これが先ほどでいうと Johnson 準同型に対応します. そこから幾何学的に考えて, もとに戻した homology cylinder, homology 3 球面の不変量に関連するかどうか, この段階ではちょっと唐突ですが, どちら辺にいるかわからない.

homology cylinder の理論との関連でいうと, まず $\mathbb{C}$ 上の variety として moduli 空間を, 普通の topology で考えて, orbifold fundamental group を考える, それが写像類群なわけです.

$$\mathcal{M}_g = \pi_1^{\text{orb}}(\mathbb{M}_g/\mathbb{C}).$$

Grothendieck が言い出したのは, algebraic な基本群 $\pi_1^{\text{alg}} \mathbb{M}_g$, これは puncture がなくては行けないので, $\mathcal{M}_g$ 自身では定義できません. 1 点 puncture, すくなくとも必要. なくても $\mathbb{Q}$ 上の variety ならよいのですが, Riemann 面の moduli が quasi-projective というのが, Deligne-Mumford. compact 化を与えましたが, 実は

さらに $\mathbb{Q}$ 上定義される. $\mathbb{Q}$ 上定義されると $\mathbb{Q}$ 上の algebraic variety には, algebraic fundamental group というものを Grothendieck が定義しました. これはどうなるかというと topological な fundamental group の profinite completion $\widehat{\pi}_1(\mathbb{M}_{g,*}/\mathbb{C})$ ですが、これが topological part. arithmetic part は絶対 Galois 群ですから projective curve の係数に作用します. $\mathbb{Q}$ 上 projective curve があると, この自己同型が基本群に作用します. topological な作用では全然ないのですが, 連続的ではないけれど profinite な topology では連続に作用します.

そういうわけで $\mathbb{G}_{\mathbb{Q}}$ は,

$$\pi_1^{\text{alg}}(\mathbb{M}_{g,*}/\mathbb{Q}) = \hat{\mathcal{M}}_{g,*} \rtimes G_{\mathbb{Q}}.$$

と split する. splitting は canonical なものはないですが, これが同型, これは Grothendieck の結果です. さらに moduli との関連では Grothendieck-Teichmüller 理論というのがあって, さらに anabelian 理論, 連綿と続く, こういうものがあります.

homology cylinder $\mathcal{H}_g \supset \mathcal{M}_g$ でこの間に入る. これは profinite completion はあるけれども, $\mathcal{M}_{g,*} \subset \pi_1^{\text{alg}}(\mathbb{M}_{g,*}/\mathbb{Q})$ と subgroup で増えた数論的な部分が

$$\mathcal{H}_{g,*} \supset \pi_1^{\text{alg}}(\mathbb{M}_{g,*}/\mathbb{Q}),$$

こちらに入りますよというのが Johnson 準同型の理論. 数論というよりは Johnson+Number theory との絡みであって, 伊原先生, あるいは Deligne, 数論では一番大事なのは $\mathbb{M}_{0,3}$ でやるわけです. トポロジーの観点からいうと S^2 から 3 点引っこ抜いた, これは topology というか双曲幾何でも基本ですけど, monodromy 的には写像類群とは絡まないですが, higher genus にしたというのは伊原先生の理論, 具体的には織田孝幸さん, そして, 中村博昭さん, 松本眞さん. 1980 年代後半に織田さんがある予想をして, ある時期織田予想と呼ばれたものが独立に中村博昭さん, 松本眞さん, によって証明されました. その後に Hain, 古庄さん. さらに純粋に数論の立場からと思ったら, 最近アーカイブに knot theory における絶対 Galois 群という論文を出していますから, 彼もついにトポロジーに入ってきたかと思います. こういう非常に大きな広がりを見せている理論がある.

絶対 Galois 群が具体的な Lie 代数に現れるわけですが, Lie 代数に現れるというのが織田予想. 織田予想を証明したのが, 中村博昭さんと松本眞さん. 例えば multiple zeta value であるとか motivic Lie algebra に関連する問題は沢山あって数論とトポロジーに絡んで沢山あります. そこに新しい流れが出て来たのが Kontsevich, graph homology の立場. graph homology の関連が出て来て非常に大きな広がりをみせつつある. その中で逆井さん, 鈴木さん, 我々はトポロジーの立場からですが, 解明を進めていこうという, それを紹介したいと思います.

3 番目に戻ります. もう少し具体的に書きますと, homology cylinder ですが、もう一度書きます. $\mathcal{M}_g$ というものがあって, 曲面バンドルの monodromy で

$$I_g \rightarrow \mathcal{M}_g \rightarrow Sp(2g; \mathbb{Z}).$$

そして homology 的な曲面バンドルの monodromy があって,

$$I\mathcal{H}_g \rightarrow \mathcal{H}_g \rightarrow Sp(2g; \mathbb{Z})$$

homology cylinder の homology cobordism の群として定義されます.

$\mathcal{M}_g$ と $\mathcal{M}_{g,*}$, $\mathcal{M}_{g,1}$ というのは, 理論的には一つ分かれば他の 2 つもそれほど苦労なくわかるのですが, 最終的には $\mathcal{M}_g$ がわかりたい. 最終的には homology cylinder も $\mathcal{H}_g$ がわかりたい. しかしこれは非常に難しいで

すね、そこで once punctured, $\mathcal{H}_{g,*}$, これも非常に難しい、そこで disk を除いて

$$\mathcal{H}_{g,1} \rightarrow \mathcal{H}_{g,*} \rightarrow \mathcal{H}_g$$

ここに行きます。写像類群の場合もそうですね、disk を除いて自由群にして boundary の情報は忘れないでずっとこちらでやって最後に $\mathcal{M}_g$ にもっていく。そういう戦略です。

問題は homology cylinder の場合は、 $\mathcal{H}_{g,1}, \mathcal{H}_{g,*}$ と $\mathcal{H}_g$, この差とこの差はわからないという語弊があるけれど、Habiro-Massyeau, Sakasai さん、いろいろ研究されていますが、写像類群ほど簡単ではない。写像類群の場合は $\mathcal{M}_{g,1}$ と $\mathcal{M}_{g,*}$ の間は単なる中心拡大、 $\mathcal{M}_{g,*}$ と $\mathcal{M}_g$ の間は基本群、簡単だったわけですが、homology cylinder の場合はこれがいろいろ難しく、knot の concordance とかもいろいろわからなくて難しい。

これを全部線型のところで行列表現するのは共通であって、

$$\mathcal{H}_g \rightarrow Sp(2g; \mathbb{Z}),$$

群は広がったんだけど古典的な行列で研究できるものは、残念ながら幸か不幸か増えない。そうすると Torelli 群が出てきます、

$$I\mathcal{H}_g \rightarrow \mathcal{H}_g \rightarrow Sp(2g; \mathbb{Z}).$$

この Kernel として homology cylinder の Torelli 群、normal subgroup になって、 I_g は mystery ですから、況んやそれを含む大きな群 $I\mathcal{H}_g$ はもっと mystery.

本質的な違いは一つわかっていて、写像類群の Torelli 群の場合に $g=2$ は例外的に Mess の定理があって、これは rank が無限大の自由群、 g が 3 以上は有限生成、群論的にはよいものになります。大問題は finite presentabel かどうかはまだ分からない。 I_g は有限生成ですからその abel 化は有限生成、それが $\mathcal{U} = \Lambda^3 H/H$, torsion がでてきますけれど、torsion の話は今日はしません。

問題はこの $I\mathcal{H}_g$ の abel 化です。写像類群は perfect でしたが、こちらは perfect かどうかはわかりません。今知られている現状をいいますと、 $I\mathcal{H}_g$ が not finitely generated だというのは、多分私が最初に証明しました。trace を用いて、その群 version $\widehat{trace}$ ですが、有限生成ではないという事を証明しました。

でも abel 化がどうなるか、target でいうと、まず moduli からくるやつがあるのですが、target は $2k+1$ 次の symmetric product というものがあって、

$$I\mathcal{H}_g \rightarrow \mathcal{U}_{\mathbb{Q}} \times \prod_k S^{2k+1} H,$$

image が Zariski dense という事を証明しました。これは無限 rank ですから有限生成ではないという事がわかります。

それを逆井さんが Magnus 表現の理論を展開して、homology cylinder の Magnus 表現の立場からも trace が出て来て、無限生成、行列を使った証明があります。

これ自身が、 $\mathcal{H}_{g,1}$ が not perfect というのは、Stefan Friedl, Friedl は Friedl-Vidusi の Friedl で、3 次元、4 次元で symplectic 多様体と曲面バンドルとの関係、大問題を解決しました。Friedl と Kim さん, Cha さん, Cha-Friedl-Kim, 2010 年、2 年くらい前に何を証明したかという、 $H_1(\mathcal{H}_g)$ から次のような surjection,

$$H_1(\mathcal{H}_g) \twoheadrightarrow (\mathbb{Z}/2)^{\infty}$$

が存在するという事を証明しました。 $\mathbb{Q}$ 上 H_1 が消える、 $\mathbb{Q}$ 上 perfect という可能性はまだ少し残っていますが、torsion を考えると $\mathbb{Z}/2$ が出てくる。トポロジーでは、 $\mathbb{Z}/2$ -torsion というのが微分トポロジーの昔から大

事で、例えば Kervaire 不変量というのがあって大事だというのは分かっていますが、 $\mathcal{H}_{g,1}$ から無限 rank の $\mathbb{Z}/2$ の直和に全射がある。これが出たときにはビックリしました。写像類群よりもずっと構造が沢山ある、有限生成ではなくなっていました。

写像類群でここで研究がうまくすすんだのは有限生成で、しかも Lickorish generator というのがあって、具体的に計算できたからです。しかし homology cylinderの方は無限生成なんですね。また写像類群は生成元だけではなくて relation も完全にわかって、群論的には presentation が完全にわかって、例えば、鈴木晋一さんの handlebody 群とか、それを使った廣瀬さんの研究などがあります。presentation があると全然違う。presentation どころか generator がわからない、どうにもならない。無限生成なわけです。homology に世界が広がったわけですが、さっきの square root とか一番大事な H_2 がどうなるか、という問題が出てきます。これです。

$$H_2(\mathcal{H}_g) \cong ?,$$

Q 上でどうなるかというのは、まったく皆目わからないのです。

しかし元は trace を使って無限個構成されていて、まずそれを書きます。第 1 特性類 e_1 、これは $c_1(\text{Hodge bundle})$ と proportional かどうか。homology cylinder に世界が広がっても Hodge bundle はある。その Chern class はあって Hodge bundle の Chern class と surface 上の surface bundle の signature が等しいというのは、Grothendieck-Riemann-Roch です。しかし e_1 と $c_1(\text{Hodge bundle})$ が等しいかどうかかわからないのです。2 つ元が定義されますけれど、一つは signature, signature は bundle ではなくても 4 次元多様体なら signature はあるので、2 次元 cohomology は定義されます。これが proportional かどうかかわからない、

$$c_1(\text{Hodge bundle}) \approx \text{sgn} \approx e_1?$$

これは Grothendieck-Riemann-Roch、これは私は 20 世紀のもっとも深い数学の定理の一つだと思います、Atiyah-Singer もそうですが、これらは fiber bundle で通用しているので、homology 的な bundle に対していまところこのままではどうにもならない。Grothendieck 流に代数幾何ではどうにもならない、Atiyah-Singer でも多分どうにもならない。これは大問題、大問題というよりは中間問題ですね。第 1 MMM 類と c_1 と signature、だから 3 つあるんですね、3 つ目、これは signature cocycle, signature の、surface 上の homological な family である、4 次元多様体 W^4 、4 次元多様体ですから signature $\text{Sign}(W^4)$ はある。Hodge bundle は、 $Sp(2g; \mathbb{Z})$ に準同型があるから、ここから line bundle を引き戻して定義される。

e_1 は何かというと Johnson 準同型 $\tau: \mathcal{I}_g \rightarrow \mathcal{U}$ 、それが homology cylinder の Torelli 群 $I\mathcal{H}_g$ 上でも定義されるというのは比較的簡単にわかります。写像類群の場合はこれに τ という extension があって、1 次元のある twisted cohomology が rank 1 であって、さらにその generator であったわけです。ここですでに分かっている事は、homology cylinder の Torelli 群上に Johnson 準同型は拡張するのですが、さらに $\mathcal{H}_g$ 上 crossed homomorphism として拡張する。ここでは $\tilde{\tau}_H$ と書きますが、これで同じように e_1 を定義する事ができ、

$$e_1 \in H^2(\mathcal{H}_g) \cong ?$$

全部で 3 つあります。

それでいうと $H^1(\mathcal{H}_g; U_{\mathbb{Q}})$ がゼロでないというのはわかっている。大問題はこれが rank 1 か、写像類群の場合は rank 1 です。

$$\tilde{\tau}_H \in H^1(\mathcal{H}_g; U_{\mathbb{Q}}) \neq 0 \sim \mathbb{Q}?$$

そうすると $\Lambda^2 \tilde{\tau}$ の homology version,

$$\Lambda^2 \tilde{\tau}_H \in H^2(\mathcal{H}_g; \mathbb{Q}),$$

homology cylinder の constant homology, これはもちろんゼロではない. surface bundle のときには全部等しい, これは Grothendieck-Riemann-Roch.

だけど homology bundle の場合は 3 つ自然に定義できますが, その間の関係はわかっていません. 全部 proportional という事が予想されますが, どうやって証明してよいかわかりません. もともと Atiyah-Singer にしても Grothendieck-Riemann-Roch にしても非常に難しいですよ. 今の所方法はないのです.

この第 1 特性類はこうなのですが, そもそも $H^2(\mathcal{H}_g)$ はどうなるのか? ここに無限個の cohomology を trace を使って定義しました. まず e_1 があって, c_1 があって, signature cocycle,

$$H^2(\mathcal{H}_g) \ni e_1, c_1, \text{sgn},$$

多分全部 proportional であろうと予想しています. これは数論的にいうと 1 に対応します. 1 は奇数と思って.

- $1 \cdots \mathcal{U} = \Lambda^3 H/H$
- $3 \cdots S^3 H \cdots \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline \end{array}$
- $5 \cdots S^5 H \cdots \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & & & & \\ \hline \end{array}$

その次に 3 に対応するところが $\widetilde{\text{trace}}(3)$ と称するもので,

$$H^2(\mathcal{H}_g) \ni e_1, c_1, \text{sgn}, \Lambda^2 \widetilde{\text{trace}}(3),$$

これは $\widetilde{\text{trace}}(3)$ の target は $S^3 H$ なんですね. target が Johnson 準同型の場合は, $\mathcal{U} = \Lambda^3 H/H$ で, $\mathcal{U}$ という既約表現でした. $\widetilde{\text{trace}}(3)$ というのは target が 3 階の symmetric product $S^3 H$ で, これも既約なんですね. Young 図形でいうと

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline \end{array}$$

横に 3 個ならぶものです. これらは全部の奇数に対してあるわけです. 次は

$$H^2(\mathcal{H}_g) \ni e_1, c_1, \text{sgn}, \Lambda^2 \widetilde{\text{trace}}(3), \Lambda^2 \widetilde{\text{trace}}(5),$$

で $S^5 H$ に対応するもので, Yong 図形でいうと

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & & & & \\ \hline \end{array}$$

です. こうあって, これらの表すものが無限個あって, notation で

$$\tilde{t}_3 = \Lambda^2 \widetilde{\text{trace}}(3),$$

一般に

$$\tilde{t}_{2k+1} = \Lambda^2 \widetilde{\text{trace}}(2k+1)$$

と書いておきますが, $S^{2k+1} H$, こういう target があって, 1 個の曲面の場合には, これが H に対応していたわけ. そして曲面バンドルの場合には, これが $\mathcal{U}$ という 3 階のテンソルだったわけ. higher trace の場合, homology cylinder の場合には, 写像類群の場合には H_2 が rank 1 というのが Harer の定理ですけれども, 予想としては homology に世界を広げると, $H_2(\mathcal{H}_g)$, 基本的な Picard group, これは algebraic variety, これは無限 rank を予想しています.

これは非常に難しいから, 最近言っているように 100 年くらいかかると思われる. Kontsevich の graph homology の理論があるとなぜ良いか, これらは群 level では非常に難しく 100 年かかる. ところが Lie algebra

の世界でもまったく同じものが、全く同じものというか、parallel が意味を持っているというのが Kontsevich の Lie version. これは偶然か、偶然ではないのです。これが群だと思ったときにその Lie 代数が、Johnson 準同型の target である Lie 代数であって、写像類群に対しては大きすぎた。その image をどんどん縮めるといいう仕事は今でもなされています。しかし homology version にするとこの Johnson 準同型は全射になるんです。全部 realize する、homological な surface bundle で、全射ですから、そうするとこういうものがゼロでないという希望が出て来て、さっき言ったように群 level では 100 年かかるんだけど Lie 代数 level では computer が使えて実験が出来る。

Lie 代数 level では t_7 まで zero でないという事がいろいろな人によって、最初は私が computer を使って証明して、2 番目が Conant と Vogtmann, 3 番目を証明したのが去年、Gray という人の Doctor 論文。ただそれは Lie 代数 level ですから、例えばこれが有限次元 Lie 代数で、Lie 代数の cohomology から対応するものの Lie 群の discrete cohomology にここにいくのはハードルが高いというか、比較にならない程難しい。例えば 1 次元 $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への微分同相の群で jet の空間で考えると、Lie 代数 level で cocycle で作って非自明はすぐにわかりますが、群で作ろうとすると大変です。

ちょっと手前味噌ですが一番最初に分かったのが、これに μ_k という名前を付けていて、 $\mu_1 \neq 0$ は 1999 年に私が証明しました。 $\mu_2 \neq 0$ を証明したのは 2004 年でこれは Conant-Vogtmann. $\mu_3 \neq 0$, Gray という人の doctor 論文。2011 年でまだ publish されていない。最初は 5 年掛かって、次は 7 年掛かっています。段々延びて来ていますが、いろいろなグループがこの問題に取り組んでいます。

我々は一気にゼロでないことを証明しようとしています。これが出来たら 1 年くらいゆっくりしようかと、それぐらいの level の問題です。 μ_4 , これ 1 個だけでも証明されたら一流の雑誌に確実に載ると思います。但しこれは Lie 代数ですから、群の level で証明するには、それこそ Thurston みたいな人が出てこないとうにもならないと思います。

それで cohomology が沢山あるわけですが 3 次元多様体の不変量で言うと、これは元々今までの話では 2 次元 cohomology があって、その square root を取る。これは逆になっています。square root がまずあって、その 2 次元の積をとって 2 次元 cohomology を取る。逆になっている。一番期待されるのは、幾何学的に homological な surface bundle があつたときに、何か cohomology を与えるというのがあって、その square root が trace であるという、それが一番よいのですが、逆になっています。

一つヒントになるのは signature cocycle, e_1 は signature であって、4 次元多様体の signature. これはどうなるかという、Johnson 準同型はそもそもどんどん深くなっていく Massey 積を計算しているわけです。多様体としては全部 4 次元のままですが、基本群はどんどん大きくなっていて、ものとしては Σ_g 上の Σ_h -homological bundle であることにはかわりない。signature はずっと定義されている。signature は 2 次元 cohomology があって、繰り返すですけど、Hodge bundle の c_1 とか、signature cocycle, Johnson 準同型の拡張をつかってとか、3 つあって、それらが等しいかというのは問題ですが、それはおいておくとして、こちら側に 4 次元多様体の不変量を作りたい。それが作れるというのは、 Σ_g 上の Σ_h -bundle, modnromy は $\mathcal{H}_g$ に入っているわけですが、 Σ_g 上の local system として、元々は local system としては fiber の homology H ですから、 H というのがあって、だけどこれからは不変量は出てこない。Johnson 準同型を経由すると、 $\Lambda^3 H$, ここに monodromy が考えられてこの中で twisted cohomology ではあるが、両方とも 2 次元 cohomology になって cup して 4 次元にすると signature になる。それは自明ではないのです、signature が出てくる。これは trace を使って crossed homomorphism を一杯作るから、 $\pi_1 \Sigma_g$ 上に local system が出て来て、fiber が何になるかというこれが Massey 積を使って、高次の symmetric power $S^{2k+1} H$ に値を取る。そうすると、これは $\mathbb{Q}$ 上で考えると rank 1 なんですね。この symmetric power というのがものすごい次元の高い symplectic torus なわけで、

symplectic 多様体である事には違いない. symplectic form がある, それが rank 1 なんです.

ちなみに Heegaard Floer とか Ozsváth-Szabó の理論でも, 新しい 3 次元多様体の不変量は symmetric product, Riemann 面の symmetric product を取るんです. その間に関係があるかどうか, 気にはなっていますが, 未だに見つかっていません. どこかでつながるかもしれません. $S^{2k+1}H$ が rank 1,

$$(\Lambda^2 S^{2k+1} H_{\mathbb{Q}})^{Sp} \cong \mathbb{Q}$$

というのは computer で実験しようと思うと $S^{2k+1}H_{\mathbb{Q}}$ からどこに入れるかという, 高次の tensor の中に symmetric tensor として入れます.

$$S^{2k+1}H \otimes S^{2k+1}H \subset H^{2k+1} \otimes H^{2k+1} \rightarrow \mathbb{Q}$$

symmetric tensor として入れると, ここから intersection form があるので, 前の $2k+1$, 後ろの $2k+1$, お見合いをして pairing をするわけです. そうすると pairing した毎に intersection number を取ると scalar が出てきます. pairing の仕方は chord の数だけある. これを $S^{2k+1}H \otimes S^{2k+1}H$, ここに制限すると, 奇数ではなくても, 全部一次従属になって 1 個だけ本質的に出てくる. これが奇数のときは alternating, 偶数は symmetric, どちらにしても rank 1 になります. alternating にしないと 2 次元 cohomology は出てこない. alternating で 2 次元 cohomology が出て来て, こういう

$$\tilde{t}_3, \tilde{t}_5, \dots,$$

は幾何学的にはいわば 4 次元多様体の signature であって, どんどん深い Massey 積の self intersection です. ne, higher な self intersection として有理数が出て来て, homology 的な surface bundle に対して, 無限個定義される. それがいっただろうというわけです. 口でいうとさらさらと出来そうですが, これは非常に難しい.

さらに言うと, 時間的に今日はおしまいです, こういうふうに定義した 4 次元の不変量は smooth な多様体なら全部ゼロだろう. 全部ゼロ, 最初だけは違う, signature はこれは小平先生, Atiyah, これはそもそもの moduli がねじれているすごい発見です. 曲面上の曲面バンドルで signature が消えない.

ここら辺になると曲面上の曲面バンドルだったら trace は trivial になりますから写像類群上, もともと何も無いわけです. だけど homology 的に Poincaré がもともと homotopy と homology に差があると言ったのを使って, バンドルを広げると, higher intersection, 少なくとも cocycle レベルではゼロではないものが一杯ある, それのしかもその higher intersection を取る, それが有理数になって全部ゼロではないだろう, というのが予想なわけで, しかも smooth なら全部ゼロで, topological ならゼロではないものが作れるだろうと. それで Donaldson と Freedman の決定的な違いですね, 4 次元多様体の, smooth な多様体は非常に大きな制約が cup 積に入る. それは higher Massey 積になっても同じだろうと. だから topological にはある構成があつてこれを realize する多様体があるだろう, しかしあるとしたら wild な構成をしなくては行けないはず. すでに Casson handle とか単連結な世界であれだけ難しいわけです. 基本群が一杯あるとどうしようもない. だから Thurston みたいな人が出てこないといけない.

しかし smooth 多様体に対して, これがゼロというのは多少可能性はあるでしょう. smooth をどこかで使ってゼロ. Massey 積が消える, Kähler というもつときれいな構造が入れば Massey 積が全部消える, しかも uniform に消えるという. これは Deligne-Griffiths-Morgan-Sullivan の大定理があるのです. しかしそれは Kähler という構造で, $\partial\bar{\partial}$ -lemma というのが本質的で, uniform にきえてしまう. だけど Massey 積が smooth で消えるというのは, これは口では言うけど, 非常に難しいですね. 有名な 4 次元の人に聞いたら, それはわかりませんと言われました.

だけど non trivial を証明するには、これに対して小平先生、小平先生が一番最初にやった、小平先生と Atiyah の構成を topological でやらないといけない。写像類群の場合は代数幾何が完全に使えて、直積をやって diagonal をとって、有限 cover をとって homology を divisible にして branch cover を取る。これはこういうきれいな構成ではできないというのが予想ですから、wild な構成でやらないといけない。最後に 4-cell, homology cell を付けるときに何かをしないとけない。というわけで絶望的で、絶望的というのはよくないですね、100 年くらいかかる。

凄く幸運な事に Kontsevich という大天才がいて、Lie 代数 version がすでに凄い意味がありますよと、しかも絶対 Galois 群も出てくるという。だからいまプロジェクトは、こちらはずっと忘れないのですが、しかし具体的にやる方法がないので、Lie 代数、こちらの方では幸い computer が使えます。それでも 3 個しか非自明はわかっていません。時々やるのはさっきのもうちょっと topological な言葉で有理数を定義する事です。

ちなみに群 version で non trivial で分かったら Lie version で non trivial というのは明かです。それは有限次元 Lie 代数の場合と同じです。 μ_4 が non trivial だけでも超一流の雑誌にのると思います。それぐらい難しい問題だと思います。これで時間が来たので 4 は、絶対 Galois 群の話はまた次回にします。

会場から質問:4 次元多様体のそういう wild な構成法というのは？

今の所知られているのは、Casson の無限反復法、Freedman がやったやつですね、あれしか今ないですよ。基本群が自由 abel 群ぐらいだったら Freedman の仕事がありますが、これは基本群が非可換ですから今の所どうにもならない。曲面の基本群の曲面の基本群による拡大ですけれども、それだとまだ bundle, homological ですからそういうものを実現する 4 次元多様体を作ろうとすると、最初多様体で作るのは、難しいと思います。Poincaré complex くらいで作らないとしようがないです。それで作って surgery で多様体にしていく、基本群がバカでかいですから、surgery theory をするといってもそういう群の Wall 群とか計算されていないと思います。100 年でもだめかもしれません。

これは Lie version があるので、全部ナンセンスという事はないです。定義されるが全部自明という事はないです。Lie 代数レベルで自明でない事は分かっているの、完全にポシャる事はありません。

ただ前回も言いましたけど、世界であまり信じている人はいません。Lie version のこの意味では geometric group theory の人たちが興味を持ってきていて、逆井さんのメールには、高次元の manifold bundle について、特性類として μ_k が出る可能性がどうもあると言っている人もいます。そっちの方向でバンドルを構成して Lie 代数 level で non zero が示される、小平先生の構成を曲面ではなく高次元の多様体にしてバンドルにして特性類は出る可能性はある、特性類はねじれている事が証明できるかもしれない。Madsen と Berglund という人で講演はまだ金曜日だそうで、食事の後にこういうのやったと聞いて、非常にビックリしたと言ってきました。全部 Lie 代数 version ですから、こっちの群の話ではありません。

それでこれらに associate した transgress して homology3-球面の不変量が出てくる、全部うまくいったらというのは、さっきの Casson 不変量が出たというのと仕組みは全く同じです。2 次元 cohomology があって、Torelli 群に制限すると coboundary になる。1-cochain の coboundary, その 1-cochain をしかるべき所に制限すれば準同型になる。しかるべき所というのは homology3-球面の homology 同境の群 Θ_2^3 。

絶対 Galois 群の方は計算が少し軌道に乗り出しました。一番簡単に書くと数論的には Soulé 元というのが無限にある。各奇数毎にあると言いましたが、Grothendieck の motivic の哲学では全部 $\mathbb{Z}$ 上定義されている。これは証明されていませんが、だから我々 topologist も計算できる、 $\mathbb{Z}$ 上だから、 $\mathbb{Z}$ 上定義された Lie 代数 $\mathfrak{h}_{g,1}$ で。ただ現状数論的には p を持ってこない、 $\mathbb{Z}$ 上ではできない。 $\mathbb{Q}$ 上では全然足らない。各 p でやると p 進、Grothendieck のいろいろな cohomology 理論がある。 $\mathbb{Z}$ 上で 3,5,7 といろいろな cycle があって、トポロジーの立場からもしこれが正しいとすると、Galois 元は我々の立場で言って boundary である、これは予

想ですよ、全部、これの計算を今やっています。Johnson 準同型の具体的な計算です。もしこれが正しいとして、boundary でこういう cycle は Lie 代数レベルでどうやるかという、weight があって weight 3 と weight 3 の wedge で weight 6 の cycle が出来たのですが、これが別の weight で bound するか、これが μ_k たちの非自明性の問題です。具体的に私が最初のやつでやったのは、computer で全て計算して、数え上げて boundary operator を計算して、全然 conceptual な証明ではないのです。

2 番目を証明した Conant-Vogtmann もそうです。これも computer で計算しています。Gray も cycle を作って、全て computer です。どんどん進化していますから、最初の頃の計算は今は 2,3 秒で出来ますが、私は 2,3 ヶ月掛かりました。chain を全部計算しました。私は表現論を使ったので、いろいろな Sp -module の Sp -不変元を、次元をまず計算して、その後で次元だけではなく基底を求めなくては行けませんでした。

Vogtmann は Culler-Vogtmann の Outer space, graph の Teichmüller space にあたるものの基本的な仕事をした人です。Vogtmann さんの方針は本質的にはつながっていますが、Lie algebra レベルではなくて、Outer space で作る。これは simplicial complex ですから。Gray もその方針でやっています。ただし cell の数がバカでかくなります。いま μ_4 が non zero を証明しようと、世界で 3 つくらいの group が取り組んでいます。ただ computer のレベルは限界まで来ている。super computer を使っても 20 年くらいかかると思います。世界中の computer を使えば計算は出来る、そういう種類の計算です。でもこれは非現実的ですよ。それは政治の問題ですね。 μ_4 が zero でない事を証明しよう、これは全部 Lie 代数 level です。群の level だとここでやるのはこれを多様体で作ろうという事です。片側は plumbing みたいなものです。

会場から：Milnor の exotic 7-sphere の構成のような事ですか？

そうそう、まさにそうです。反対側からかぶせるというのは smooth ではできないけど、topological にはできる。しかも homotopy disk ではできない、homology disk で貼り付けなくては行けない。homology 4-cell なんて沢山ありますけれども、最後に貼り付けるものは気が遠くなるような性質を持たないといけない。そんなものは天才が出ないとどうにもならない。繰り返しになりますが、不変量の定義は出来ます。Massey 積の intersection ですから。曲面上の曲面バンドルの signature は sinature cocycle, Meyer cocycle で解釈があって、ある 4 次元多様体の中の 2 次元の surface の self intersection. これは twisted cohomology なので、ねじれていますから難しくなりますが、概念的には同じです。2 次元のあるねじれたものを持って来てねじれた意味での intersection.

最後にそもそもの μ_k は何か、Lie 代数 level では何か。これも予想なんですけど、これは Borel regulator, これは p 進ではなく、もとの regulator で $H^{4k+1}(GL(N, \mathbb{Z}); \mathbb{R})$, stable cohomology, ここにもともといいますが、これが $Out F_N$ 上 zero というのが Igusa Kiyoshi さんの結果です。さらに $Out F_N$ の有理係数安定コホモロジーが自明というのが Galatius の大定理, Annals に出ています。だけど unstable にどんどん小さくしていくとこれがある所で消えていて、しかも Out に pullback すると全部消える。どこで消えるか critical な所がもしわかれば、2 つの理由で消える。そういうときには必ず secondary class がある。

これは Soulé さんに教えてもらったのですが、Bismut-Lott の仕事、Bismut は解析と幾何に跨がる基本的な仕事をしている人です。Lott は今 Berkeley ですが、Perelman の 3 つのチームのうちの一つに入っていました。ここで μ_k はどこにいるかという $H_{4k}(Out(F_{2k+2}); \mathbb{Q})$ にいます。その対応する Borel cohomology で $H^{4k+1}(GL(2k+1; \mathbb{Z}); \mathbb{R})$, Borel class が unstable に 2 つの理由で消える差として secondary が出てくる、Bismut-Lott が言った事は、これが $2k+1$ ならば消える、これは JDG に載っている論文です。この次、 $2k+2$ で何かが起こっている。消えるか消えないか。そこで私の予想としては消えていて、Galatius の $Out F_N$ では消える理由と unstable で消えるもう一つの理由がある。

2 つの理由があるとこれは元々 Casson 不変量を構成したときもそうですが、cocycle があって 2 つの理由で

coboundary になる, そうすると cochain がとれ, cocycle が出来る. これで Casson が出て来た, Meyer cocycle と signature cocycle の差を取って, ここでも出てくるだろう. 出てくるのは Borel regulator class. Lie 代数レベルでは Soulé の p 進 regulator, Borel の original な regulator とは関係すると思いますが, まだそこまで勉強は進んでいません. Soulé 元というのは p 進 regulator といいますが, 多分ここに出てくる regulator は p に依らない. μ_k は Lie 代数 level では Borel regulator の secondary class. 全て話しはあっています.

第 20 回 (2013 年 2 月 20 日)

全体の通し番号は 10 章で、夢というタイトルを付けました。その続きです。これの実現に向けていろいろと考えているわけですが、特に逆井さんと鈴木さんとこの何年か共同研究をしている、この実現、全体の実現は無理だと思いますが、少しでもやろうと続けています。

前回も書きましたが、

§1. 一つの曲面 Σ_g ,

closed oriented な surface, これを Σ_g と書いて、この族というか曲面の family, その分類空間というか、写像類群.

§2. mapping class group $\mathcal{M}_g$,

前回少しやりましたが、

§3. homology cylinder

この分類空間というか、Garoufalidis-Levine の $\mathcal{H}_g$ と書きました。今日はその続きという事で、

§4. Prospects

という事でお話したいと思います。

続きですから改めて書くと、写像類群

$$\mathcal{M}_g = \pi_0 \text{Diff}_+ \Sigma_g,$$

というものがいました。 Σ_g の向きを保つ diffeo の isotopy class 全体、これは定義です。大事な事は $g \geq 2$ 以上で、この分類空間

$$\begin{aligned} B\mathcal{M}_g &= K(\mathcal{M}_g, 1) \\ &= B\text{Diff}_+ \Sigma_g \end{aligned}$$

これは曲面バンドルの分類空間、一般の次元で成り立ちません、これが本当に曲面に特異的な事です。これがイコールというか同値というのが、Earle と Elles の仕事の帰結です。これを enlarge する群というのが Garoufalidis-Levine による

$$\mathcal{M}_g \subset \mathcal{H}_g = \{\text{homology cylinders}\}/H,$$

小文字の h で書くと homotopy cobordism ですが、大文字の H と書くと homology cobordism で割ったもの。homology cylinder の理論というのは Habiro さん、Goussarov さん、2000 年ちょっと前から、独立にあって、これらを元に理論を導入したのは Garoufalidis-Levine, Levine は高次元も含めた knot の専門家で、残念な事に数年前に亡くなりました。enlargement, この命名は Levine だと思います。 $\mathcal{H}_g$ は $\mathcal{M}_g$ の enlargement.

$B\mathcal{M}_g$ は曲面バンドルの分類空間ですが、 $\mathcal{H}_g$ を考えるという事は、homology の意味の曲面バンドルを homology cobordism で割った、そういう category での分類空間、それに対応する群です。

ここから行列の群、Siegel modular 群と数論では呼ばれていますが、 $Sp(2g; \mathbb{Z})$ へ全射があつて、

$$\mathcal{H}_g \rightarrow Sp(2g; \mathbb{Z})$$

これは数論では非常に重要な群でトポロジーでも重要です。表現論を使うときは $\mathbb{Z}$ 上の表現論は非常に難しいので、 $\mathbb{Q}$ 上、あるいは $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ 上で考えます。その kernel として出てくるのが Torelli 群 $\mathcal{I}_g$,

$$\mathcal{M}_g \supset \mathcal{I}_g$$

Dennis Johnson がパイオニア的な仕事をしました。対応する homology cylinder の所は, Torelli homology cylinder, まだ notation が確定していませんが,

$$\mathcal{H}_g \supset \mathcal{IH}_g$$

と書きます。

この Torelli 群の部分群として Johnson kernel,

$$\mathcal{M}_g \supset \mathcal{I}_g \supset \mathcal{K}_g,$$

この naming はほとんど確定しています。ここに最初の Johnson 準同型というものがあって,

$$\tau_1 : \mathcal{I}_g \rightarrow \Lambda^3 H/H$$

さっき大文字の H を書いたら homology だと言いましたが, こういう所で出て来たら曲面の homology $H = H_1(\Sigma_g; \mathbb{Z})$ です。 H は $Sp(2g; \mathbb{Z})$, $H_{\mathbb{Q}} = H \otimes \mathbb{Q}$ は $Sp(2g; \mathbb{Q})$ の基本的な表現空間です。これは Dennis Johnson の基本的な定義の一つですが,

$$\mathcal{K}_g = \text{Ker } \tau_1$$

だから Johnson kernel と呼ばれています。Johnson のもう一つの定理は, Σ_g の bounding simple closed curves に沿う Dehn twist, 曲面を separate する単純閉曲線, bounding simple closed curve, BSCC と省略して言いますが, BSCC に沿った Dehn twists で生成される部分群, $\mathcal{K}_g$ はこれと一致するというのが Johnson の定理です。これが Johnson Kernel と呼ばれるものです。

$\mathcal{H}_g$ でここに対応する群に対して, こういう定理はなく, ここだけの notation ですが, homology cylinder で対応する群 $\mathcal{KH}_g$ です。Johnson の理論があって, Johnson filtration というものがあって, それを Habiro さん, Goussarov さん, Habiro さんでいうと clasper 理論があって, Johnson filtration, Habiro-Goussarov-filtration, 元々は Johnson ですが, そういう部分群が $\mathcal{H}_g$ に定義できます。

Torelli 群, ここから Johnson 準同型というものがあるわけですが, 写像類群と homology cylinder の群との間の大きな違いは, 写像類群は純粋に algebraic topology で全てつかまる, それは Dehn-Nielsen の定理で

$$\mathcal{M}_g \cong \text{Out}_+ \pi_1 \Sigma_g$$

が成り立ち, outer automorphisms, 基本群の向きを保つ外部自己同型群, 全て代数の言葉で書き表される。一方で $\mathcal{H}_g$ の方に来ると, 同じように, Johnson filtration から誘導されたこれの Mal'cev completion, nilpotent quotient の outer に準同型の系列があるのですが, 後で, あるいは次回になるかもしれませんが, それでつかまらない部分があるというのが大きな違いです。それが幾何的な部分で, それは homology 3-sphere の homology cobordism group,

$$\Theta_{\mathbb{Z}}^3 = \{\text{homology 3-spheres}\}/\text{H-cobordism}$$

closed で oriented は仮定します。それを homology cobordism で割った群です。integral と言って $\mathbb{Z}$ を付けます。何も書かないと $\mathbb{Z}$ ですが, $\mathbb{Z}/2$ という場合も重要です。

こういう群が間に出てくる。これが無限 rank だというのが, Furuta さんの, 1990 年の大定理ですね。Fintushel-Stern がちょっと遅れて独立に証明しました。証明はちょっと違いますが, 基本的な考え方は, gauge 理論を使うものであって, 間接的, 帰謬法で証明されます。無限 rank だからといって無限個準同型があるとは限らないのですが, 期待される。それは今の所 2 つしか知られていない。

それで prospect というのは, homology 3-sphere の homology cobordism 群というのは, その上にある diffeomorphism 全体のなす集合, connected sum を考えるとそれは monoid になって, そこから全射があります.

$$\mathcal{H}(3) \rightarrow \Theta_{\mathbb{Z}}^3.$$

さらに

$$\mathcal{H}(3) \subset \mathcal{M}(3)$$

$\mathcal{M}(3)$ は 3 次元多様体全体という, 3 次元多様体論の研究対象. 一方 4 次元に $\mathcal{M}(4)$ は本当に mystery の世界で, $\mathcal{M}(3)$ は, こちらは Thurston の分類というか, 構造定理, 構造予想, geometrization conjecture が, Perelman によって証明されて, さらにもうちょっと最近, virtual Haken 予想, virtual fibration 予想があつという間という用語がありますが, 証明されてしまいました. Thurston の予想, 1970 年代後半から 80 年代に提出された prospect, prospect というよりはもう少し詳細な program がほとんど完成しました. 完成されていない部分はあとでやりますが数論との関連の部分です. Thurston の program, ほとんど完成していて, これも非常に残念な事に去年の 8 月に Thurston は亡くなってしまいました.

$\mathcal{M}(4)$, こちらの方は皆さんご存知のように topological category と smooth category の間に drastic な差がある. topological category, こちらは Freedman 1982 年, smooth category は Donaldson 1983 年, 4 次元の mystery な世界, mystery がますます深まっていきました. こういった 3 次元多様体, 4 次元多様体, この間の関係, 4 次元多様体, closed oriented は仮定します. 4 次元多様体を境界付きにまで拡張して考えると, その境界は 3 次元多様体ですから, 当然深い関係があるに違いないわけです. また一見違う, 突然出てくるように見えますが, 絶対 Galois 群 $\mathbb{G}_{\mathbb{Q}} = \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. Galois 群とトポロジーとの関係というのは, 最近沢山出ていますが, 古くからいろいろあります. 最近いろいろあるというのを, 今日の後半と次回, あくまでもトポロジーの観点からやっていきます. 一番ごく最近では古庄さんの knot 群と絶対 Galois 群の仕事もあります. 我々は関係していますが, 別の側面からこれに迫ろうとしています.

この prospect は, この 3 次元の世界と 4 次元の世界, 絶対 Galois 群, 特に homology 球面, その間に深い関係があると, 既にある事はいろいろな議論や結果からあるわけですが, 我々の立場からこれに迫ろうとしていて, 実際 computer を使って, 全体の prospect からすると一つの問題, 全体からすると小さいですが, しかしそれ自身深くて 10 年にかかるだろうという問題です. もう少し具体的に紹介します.

我々の研究で一つ良いのは, 少し宣伝になりますが, 理論と computer の二人三脚, これが非常に良いのです. 理論というのは, 数学は理論的な科学の最たるものですが, 考え続ける訳です. 予想したり新しいものを作ろうと, 考え続けるわけです. ずっと考え続けると疲れてしまいます. 堂々巡りになったり, 考え続けて疲れてきますと退化していきます. computer で実験するとリフレッシュします. 実験科学はこれをずっとやっているわけですが, 数学は実験科学ではないですが, computer でいろいろ計算しているとこの疲れが消えていくんですね. computer で Mathematica とかで計算していくと非常に楽しいわけです. データが一杯できて, ただ論文にするのは非常に苦労します. 最近少し変わってきて computer assisted な論文というのが段々出て来て, ジャーナルでいうと Experimental Math というジャーナルがあつて, 大分前からそれを目的にしたジャーナルですね. また Annals of Math. という超一流なジャーナルがありますが, そのトップページに, 特に 15 ページくらいの短い論文であつて computer assisted な部分があつたとしてもそれを十分裏付けるデータと説明があれば accept する, という意味の事が書いてあります. 実際それで Gabai とか Thurston の論文も確かあります. hyperbolic 3-manifold に関する論文です. 我々もそういうものがあるので, もちろんそれに比べるつもりはありませんが, 少し try しようと思います.

我々だけでなく、いろいろな computer assisted な研究の進め方というのは、最近非常に増えています。これは少しおこがましいかもしれませんが、例えば Gauß が Gauß 曲率を発見した研究は膨大な計算をしてそれを元に Gauß 曲率が intrinsic な事を見出して、さらに Gauß 写像の理論を作りました。我々の実験はおいおいうちよつと具体的にやります。最初の頃に computer を持って来て実演しますと言いましたが、一度もやっていませんね。もしチャンスがあればやりたいと思います。

それでこの関係について、絶対 Glosi 群について、あくまでトポロジーの立場からですがお話します。(いろいろな機会に、中村さんや松本さんから教わりました。懐かしい思い出です。それらが基になっていますが、私の思い違い、間違った解釈もあると思います。)

絶対 Galois 群というとき Riemann zeta 関数

$$\zeta(s) = \sum_n \frac{1}{n^s}$$

が出てきます。定義は誰でも知っていると思います。そしてこの無限積表示とかいろいろあって、Riemann 予想というのは、もちろんこれに関する、現代の数学の最大の予想です。もし解決したらその後は何が来るのでしょうか。

Riemann がこれを考えたのは 1859 年の論文。実際はそのずっと前から、特に Euler です。この値、 $\zeta(1)$ 、奇数、1 と 3,5,7 に分けていくのですが、

$$1, \quad 3, 5, 7, \dots, 2k+1, \dots$$

1 に対応する所と、3 以上の部分に分かれる。1 は素数にするかしないかは定義に依ります。この 2 つの部分に問題は分かれていきます。 $\zeta(1)$ は皆さんご存知のように無限大です。

$$\zeta(1) = \infty.$$

だけど無限大とするか、これに直接関係はしないけれど、zeta value、これも Euler ですが、変数を増やして multiple zeta value、これは algebraic variety の周期、algebraic variety 上の微分形式の topological cycle 上の値と関係します。あとでもう少し詳しくやります。数学というよりは宇宙の、定数の筆頭にある、単位円周の長さ、これは周期

$$2\pi = \frac{1}{i} \int_{|z|=1} \frac{dz}{z},$$

周期の一番最初です。

奇数については非常に難しいのですが、偶数については比較的簡単に、というと Euler が怒るでしょうね。Euler が既に値を求めています。組み合わせ的な事をやると出てくる Bernoulli 数を使って書く事ができます。

$$\zeta(2k) = (-1)^{k+1} \frac{B_{2k}(2\pi)^{2k}}{2(2k)!}$$

Euler が既に出していました。

トポロジーとの関連で言うと、zeta value というか、この Bernoulli 数というのは、トポロジーにいろいろな所で現れていて、Kervaire-Milnor、最初は Milnor です。Milnor が homotopy sphere、これはさつき homology sphere の群の notation で書いてしまいましたが、 $\Theta^n(\partial\pi)$ 、これは parallelizable な多様体の境界として現れる n 次元 homotopy 球面、homotopy type が球面である、高次元では一般化された Poincaré 予想の解決、3 次元で

は Perelman の仕事で, standard な sphere 上の微分構造の違い, というものになります. 一般に $n = 4k - 1$ の所で cyclic group になり, 特に $k = 2$ のときがこれが Milnor であって homotopy 7-sphere,

$$\Theta^7(\partial\pi) \cong \mathbb{Z}/28.$$

J 準同型というのがあって, J の cokernel というのは未だに決定されていない大問題ですが, それと関連します. k が大きくなってくるとここに Bernoulli 数が出てくる. differential topology に最初に出て来たトポロジーと ζ との関係です.

そして次に解析接続によって Riemann zeta 関数は負の方にも接続されるわけです. 負の値は偶数, 奇数両方とも書いて,

$$\zeta(-k) = -\frac{B_{k+1}}{k+1}.$$

但し Bernoulli 数は奇数で 3 以上だとするとこれはゼロになります. だから本とか論文によっては, 奇数の場合がゼロなので B_{2n} の替わりに B_n と書いてある場合もあります. これは負での値, これもやっぱり Bernoulli 数.

そしてこれが Riemann moduli 空間の volume に関係するという事が出てきます.

$$\begin{aligned}\zeta(-1) &= -\frac{1}{12} \\ &= \frac{1}{2} \chi^o(\mathbb{M}_1)\end{aligned}$$

この値 $-\frac{1}{12}$ は種数 1 の Riemann moduli 空間の orbifold Euler 数の 2 分の 1. これはなぜかといいますと, こじつけのように見えますが, g が 2 以上のものをみるとこう解釈するのがよいというのが現れました.

$\mathbb{M}_1$ というのは古典的に何かというと,

$$\mathbb{M}_1 = \mathbb{H}/PSL(2; \mathbb{Z}),$$

です. 上半平面 $\mathbb{H}$ に $SL(2; \mathbb{Z})$, これは種数 1 の mapping class group ですが, これは通常の 1 次分数変換で働いてその商空間が genus 1 の moduli 空間です.

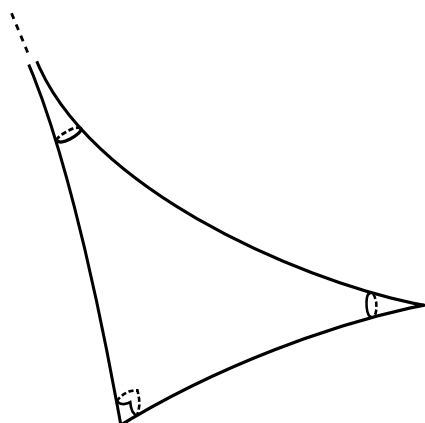
そうするとこれは古典的にいろいろ保型形式とか基本的なもので基本領域を書いて商空間が書けます. それは良く知られているように, 無限遠に cusp があって, $\sqrt{-1}$ に対応する所が cone になって, cone angle が 180 度, ちょうど半分です. $e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{3}}$ に対応する所, そこが cone angle が 120 度になる. この Euler 数はどうなるかということ cone は関係なくて, これを無限遠で開くと plane と homeomorphic, 従って通常の Euler 数は 1 です. しかし orbifold Euler 数というのは, 点での角度, これは 360 度なら通常の点ですが, 180 度なので半分しかない, orbifold の意味では半分 $\frac{1}{2}$, 数え過ぎている. こちらは 120 度ですから $\frac{2}{3}$ 多い, これを引いたものが orbifold Euler 数

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{6}$$

となります. Euler 数にかかる $\frac{1}{2}$ のここにある 2 は何かというと, $SL(2; \mathbb{Z})$ は $\mathbb{H}$ に effective に働かなくて $PSL(2; \mathbb{Z})$ が働く, P がこの 2 になる. めでたく $-\frac{1}{12}$ になります.

これは後知恵ですからこれだけ言ったら何の意味もない, 深い意味はないのですが, これは単なるこじつけではないというのが, Harer-Zagier, そして Penner の仕事です. これは定理ですね.

定理 (Harer-Zagier, Penner)



180°, $[\sqrt{-1}]$

Fig.10 種数 1 Riemann 面の moduli 空間 $\mathbb{H}/PSL(2; \mathbb{Z})$

$$\chi^o(\mathbb{M}_g) = \frac{\zeta(1-2g)}{2-2g} \quad (g \geq 2)$$

Riemann moduli 空間の orbifold Euler 数は、こうなるという定理です。ここで $g = 1$ のときは、分子は $\zeta(-1)$, 分母はゼロになるわけですが、2 以上と 1 の世界はちょっと違うので、

$$\chi^o(\mathbb{M}_1) = 2\zeta(-1)$$

こうなるという事です。

このようにしてマイナスの zeta value もトポロジーの方に現れたわけです。そこでプラスの方に転じますと、 $\zeta(2k+1)$ はずっと mystery, そもそもこれは有理数でありうるか、そんな事はないだろうと最初から予想はされていますが、無理数か、その次に超越数か、などいろいろな話が出てきます。例えば π も最初無理数である事が証明されて、その次に超越数である事が証明されました。

普通大学の 1 年生で、自然対数の底 e が有理数でないというのは Taylor 展開を使って証明できます。ですが超越数だというのは難しい。それに比べて π が無理数というのは難しいですが、大学の数学で出来ます。超越数というのは本当に難しいですね。

それで今度はこっちの方ですが、

$$\zeta(3) \notin \mathbb{Q},$$

これを証明して有名になったのが Apéry という人です。これが無理数だというのが証明されたのは、数学史からいうと極最近、1978 年です。 π も入れて、

$$\pi, \zeta(3), \zeta(5), \dots,$$

は全部無理数で、全部超越数で、 $\mathbb{Q}$ 上さらには代数的にも全部独立だろうというのが最終的な予想のようです。ただ今はそこまでは行っていません。動きがあったのが、2000 年の Rivoal という人の仕事で

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}\langle \zeta(3), \zeta(5), \dots \rangle = \infty.$$

を証明しました。だから無限個 irrational なものがあり、さらに $\mathbb{Q}$ 上一次独立。この証明は最近の Fermat 予想の解決や谷山-志村理論などのような最新の方法を使うのではなく、古典的とも言える Apéry の方法をずっと詳しくやったという事のようにです。

$\zeta(3)$ が超越数だという事は知られているのでしょうか (まだ知られていないようです). π との関係で研究が進むとよいですね. zeta, そもそも π が最初ですから. zeta value, 略して ZV と書きます. これを multiple zeta value に広げて MZV と書きます. これは元々 Euler に遡ります. MZV の作る algebra というのがあって, これが絶対 Galois 群や motivic Lie algebra と関係してきます. これは活発に研究されていて, 元々は Euler ですね, Zagier, Kontsevich, Goncharov, Terasoma, Kaneko, Ohno, Furusho, Yamashita,... これは活発に研究されています.

multiple zeta value, 特にトポロジーの観点からは Kontsevich の仕事が大事だと思います. もともと zeta value を積分で書くというのは昔からあって, multiple zeta value は全て K.T. Chen の iterated path integral で, Kontsevich は全ての multiple zeta value をこれで表しました. 分かってみれば simple で, これを定義にしてもよさそうなくらいで... iterated path integral で表して, これと数論との関係ですね. だから周期, period というのがキーワードで, Zagier と Kontsevich の論文があります.

multiple zeta value とか motivic Lie algebra に関する研究集会は非常に沢山あります. 我々の仕事と関係しそうなことが分かって 2004 年頃から興味を持っているのですが, Soulé さんや Gangl さんたちが $GL(N; \mathbb{Z})$ の非安定 cohomology を調べています. この Gangl の HP に入っていくと, この人自身の仕事もありますが, 関係する集会のリンクが貼ってあります. 2012 年くらいに, 沢山あるのですが, そのうちの 하나가 IHES であった周期に関する集会で, そこで Deligne が周期に関してしゃべっています. video を見た限りでは, これは非専門家にも非常に分かりやすい講演に思われました. 周期とはなにかという事をしゃべっていて, 要するに algebraic variety があるときに, これは Grothendieck の大定理だと Deligne は言っていますが, $\mathbb{Q}$ 上定義された affine algebraic variety

$$X \subset \mathbb{C}^N$$

があるとき, つまり有理数係数の多項式系の共通零点がある. そうすると $\mathbb{C}^N$ には座標がありますから, それを用いて $\mathbb{C}^N$ の有理数係数の多項式の微分形式を考える事ができます. それを X に制限して考えます. これは de Rham complex の非常に小さい subcomplex になります. その cohomology を $\mathbb{C}$ とテンソルするとこれは通常の de Rham cohomology と同型だというのが定理です.

$$H_{dR}(X) \otimes \mathbb{C} \cong H_{dR}(\Omega_{\mathbb{C}^\infty}(X(\mathbb{C})))$$

$\Omega_{\mathbb{C}^\infty}(X(\mathbb{C}))$ はもちろんものすごく沢山微分形式はあるのですが, 左辺は与えられた座標での多項式係数, なので非常に小さい subcomplex です. それが cohomology を計算してしまうというのですから大定理です.

一番簡単な例として Deligne が挙げているのは,

$$X = \mathbb{C} \setminus \{0\} \subset \mathbb{C}^2.$$

物理学者なのか非専門家が聴衆の中にいるようで, その質問が我々を安心させてくれます. 我々だったら恥ずかしくて聞けない. これをどういれるかというと $xy = 1$ でいれる. そうすると同型になって, さっきの algebraic differential form というのは $\frac{dz}{z}$, これはアファインといってもどうするんですかと物理学者? と思われる人が聞いたら, Deligne はわかりましたといって, $z = x$ とやって微分形式は $\mathbb{C}^2$ では ydx となります. そしてこの cycle 上, 単位円周上この algebraic な form を積分すると 2π という周期が出てくる. それを一般のものにやっていくというのが周期です.

この zeta と Riemann moduli の関係でこの周期が出てくるだろう, というのは後で触れますが Hain の仕事です. ここに 3 次元, 4 次元, homology 球面, そして絶対 Galois 群が出てくる, これはまったく唐突に言っているわけではないのです.

MZV, multiple zeta value, これは当然期待されるように絶対 Galois 群 $\mathbb{G}_{\mathbb{Q}}$ に関係するわけです. もっと具体的にいうと, $P^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ の algebraic fundamental group

$$\pi_1^{\text{alg}}(P^1 \setminus \{0, 1, \infty\}).$$

これは topological に言くと, plane から 2 点を引っこ抜きましたので基本群は rank 2 の自由群です. 写像類群の立場からいうと genus 0 の 3-punctured というものです. トポロジーから見ても双曲幾何から見ても基本的なものです. これに関して第一にあげなくてはいけないのは, やはり Grothendieck です. そして日本では伊原先生, Deligne, Drinfeld, Goncharov とか. 伊原先生のスクールから織田孝幸さん, 中村博昭さん, 松本真さん, そして Hain. 特に写像類群との関係からいうと, 中村さんと松本真さん, そして Hain. 最近は古庄さん, 活躍されています. multiple zeta では寺まささんの有名な結果がすぐに思い出されます.

トポロジーとの関係からいうと, knot との関係で古庄さんの最近の仕事があります. その前に Vassiliev invariant, これは画期的な仕事ですね, knot の Vassiliev invariant, finite type invariant.

$\mathbb{G}_{\mathbb{Q}}$, これ自身群なのですが群としては難しい, 群として完全に分かる日は来ないだろうと思います. そして群よりは Lie 代数の方がやさしい. 絶対 Galois 群をある意味調べようとすると出てくる Lie 代数. それは定義は簡単です. free Lie algebra で, だから関係が Lie 代数というものだけで, generators がさっきの奇数全体

$$\langle \sigma_3, \sigma_5, \sigma_7, \dots \rangle$$

free generator をもつ, まずは $\mathbb{Q}$ 上定義する. 本当は $\mathbb{Z}$ 上で定義されます.

この σ_{2k+1} たちは何かということに対応するのは絶対 Galois 群から来るのですから, Soulé の仕事で,

$$H^1(\mathbb{G}_{\mathbb{Q}}; \mathbb{Z}_p(2k+1))$$

係数 $\mathbb{Z}_p$ で prime p はなんでもよくて, $\mathbb{Z}_p$ は p-adic integer 全体. 絶対 Galois 群を abel 化すると, cyclotomic character という 1 のべき根に働く, adic integer の unit 全体 $\mathbb{Z}^*$, これが絶対 Galois 群の abel 化で,

$$H_1(\mathbb{G}_{\mathbb{Q}}) \cong \hat{\mathbb{Z}}^*$$

これは古典的な定理で, これで twist する, これは Tate twist と呼ばれる, twisted cohomology. twisted cohomology,

$$H^1(\mathbb{G}_{\mathbb{Q}}; \mathbb{Z}_p(2k+1)) \cong \mathbb{Z}_p$$

これが rank 1 だというのが Soulé の基本的な定理. 各 p 毎に, p は素数ならなんでもよい, こういうものがあります. p が動いたときにどうなるかというのは難しい問題です. そして σ_{2k+1} は Soulé 元というものに対応するものです. これは p-adic, Soulé の p-adic regulator と呼ばれるもので, p 進があるとその元々のやつ, そもそも regulator を出したのは Armond Borel, Borel regulator class,

$$\beta_{2k+1} \in H^{4k+1}(GL(N; \mathbb{Z}); \mathbb{R}).$$

$GL(N; \mathbb{Z})$ は最近トポロジーにおいても重要な自由群の外部自己同型群の線型部分, 写像類群でいうと $Sp(2g; \mathbb{Z})$ に対応します. その実係数 cohomology です. そこに Borel が定義したものがあってその p 進 version が Soulé の p-adic regulator. Borel regulator は定義は非常に難しいのですが, topologist にとって, 何に対応するかというと, $H^{2l-1}(BGL^{\delta}(N; \mathbb{C}); \mathbb{C}/\mathbb{Z})$, $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$ に値をもつ discrete topology を入れた群の cohomology の元で Chern-Simons class です. flat bundle ですから Chern class は $\mathbb{C}$ -係数でゼロであって, その lift があるのですが, それが Chern-Simons です. $GL(N; \mathbb{Z})$ にするとこれが $2k+1$, 奇数の時だけ生き残って, しかも $\mathbb{C} \bmod \mathbb{Z}$

ではなくて $\mathbb{R}$ に lift する, これが Borel regulator class と呼ばれるものです. これは全くまだまだ予想なのですが, 自由群の自己同型, graph の moduli の特性類, これは Borel regulator がある非安定領域で消滅する, その 2 次特性類だろう, 従って元々の Chern-Simons が 2 次特性類ですから, その 2 次, secondary の次, 4 次というか 2 のべき的なもので, 非常に細かいものです. そういう細かいものとして, graph の moduli 空間の特性類が現れるだろうというのが予想です.

もっと具体的に prospect を書きます.

ZV	1	3	$\cdots$	$2k+1$
IREP	π	$\zeta(3)$	$\cdots$	$\zeta(2k+1)$
H^1	$[1^3] = \Lambda^3 H/H$	$[3] = S^3 H$	$\cdots$	$[2k+1]$
H^2	$H^1(\mathcal{M}_g; [1^3]) \cong \mathbb{Q}$	$H^1(\mathcal{H}_g; [3])$	$\cdots$	$H^1(\mathcal{H}_g; [2k+1])$
4-manifold inv.	$e_1 \in H^2(\mathcal{M}_g; \mathbb{Q})$	$\bar{t}_3 \in H^2(\mathcal{H}_g; \Lambda^2[3]^{Sp})$	$\cdots$	$\bar{t}_{2k+1} \in H^2(\mathcal{H}_g; \Lambda^2[2k+1]^{Sp})$
3-manifold inv.	$v_1 = \text{signature}$	v_3	$\cdots$	v_{2k+1}
	Casson invariant $\lambda: \mathcal{H}(3) \rightarrow \mathbb{Z}$			$\hat{v}_{2k+1}: \Theta^3 \rightarrow \mathbb{Q}$

$$1, \cdots 3 \ 5 \ 7 \ \cdots \ 2k+1$$

ここで prospect を書いておきます. zeta value で言うと 1 に対応するのは π , 次に $\zeta(3)$ があって, $\zeta(5)$ があって $\zeta(7)$ があって, $\zeta(2k+1)$ と依然として難しい mystery です.

そしてここから突然トポロジーに, 我々の prospect, その間をつないでいるのは Hain の仕事, periods for $\mathbb{M}_g$ です. これは $\mathbb{Q}$ 上定義された quasi-projective variety というのが代数幾何の基本的な定理です. その周期として zeta value が現れるだろう. これを直接扱うわけではありませんが, こういうものを念頭におくと次のような prospect, 3 次元多様体論, 4 次元多様体論との関係が出てきます.

まず出てくるのは $Sp(2g; \mathbb{Q})$ の既約表現です. irreducible representation. $Sp(2g; \mathbb{Q})$ の既約表現として 1 の所に $[1^3]$, これは Johnson 準同型の target ですがけれども, $\Lambda^3 H$ の中に H 自身が $\omega_0 \wedge H$ として, 入ってこれが primitive な part です. 表現としては $\mathbb{Q}$ 上にすると $[1^3]$ で, こういう表現があってこれが 1 に対応する所であろう. だからこの下を書く事は全て分かっている. これを $3, 5, 7, \cdots$ にどう拡張するか.

$[3]$, 3 次, これは symmetric power, homology でいうと $S^3 H$, 次は $[5]$ という表現で, その次は $[7]$ という表現で, 大分前に写像類群の構造を研究したときに trace というものを見つけたのですが, 其の target に現れる既約表現です.

ここで $[1]$ というものがあるじゃないかと思うかもしれません. 一つの曲面だと $[1]$ というのものがあってそれは Jacobi 多様体です. $[1]$ というのはあるのだけれど, それが family として対応するのは $[1^3]$ という表現であってこの 1 と 3 以上で大きな違いがある. つながってはいる, 一つの系列と思うべきである. これはトポロジーの方でも $[1]$ というものがあるけれども, それは Jacobi 多様体. family になるとすると, Jacobi 多様体になるべきものはそれは $[1^3]$ になる, これは Johnson の仕事です. これは既約表現.

これらの表現全体の共通の性質は何かというと, $[1]$ については特に, 一つの Riemann 面の Jacobi 多様体は, 幾何学的には $2g$ 次元の symplectic torus ですから, 其の 2 次元 cohomology で symplectic 不変な part は rank 1, 表現 $[3], [5], \cdots, [2k+1]$ も同様に幾何学的には次元の高い symplectic torus であって, その symplectic 不変な所はすべて rank 1,

$$H^2([3])^{Sp}, \cdots, H^2([2k+1])^{Sp} \cong \mathbb{Q},$$

これが共通の性質であってここから特性類が出てきます. 2 次元の cohomology. 1 に対応する Jacobi 多様体もそうです, canonical な symplectic form があって rank 1. 上の方も全部そうで rank 1 であっていわば高階の symplectic form が canonical に 1 個だけある.

特性類に行く前に H^1 です。 H^2 は中心拡大がどれくらいあるかに対応します。 H^1 は crossed homomorphism がどれくらいあるかというものです。 対応する群は 1 の所は mapping class group $\mathcal{M}_g$, それを enlarge して 3 以上の所は homology cylinder $\mathcal{H}_g$.

trace は $\mathcal{M}_g$ 上では $[2k+1]$ は現れないのですが, $\mathcal{H}_g$ にすると現れて, trace level では全射だというのが Garoufalidis-Levine と Habegger の結果です。 trace は写像類群上 zero map で, homology cylinder 上全射。 曲面上の曲面バンドルでは hit しない。 S^1 上の homological family としては hit する。 $\mathcal{H}_g$ は $\mathcal{M}_g$ より本当に大きいという事です。

その hit するのを元に写像類群か homology cylinder, 群 G , 既約表現を V と書く事にすると, $H^1(G; V)$, この群の作用, crossed homomorphism がどれくらいあるか, 写像類群でいうと, $H^1(\mathcal{M}_g; \mathcal{U}_{\mathbb{Q}})$, これがどれくらいあるか, これが rank 1 というのは私が大分前 90 年代に証明しました。

$$H^1(\mathcal{M}_g; \mathcal{U}_{\mathbb{Q}}) \cong \mathbb{Q} \ (g \geq 2).$$

homology cylinder の方になりますと, $H^1(\mathcal{H}_g; [2k+1])$, この元はあるのですが, これがいつ解決するかわかりませんが, 一番楽観的に考えれば, trace を generator として rank 1 か?

$$H^1(\mathcal{H}_g; [2k+1]) \cong \mathbb{Q}?$$

これが大問題です。 一方で写像類群で他の表現を持ってくると安定的には全部ゼロ, それは Looijenga, Hain が Borel の消滅定理を使って指摘しました (非安定, とくに $g=1$ の場合は全く様相が違います, 次回に述べます)。 $[1^3]$ だけがあってそれが Johnson 準同型, Torelli 群の abel 化。 こちらの方は Torelli homology cylinder の abel 化は無限 rank, それに対応して無限個の所で出てくるだろう, というわけです。 $H^1(\mathcal{H}_g; [2k+1]) \cong \mathbb{Q}?$, これが rank 1 か, これは大問題で, どうやったらよいかというのは全くわかりません。

写像類群の方はどうやったかと言いますと, $\mathcal{M}_g$ は presentation があります。 いろいろな研究の積み重ねがあってそれらを総動員すると証明できました。 $\mathcal{M}_g$ は有限生成ですが, $\mathcal{H}_g$ は有限生成でない事が最近分かってしまいました。 generator もわかってないし, 況んや relation は分かっていません。 だから今どの部分が $\mathcal{M}_g$ から $\mathcal{H}_g$ に移っても成り立つか, 一般化できる可能性があるのか, 念頭において書いていきますが, これを証明するのは手の付けようがありません。

会場から質問: どうして $\mathbb{Q}$ だと予想されるのですか?

それは $\mathbb{Q}$ だとうれしいからです。 実際 rank が大きい程, H^1 の元が沢山あればあるほど, 曲面バンドルと homology 的曲面バンドルの差がどんどん大きくなります。 だから 4 次元にもそれは反映してさっきの smooth と topological な gap はもっと大きくなります。 rank 1 だったら後でやりますが, smooth と topological の gap を 2 つに分けようというのが夢です。 一つは algebraic topology, 純粋に cup 積や Massey 積の言葉で, その次の段階は gauge 理論を使って, もっと細かい, 微分構造が無限個ある。 Donaldson の結果は algebraic topology で書ける証明は違いますが, cup 積が, algebraic な制限を受ける。 そうするとこれが rank 1 だと Θ^3 の構造から言っても, これは無限 rank なんですが統制できる。 もし rank が大きくなると, Θ^3 もさらに大きくなってきてどうにもならない。 これは根拠はありません。 こうなれば良いなという話です。

それでですね, $H^1(\mathcal{M}_g; [1^3])$, これを 2 乗して不変部分をとる, 1 次元 cohomology は普通 2 乗するとゼロなのですが, twisted cohomology なので元が出てきます。 2 乗する, square を取る。 これと逆の操作を, 標語的に square root を取ると私は言っています。 $H^2(G; \Lambda^2 V)$, $V \otimes V$ に値を取りますが, symmetric part はないので alternating になります。 そして Sp 不変な部分に値を取る。 そうすると $H^2(G; \Lambda^2 V^{Sp})$ で, ここに出てくる表現だと

$$(\Lambda^2 V)^{Sp} \cong \mathbb{Q}$$

で rank 1 なんですね, つまり constant cohomology が出てきます. 2 次元の constant cohomology は, その群の中心拡大がどれくらいあるかという分類を与える群です. 非常によいものです. 1 の所はわかっていてこの操作をやると写像類群の第 1 MMM 類と呼ばれるもの

$$e_1 \in H^2(\mathcal{M}_g; \mathbb{Q})$$

が出てきます. これは分かっている. 研究は逆でした, e_1 が先に出て来て, この square root が取れる.

$\mathcal{H}_g$, こちらは対応するものがない, というか, いまから作るのですが, $H^1(\mathcal{H}_g; [2k+1])$ から

$$\tilde{t}_{2k+1} \in H^2(\mathcal{H}_g; \Lambda^2[2k+1]^{Sp})$$

で

$$\Lambda^2[2k+1]^{Sp} \cong \mathbb{Q}$$

なので

$$\tilde{t}_{2k+1} \in H^2(\mathcal{H}_g; \mathbb{Q})$$

となります.

縦にもう 2 行, associated invariant for $\mathcal{M}(4)$. 最初に出てくるのは signature というものが定義されますが, ここでは ν_1 と書いて, 4 次元 closed 多様体に対して signature が出てくる.

そして 3 次元多様体, 特に homology 球面に対して出てくるのが, これは 1 に対応する所で Casson 不変量

$$\lambda: \mathcal{H}(3) \rightarrow \mathbb{Z}$$

で大分前に私がやった仕事です. 但し homology cobordism 不変量ではない, ここまでは完成した理論ですね. 1, そして π に対応する所は完成しました. これをこの mysterious な 3, 5, ... の世界に拡張するわけです. まず特性類が出てくるわけですが, これは文字は用意しました. $\tilde{t}_{2k+1} \in H^2(\mathcal{H}_g; \Lambda^2[2k+1]^{Sp})$.

4 次元多様体の不変量としては ν_{2k+1} , これは何かというと, signature というのは cup 積ですね, 中間次元 cycle の cup 積, 中間次元 cycle の intersection. ν_1 , これは cup 積を元に intersection を取ったものですが, 今度 ν_{2k+1} は Massey 積の intersection. Massey 積の一番簡単なものが cup 積, Massey 積という無限個の series が, 3 次元多様体に対してあります. 写像類群に対して最初 Sullivan がやって, Johnson がやって, 最終的に Kitano さんの仕事があります. homology cylinder に対して, Garoufalidis-Levine がやりました. その Massey 積の intersection として, 有理数が定義されるだろう, しかも Prospect としては topological category では non zero, smooth category では全て zero だろう, これが prospect です.

Casson 不変量との違いは Casson は homology cobordism invariant ではない. signature は smooth で zero ではない. しかも, algebraic curve 上の algebraic curve バンドルで既に zero ではないものがあるというのは, 小平先生と Atiyah の結果です. これ以上きれいな世界はない. signature がですね. 1 の世界というのはものすごくきれいな世界で, 3, 5, 7, ..., にどの部分がどう一般化されるかです.

それで associated invariant for $\mathcal{H}(3)$ は $\hat{\nu}_{2k+1}$, Casson 不変量は homology cobordism 不変ではありませんが

$$\lambda: \mathcal{H}(3) \rightarrow \mathbb{Z}$$

という monoid 準同型になります. 今度は

$$\hat{\nu}_{2k+1}: \Theta^3 \rightarrow \mathbb{Q}$$

と準同型になって、 ν_{2k+1} が topological には nonzero で smooth には zero であるという事が、正しくないとするとこうはならないのですが、 ν_{2k+1} が topological には nonzero で smooth には zero ならばこういう準同型が得られる、これをどのように実現していくか、日々考えています。

ここら辺で 1 の世界でさっきの仕事、Casson 不変量の仕事がどのように現れるか、これは 1990 年代の前半にやったのですが、これが一般化されていて、まず最初に一般化したのが Garoufalidis-Levine. Torelli 群上の、Torelli 群と homology 3-sphere は Heegaard 分解を通して深い関係があります。 S^3 の standard な Heegaard 分解を一つ与えて、Heegaard surface で cut して $\mathcal{I}_g$ の元で張り合わせると homology 3-sphere が得られます。この操作で g を動かすと homology 3-sphere が全て出てくるという事は比較的簡単に分かります。これを元に Casson 不変量を第 1 特性類 e_1 の 2 次特性類として解釈したのですが、それを Garoufalidis-Levine は finite type invariant, これは元々 knot に対しては Vassiliev がやって、そしてそれを最初は homology 球面、後に 3 次元多様体に対して Ohtsuki さんの仕事があつて、さらに Habiro-Goussarov の仕事があつて、これらを元に finite type invariant に Garoufalidis-Levine が一般化して、これは Inventiones に論文が出ています。

一つ remark としてこの頃 Casson 不変量の仕事をした上で、この考えの延長で無限個の homology 球面の不変量が定義できるんじゃないかなと思っていました。いろいろな人にもできるんじゃないかなと話をしてました。これは実は考えが違いました。homology cobordism 不変量は出てこない。これは出版されていない Habiro さんの仕事だと思いますが、finite type invariant, これはものすごく沢山ありますが、finite type invariant で homology cobordism invariant になるものは Casson 不変量 mod 2 のみである、この事実があることは大分前に大槻さんに聞いたときに教えてもらいました。記憶違いでなければ、どこにも書いてないのですが、これは Habiro さんの定理と言ってよいでしょう、とのことでした。

Finite type invariant はどうやるかという Vassiliev が knot 全体の空間に Filtration を入れました。それを Ohtsuki さんが homology 球面の空間に filtration, Ohtsuki filtration を入れてその graded quotient が finite type invariants です。その grading と homology cobordism, これは別の relation ですが、この入れ方がいわば transverse, ということでした。だから finite type は難しい所に filtration を入れてその grading quotient を調べていけばいろいろわかる。homology cobordism はそれと transverse ですから、どこまで深く finite type を行つたとしても homology cobordism invariant は出てこない。Casson 不変量 mod 2 だけは別で、これは Arf-Kervaire 不変量で例外です。対応する knot の不変量の結果は、確か K.Y. Ng の結果があります。knot の Vassiliev invariant で knot の concordance invariant は Arf-Kervaire 不変量だけです。1 との違いというのが出てきました。

それからもう一つの一般化は Habiro さん, Massuyeau. homology cylinder $\mathcal{H}_g$ に対して、finite type invariants, Habiro-Johnson filtration というものがあつて、graded quotient に関していろいろな結果があります。これに関しては Habiro-Massuyeau の survey paper があります。

2 つの方向があります。ここでの一般化はそれとは transverse な方向でしなくては行けない。 $\mathcal{H}_g$ とか $\mathbb{G}_{\mathbb{Q}}$ というのは非常に難しいので Lie version を考えます。まず $\mathcal{H}_g$ の方の対応する Lie 代数は

$$\mathfrak{h}_{g,1} = \text{Der}_{\omega_0} \text{FreeLie}\langle x_1, \dots, x_g, y_1, \dots, y_g \rangle$$

homology H の生成する Free Lie 代数の symplectic derivation 全体です。

絶対 Galois 群の方は motivic Lie algebra というものがあります。それはまずは $\mathbb{Q}$ 上定義される

$$\text{FreeLie}\langle \sigma_3, \sigma_5, \sigma_7, \dots \rangle.$$

この間に関係を付ける。最終目標から言えばまだ第一歩にもなりませんが、まず解決しなくては行けないと

ころがあります。数論的に言うと、 $(0,3)$ というのがあって

$$\text{FreeLie}\langle\sigma_3, \sigma_5, \sigma_7, \dots\rangle \rightarrow \text{DerFreeLie}\langle x, y\rangle$$

という写像が存在します。これは genus 1 のようにも見えますが、genus 0 の 3-puncture と思った方がよいです。これは単に derivation 全体。ここに伊原先生の仕事で special derivation と呼ばれる subalgebra があって、そもそもこの写像が injective かというのが大問題でした。injective だろうというのが Ihara-Deligne 予想です。（しかし、最近 (2010) の F. Brown の大きな仕事で、このことはついに証明されたようです、勉強が追いついていませんが。）それでですね、genus $g = 0$ で $n = 3$ の世界。

motivic Lie algebra でこれは Hain-Matsumoto の仕事で

$$\text{FreeLie}\langle\sigma_3, \sigma_5, \sigma_7, \dots\rangle \rightarrow \mathfrak{h}_{1,1}$$

という写像が（ある任意性はあるものの）構成されました。これが injective かというのも問題でしたが、上記 Brown の結果により、解決したのかも知れません。これは punctured torus, $g = 1$ で $n = 1$. これは両方とも基本群は rank 2 の自由群、 $\mathfrak{h}_{1,1}$ と special derivation との関係は簡単ではないようです。

元々 Hain の学生で Pollack という若い人がいて、いま Princeton 大学で仕事をしています。 σ_k の像の特定、これも大問題です。 σ_3 は具体的に Hain が書いていて σ_5 をやったのが Pollack の仕事です。我々もトポロジーの立場から、これらの結果の追試（と別証明）がうまくできて、さらにその次の特定を丁度やっていますが、それが一般にどうなるか、重要な問題と思われます。

これより前に、motivic Lie algebra から $\mathfrak{h}_{g,1}$ ($g \geq 2$) へ次のような写像が（やはりある任意性はあるものの）あることが

$$\text{FreeLie}\langle\sigma_3, \sigma_5, \sigma_7, \dots\rangle \rightarrow \mathfrak{h}_{g,1}$$

元々は Grothendieck. 伊原先生の仕事を基に、織田さんの予想があり、それが最終的に中村さん、松本さんの仕事で示されました。これが injective かどうかも大きな問題ということでした。また、ここでも σ_k の像の特定は数論、トポロジー双方にとって極めて重要な問題と思います。

特に genus を無限大に飛ばしたときの像と genus 1 の場合の像との関係、両方とも絶対 Galois 群から来ていて、比較的簡単な関係があるだろうと思っていましたが、最近研究が進んでくるとどうもそうではない事がわかってきました。そこら辺りを調べています。（我々の立場はあくまでトポロジーであって、絶対ガロア群について考えるのは、それが3次元、4次元で想定している不変量の実現のためには、避けて通れない所だと思っていますからです。）続きは次回にします。