モレー空間について

澤野嘉宏（中央大学）

概要

この講演の目的は，モレー空間に関する最近の研究を概観することである．まず，モデルケースとして，ルベーグ空間を復習する．ルベーグ空間におけるいくつかの問題を取り上げ，次のステップとしてモレー空間を導入し，モレー空間のいくつかの基本的な性質を概観する．この側面は，関数解析に関係している．ハーディ・リトルウッド最大作用素の有界性に関する基本的な結果を紹介す

る．これは，モレー空間上で作用する作用素の取り扱いに関する典型的な技術である．モレー空間が有効である理由を示すためにいくつかの例を紹介する．特に，分数積分作用素の有界性を取り上げる．基本的な事実を説明した後，いくつかの未解決の問題を紹介したい．これらの未解決の問題について，既知のことについていくつかの注意，最新の発展を述べる．本講演の教科書的なものとして，近々出版される [29] を挙げておく．

1　ルベーグ空間の復習

まず，ルベーグ可測関数 f と $1 \leq p < \infty$ に対して，

$$\|f\|_p := \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.1}$$

とする．

また，$p = \infty$ のときは，

$$\|f\|_p := \inf\{\lambda > 0 \ : \ \text{ほとんどすべての}$$

$$x \in \mathbb{R}^n \text{に対して} |f(x)| \leq \lambda\}$$

と定める．

Theorem 1.1 **(積分不等式).** 次の不等式が成り立つ．

1. (三角不等式) $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$, $f, g \in L^p$, $1 \leq p \leq \infty$ が成り立つ．
2. (ヘルダー(Hölder)の不等式) $0 < p, q, r \leq \infty$, $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}$ とするとき，$f \in L^p$ と $g \in L^q$ に対して，$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$ が成り立つ．

3. (ミンコフスキーの不等式) $1 \leq p \leq \infty$ とするとき，$f, g \in L^p$ に対して，$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ が成り立つ．
4. (ヤング(Young)の不等式) $1 \leq p, q, r \leq \infty$, $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$ とするとき，$f \in L^p$ と $g \in L^q$ に対して，$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$ が成り立つ．
5. (チェビシェフ(Chebyshev)の不等式) $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\lambda > 0$ とするとき，$\lambda |\{|f| > \lambda\}| \leq \|f\|_1$ が成り立つ．

Theorem 1.2. $1 \leq p \leq \infty$ とするとき，$L^p(\mathbb{R}^n)$ 内の任意のコーシー列は収束する．

Theorem 1.3. $1 \le p \le \infty$とする．

1. $p' = \frac{p}{p-1}$とすると，可測関数fに対して，$\|f\|_p = \sup\{\|f \cdot g\|_1 : \|g\|_{p'} \le 1\}$が成り立つ．したがって，$g \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ならば，

$$L_g : f \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

は連続線形関数である．

2. $p < \infty$のとき，$L^p(\mathbb{R}^n)$における連続線形汎関数はこの形にかける．

2　モレー空間の導入

モレー空間はチャールズ・モレーによって導入された．彼は1938年に，2階楕円型偏微分方程式の解の局所的な挙動を調べるために，関数の差の評価を考察した[16]．ここで得られた技術は，特に調和解析，ポテンシャル論，偏微分方程式，および数理物理学など，数学の多くの分野で非常に有用である．1980年代と1990年代には，モレー空間や関連する関数空間における古典的演算子の有界性に関する多くの結果が得られた．一方，21

世紀の初め頃には，この分野で新たな活発な展開があった．それらは多くの場合において，必要十分条件が得られた．数学の問題を考えるとき，関数それ自体を扱うことができるだけでは十分ではない．

1938年にC. Morreyは，関数解析に関する以下の事実を観察し，それを偏微分方程式に応用した．[16] $p > n$ とする．もし，

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n,\, r>0} \frac{\|f\|_{L^1(B(x,r))} + \|\nabla f\|_{L^1(B(x,r))}}{|B(x,r)|^{1-\frac{1}{p}}} < \infty$$

であれば，$f \in \mathrm{Lip}^{1-n/p}(\mathbb{R}^n)$ となる．彼の主な主張は $\|f\|_p + \|\nabla f\|_p < \infty$ と仮定する必要はないということである．ここで，$B(x,r)$ は中心 $x \in \mathbb{R}^n$ と半径 $r > 0$ の開球を表す．

この観察に基づき，[24] においてPeetre は空間 $\mathcal{L}^q_\lambda$ を定義した．ここで $1 \le q < \infty$ かつ $0 < \lambda < n$ とする．ノルム

$$\|f\|_{\mathcal{L}^q_\lambda} := \sup_{x \in \mathbb{R}^n,\, r>0} \left(\frac{1}{r^\lambda} \int_{B(x,r)} |f(y)|^q \mathrm{d}y \right)^{\frac{1}{q}}$$

を与え，モレー空間 $\mathcal{L}^q_\lambda(\mathbb{R}^n)$ は，ノルム $\|f\|_{\mathcal{L}^q_\lambda}$ が有限であるすべての $L^q(\mathbb{R}^n)$-局所可積分関数 f の集合である．

3　モレーノルム

表記を変更して，次のノルムを考える．

定義 1. $1 \leq q \leq p < \infty$ とする．$L^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$-関数 f のモレーノルムは

$$\|f\|_{\mathcal{M}^p_q} = \|f\|_{\mathcal{M}^p_q(\mathrm{ball})} := \sup_{(x,r)\in\mathbb{R}^{n+1}_+} |B(x,r)|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|f\|_{L^q(B(x,r))}$$

として定義される．モレー空間 $\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ は，ノルム $\|f\|_{\mathcal{M}^p_q}$ が有限であるすべての $L^q(\mathbb{R}^n)$-局所可積分関数 f の集合である．

この定義において球を立方体に置き換えることができる．

$$\|f\|_{\mathcal{M}^p_q(\mathrm{cube})} := \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, r>0} |Q(x,r)|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|f\|_{L^q(Q(x,r))}$$

と定義する．ここで $Q(x,r)$ は中心 $x \in \mathbb{R}^n$ と体積 $(2r)^n$ を持つ開立方体を表す．

すると，n に依存する定数 $c = c_{n,p,q} > 0$ が存在し，すべての可測関数 f に対して，

$$c_{n,p,q}{}^{-1}\|f\|_{\mathcal{M}^p_q} \le \|f\|_{\mathcal{M}^p_q(\mathrm{cube})} \le c_{n,p,q}\|f\|_{\mathcal{M}^p_q}$$

が成り立つ．

$\|f\|_{L^p} := \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$ で与えられるルベーグノルムとの比較をしたい．すべての $1 \leq p < \infty$ に対して，$\mathcal{M}^p_p(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n)$ であり，ノルムが一致する．

実際にどのようなことに興味があるかというと次の点である．

1. 上限を入れて定義することにより，どのような違いがルベーグノルムとの対比において現れるか？
2. 新しく作ったこのモレー空間はどのような関数を含むのかもしくは含まないのか？
3. 解析学においてモレー空間を使えばどのような利点が得られるか？

注意 1. ルベーグ空間とは違い，モレー空間 $\mathcal{M}_q^{n/\alpha}(\mathbb{R}^n)$ は，$1 < q < n/\alpha$ の場合，$|x|^{-\alpha}$ を含む．

注意 2. ノルムの定義から，

$$
\begin{aligned}
\|f\|_{\mathcal{M}^p_q} &= \|f\|_{\mathcal{M}^p_q(\mathrm{ball})} \\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, r>0} |B(x,r)|^{\frac{1}{p}} \frac{\|f\|_{L^q(B(x,r))}}{|B(x,r)|^{\frac{1}{q}}}
\end{aligned}
$$

であるから，入れ子構造が見て取れる．つまり，すべての可測関数 f について，

$$
\|f\|_{\mathcal{M}^p_{q_1}} \le \|f\|_{\mathcal{M}^p_{q_0}}, \tag{3.1}
$$

ここで $1 \le q_1 \le q_0 < p$ である．

注意 3. $1 \le q < p < \infty$ とする．このとき，$\mathcal{M}^p_q \subset L^1 + L^\infty$ は成り立たない．つまり，L^1 と L^∞ の和として表現できない $\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$-関数が存在する．

単純化のために $n = 1$ とする．次のように

$$f := \sum_{j=100}^{\infty} [\log_2 \log_2 j]^{1/p} \chi_{[j!, j! + [\log_2 \log_2 j]^{-1}]}. \tag{3.2}$$

と定義する．この関数は確かにL^1 と L^∞ の和として表現できない．

注意 4．さきほどの関数について

$$\|f(\cdot + y) - f\|_{\mathcal{M}^p_q} \geq 1$$

であり，この例から，$\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ はモンスターのような関数を含むことがわかる！[8]
小川，勝呂両氏の研究も参考のこと．

注意 **5.** $1 \le q < p < \infty$ とする．このとき $\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ は反射的ではない．$b_j = \log_2 \log_2 j$, $Q_j = [j!\kappa, j!\kappa + [b_j]^{-1}]^n$, $j \ge 100$ として，

$$U(\{a_k\}_{k=1}^\infty) = \sum_{j=100}^\infty a_{j-99}[b_j]^{c(p,q)}\chi_{Q_j}.$$

と定める．$c(p,q)$ と κ は p,q に依存する．写像 $U : \ell^\infty \to \mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ は $\|Ux\|_{\mathcal{M}^p_q} = \|x\|_{\ell^\infty}$ を満たす．これにより，$\ell^\infty(\mathbb{N})$ が $\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ に埋め込まれ，いくつかの性質が遺伝することがわかる．

注意 6. 上述の埋め込み $\mathcal{M}^p_{q_0}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{M}^p_{q_1}(\mathbb{R}^n)$, $1 \le q_1 \le q_0 < p < \infty$ にも関わらず，この埋め込みは稠密ではない．これは有限測度ルベーグ空間同士の埋め込みとは大きく違う点である．[27]

4　関連した話題

いくつかの関連する空間やノルムを考えることができる． $1 \le q \le p < \infty$ とする．

例 1.

$$
\begin{aligned}
&\|f\|_{\mathcal{M}^p_q(1,w)} \\
&:= \sup_{(x,r)\in\mathbb{R}^{n+1}_+} |B(x,r)|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|f w^{\frac{1}{q}}\|_{L^q(B(x,r))}
\end{aligned}
$$

で定義されるノルムは， Samko 型の加重モレーノルムと呼ばれる．

例 2.

$$\|f\|_{\mathcal{M}^p_q(w,w)} := \sup_{(x,r)\in\mathbb{R}^{n+1}_+} w(B(x,r))^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|fw^{\frac{1}{q}}\|_{L^q(B(x,r))}$$

で定義されるノルムは，小森-白井型のモレーノルムという．

例 3. さらに，$L^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$-関数 f の局所モレーノルムは

$$\|f\|_{\mathrm{L}\mathcal{M}^p_q} := \sup_{r>0} |B(0,r)|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|f\|_{L^q(B(0,r))}$$

として定義される．

5　フラクタル構造を有する特別な集合とモレー空間

これまでのところ，$q_1 < q_2 \le p$ の場合に $\mathcal{M}^p_{q_1}(\mathbb{R}^n) \supset \mathcal{M}^p_{q_2}(\mathbb{R}^n) \supsetneq L^p(\mathbb{R}^n) = \mathcal{M}^p_p(\mathbb{R}^n)$ であることを証明した．したがって，最初の包含が厳密であるかどうかを一考することは有意義である．実際に，$p > u > q > 1$ のとき集合 E を構成して $\chi_E \in \mathcal{M}^p_u \setminus \mathcal{M}^p_q$ となるようにすることができる．[36]

$p>q>1$ かつ $R>1$ とする．

$$(R+1)^{-\frac{1}{p}} = 2^{\frac{1}{q}}(1+R)^{-\frac{1}{q}}. \tag{5.1}$$

を仮定する．ベクトル $\varepsilon \in \{0,1\}^n$ に対して，アフィン変換 T_ε を

$$T_\varepsilon(x) := \frac{1}{R+1}x + \frac{R}{R+1}\varepsilon \quad (x \in \mathbb{R}^n). \tag{5.2}$$

と定義する．$E_0 := [0,1]^n$ とする．
$E_0, E_1, E_2, \ldots, E_j$ を定義したと仮定する．

E_{j+1} を

$$E_{j+1} := \bigcup_{\varepsilon \in \{0,1\}^n} T_\varepsilon(E_j), \quad E_{j,0} := [0, (1+R)^{-j}]^n \tag{5.3}$$

と定義する．

すると

$$
\begin{aligned}
\|\chi_{E_j}\|_{\mathcal{M}^p_q} &\sim (1+R)^{-jn/p} \\
&= \|\chi_{E_{j,0}}\|_{\mathcal{M}^p_q} \\
&= \|\chi_{E_{j,0}}\|_p \\
&= \|\chi_{E_j}\|_q
\end{aligned}
$$

が成り立つ．ここで $\sim$ の中の定数は j に依存しないが，p と q に依存する．

6　モレー空間における近似問題

どのような線形空間でモレー空間の関数をモレー空間の位相で近似できるかについて考えるために，以下のような線形部分空間を考える．

(1) 線形部分空間 $U(\mathbb{R}^n) \subset L^0(\mathbb{R}^n)$ は，もし $f \in U$ かつ $|g| \le |f|$ の場合に $g \in U$ となるならば，lattice 性 (lattice property) を持つという．

(2) $U(\mathbb{R}^n) \subset L^0(\mathbb{R}^n)$ が lattice 性を持つ線形空間とする．$0 < q \le p < \infty$ に対して，$U\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n) := \overline{U(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)}^{\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)}$ と定義する．

この中でも以下の空間が重要である．[8]

(1) 場合 $U(\mathbb{R}^n) = L^\infty(\mathbb{R}^n)$： バー部分空間 $\overline{\mathcal{M}}{}^p_q(\mathbb{R}^n)$ は $L^\infty(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ の $\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ における閉包である．

(2) 場合 $U(\mathbb{R}^n) = L^0_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^n) := \{f \in L^0(\mathbb{R}^n) : \operatorname{supp}(f)$ がコンパクト$\}$： スター部分空間 $\overset{*}{\mathcal{M}}{}^p_q(\mathbb{R}^n)$ は，$L^0_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ の $\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ における閉包を表す．

(3) 場合 $U(\mathbb{R}^n) = L^\infty_{\rm c}(\mathbb{R}^n) = L^\infty(\mathbb{R}^n) \cap L^0_{\rm c}(\mathbb{R}^n)$：ティルド部分空間 $\widetilde{\mathcal{M}^p_q}(\mathbb{R}^n)$ は，$L^\infty_{\rm c}(\mathbb{R}^n) = L^\infty_{\rm c}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ の $\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$-閉包を表す．

(4) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を可測集合とする．$U(\mathbb{R}^n) = L^0(\Omega)$ は $L^0(\mathbb{R}^n)$ の部分集合として定義し，Ω の外側でほとんどいたるところ所消える可測関数全体から成る．すると，任意の $f \in \mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ に対して，Ω の外側でほとんどいたるところ所消えるすべての f の閉部分空間 $\mathcal{M}^p_q(\Omega)$ を得る．

$p=q$の場合を除いて得られた空間が元の空間と一致しないことが重要でモレー空間の記述する性質の多様性を表している．

そのほか，$e^{t\Delta}f\to f$が$\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$において成立するようなもの全体を集めた$\overset{\diamond}{\mathcal{M}}{}^p_q(\mathbb{R}^n)$ という閉部分空間があり，偏微分方程式との関連が注目されている．逆に言うと，閉部分空間を考えないといけないということであり，$\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$において，熱半群との整合性は容易には得られないことがわかる．

7　モレー空間における積分作用素

ハーディー・リトルウッドの極大作用素 M を

$$Mf(x) := \sup_{Q \in \mathcal{Q}} m_Q(|f|)\chi_Q(x)$$

と定める．この作用素は $1 < p < \infty$ のとき，L^p-有界である．Chiarenza と Frasca は $1 < q \le p < \infty$ のとき，M は $\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ において有界であることを示した．

7.1 この定理の証明

Theorem 7.1. $1 < q \le p < \infty$ とする．このとき，

$$\|Mf\|_{\mathcal{M}^p_q} \lesssim_q \|f\|_{\mathcal{M}^p_q}$$

が $f \in \mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ に対して成立する．

この証明は，モレー空間上の作用素の有界性の証明の典型例となる．

Proof. 局所・大域戦略を用いる．定義から，立方体Qに対して，

$$|Q|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\left(\int_Q Mf(y)^q\,\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{q}} \lesssim \|f\|_{\mathcal{M}^p_q} \tag{7.1}$$

を示すことになる．

$f = f_1 + f_2$ と分解し，$f_1 = f$ を $5Q$ 上で，$f_2 = f$ を $5Q$ の外側で定義する．このとき，(7.1) の評価を

$$|Q|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \left(\int_Q Mf_1(y)^q \, \mathrm{d}y \right)^{\frac{1}{q}} \lesssim \|f\|_{\mathcal{M}^p_q}, \quad (7.2)$$

および

$$|Q|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \left(\int_Q Mf_2(y)^q \, \mathrm{d}y \right)^{\frac{1}{q}} \lesssim \|f\|_{\mathcal{M}^p_q}. \quad (7.3)$$

と分解する．

M が $L^q(\mathbb{R}^n)$ で有界であることから，積分領域を拡張し，$L^p(\mathbb{R}^n)$ の有界性を利用すると，

$$\begin{aligned}
&\left(\int_Q Mf_1(y)^q \, \mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} Mf_1(y)^q \, \mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\lesssim \left(\int_{5Q} |f(y)|^q \, \mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

が得られる．

モレーノルムの定義より，

$$
\begin{aligned}
&|Q|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \left(\int_Q Mf_1(y)^q \, \mathrm{d}y \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\lesssim |5Q|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \left(\int_{5Q} |f(y)|^q \, \mathrm{d}y \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\le \|f\|_{\mathcal{M}^p_q}.
\end{aligned}
$$

したがって，(7.2) が証明された．

次に (7.3) を証明する．幾何学的考察により，

$$\sup_{y \in Q} Mf_2(y) \leq \sup_{R \supset Q} m_R(|f|)$$

だから

$$\begin{aligned}
&|Q|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \left(\int_Q Mf_2(y)^q \, \mathrm{d}y \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\lesssim |Q|^{\frac{1}{p}} \sup_{R \supset Q} m_R(|f|) \leq \sup_{R \supset Q} |R|^{\frac{1}{p}} m_R(|f|)
\end{aligned}$$

となる．

また，$\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{M}^p_1(\mathbb{R}^n)$ であることを考慮すると，

$$
\begin{aligned}
&|Q|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \left(\int_Q Mf_2(y)^q \,\mathrm{d}y \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\lesssim \sup_{R \in \mathcal{Q}} |R|^{\frac{1}{p}-1} \int_R |f(y)| \,\mathrm{d}y \\
&= \|f\|_{\mathcal{M}^p_1} \le \|f\|_{\mathcal{M}^p_q}.
\end{aligned}
$$

したがって，(7.3) も証明された． □

7.2　ほかの作用素

似ている作用素であるが，リース変換という作用素があり，定義は以下のとおりである．

$j=1,2,\ldots,n$ とする． このとき，リース変換と呼ばれる線形作用素は $x \in \mathbb{R}^n$ に対して，

$$R_j f(x) \equiv \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x,\varepsilon)} \frac{x_j - y_j}{|x-y|^{n+1}} f(y)\,\mathrm{d}y$$

は，もともと $f \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ に対して定義できるが， $L^2(\mathbb{R}^n)$ の有界作用素に拡張される．

積分核$K(y) = \frac{y_j}{|y|^{n+1}}$は扱いが難しいが，$y_j$にはプラスマイナスが潜んでいるためにこれを有効利用して作用素の有界性を得ることが重要である．

ただし，この積分作用素は0付近も∞付近も特異性が高い作用素である．したがって，モレー空間においてどのようにしてリース変換を定めるかは考えなくてはならない．実際に，$f \in \mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$, $1 < q \le p < \infty$ならば，$R_j f(x)$を定義している極限値はほとんどすべてのxに対して存在することが示せるのでそれを使う方法が一案である．実際にそれは可能であるが，これ以外にもある意味機械的に示すことができることが近年知られている．Rosethal と Triebel の論文 [25] などを参照のこと．

8　一般論はないのか？

一連の作用素の有界性を示すにあたり，空間にどのような性質を要求するのがよいか，そもそも何を用いて記述すれば一目瞭然なのかは重要な問題で，一つの基準として，Rutsky の有界性定理を紹介したい．新しい用語の導入は極力避ける．

$1 < q \leq p < \infty$ とする．関数 A がブロックであるとは，A の台がある立方体 Q に含まれていて，$\|A\|_{L^{q'}} \leq |Q|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$ が成り立つことである．
$\mathcal{H}^{p'}_{q'}(\mathbb{R}^n)$ とは，このようなブロックを係数が $\ell^1(\mathbb{N})$ に属する無限列の線形結合として表示して得られる空間である．

このとき，薮田，佐藤，和泉の論文 [12] のアイデアを使い等式

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{H}^{p'}_{q'}(\mathbb{R}^n) \\
&= \bigcap_{g \in \mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)} \{f \in L^{q'}(\mathbb{R}^n) \,:\, f \cdot g \in L^1(\mathbb{R}^n)\}
\end{aligned}
$$

を得ることができた．この結果は田中氏との論文 [38] に載っている．

また，Zorko[40] により，$\mathcal{H}^{p'}_{q'}(\mathbb{R}^n)$ の双対は $\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ に等しいことが示された．Rutsky の結果 [26] によると，M の $\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ と $\mathcal{H}^{p'}_{q'}(\mathbb{R}^n)$ の有界性があれば，多くの作用素の有界性が示されることがわかる．

9　モレー空間の効用

9.1　シャープ極大作用素

シャープ極大作用素を

$$
\begin{aligned}
M^\sharp f(x) &:= \sup_{Q \in \mathcal{Q}} \chi_Q(x) m_Q(|f - m_Q(f)|) \\
&= \sup_{Q \in \mathcal{Q}} \frac{\chi_Q(x)}{|Q|} \int_Q |f(y) - m_Q(f)| \mathrm{d}y.
\end{aligned}
$$

と定義する．

FeffermanとStein[4]は以下の式を示した．
$1 < p < \infty$ とする．$\min(Mf, 1) \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ならば，任意の可測関数 f について，

$$\|f\|_p \leq C_p \|M^\sharp f\|_p \tag{9.1}$$

が成り立つ．ここで，C_p は p に依存する．

不等式において

$$\|f\|_p \leq C_p \|M^\sharp f\|_p,$$

において仮定 $\min(Mf, 1) \in L^p(\mathbb{R}^n)$ は $f := 1$ の場合を排除しようとしている．定義を考えると

$$M^\sharp f(x) = \sup_{x \in \mathcal{Q}} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y) - m_Q(f)| \mathrm{d}y = 0$$

なので，これは必要である．

この種の仮定を排除したかったため，田中と澤野は[33]はノルム同値

$$\|f\|_p \leq C_p(\|M^\sharp f\|_p + \|f\|_{\mathcal{M}_1^p}) \quad (1 < p < \infty)$$

を得た．特筆すべきはこれはすべての可測関数 f に対して成り立つことである．

9.2 Olsenの不等式

Olsenの不等式を考察するために，Adams [1]によるHardy–Littlewood–Sobolevの不等式について説明したい．

$$I_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} \mathrm{d}y.$$

について次の不等式が成り立つ．

$1 < q \le p < \dfrac{n}{\alpha}$ とする．パラメータ s と t が

$$1 < t \le s < \infty, \qquad \frac{1}{s} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}, \qquad \frac{t}{s} = \frac{q}{p} \tag{9.2}$$

を満たすとする．このとき，任意の正値関数 $f \in \mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ について

$$\|I_\alpha f\|_{\mathcal{M}^s_t} \le C\|f\|_{\mathcal{M}^p_q} \tag{9.3}$$

が成り立つ．

飯田，澤野，菅野，田中は[36, 12]において次の不等式を得た．$0 < \alpha < n$, $1 < p \le p_0 < \infty$, $1 < q \le q_0 < \infty$ かつ $1 < r \le r_0 < \infty$ とする．ここで $q > r$, $\frac{1}{p_0} > \frac{\alpha}{n}$, $\frac{1}{q_0} \le \frac{\alpha}{n}$ かつ $\frac{1}{r_0} = \frac{1}{q_0} + \frac{1}{p_0} - \frac{\alpha}{n}$, $\frac{r}{r_0} = \frac{p}{p_0}$ とする．このとき，f と g に依存しない定数 C が存在して

$$\|g \cdot I_\alpha f\|_{\mathcal{M}^{r_0}_r} \le C\|g\|_{\mathcal{M}^{q_0}_q} \cdot \|f\|_{\mathcal{M}^{p_0}_p}$$

が成り立つ．

この方向のさらなる発展例としては，波多野，飯田，小林の文献 [9, 11] を参照のこと．ここで大事なことはヘルダーの不等式を直接用いてもこの定理が得られないことである．このいきさつについては，澤野，菅野，田中の文献 [35] を参考のこと．

10　ノルム同値について

関数空間を定義する際に注意することはほかの空間と一致することはないかを確認することである．$1 < q \leq p < \infty$ とし，$0 < \theta < \frac{q}{p}$ とする．このとき，すべての 可測関数 f に対して，チアレンザとフラスカは

$$\|f\|_{\mathcal{M}^p_q} \sim \sup_{Q \in \mathcal{Q}} |Q|^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|f\|_{L^q(M^{(\frac{1}{1-\theta})}\chi_Q)}$$

が成り立つことを示した．[3]

また，$1 < q < p < \infty$ のとき，$\mathrm{L}\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ はヘルツ空間と同値であることが知られている．ファイヒチンガーの結果 [5] によると，ヘルツ空間の定義はさておき，この事実は

$$\|f\|_{\mathrm{L}\mathcal{M}^p_q} = \sup_{r>0} |B(0,r)|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|f\|_{L^q(B(0,2r)\setminus B(0,r))}$$

と定量化される．

11　その他の方向の発展

11.1　導関数の積分可能性と連続性

冒頭に述べたように，モレー空間は導関数の積分可能性と連続性について述べたものであるが，この方向には非常に大きな発展がこの２０年であった．例えば，Yang, Yuan の論文 [39] を参考のこと．上述の通り，$\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ において，熱半群との整合性は容易には得られないが，ベゾフモレーではその整合性は自動的に得られる．これはベゾフモレーを考える顕著な利点といえる．

11.2　一般化された設定について

一般化された設定についてはいろいろと考えられているが，その結果不可能とされていたことが可能になったり，精密な結果を得ることができた．

1. $\sup$ や $\frac{1}{p}$ や L^q ノルムの置き換え（中井，澤野，野ケ山，波多野，Hakim，田中，菅野）[17, 37, 32, 23, 28, 7] 多くの関数空間が定義されているがそれらの分類のアプローチの例としては澤野，田中，Gala [6] を参照のこと．

2. 背景となる $\mathbb{R}^n$ や dx の置き換え [31, 2, 30]

12　未解決問題

次の問題は未解決である．

1. 【モレー空間のコンパクト集合を特徴づけ】これは，コルモゴロフの定理の拡張を目指すものである．L^p においては関数の集合がそのノルムについて相対コンパクトであるとは，その集合の任意の列に収束する部分列が存在することであるが，$L^p(\Omega)$ における関数の集合 X が相対コンパクトであるためには，次の条件が必要十分である．

（a）一様有界性：集合 X 内の各関数の L^p ノルムがある定数 M より小さい.

（b）同程度連続性：

$$\lim_{a\to 0}\left(\sup_{f\in X}\|f-f(\cdot+a)\|_{L^p}\right)=0$$

（c）一様消失性：

$$\lim_{R\to\infty}\left(\sup_{f\in X}\|f-f\chi_{B(0,R)}\|_{L^p}\right)=0$$

2. 【荷重付きのモレー空間におけるハーディー・リトルウッドの極大作用素の有界性を重みの言葉で特徴づける.】これについては，中村，田中，澤野 [18, 21, 22] によりいくつかの成果が得られている．荷重がべきの場合は問題は解決している.
3. 【補間理論】定式化をさけるが，補間理論についても未知な部分が多い．例えば，実補間のアウトプットが何であるかは不明である．複素補間については，Mastylo と澤野は [15] において解決した．また，この応用については，Adams

の結果を精製するべく，本稿で紹介したAdamsの定理[1]の改良が[34]で与えられている．

4. 【フーリエ変換，フーリエ級数との関連について】上述の同値なノルムと出来の荷重付きルベーグ空間の特徴づけ [10] などを使えば，ウエーブレット変換については調べることが可能であるが，フーリエ変換，フーリエ級数についてどのようなことがわかるかについてはルベーグ空間よりはるかに少ない情報しかない．中村，澤野，波多野，野ケ山，Hakim [20, 7] などの文献があるものの，フーリエ変換，フーリエ級数についてはおそらくほとんど何もわかっていないであろう．

ご清聴ありがとうございました.

参考文献

[1] D.R. Adams, A note on Riesz potentials, Duke Math. J., **42** (1975), 765–778.

[2] Y.H. Cao and J. Zhou, Morrey spaces for nonhomogeneous metric measure spaces, Abstr. Appl. Anal. 2013, Art. ID 196459, 8 pp.

[3] F. Chiarenza and M. Frasca, Morrey spaces and Hardy–Littlewood maximal function, Rend. Mat., **7** (1987), 273–279.

[4] C. Fefferman and E. Stein, H^p spaces of several variables, Acta Math. **129** (1972), 137–193.

[5] H. Feichtinger, An elementary approach to Wiener's third Tauberian theorem on Euclidean n-space, In: Proceedings of Conference at Cortona 1984, Symposia Mathematica, **29** (1987), 267–301, Academic Press, New York.

[6] S. Gala, Y. Sawano and H. Tanaka, A remark on two generalized Orlicz–Morrey

spaces, J. Approx. Theory **198** (2015), 1–9.

[7] Hatano, N., Nogayama, T., Sawano, Y., and Hakim, D. I. (2018). Bourgain–Morrey spaces and their applications to boundedness of operators. Journal of Functional Analysis, 284(1), 225–251.

[8] D.I. Hakim and Y. Sawano, Calderón's First and Second Complex Interpolations of Closed Subspaces of Morrey Spaces, J Fourier Anal Appl **23**, 1195–1226 (2017).

https://doi.org/10.1007/s00041-016-9503-9
[9] N. Hatano, Bilinear estimates on Morrey spaces by using average, Anal. Math. **46** (2020), no. 2, 283–291.
[10] M. Izuki, The Characterizations of Weighted Sobolev Spaces by Wavelets and Scaling Functions. Taiwanese Journal of Mathematics **13**, no. 2A (April 2009): 467–492.
[11] T. Iida, Various inequalities related to the

Adams inequality on weighted Morrey spaces, Math. Inequal. Appl. **20** (2017), no. 3, 601–650.
[12] T. Iida, Y. Sawano and H. Tanaka, Atomic Decomposition for Morrey Spaces, Z. Anal. Anwend. **33** (2014), no. 2, 149–170.
[13] T. Izumi, E. Sato and K. Yabuta, Remarks on a subspace of Morrey spaces, Tokyo J. Math. **37** (2014), no. 1, 185–197.
[14] Y. Komori and S. Shirai, Weighted Morrey spaces and a singular integral operator,

Math. Nachr. **282** (2009), no. 2, 219–231.
[15] M. Mastyło and Y. Sawano, Applications of interpolation methods and Morrey spaces to elliptic PDEs (Interpolation methods and Morrey spaces), Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5) Vol. XXI, (2020), 999–1021.
[16] C.B. Morrey, Jr., On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations. Trans. Amer. Math. Soc. **43**

(1938), no. 1, 126–166.
[17] E. Nakai, Hardy–Littlewood maximal operator, singular integral operators and the Riesz potentials on generalized Morrey spaces, Math. Nachr. **166** (1994), 95–103.
[18] S. Nakamura, Generalized weighted Morrey spaces and classical operators. Math. Nachr. **289** (2016), no. 17-18, 2235–2262.
[19] S. Nakamura, T. Noi and Y. Sawano. Generalized Morrey spaces and trace

operator, Science China Mathematics, **59** (2016), no. 2, 281–336.

[20] S. Nakamura and Y. Sawano, New function spaces related to Morrey spaces and Fourier transform, Banach J. Math. Anal., **12** (2018), no. 1, 1-–30.

[21] S. Nakamura, Y. Sawano and H. Tanaka, The fractional operators on weighted Morrey spaces, J. Geom. Anal. **28** (2018), no. 2, 1502–1524.

[22] S. Nakamura, Y. Sawano and H. Tanaka,

Weighted local Morrey spaces, Annal. Acad. Sci. Fen. Math., **45** (2020), 67–93.

[23] T. Nogayama, Mixed Morrey spaces, Positivity, **23**(1), 961–1000.

[24] J. Peetre, On the theory of $\mathcal{L}_{p,\lambda}$, J. Funct. Anal. **4** (1969), 71–87.

[25] M. Rosenthal and H. Triebel, Calderon–Zygmund operators in Morrey spaces, Rev. Mat. Complut. **27** (2014), no. 1, 1–11.

[26] D. V. Rutsky, A_1-regularity and

boundedness of Riesz transforms in Banach lattices of measurable functions, (Russian) *Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov.* (*POMI*), **447** (2016), 113–122. Translation in *J. Math. Sci.* (*N.Y.*).

[27] Y. Sawano, A non-dense subspace in $\mathcal{M}^p_q$ with $1 < q < p < \infty$, Trans. A. Razmadze Math. Inst. **171** (2017), no. 3, 379–380.

[28] Y. Sawano, A thought on generalized Morrey spaces, J. Indones. Math. Soc. 25,

No. 3 (2019), 210–281.

[29] Y. Sawano, G. Di Fazio and D. I. Hakim, Morrey Spaces. Vol. I. Introduction and applications to integral operators and PDE's, Monographs and Research Notes in Mathematics, CRC Press, Boca Raton, FL (2020), 479 pp. ISBN: 978-1-4987-6551-0; 978-0-429-08592-5.

[30] Y. Sawano and T. Shimomura, Sobolev embeddings for Riesz potentials of functions in non-doubling Morrey spaces

of variable exponents, Collect. Math. **64** (2013), no. 3, 313–350.

[31] Y. Sawano and H. Tanaka, Morrey spaces for non-doubling measures, Acta Math. Sinica, **21** (2005), no. 6, 1535–1544.

[32] Y. Sawano and H. Wadade, On the Gagliardo-Nirenberg type inequality in the critical Sobolev-Morrey space, J. Fourier Anal. Appl. **19** (2013), no. 1, 20–47.

[33] Y. Sawano and H. Tanaka, Sharp maximal inequalities and commutators on Morrey

spaces with non-doubling measures, Taiwanese J. Math. **11** (2007), no. 4, 1091–1112.

[34] Y. Sawano and S. Sugano, Complex interpolation and the Adams theorem, Potential Anal. **54**, no. 2 (2021), 299-–305.

[35] Y. Sawano, S. Sugano and H. Tanaka, A note on generalized fractional integral operators on generalized Morrey spaces, Bound. Value Probl. 2009, Art. ID

835865, 18 pp.

[36] Y. Sawano, S. Sugano and H. Tanaka, Generalized fractional integral operators and fractional maximal operators in the framework of Morrey spaces, Trans. Amer. Math. Soc., **363** (2011), no. 12, 6481–6503

[37] Y. Sawano, S. Sugano and H. Tanaka, Orlicz–Morrey spaces and fractional operators, Potential Anal., **36**, No. 4 (2012), 517–556.

[38] Y. Sawano and H. Tanaka. The Fatou property of block spaces, J. Math. Sci. Univ. Tokyo. **22** (2015), 663–683.

.

[39] D. Yang and W. Yuan, A new class of function spaces connecting Triebel-Lizorkin spaces and Q spaces, J. Funct. Anal. **255** (2008), 2760–2809.

[40] C.T. Zorko, Morrey space, Proc. Amer. Math. Soc. **98** (1986), 586–592.