序 文

本書の主要な目的は，関数空間の中でもベゾフ空間やトリーベル-リゾルキン空間などを初歩から解説し，またそれを偏微分方程式へ応用することである．

関数空間とは一般に，ある集合 X 上の関数全体のなす線形空間の部分線形空間をさす．本書では X はユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ であることが多いが，本書の終盤では $\mathbb{R}^n$ の開集合になることもある．たとえば，$X = \mathbb{R}^n$ 上の関数全体のなす線形空間は関数空間の例であるが，それでは非常に条件が漠然としており，イメージがつきにくいかもしれない．より典型的な例としては，その線形部分空間のうちボレル可測なもの，特に連続なもののなす線形部分空間がある．あるいは，有界連続関数のなす線形空間 $\mathrm{BC}(\mathbb{R}^n)$ は位相空間論などで学習した読者も多いであろう．$\mathrm{BC}(\mathbb{R}^n)$ と同じように関数のなんらかの性質を反映している線形空間を本書で取り扱うと考えるとよい．積分論に強い読者は可積分関数，可測関数全体のなす線形空間を含む新しい枠組みをこれから学習すると考えればよいだろう．

連続な関数，可測な関数といってもいろいろあり，それらのなす線形空間の部分空間も信じられないほどに多種多様である．本書の一つの目的は，これらの関数空間の体系的な分類をベゾフ空間やトリーベル-リゾルキン空間という枠組みを通じて提唱し，その性質を詳論することである．

高校数学，大学初年度の解析学では何回でも微分することができる関数を中心に扱っているために，関数の性質の細かい分類に意味があるのかわからない読者も多いだろうが，たとえば，微分不可能な関数が自然法則を記述している例も数多く存在する．

例としてブラウン運動を考えよう．これは化学の時間に，複雑な動きをする粒子の運動として習った読者も多いであろう．ここでは，その運動を動機として生まれ，数学の道具へと進化していった「数学的なブラウン運動」を考えることにする．この数学的なブラウン運動は後に伊藤清によって創出された確率

積分の基礎となる概念で，このことからもわかるように経済学などで重要な役割を果たしている．化学の時間に習ったブラウン運動と同様に数学的なブラウン運動も複雑な動きをする．すなわち，数学的なブラウン運動の一つ一つの経路は連続ではあるものの，非常に複雑で微分ができない．このような微分ができない連続関数がどの程度までよい性質をもつかを記述する際に，ベゾフ空間やトリーベル-リゾルキン空間が有用である．このように，複雑性を記述する道具として，ベゾフ空間やトリーベル-リゾルキン空間は非常に重要な役割を果たす．

本書のもう一つの目的は，これらの関数空間を偏微分方程式へと応用することである．

偏微分方程式においては，C^k-級の関数空間(つまり k 回までの偏微分ができてこれらの偏導関数がすべて連続であるという関数空間)の枠組みを越えて解の性質を考察することが重要な場合もある．たとえば，楕円型微分方程式のアプリオリ評価を考察するときは C^2-空間ではなく，ヘルダー-ジグムント空間 $\mathcal{C}^{2+\varepsilon}$ $(\varepsilon \in (0,1))$ を使う．本書で後述するとおり，ベゾフ空間やトリーベル-リゾルキン空間はこれらの関数空間を特殊な場合として再現できるので，偏微分方程式に対しても有用であることが窺える．偏微分方程式論は非常に広範な数学の分野なので，本書ではその全体を見渡すことはできないが，波動方程式，シュレーディンガー方程式，熱方程式，楕円型微分方程式へのいくつかの応用を示す．

偏微分方程式への応用には，若干の関数解析の知識を必要とするが，細かい知識はそこまで必要でないので，本文で述べる関数解析の知識を把握すれば十分に理解できるはずである．

ベゾフ空間，トリーベル-リゾルキン空間は複雑な関数空間で多くの数学者に敬遠される．この理由をここで考察したい．関数空間には先ほども述べたように多種多様なものがある．名前だけを簡単に挙げてみても，L^p-空間，ソボレフ空間，モレー空間，オーリッツ空間，ベゾフ空間，トリーベル-リゾルキン空間などがある．それらのなかで，その空間を簡単に定義できるかということと，それに属する関数の種々の性質を記述できるかということは，いわば反比例の関係にあるかのようである．最初にあげた L^p-空間，ソボレフ空間，モレー空間，オーリッツ空間は簡単な記述ができる分，微分可能性，可積分性を記述し

きれない側面がある．その一方で，ベゾフ空間やトリーベル-リゾルキン空間は微分可能性，可積分性の記述に長けている分，定義は複雑である．たとえばモレー空間とベゾフ空間を混ぜたベゾフ-モレー空間なるものがあるが，いろいろな性質を記述できる分，定義は相当に複雑であることが想像できるであろう．このように，記述ができることの代償としての定義の複雑さが，ベゾフ空間やトリーベル-リゾルキン空間を難しく感じさせる要因ではないだろうか．

しかし，これらの関数空間には大きな利点がいくつもあることを強調したい．はじめにすこし述べたが，多くの関数空間を一つの枠組みとして捉えることができることは重要である．たとえば，L^p-空間，BMO 空間，ソボレフ空間，ハーディー空間など偏微分方程式，調和解析などで必須の関数空間を，これらベゾフ空間，トリーベル-リゾルキン空間の枠組みで包括的に捉えることができる．また，ベゾフ空間，トリーベル-リゾルキン空間はよい性質を多く有する．それぞれの性質に言及するのはここでは避けることにするが，第 5 章で述べるアトム分解はきわめて重要な性質である．アトム分解ができるとさらにそこから多くのことがわかる．

本書の構成を簡単に記述しておく．ベゾフ空間，トリーベル-リゾルキン空間は，定義の複雑さゆえ，理論を述べるのに非常に多くの準備を必要とする．しかしながら，ベゾフ空間 B^s_{pq} $(1 \le p, q \le \infty,\ s \in \mathbb{R})$ に限っていえば，$\mathcal{S}, \mathcal{S}'$ などの概念を必要としているものの，そこまで複雑な道具がなくても定義をしたり，性質を調べることができる．そこで，第 1 章では概観を目的として，ベゾフ空間 B^s_{pq} $(1 \le p, q \le \infty,\ s \in \mathbb{R})$ の性質を調べる．フーリエ解析の用語，積分論における不等式などはここではほとんど記述せず，初めて登場したところで後ろの章のどこに説明があるのかを明記するにとどめる．第 2 章では実解析，フーリエ解析の基本となるフーリエ変換，極大作用素，特異積分作用素に関して説明する．特異積分作用素の理論は非常に広範で，膨大な量の研究があるので，ほんのごく一部を紹介するにとどめるが，この第 2 章を読めば実解析の入門にもなると筆者は考えている．第 3 章では，本書の目的であるベゾフ空間，トリーベル-リゾルキン空間を定義する．第 2 章で整備した理論を元に，稠密性，完備性などを調べていく．第 4 章では，パラメータを調節することでこれらの空間が具体的な関数空間と一致することを示す．第 5 章では，関数の分解

法を調べて，各種の作用素の有界性を示す．第 6 章では，偏微分方程式への応用を述べる．

本書の軸となる定理は，定理 2.2.15 とそれを用いて示される定理 2.2.38，定理 3.3.6 とそれを用いて示される定理 5.1.6 である．数学では何事においても定義が最も重要なことは言うまでもない．しかし，これらの定理は繰り返し使うので，暗記とまではいかなくても自然と出てくるようにしておかないと，ほかの定理の証明がおぼつかなくなる．

本書を書くにあたって，徳島大学名誉教授の伊東由文氏には本の体裁，用語などに関して非常に有用なアドバイスをいただいた．また，神戸薬科大学非常勤講師の尾形尚子氏には前半部分で議論が不明確であった部分を指摘していただいた．大阪大学の冨田直人氏には擬微分作用素の箇所に関して有益な指摘をいただいた．平安女学院高校の森井慶氏，北海道大学の出来光夫氏，大阪大学の筒井容平氏には後半部分の原稿を読んで有用なコメントをいただいた．京都大学の塚本真輝氏には，ホッジ分解定理（定理 6.4.20）の証明をご教示いただいた．

さらに，岡山大学の曽布川拓也氏とその研究室の斎藤秀俊氏には，実際に原稿を用いてセミナーをしていただき，数え切れないほどの間違いを見つけていただいた．赤穂まなぶ，浅井智朗，稲浜譲，落合雄介，澤田宙広，関行宏，松尾信一郎，米田剛の各氏には，私自身がこの原稿を元にして行った東京大学・儀我美一研究室のセミナーに，数年にわたり付き合っていただいた．また，京都大学の堤誉志雄氏には 2009 年に京都大学に呼んでいただき，原稿を元にして一週間のセミナーをする機会をいただけた．

以前の原稿，セミナーの内容は本書の内容より込み入った説明が多く，理解するのに多大な苦労をおかけしたと思う．このことに関してお詫びと御礼を申し上げたい．

2010 年 11 月　澤野嘉宏