拙著　ベゾフ空間文献の命題の簡略化された証明

文責　著者　澤野嘉宏

1　補題５．２．２２　報告日　２０１１年2月，6月

この補題は証明が短くなる上に，定数を正確に記述できる．

補題 1.1. $\{a_j\}_{j=1}^{\infty}$ を非負の数列とする．このとき，$\kappa > 0$ に対して

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j \left(\sum_{k=1}^{j} a_k \right)^{\kappa-1} \lesssim_{\kappa} \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j \right)^{\kappa} \tag{1}$$

が成り立つ．ただし，$0 < \kappa < 1$ のときは $0^{\kappa-1} = 0$ と読むこと．

補題 1.2 ((修正した) 補題５．２．２２)**.** $\{a_j\}_{j=1}^{\infty}$ を非負の数列とする．このとき，$\kappa > 0$ に対して

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j \left(\sum_{k=1}^{j} a_k \right)^{\kappa-1} \le \frac{1}{\min(\kappa, 1)} \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j \right)^{\kappa} \tag{2}$$

が成り立つ．ただし，$0 < \kappa < 1$ のときは $0^{\kappa-1} = 0$ と読むこと．

$0 < \kappa < 1$ のときは逆向きの不等式もつくることができる．

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j \left(\sum_{k=1}^{j-1} a_k \right)^{\kappa-1} \ge \frac{1}{\min(\kappa, 1)} \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j \right)^{\kappa} \tag{3}$$

証明. もし $\kappa \ge 1$ なら $\lesssim_{\kappa}$ を $\le$ とした不等式が成立することは明らかだから，$0 < \kappa < 1$ として考えよう．この場合は，$j \ge 2$ であるなら，$a_j \left(\sum_{k=1}^{j} a_k \right)^{\kappa-1} \le \int_{\sum_{k=1}^{j-1} a_k}^{\sum_{k=1}^{j} a_k} t^{\kappa-1}\, dt$ より明らかである．　□

2