ベゾフ空間の演習問題

澤野嘉宏

この記事の目的　拙著ベゾフ空間の教科書で関連する練習問題を列挙する．記号は指示がない限り，拙著「ベゾフ空間論」に準拠する．

問題 1. ファトウの性質を用いて，以下に与える関数空間 X は p, q, s をどのように選んでも A^s_{pq} とは同型にはならないことを示せ．

(1) $X = L^1$
(2) $X = \mathrm{BC}$
(3) $X = \mathrm{BUC}$

【出題日】２０１１年４月１１日

問題 2. $f, g \in L^2$ とするとき，$f * g \in B^0_{\infty 1}$ であることを示せ．

【出題日】２０１１年４月１１日

この練習問題はロシアでは１９５０年前後で知られていたらしいですが，出典は忘れました．

問題 3. $0 < p, q \le \infty$, $s \in \mathbb{R}$ とする．ウエーブレット分解を用いて，A^s_{pq} が可分であるための必要十分条件は $p + q = \infty$ であることを示せ．

【出題日】２０１１年４月１１日

問題 4.

(1) 複素数列 $\{C_N\}_{N=1}^\infty$ を適当に選んで，$\mathcal{S}'$ の位相で，
$$\lim_{N\to\infty}\left(C_N + \sum_{k=-N}^{N} \exp(2^k \pi i)\right)$$
が収束するようにせよ．
(2) 1 次関数の列 $\{P_N\}_{N=1}^\infty$ を適当に選んで，$\mathcal{S}'$ の位相で，
$$\lim_{N\to\infty}\left(P_N + \sum_{k=-N}^{N} 2^{-k} \exp(2^k \pi i)\right)$$
が収束するようにせよ．

【出題日】２０１１年４月１１日

問題 5. $A^{s+}_{pq} = \bigcup_{\varepsilon>0} A^{s+\varepsilon}_{pq}$ と定める．

(1) A^{s+}_{pq} は線形空間であることを示せ．
(2) $A^{s+}_{pq} = \bigcup_{\varepsilon>0,\, 0<r\le\infty} A^{s+\varepsilon}_{pr}$ を示せ．
(3) $A^{s+}_{pq} \subsetneq A^s_{pq}$ を示せ．

【出題日】２０１１年４月１２日

問題 6 (リゾルキン (Lizorkin))**.**

(1) $1 < p < \infty$ とする．以下の場合
 (a) $p = 2$
 (b) $2 < p < \infty$
 (c) $1 < p < 2$
に分けて，

$$\|\mathcal{F}^{-1}[\chi_{B(1)}\mathcal{F}f_j]\|_p + \left\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\mathcal{F}^{-1}[\chi_{B(2^j)\setminus B(2^{j-1})}\mathcal{F}f_j]|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \lesssim \|\psi(D)f_j]\|_p + \left\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi_j(D)f_j]|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p$$

を示せ．

(2) F^s_{p2}, $1 < p < \infty$, $s \in \mathbb{R}$ のノルムは次のノルム

$$\|\mathcal{F}^{-1}[\chi_{B(1)}\mathcal{F}f]\|_p + \left\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\mathcal{F}^{-1}[\chi_{B(2^j)\setminus B(2^{j-1})}\mathcal{F}f]|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p .$$

と同値になることを示せ．

【出題日】２０１１年４月１３日

問題 7. f を正値可測関数とする．分数べき積分作用素 I_α を

(0.1) $$I_\alpha f(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}\,dy$$

で定義する．ここで，$0 < \alpha < n$ である．

(1) 関係式

(0.2) $$\int_0^\infty \chi_{B(x,l)}(y)\,\frac{dl}{l^{n+1-\alpha}} = \frac{|x-y|^{-n+\alpha}}{n-\alpha}$$

を示せ．

(2) 関係式

(0.3) $$I_\alpha f(x) = (n-\alpha)\int_0^\infty \left(\frac{1}{l^{n+1-\alpha}} \int_{B(x,l)} f(y)\,dy \right) dl.$$

を示せ．

(3) 関数 $m_k(\xi) = \xi_k|\xi|^{-2}$, $k = 1, 2, \cdots, n$ のフーリエ逆変換に関して，$|\mathcal{F}^{-1}m_k(x)| \lesssim |x|^{-n+1}$ を示せ．

(4) $f \in \mathcal{D}$ に対して，

$$|f(x)| \lesssim I_1[|\nabla f|](x)$$

を示せ．

(5) $\dot{L}^{1,2}$ で，$\mathcal{D}$ のディリクレノルム

$$\|\nabla f\|_{\mathcal{D}}$$

による完備化を表す．$n \ge 3$ のときに，$\dot{L}^{1,2} \hookrightarrow L^{n/(n-2)}$ を示せ．

(6) $n \ge 3$ のとき，$\dot{L}^{1,2} \sim \dot{F}^1_{22}$ を示せ．

【出題日】２０１１年4月１３日

問題 8. べき乗極大作用素 $M^{(\eta)}$ を

$$M^{(\eta)}f(x) := [M[\,|f|^{\eta}\,](x)\,]^{\frac{1}{\eta}},\ \eta > 0 \tag{0.4}$$

で定める．$0 < p, q \le \infty$, $s \in \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{S}'$ とする．ψ, φ_j はベゾフ空間などを定義するときに使う ψ, φ_j と同じコンパクト台を持つ C^{∞} 級関数とする．

(1) 次の準ノルムは元々のベゾフノルム B^s_{pq} と同値であることを示せ．

$$\left\| \sup_{z \in \mathbb{R}^n} \langle z \rangle^{-\frac{n}{\eta}} |\psi(D)f(x-z)| \right\|_p + \left\| 2^{js} \sup_{z \in \mathbb{R}^n} \langle z \rangle^{-\frac{n}{\eta}} |\varphi_j(D)f(x-z)| \right\|_{\ell^q(L^p)}. \tag{0.5}$$

(2) さらに，$p < \infty$ とする．次の準ノルムは元々のトリーベル・リゾルキンノルム F^s_{pq} と同値であることを示せ．

$$\left\| \sup_{z \in \mathbb{R}^n} \langle z \rangle^{-\frac{n}{\eta}} |\psi(D)f(x-z)| \right\|_p + \left\| 2^{js} \sup_{z \in \mathbb{R}^n} \langle z \rangle^{-\frac{n}{\eta}} |\varphi_j(D)f(x-z)| \right\|_{L^p(\ell^q)}. \tag{0.6}$$

【出題日】２０１１年4月１４日

問題 9. $0 < p < 1$ とする．$q = \dfrac{p}{p-1}$ とする．$f, g : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ を可測関数とする．

(1) $\|fg\|_1 \ge \|f\|_p \left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} g(x)^q \, dx \right)^{1/q}$ を示せ．
(2) $\|f+g\|_p \ge \|f\|_p + \|g\|_p$ を示せ．

【出題日】２０１１年4月１４日

問題 10. $-\Delta$ を $L^2(\mathbb{R}^n)$ の非有界正値自己共役作用素とみなして，$-\Delta = \displaystyle\int_0^{\infty} \lambda \, dE_\lambda$ とスペクトル分解する．$\{E_\lambda\}_{\lambda \ge 0}$ と $\varphi_j(D)$ との関係を見いだせ．

【出題日】２０１１年5月５日

問題 11. $f(x) = e^x \sin(e^x)$ を $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ の関数としてみなす．

(1) $f \in \mathcal{S}'$ であることを示せ．
(2) $f \in B^{-1}_{\infty\infty}$ であることを示せ．

【出題日】２０１１年5月１２日

問題 12. $\psi \in C^{\infty}_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^n)$ とする．$\log|x| \in \mathrm{bmo}$, $\psi(x)\log|x| \in \mathrm{bmo}$ を示せ．

【出題日】２０１１年6月３日

問題 13. $0 < p, q \le \infty$, $s \in \mathbb{R}$ とする．また，$\psi \in C^{\infty}_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^n)$ は 0 ではない正値関数とする．$A^s_{pq,\mathrm{unif}}$ を

$$\|f\|_{A^s_{pq,\mathrm{unif}}} = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \|f \cdot \psi(\cdot - y)\|_{A^s_{pq}}$$

で定める．このとき，$A^s_{pq,\mathrm{unif}}$ は ψ のとり方によらないことを示せ．

【出題日】２０１１年6月３日

問題 14. $f \in \mathcal{S}'$ について，以下が同値であることを示せ．

(1) $f = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \varphi_j(D)f$ が $\mathcal{S}'$ の位相に関して成り立ち，$[f] \in \dot{F}^{-1}_{\infty 2}$ である．

(2) $g \in \mathrm{BMO}$ が存在して，$f = \sqrt{-\Delta} g$ となる．

(3) $g_1, g_2, \cdots, g_n \in \mathrm{BMO}$ が存在して，$f = \sum_{j=1}^{n} \partial_j g_j$ となる．

(4) $F(x,t) = e^{t\Delta}f(x)$ とおくと，$F \in F^1_T$ である．つまり，

$$\sup_{0<t<T} \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{t^{\frac{n}{2}}} \int_0^t \int_{|x-x_0|<\sqrt{t}} |e^{s\Delta}f(x)|^2 \, dx \, ds$$

ただし，一般に

$$\|f\|_{F^\sigma_T} = \sup_{0<t<T} \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{t^{n+1}} \int_0^t \int_{|x-x_0|<t} |f(t,x)|^2 \left(\frac{s}{t}\right)^\sigma \, dx \, ds$$

と定める．

【出題日】２０１１年6月３日

問題 15. $0 < p, r < \infty$ と $L \in \mathbb{N}_0$ を固定する．$f \in H^p$, $0 < p < \infty$ とする．このとき，次の条件

(1) $a_j \in L^\infty$
(2) $\mathrm{supp}(a_j) \subset Q_j$
(3) $f = \sum_{j=1}^{\infty} a_j$
(4) $\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \left(\|a_j\|_{L^\infty} \chi_{Q_j}(x) \right)^r \right\}^{1/r} \lesssim \mathcal{M}f(x)$

を満たす $\{a_j\}_{j=1}^\infty \subset L^\infty$ と立方体の列 $\{Q_j\}_{j=1}^\infty$ が存在することを示せ．

【出題日】２０１１年9月３０日

問題 16. $0 < p, q < \infty$, $s \in \mathbb{R}$ とする．アトム分解の定理５．１．６において

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \lambda_{\nu m} m_{\nu m}$$

は A^s_{pq} の位相で収束することを示せ．

【出題日】２０１１年9月３０日

問題 17. $0 < p, q < \infty$, $s \in \mathbb{R}$ とする．アトム分解の定理５．１．６において

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \lambda_{\nu m} m_{\nu m}$$

は A^s_{pq} の位相で収束することを示せ．

【出題日】２０１１年9月３０日

問題 18. アトムの定義において，$\mathrm{supp}(a) \subset 3Q$ を $\kappa > 1$ として，$\mathrm{supp}(a) \subset \kappa Q$ に置き換えてもよいことを示せ．

【出題日】２０１１年9月３０日

問題 19. $H^1(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^d)$ が成り立ってもコンパクトにはならないことを示せ.【ヒント】平行移動を考える.

【出題日】２０１１年９月３０日

問題 20. $0 < p_0, q_0, p_1, q_1 < \infty$, $s_0, s_1 \in \mathbb{R}$ とする．ウエーブレット分解と拡張作用素を用いて，$B^{s_0}_{p_0 q_0}(B(1)) \subset B^{s_1}_{p_1 q_1}(B(1))$ がコンパクトであるための必要十分条件は $s_0 - s_1 > n(1/p_0 - 1/p_1)_+$ であることを示せ.

【出題日】２０１１年９月３０日

問題 21. $0 < p_1 < p_0 < \infty$, $0 < q \le \infty$, $s \in \mathbb{R}$, Ω が有界領域のとき，定理５．３．６を用いて，$B^s_{p_0 q}(\Omega) \subset B^s_{p_1 q}(\Omega)$ を示せ.

【出題日】２０１１年９月３０日

問題 22. $0 < p, q \le \infty$，$s, \alpha \in \mathbb{R}$ とする．B^s_{pq} を定義したときの ψ, φ を用いて，

$$\|f\|_{B^{(s,\alpha)}_{pq}} = \|\psi(D)f\|_p + \left\{\sum_{j=1}^{\infty}(2^{js}(j+1)^{-\alpha}\|\varphi_j(D)f\|_p)^q\right\}^{1/q}$$

とおく．ψ, φ の取り方によらずに，関数空間 $B^{(s,\alpha)}_{pq}$ が定まることを示せ.

【出題日】２０１１年９月３０日

問題 23. $j \in \mathbb{Z}^n$ と連続関数 $f \in C$ に対して，$a_j = \dfrac{1}{(2\pi i)^n}\displaystyle\int_{[0,2\pi)^n} f(y)e^{ijy}\,dy$ とおく.

(1) $|a_j| \le \|f\|_{\mathrm{BC}}$ を示せ.
(2) $|a_j| \lesssim (1+|j|)^{-m}\|f\|_{\mathcal{B}^m}$ を示せ.
(3) $\theta \ge 0$ とする．$|a_j| \lesssim (1+|j|)^{-\theta}\|f\|_{B^\theta_{\infty\infty}}$ を示せ.
(4) $\displaystyle\sum_{j\in\mathbb{Z}^n}|a_j|^2 < \infty$ を用いて，f が次の連続性

$$\|f\|_{\mathrm{Lip}(\theta)} = \sup_{x\ne y}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\theta}$$

を満たしているときに，$\displaystyle\sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j e^{ijx}$ が一様収束することを示せ.

【出題日】２０１１年１０月１５日

問題 24. $x \in \mathbb{R}^n$ と $\nu \in \mathbb{Z}$ に対して，$m(x)$ で，$x \in Q_{\nu m}$ となる唯一の $m \in \mathbb{Z}^n$ を表すこととする．このとき，$f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ に対して，

$$\lim_{\nu\to\infty}\frac{1}{|Q_{\nu m(x)}|}\int_{Q_{\nu m(x)}}|f(x)-f(y)|\,dy = 0$$

を示せ.

【出題日】２０１１年１２月１日

問題 25. $k \in C^\infty_{\mathrm{c}}(B(1))$ が $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} k(x)\,dx = 1$ を満たしているとする．$f \in L^p$ とする.

(1) $1 \le p < \infty$ ならば，ほとんどいたるところ，$f * k_\varepsilon \to f$ を示せ.

(2) $p=\infty$ のときも $f*k_\varepsilon \to f$ を示せ.

【出題日】２０１１年１２月１日

問題 26 (ヘルムホルツ射影)**.**

(1) $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ が稠密であることを示せ.
(2) 与えられた $u \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n)^n$ に対して，ある $\pi \in\in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n)$ が一意的に存在して，$\Delta\pi = \nabla \cdot u$ が成り立つことを示せ.
(3) $u \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n)^n$ に対して，$\mathrm{Pr}u$ を

$$\mathrm{Pr}u = u - \nabla\pi$$

で与える．ただし，$\pi \in\in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n)$ は $\Delta\pi = \nabla \cdot u$ を満たす．このとき，ある定数 C が存在して，

$$\|\mathrm{Pr}u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)^n} \le C\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)^n}$$

が成り立つことを示せ.

【出題日】２０１１年１２月１１日

問題 27. $j=1,2,\cdots,n$ とする.

(1) $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ のとき，$\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \partial_j f(x)\,dx = 0$ を示せ.
(2) $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ で，g を緩増加関数とするとき，$\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\partial_j f(x)\,dx = -\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\partial_j g(x)\,dx$ を示せ.

【出題日】２０１１年１２月１５日

問題 28. $m,n \in \mathbb{N}$ とする．$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+m})$ とするとき，

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)\,dy \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

で $g:\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ を定めると，$g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ であることを示せ.

【出題日】２０１１年１２月１５日

問題 29. $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ $\lambda > 0$ とするとき，

$$\{Mf > \lambda\} = \{M[f\chi_{\{Mf>\lambda\}}] > \lambda\}$$

を示せ.

【出題日】２０１１年１２月２７日

問題 30.

(1) $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ に距離

$$d(f,g) = \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{\alpha \in {\mathbb{N}_0}^n} \frac{Z_{\alpha,N}(f,g)}{1+2^{N+|\alpha|}Z_{\alpha,N}(f,g)}$$

を入れると完備になることを示せ．ここで，

$$Z_{\alpha,N}(f,g) = \sup_{|x| \le N} |\partial^\alpha (f-g)(x)|.$$

(2) $\varphi \in C^\infty_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^n)$ とする．$\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \mapsto \psi\varphi \in C^\infty_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^n)$ は連続であることを示せ.

【出題日】２０１２年１月１３日

問題 31. $C_{\mathrm{c}}^{\infty}(\Omega)$ の位相はすべての $K \in \mathcal{K}(\Omega)$ に対して包含写像 $C_{\mathrm{c}}^{\infty}(K;\Omega) \subset C_{c}^{\infty}(\Omega)$ が連続になるような局所凸位相のうち最弱のものとする．特に，$C_{\mathrm{c}}^{\infty}(\Omega)$ の位相をも考える場合は $\mathcal{D}(\Omega)$ と記すことにする．

さて，$\mathcal{D}(\Omega)$ において，

$$\left\{ f \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(K;\Omega) \,:\, \sup_{|x| \le N} |\partial^{\alpha}(f-g)(x)| < r \right\}$$

$$(r > 0,\, N \in \mathbb{N},\, \alpha \in {\mathbb{N}_0}^n,\, g \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(K;\Omega),\, K \in \mathcal{K}(\Omega))$$

は位相の生成系であることを示せ．

【出題日】２０１２年１月１３日

問題 32. $x, y \in \mathbb{R}^n$ に対して，$|x| + |y| \le (1+|x|)(1+|y|)$ を示せ．

【出題日】２０１２年１月２０日

問題 33. $f \in \mathcal{S}'$, $g \in \mathcal{S}$ とする．f がコンパクト台を持つならば，$g * f \in \mathcal{S}$ を示せ．

【出題日】２０１２年１月２０日