

ベゾフ空間の入門

澤野嘉宏

ABSTRACT. 本稿では、ベゾフ空間とトリールリゾルキン空間の入門的な事項を説明する．具体的には次の通りである．

- (1) ベゾフ空間 $B_{\infty 1}^0$: 関数解析，積分論における重要な定理を拡張し，その命題を与える．
- (2) 斉次ベゾフ空間 B_{pq}^s : 偏微分方程式において自然に現れるので，その事情を証明なしで説明する．

Part 1. ベゾフ空間 $B_{\infty 1}^0$

1. ベゾフノルム

定義 1.1 (ベゾフノルム $\|\star\|_{B_{pq}^s}$, $1 \leq p, q \leq \infty$, $s \in \mathbb{R}$). パラメータ p, q, s が条件 $1 \leq p, q \leq \infty$, $s \in \mathbb{R}$ を満たしているとする．さらに， $\psi, \varphi \in \mathcal{S}$ を

$$(1.1) \quad \psi(\xi) = \begin{cases} 1 & (|\xi| \leq 4 \text{ のとき}) \\ 0 & (|\xi| \geq 8 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$$(1.2) \quad \varphi(\xi) = \begin{cases} 1 & (2 \leq |\xi| \leq 4 \text{ のとき}) \\ 0 & (|\xi| \leq 1 \text{ もしくは } |\xi| \geq 8 \text{ のとき}) \end{cases}$$

となるようにとる． $j \in \mathbb{N}$ に対して， $\varphi_j(\xi) = \varphi(2^{-j}\xi)$ とする． $\tau \in \mathcal{S}$, $f \in \mathcal{S}'$ に対して， $\mathcal{F}^{-1}[\tau \cdot \mathcal{F}f] = \tau(D)f$ と書いて，さらに，

$$(1.3) \quad \|f\|_{B_{pq}^s} := \begin{cases} \|\psi(D)f\|_p + \left(\sum_{j=1}^{\infty} 2^{jq_s} \|\varphi_j(D)f\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}} & (1 \leq q < \infty \text{ のとき}) \\ \|\psi(D)f\|_p + \sup_{j \in \mathbb{N}} 2^{js} \|\varphi_j(D)f\|_p & (q = \infty \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定義する．

2. 有界一様連続関数空間 BUC

命題 2.1. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $\mathbb{R}$ 上の有界かつ一様連続な関数とする． $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が f に一様収束していれば， f も一様連続である．

証明. f の一様連続性を示すべく，

$$\sup_{x, y \in \mathbb{R}, |x-y| < \delta} |f(x) - f(y)|$$

1

を評価して, $\delta \rightarrow 0$ の時に 0 に収束することを示す. 三角不等式により,

$$\begin{aligned}
& \sup_{x, y \in \mathbb{R}, |x-y| < \delta} |f(x) - f(y)| \\
&= \sup_{x, y \in \mathbb{R}, |x-y| < \delta} |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(y) + f_n(y) - f(y)| \\
&\leq \sup_{x, y \in \mathbb{R}, |x-y| < \delta} (|f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)|) \\
&\leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - f_n(x)| + \sup_{x, y \in \mathbb{R}, |x-y| < \delta} |f_n(x) - f_n(y)| + \sup_{y \in \mathbb{R}} |f(y) - f_n(y)| \\
&\leq 2 \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - f_n(x)| + \sup_{x, y \in \mathbb{R}, |x-y| < \delta} |f_n(x) - f_n(y)|
\end{aligned}$$

となる. つまり,

$$\sup_{x, y \in \mathbb{R}, |x-y| < \delta} |f(x) - f(y)| \leq 2 \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - f_n(x)| + \sup_{x, y \in \mathbb{R}, |x-y| < \delta} |f_n(x) - f_n(y)|$$

が得られた. 両辺の $\limsup_{\delta \downarrow 0}$ をとって,

$$\begin{aligned}
& \limsup_{\delta \downarrow 0} \sup_{x, y \in \mathbb{R}, |x-y| < \delta} |f(x) - f(y)| \\
&\leq \limsup_{\delta \downarrow 0} \left(2 \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - f_n(x)| + \sup_{x, y \in \mathbb{R}, |x-y| < \delta} |f_n(x) - f_n(y)| \right) \\
&= 2 \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - f_n(x)|
\end{aligned}$$

となる.

□

3. L^2 空間とフーリエ変換

L^2 空間は

$$\|f\|_2 = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

で与えられていた. 可積分関数 f に対して

$$\mathcal{F}f(\xi) := (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix \cdot \xi} dx, \quad \mathcal{F}^{-1}f(x) := (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi$$

と定める.

定理 3.1. $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$ とするとき,

$$(3.1) \quad \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}\varphi(x) \overline{\mathcal{F}\psi(x)} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \overline{\psi(x)} dx$$

が成り立つ.

上の定理 3.1 と稠密性の議論によって, フーリエ変換 $\mathcal{F}: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ は L^2 等長写像に拡張できる.

4. ベゾフ空間 $B_{\infty 1}^0$

ヘルダーの不等式によって, 次の定理は明らかである.

定理 4.1. $f, g \in L^2$ とすると, $f * g \in L^\infty$ となる. より, 正確には

$$\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_2 \|g\|_2$$

が成り立つ.

稠密性を考えると, $f, g \in L^2$ とすると, $f * g \in BUC$ である. 実際に, $f \in L^2$ かつ $g \in \mathcal{S}$ とすると, $f * g$ は有界で, 微分も有界である.

実は, 次の不等式が成り立つ.

定理 4.2. $\psi \in \mathcal{S}$ が $\chi_{B(1)} \leq \psi \leq \chi_{B(2)}$ を満たしているとする. $\varphi_j = \psi(2^{-j}\cdot) - \psi(2^{-j-1}\cdot)$ とおく. このとき,

$$M = \left\| \left(\psi^2 + \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j^2 \right)^{1/2} \right\|_{\infty}$$

とおくと,

$$\|\psi(D)[f * g]\|_{\infty} + \sum_{j=1}^{\infty} \|\varphi_j(D)[f * g]\|_{\infty} \leq 3M\|f\|_2\|g\|_2$$

を満たしている.

証明. フーリエ変換と畳み込みの定義から,

$$\psi(D)[f * g] = \psi(D)f * \chi_{B(4)}(D)g, \quad \varphi_j(D)[f * g] = \varphi_j(D)f * \chi_{B(2^{j+2} \setminus B(2^{j-2}))}(D)g$$

である. 通常のヤングの不等式から,

$$\begin{aligned} \|\psi(D)[f * g]\|_{\infty} &\leq \|\psi(D)f\|_2 \|\chi_{B(4)}(D)g\|_2 \\ \|\varphi_j(D)[f * g]\|_{\infty} &\leq \|\varphi_j(D)f\|_2 \|\chi_{B(2^{j+2} \setminus B(2^{j-2}))}(D)g\|_2 \end{aligned}$$

となる. これを代入して,

$$\begin{aligned} &\|\psi(D)[f * g]\|_{\infty} + \sum_{j=1}^{\infty} \|\varphi_j(D)[f * g]\|_{\infty} \\ &\leq \|\psi(D)f\|_2 \|\chi_{B(4)}(D)g\|_2 + \sum_{j=1}^{\infty} \|\varphi_j(D)f\|_2 \|\chi_{B(2^{j+2} \setminus B(2^{j-2}))}(D)g\|_2 \end{aligned}$$

となる. $\mathcal{F}: L^2 \rightarrow L^2$ の等長性から,

$$\begin{aligned} &\|\psi^2(D)[f * g]\|_{\infty} + \sum_{j=1}^{\infty} \|\varphi_j^2(D)[f * g]\|_{\infty} \\ &\leq \sqrt{\|\psi(D)f\|_2^2 + \sum_{j=1}^{\infty} \|\varphi_j(D)f\|_2^2} \sqrt{\|\chi_{B(4)}(D)g\|_2^2 + \sum_{j=1}^{\infty} \|\chi_{B(2^{j+2} \setminus B(2^{j-2}))}(D)g\|_2^2} \\ &= \left\| \left(\psi^2 + \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j^2 \right)^{1/2} \mathcal{F}f \right\|_2 \left\| \left(\chi_{B(4)} + \sum_{j=1}^{\infty} \chi_{B(2^{j+2} \setminus B(2^{j-2}))} \right)^{1/2} \mathcal{F}g \right\|_2 \end{aligned}$$

となる. ここで, M を用いて評価すると,

$$\|\psi(D)[f * g]\|_{\infty} + \sum_{j=1}^{\infty} \|\varphi_j(D)[f * g]\|_{\infty} \leq 3M\|\mathcal{F}f\|_2\|\mathcal{F}g\|_2$$

となる. よって, 定理は証明できた. $\square$

以上の考察から, 次のノルムを考えることは自然であろう.

定義 4.3. $\psi \in \mathcal{S}$ が $\chi_{B(1)} \leq \psi \leq \chi_{B(2)}$ を満たしているとする. $\varphi_j = \psi(2^{-j}\cdot) - \psi(2^{-j-1}\cdot)$ とおく. $f \in \mathcal{S}'$ に対して,

$$\|f\|_{B_{\infty 1}^0} = \|\psi(D)f\|_{\infty} + \sum_{j=1}^{\infty} \|\varphi_j(D)f\|_{\infty}$$

と定めて, $B_{\infty 1}^0$ でもって, $f \in \mathcal{S}'$ で, ノルム $\|f\|_{B_{\infty 1}^0}$ が有限であるもの全体を表す.

命題 4.4. $B_{\infty 1}^0 \hookrightarrow BUC$ である.

証明. $f_N = \psi(D)f + \sum_{j=1}^N \varphi_j(D)f$, $N = 1, 2, \dots$ とすると, $f_N \in L^{\infty}$ である. また, $j \in \mathbb{N}$ に対して, $\psi_j(\xi) = \psi(2^{-j}\xi)$ とすると,

$$f_N = \psi_{j+1}(D)\psi_j(D)f = (2\pi)^{-n/2} \mathcal{F}\psi_{j+1} * \psi_j(D)f$$

である. よって,

$$f'_N = (2\pi)^{-n/2} (\mathcal{F}\psi_{j+1})' * \psi_j(D)f$$

であるから, f_N も有界である. よって, $f_N \in BUC$ である. ここで,

$$\sum_{N=1}^{\infty} \|f_N - f_{N+1}\|_{\infty} \leq \|f\|_{B_{\infty 1}^0} < \infty$$

より $\{f_N\}_{N=1}^{\infty}$ は L^{∞} の位相で収束する. BUC は L^{∞} の閉集合であるから, $f = \lim_{N \rightarrow \infty} f_N \in BUC$ となる. $\square$

ベゾフ空間には次のようなファトウの性質がある.

命題 4.5. $\{g_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ を $B_{\infty 1}^0$ の有界集合で, $\mathcal{S}'$ の位相で g に収束すると, $g \in B_{\infty 1}^0$ である.

証明. 仮定によって,

$$\|\psi(D)g_k\|_{\infty} + \sum_{j=1}^{\infty} \|\varphi_j(D)g_k\|_{\infty} \leq M$$

となる $M > 0$ が存在する. ここで

$$\|\psi(D)g\|_{\infty} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\psi(D)g(x)| = \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\psi(D)g_k(x)| \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|\psi(D)g_k\|_{\infty}$$

などにより, 数列空間におけるファトウの補題を用いると

$$\|\psi(D)g\|_{\infty} + \sum_{j=1}^{\infty} \|\varphi_j(D)g\|_{\infty} \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \left(\|\psi(D)g_k\|_{\infty} + \sum_{j=1}^{\infty} \|\varphi_j(D)g_k\|_{\infty} \right) \leq M$$

となるので, $g \in B_{\infty 1}^0$ である. $\square$

系 4.6. $B_{\infty 1}^0 \hookrightarrow BUC$ は真の埋め込みである.

証明. $f(x) = \min(1, \max(-1, x_1))$ とする. また, $f_N(x) = f(Nx)$ とする. このとき, $\{f_N\}_{N=1}^{\infty}$ は BUC の有界集合で, $\mathcal{S}'$ で, $f(x) = \text{sgn}(x_1)$ に収束する. したがって, 同型が成り立ったとすると, ファトウの性質によって, $f \in BUC$ となるはずであるが, これはもちろんあり得ないので, $B_{\infty 1}^0 \hookrightarrow BUC$ は真の埋め込みである. $\square$

【結論】 $(f, g) \in L^2 \times L^2 \mapsto f * g \in B_{\infty 1}^0$ は $(f, g) \in L^2 \times L^2 \mapsto f * g \in BUC$ の本質的な拡張である.

Part 2. 斉次ベゾフ空間 $\dot{B}_{pq}^s$

5. 斉次ベゾフ空間

定義 5.1 (斉次ベゾフノルム $\|\star\|_{\dot{B}_{pq}^s}$, $1 \leq p, q \leq \infty$, $s \in \mathbb{R}$). パラメータ p, q, s が条件 $1 \leq p, q \leq \infty$, $s \in \mathbb{R}$ を満たしているとする. さらに, $\varphi \in \mathcal{S}$ を

$$(5.1) \quad \varphi(\xi) = \begin{cases} 1 & (2 \leq |\xi| \leq 4 \text{ のとき}) \\ 0 & (|\xi| \leq 1 \text{ もしくは } |\xi| \geq 8 \text{ のとき}) \end{cases}$$

となるようにとる. $j \in \mathbb{N}$ に対して, $\varphi_j(\xi) = \varphi(2^{-j}\xi)$ とする. $\tau \in \mathcal{S}$, $f \in \mathcal{S}'$ に対して, 以前のように $\mathcal{F}^{-1}[\tau \cdot \mathcal{F}f] = \tau(D)f$ と書いて, さらに,

$$(5.2) \quad \|f\|_{\dot{B}_{pq}^s} := \begin{cases} \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} 2^{jqs} \|\varphi_j(D)f\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}} & (1 \leq q < \infty \text{ のとき}) \\ \sup_{j \in \mathbb{Z}} 2^{js} \|\varphi_j(D)f\|_p & (q = \infty \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定義する.

(非線形) 微分方程式

$$\partial_t u - \Delta u = F(x, u), \quad u(0) = u_0$$

において, 縮小写像の原理を用いてこの微分方程式を解こうとすると,

$$e^{t\Delta} u_0$$

が現れることは偏微分方程式の専門家にはよく知られていることであろう.

$$u(t) = e^{t\Delta} u_0 + \int_0^t e^{(t-s)\Delta} F(x, u(s)) ds.$$

このとき, $1 \leq p, q < \infty$ として, $L^q([0, \infty); L^p(\mathbb{R}^n))$ に $u(t)$ が属するという状況を考えると, $e^{t\Delta} u_0$ がこの関数空間に属しているかどうかは極めて気になることである.

$$\|e^{t\Delta} u_0\|_{L^q([0, \infty); L^p(\mathbb{R}^n))} = \left(\int_0^\infty (t^{1/q} \|e^{t\Delta} u_0\|_p)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}$$

であるが, このノルムは $\|u_0\|_{\dot{B}_{pq}^{-2/q}}$ に同値であることが示される.