命題 1.21 の補足

澤野嘉宏

(iv) が示せると「$A, B \in \mathcal{A}$ ならば,$A \cap B \in \mathcal{A}$ となる」も示せたことになるのはわかるのですが,そこから可算個の合併について「$A_1, A_2, \ldots, A_k, \ldots \in \mathcal{A}$ ならば,$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$ となる」も成り立つ.

実際,「$A, B \in \mathcal{A}$ ならば,$A \cap B \in \mathcal{A}$ となる」について示せたとする.$A_1, A_2, \ldots, A_k, \ldots$ について,$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ が $\mathcal{A}$ の要素となるかどうかが問題である.実際に,「$A, B \in \mathcal{A}$ ならば,$A \cap B \in \mathcal{A}$ となる」から言えるのは,$A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}$, $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \in \mathcal{A}$ というように帰納的に有限個の合併についての命題は言えます。ここで,$A_1, A_1 \cup A_2, A_1 \cup A_2 \cup A_3, A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4, \ldots$ という増大列に着目して,(ii') を用いると,可算合併についての結論「$A_1, A_2, \ldots, A_k, \ldots \in \mathcal{A}$ ならば,$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$ となる」に至ります。