

## 定理 1.28 の補足

澤野嘉宏

$f_j$  は可測関数であることを示す.

$2^j \min(j, f(x))$  の取りうる値の範囲は 0 から  $j2^j$  の任意の実数である.したがって,その整数部分である  $[2^j \min(j, f(x))]$  は  $0, 1, 2, \dots, j2^j$  である.このようにして,とりうる値は  $j2^j + 1$  個になる.これらのとりうる値について,次のことが言える.

1.  $f_j(x) = 0$  となる  $x$  の条件は  $|x| > j$  または  $f(x) \leq 0$  である.
2.  $f_j(x) = 2^j$  となる  $x$  の条件は  $|x| \leq j$  かつ  $f(x) \geq j$  である.
3.  $k = 1, 2, \dots, j2^j - 1$  に対して,  $f_j(x) = k \cdot 2^{-j}$  となる条件は  $|x| \leq j$  かつ  $k \cdot 2^{-j} \leq f(x) < (k+1) \cdot 2^{-j}$  である.

以上のように,  $f_j$  は有限個の値をとり,その有限個の値をとる条件が可測集合を用いて表現できるので,  $f_j$  は単関数である.