

7 ページ(1.2)式についての説明

澤野嘉宏

$A \subset \mathbf{R}^n$ とする. A のルベグ外測度 $m^*(A)$ とは

$$m^*(A) := \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} |R_j| : \text{各 } R_j \text{ は直方体で, } A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} R_j \right\} (\in [0, \infty]) \quad (0.1)$$

で与えられる量である.

$$m^*(A) := \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} |R_j| : \text{各 } R_j \text{ は直方体で, } A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} R_j \right\} (\in [0, \infty]) \quad (0.2)$$

で与えられる量である.ここでは,

$$m^*(A) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} |R_j| : \text{各 } R_j \text{ は開直方体で, } A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} R_j \right\} (\in [0, \infty]) \quad (0.3)$$

であることを示す.実際に,任意に $A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} R_j$ となる開直方体 R_j を取ったとする.

$$R_j = \prod_{k=1}^n (a_{j,k}, b_{j,k})$$

とあらわしたときに,

$$S_j = \prod_{k=1}^n [a_{j,k}, b_{j,k})$$

とおく. $|R_j| = |S_j|$ である.下限の性質から,

$$m^*(A) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} |T_j| : \text{各 } T_j \text{ は直方体で, } A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} T_j \right\} \leq \sum_{j=1}^{\infty} |S_j| = \sum_{j=1}^{\infty} |R_j|$$

なので,任意の $A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} R_j$ となる開直方体 R_j に対して,

$$m^*(A) \leq \sum_{j=1}^{\infty} |R_j|$$

となり, $\{R_j\}_{j=1}^{\infty}$ の任意性から,

$$m^*(A) \leq \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} |R_j| : \text{各 } R_j \text{ は開直方体で, } A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} R_j \right\}$$

が得られる.¹

今度は

$$m^*(A) \geq \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} |R_j| : \text{各 } R_j \text{ は開直方体で, } A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} R_j \right\}$$

を示す. 任意に $A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} R_j$ となる直方体 R_j を取ったとする. さらに $\varepsilon > 0$ をとる.

$$R_j = \prod_{k=1}^n [c_{j,k}, d_{j,k})$$

とあらわしたときに,

$$R_j(\varepsilon) = \prod_{k=1}^n \left(c_{j,k} - (d_{j,k} - c_{j,k}) \frac{\sqrt[n]{1+\varepsilon} - 1}{2}, d_{j,k} + (d_{j,k} - c_{j,k}) \frac{\sqrt[n]{1+\varepsilon} - 1}{2} \right)$$

とおく. U_j の第 k 番目の辺の長さは

$$d_{j,k} - c_{j,k}$$

で, $U_j(\varepsilon)$ の第 k 番目の辺の長さは

$$d_{j,k} + (d_{j,k} - c_{j,k}) \frac{\sqrt[n]{1+\varepsilon} - 1}{2} - \left(c_{j,k} - (d_{j,k} - c_{j,k}) \frac{\sqrt[n]{1+\varepsilon} - 1}{2} \right) = \sqrt[n]{1+\varepsilon} (d_{j,k} - c_{j,k})$$

なので, $|U_j(\varepsilon)| = |U_j|$ である. よって,

$$\begin{aligned} m^*(A) &= \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} |R_j| : \text{各 } R_j \text{ は直方体で, } A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} R_j \right\} \\ &= \frac{1}{1+\varepsilon} \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} |R_j(\varepsilon)| : \text{各 } R_j \text{ は直方体で, } A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} R_j \right\} \\ &\geq \frac{1}{1+\varepsilon} \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} |U_j| : \text{各 } U_j \text{ は開直方体で, } A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} U_j \right\} \end{aligned}$$

$\varepsilon > 0$ は任意なので, 逆向きの不等式が得られた.²

教科書の正誤表 7 ページ 1 行目

正:

$$m^*(A) \geq \frac{1}{1+\varepsilon} \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} |R_j| : \text{各 } R_j \text{ は開直方体で, } A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} R_j \right\}$$

誤

$$m^*(A) \leq (1+\varepsilon) \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} |R_j| : \text{各 } R_j \text{ は開直方体で, } A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} R_j \right\}$$

¹こちら側の説明は原典の補足をしているだけで, 原典に問題はない.

²こちら側の説明は, 原典に問題あり.