

1 29 ページ

$f \in C_c(\mathbb{R}^n)$, $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ が

$$\rho(x) \geq 0, x \in \mathbb{R}^n, \quad \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x) dx = 1$$

を満たすとする。 ρ_j を $\rho_j(x) = j^n \rho(jx)$ と定める.

$$f_j(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) \rho_j(y) dy$$

とおく. $K > 0$ を $\text{supp}(\rho), \text{supp}(f) = \{|x| \leq K\}$ となるようにとる.¹

Proposition 1.1. f_j は f に一様収束する.

Proof. ρ の積分が 1 なので,

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \rho_j(y) dy$$

であることに注意する.したがって,

$$f_j(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (f(x-y) - f(x)) \rho_j(y) dy$$

となる.

$\varepsilon > 0$ を任意に固定する. f の一様連続性から, $|x-y| < \delta$ を満たす $x, y \in \mathbb{R}^n$ に対して, $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ となるような $\delta > 0$ が存在する. $\rho_j(y) \neq 0$ のとき,つまり $2^j|y| \leq K$ とする. $j > \log_2 K - \log_2 \delta$ のとき, $2^{-j}K < \delta$ だから, $|x-y-x| = |y| \leq 2^{-j}K < \delta$ となる.したがって,上述の一様連続性により, $\rho_j(y) \neq 0$ のとき, $|f(x-y) - f(x)| \rho_j(y) \leq \varepsilon \rho_j(y)$ である.また, $\rho_j(y) = 0$ としても, $|f(x-y) - f(x)| \rho_j(y) \leq \varepsilon \rho_j(y)$ は両辺が 0 だから成り立つ.

したがって,

$$|f_j(x) - f(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)| \rho_j(y) dy \leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} \rho_j(y) dy = \varepsilon$$

が得られる.以上により, $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ は f に一様収束する. □

Proposition 1.2. $j = 1, 2, \dots$ に対して, $\text{supp}(f_j) \subset \{|x| \leq 2K\}$ である.

Proof. $\text{supp}(\rho_j) \subset \{|x| \leq 2^{-j}K\}$ および $|y| \leq 2^{-j}K, |x-y| \leq K$ ならば, $|x| \leq 2K$ なので, $|x| > 2K$ ならば, $\rho_j(y)f(x-y) = 0$ がすべての $y \in \mathbb{R}^n$ に対して成り立つ.したがって, $f_j(x) \neq 0$ ならば, $|x| \leq 2K$ である. □

¹ $\text{supp}(\rho), \text{supp}(f) \subset \{|x| \leq K\}$ でも同じですが,ここは簡単のためにこのようにしています.

以上を踏まえて, 各 $j = 1, 2, \dots$ に対して

$$|f_j(x) - f(x)| \leq 2\chi_{[0, 2K]}(|x|) \sup_{k \in \mathbb{N}} \sup_{w \in \mathbb{R}^n} |f_k(w)|$$

となるので, ルベグの収束定理が使えて,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} |f_j(x) - f(x)| dx = 0$$

が得られる.