

# 私のフーリエ解析の研究について

澤野嘉宏

私澤野嘉宏はフーリエ解析などを中心に研究しております。ここでは、高校生の知識を持っている人なら誰でもわかるように研究内容に関してわかりやすく説明したいと思います。

## 1 二つの定理

ここでは二つの定理を証明します。

**定理 1.1** (リーマン・ルベーグの定理).  $[a, b]$  上の微分可能な関数に対して

$$\left| \int_a^b f(x) \sin(kx) dx \right| \leq \frac{2}{k} \max_{x \in [a, b]} |f(x)| + \frac{b-a}{k} \max_{x \in [a, b]} |f'(x)|$$

が成り立つ。とくに,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin(kx) dx = 0$  が成り立つ。

**証明.** 部分積分によって

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) \sin(kx) dx &= -\frac{1}{k} \int_a^b f(x) \left( \frac{d}{dx} \cos kx \right)' dx \\ &= \frac{f(a) \cos(ka) - f(b) \cos(kb)}{k} + \frac{1}{k} \int_a^b f'(x) \cos(kx) dx \end{aligned}$$

だから, 三角不等式によって

$$\left| \int_a^b f(x) \sin(kx) dx \right| \leq \frac{|f(a) \cos(ka)| + |f(b) \cos(kb)|}{|k|} + \frac{1}{|k|} \int_a^b |f'(x) \cos(kx)| dx$$

となります。ここで,  $t \in [a, b]$  に対して  $|f'(t)| \leq \max_{x \in [a, b]} |f'(x)|$ ,  $|f(a)|, |f(b)| \leq \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$ ,  $|\cos(ka)|, |\sin(ka)| \leq 1$  を用いると, 不等式が得られます。□

**定理 1.2** (フーリエ級数).  $\sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \frac{1}{4} \sin 4x + \cdots = \frac{1}{2}x$  が  $(-\pi, \pi)$  で成立する。とくに  $x = \frac{\pi}{2}$  とすると,  $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} + \cdots$  が得られる。

**証明.** 部分和を  $S_n(x) = \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \frac{1}{4} \sin 4x + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nx$  とおきます。  $S_n(x) \rightarrow \frac{1}{2}x$  を示すことになります。  $x = 0$  のときはこのことは明らかですし,  $x$  に関して問

題の関数は奇関数なので、 $0 < x < \pi$  と仮定しましょう。  $S_n$  を見ていてもどのように収束を示してよいのかわからないので、  $S'_n$  を考えてみましょう。 つまり、

$$S_n(x) = \int_0^x S'_n(t) dt = \int_0^x \{ \cos t - \cos 2t + \cos 3t - \cdots + (-1)^{n-1} \cos nt \} dt$$

と積分形に書き換えて、  $S'_n$  を持ってきます。 ここでポイントとなるのは、  $\{\cdots\}$  の中を計算できることです。 つまり、

$$\begin{aligned} \sin \frac{t+\pi}{2} \sum_{k=1}^n \cos k(t+\pi) &= -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left( \sin \frac{t+\pi}{2} (2k-1) - \sin \frac{t+\pi}{2} (2k+1) \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left\{ \sin \frac{t+\pi}{2} - \sin \frac{t+\pi}{2} (2n+1) \right\} \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned} \cos t - \cos 2t + \cos 3t - \cdots + (-1)^{n-1} \cos nt &= -\sum_{k=1}^n \cos k(t+\pi) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \sin \frac{t+\pi}{2} - \sin \frac{t+\pi}{2} (2n+1) \right\} \end{aligned}$$

したがって、

$$S_n(x) = \frac{1}{2} \int_0^x 1 - \frac{\sin(2n+1)(t+\pi)/2}{\sin(t+\pi)/2} dt = \frac{x}{2} - \int_{\pi/2}^{(x+\pi)/2} \frac{\sin(2n+1)\lambda}{\sin \lambda} d\lambda$$

となります。 ここで、リーマンルベグの定理を用いると  $S_n(x)$  が  $\frac{x}{2}$  に一様収束していることがわかります。  $\square$

## 2 研究している内容、興味を持っている内容について

1. 定理 1.1 についての精密化に興味があります。 数年前に若干の精密化をしました。
2. 定理 1.2 の収束の度合に興味を持っています。

$$\frac{1}{2}x - S_n(x) = \int_{\pi/2}^{(x+\pi)/2} \frac{\sin(2n+1)\lambda}{\sin \lambda} d\lambda$$

のように剰余項が具体的に決まっている場合はよいが、一般に関数 ( $f(x) = x$  のこと) もしくは級数 ( $S_n(x)$  のこと) が与えられた場合、どういう意味合いで収束しているのかを調べることに興味があります。 この手の問題に関しては、[1] で得られた結果を応用すると、収束に関してカールソンの定理として知られる大定理を導くことができます。

## 参考文献

- [1] Yoshihiro Sawano, Maximal operator for pseudo-differential operators with homogeneous symbols, Michigan Mathematical Journal 59 (2010), no. 1, 119-142.