非線形半群講義

－単独保存則への応用を中心に－

小林 良和

中央大学理工学部

まえがき

この講義ノートは，岡山大学理学部での集中講義 (1997 年) の際の配布ノートをもとに作成し，中央大学理工学研究科での授業や静岡大学理学部での集中講義 (2010 年) などで使用した。集中講義の機会をいただいた田中直樹先生に感謝いたします。

他の大学でのセミナーのテキストとしてご使用いただき貴重なご意見をいただいた諸先生に感謝申し上げます。特に古谷清子先生には多くのミスをご指摘いただきましたことに感謝いたします。

非線形半群論を中心テーマとしていますが，あまり予備知識が必要がない非線形偏微分方程式論の入門書となるように工夫してありますので，多くの方にご使用いただけると考えています。

2018 年 3 月

小林 良和

目 次

1　単独保存則

F を既知の関数，x を空間変数，t を時間変数とするとき, スカラー量 $u = u(x,t)$ に関する

$$\partial_t u + \partial_x F(u) = 0 \tag{1.1}$$

という形の偏微分方程式で記述される法則を量 u に関する**単独保存則**という．このような法則に従うと考えられる現象には交通の流れ, 氷河の流れ, 洪水時の河川の流れ, 風による山岳の侵食などがある．ここでは特に交通の流れの数学モデルとして現れる単独保存則について, その解の典型的な様子を調べ, 一般的に保存則を考える為の準備とする．

車の流れ (traffic flow) の数学モデルとしては, microscopic なもの, macrosopic なもの, mesoscopic(kinetic) なものの 3 種が知られている． 通常の手段で観測される量を対象にするモデルが macroscopic なモデルであり, ここで考えるモデルである．この macrosopic なモデルでは交通密度 ρ, 交通流量 q, 車速度 v などを対象とする． これらは位置 x と時間 t の関数である． 車はすべて x-直線の正の向きに進むとする． **交通密度** ρ は, ある時刻における単位長さあたりの車の数を表す. したがって

$$\int_{x_0}^{x_1} \rho(x,t)\,dx$$

は時刻 t において区間 $x_0 < x < x_1$ にある車の総数を与える． よって, また

$$\int_{x_0}^{x_1} \rho(x,t_1)\,dx - \int_{x_0}^{x_1} \rho(x,t_0)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} \left(\rho(x,t_1) - \rho(x,t_0)\right)\,dx \tag{1.2}$$

は区間 $x_0 < x < x_1$ のおける時刻 t_0 から t_1 までの車の数の増減を表す． **交通流量** q はある位置を単位時間に通過する車の数を表す．したがって,

$$\int_{t_0}^{t_1} q(x,t)\,dt$$

は 時刻 t_0 から t_1 の間に位置 x を通過する車の総数を与える． よって, また

$$\int_{t_0}^{t_1} q(x_0,t)\,dt - \int_{t_0}^{t_1} q(x_1,t)\,dt = \int_{t_0}^{t_1} \left(q(x_0,t) - q(x_1,t)\right)\,dt \tag{1.3}$$

は, 時刻 t_0 から t_1 までの間に, 区間 $x_0 < x < x_1$ に流入した車の総数を与える．二つの量 (1.2), (1.3) は等しくなければならないので,

$$\int_{x_0}^{x_1} \left(\rho(x,t_1) - \rho(x,t_0)\right)\,dx + \int_{t_0}^{t_1} \left(q(x_1,t) - q(x_0,t)\right)\,dt = 0 \tag{1.4}$$

が成り立つと考えられる． これを **(積分形の) 車の数の保存則**という．この式で $x_0 = x$, $x_1 = x + \Delta x$, $t_0 = t$, $t_1 = t + \Delta t$ とおき, $\Delta t \Delta x \neq 0$ で除してから, $\Delta t \to 0$, $\Delta x \to 0$ とすれば

$$\partial_t \rho + \partial_x q = 0 \tag{1.5}$$

を得る． これを **(微分形の) 車の数の保存則**という．

車速度 v はある位置を通過する車の平均速度を表す． したがって，

$$q = \rho v \tag{1.6}$$

が成り立つ．これを (1.5) に代入して

$$\partial_t \rho + \partial_x (\rho v) = 0 \tag{1.7}$$

を得る． 微分方程式 (1.7) を閉じるために Lighthill と Whitham [43] は 車速度 v は 密度 ρ の関数であるとするモデルを提案した:

$$v = V(\rho), \quad q = Q(\rho) = \rho V(\rho). \tag{1.8}$$

このとき方程式は

$$\partial_t \rho + \partial_x Q(\rho) = 0 \tag{1.9}$$

となる． 関数 $V(\rho)$ や $Q(\rho)$ の形は一般には観測によって決められるが, 次の性質をもつと考えられる． 道路上に他の車がいない状況では車は**制限速度** (最高の速度) $v_m > 0$ で走行するであろう．しかし, 車の数が多くなるとそれだけ速度を落とさなければならなくなる．すなわち

$$\frac{dV}{d\rho} = V'(\rho) \le 0$$

と考えられる． さらに交通密度がある密度 $\rho_m > 0$ に達すると車は停止せざるを得なくなるであろう:

$$V(\rho_m) = 0.$$

最大密度 ρ_m を**数珠つなぎ交通密度** (bumper to bumper density) という．このような性質を持つ $V(\rho)$ として最も簡単なものは

$$V(\rho) = v_m \left(1 - \frac{\rho}{\rho_m}\right), \quad 0 \le \rho \le \rho_m \tag{1.10}$$

である．これを**線形モデル**という．他に, $n_1,\ n_2 > 0$ として

$$V(\rho) = v_m \left(1 - \left(\frac{\rho}{\rho_m}\right)^{n_1}\right)^{n_2}, \quad 0 \le \rho \le \rho_m$$

という形のモデルも提案されている．([31] を参照．) Greenberg [25] は $a > 0$ を適当な定数として

$$V(\rho) = -a \log(\rho/\rho_m), \quad 0 < \rho \le \rho_m$$

とおくモデルを提案し, リンカーン・トンネル (ニュージャージーとニューヨーク市を結びハドソン川の下を走る約 2 マイル＝約 3km 強の長さのトンネル) などでの観測と十分適合することを報告している． このモデルでは $v_m = \infty$ である．

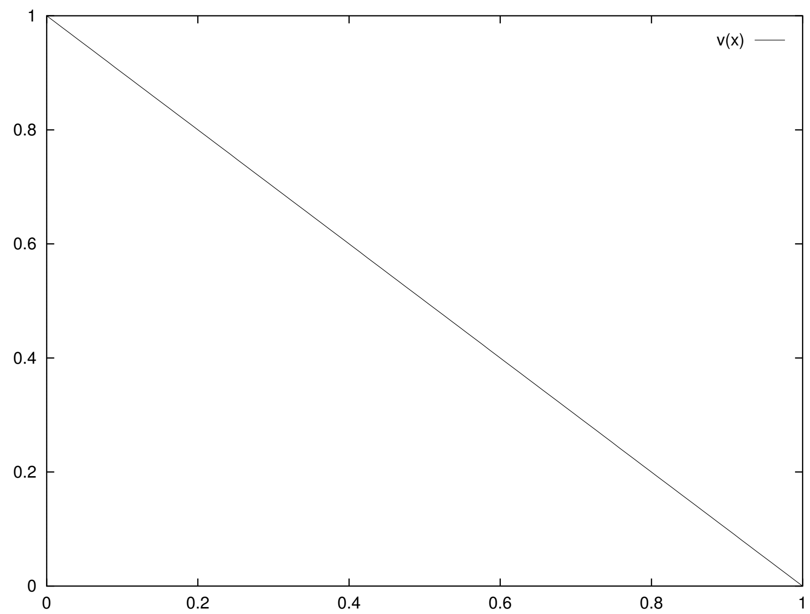

図 1: 線形モデルにおける交通密度・車速度関係

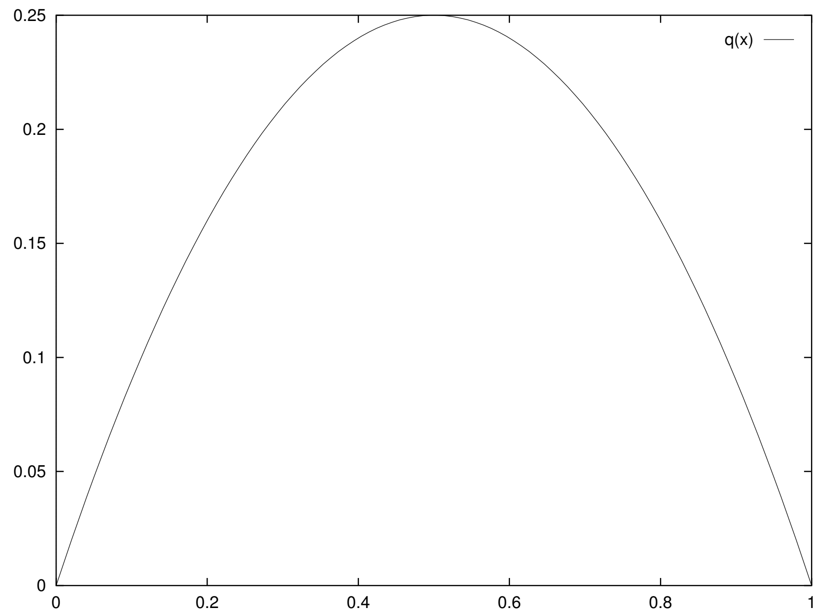

図 2: 線形モデルにおける交通密度・交通流量関係

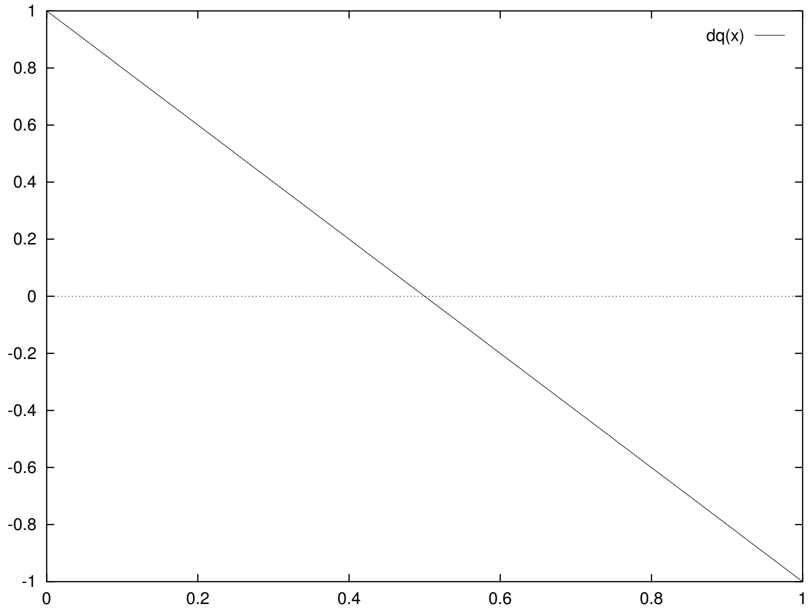

図 3: 線形モデルにおける交通密度・密度波速度関係

時刻 $t = 0$ での交通密度を $\rho_0(x)$ とする．初期条件

$$\rho(x, 0) = \rho_0(x), \quad -\infty < x < \infty$$

の下で方程式 (1.9) を満たす解を求めれば交通密度の時間的・空間的な変化の様子すなわち交通の流れの様子がわかる． それをみるため, 時刻 $t = 0$ で位置 x_0 から出発し, 時刻 $t \geq 0$ での位置が $x(t)$ であるように運動する観測者から交通の流れを観てみる．時刻 t でこの観測者は自分の位置に単位長さあたり $\rho(x(t), t)$ 台の車を観ることになる． この数の時間的な変化は

$$\frac{d}{dt}\rho(x(t), t) = \partial_t \rho(x(t), t) + x'(t)\partial_x \rho(x(t), t)$$

である．したがって, もし観測者が

$$x'(t) = Q'(\rho(x(t), t)) \tag{1.11}$$

を満たすように運動すれば, 式 (1.9) により,

$$\frac{d}{dt}\rho(x(t), t) = \rho_t(x(t), t) + Q'(\rho(x(t), t))\rho_x(x(t), t) = 0$$

となる． 観測者の速度 $x'(t)$ が $Q'(\rho)$ と等しくなるように観測者が運動すれば, 観測者は自分の位置に常に一定の密度の車を観察することになる．($Q'(\rho)$ を **(局所) 密度波速度**という．) よって, このとき, 観測される車の数は

$$\rho(x(t), t) = \rho(x(0), 0) = \rho_0(x_0)$$

で与えられる． さらに, このとき

$$Q'(\rho(x(t),t)) = Q'(\rho_0(x_0))$$

である．これを (1.11) に代入して,

$$x'(t) = Q'(\rho_0(x_0))$$

となる．よって, 観測者は等速運動

$$x(t) = x_0 + tQ'(\rho_0(x_0)) \tag{1.12}$$

をすることになる． (x,t) 平面上のこの直線を**特性曲線 (直線)** という． いろいろな位置 x_0 から出発した観測者の観察を総合すれば交通の流れの様子がわかるであろう． すなわち $-\infty < x_0 < \infty$ をパラメータとして

$$\rho = \rho_0(x_0),\ x = x_0 + tQ'(\rho_0(x_0)) \tag{1.13}$$

で交通密度 ρ が求められることになる．

解 ρ を (x,t) の関数として陽的に定めるために, Q は C^2 級, ρ_0 は C^1 級と仮定する．$\lambda(x) = Q'(\rho_0(x))$ と書き, ある $M_0,\ K_0 \geq 0$ に対し

$$|\lambda(x)| \leq M_0,\ -\infty < x < \infty,$$
$$-\lambda'(x) \leq K_0,\ -\infty < x < \infty,\ \text{s.t. } \lambda'(x) < 0$$

であると仮定する． (すべての x に対して $\lambda'(x) \geq 0$ のときは $K_0 = 0$ とする．)このとき (1.13) は

$$\rho = \rho_0(x_0), \quad x = x_0 + t\lambda(x_0) \equiv f(x_0,t)$$

と書ける．

$$f(y,t) = y + t\lambda(y)$$

に関して,

$$\lim_{y\to\pm\infty} f(y,t) = \pm\infty$$

であり, さらに $0 \leq t < 1/K_0$ のとき

$$\partial_y f(y,t) = 1 + t\lambda'(y) = 1 - t(-\lambda'(y)) \geq 1 - tK_0 > 0$$

である．よって, $0 \leq t < 1/K_0$ ならば, 各 (x,t) に対し

$$x = f(y(x,t),t) = y(x,t) + t\lambda(y(x,t)) \tag{1.14}$$

を満たす $y = y(x,t)$ が一意的に定まる． このとき,

$$|y(x+k,t+h) - y(x,t)| \leq \frac{|k| + M_0|h|}{1 - tK_0}$$

が成り立ち, $y(x,t)$ は $-\infty < x < \infty$, $0 \le t < 1/K_0$ で連続になる．実際に,

$$x + k = y(x+k, t+h) + (t+h)\lambda(y(x+k, t+h))$$

と (1.14) により,

$$\begin{aligned}
k =& y(x+k,t+h) - y(x,t) + t(\lambda(y(x+k,t+h)) - \lambda(y(x,t))) \\
=& (1 + t\lambda'(y(x,t) + \theta(y(x+k,t+h) - y(x,t)))(y(x+k,t+h) - y(x,t)) \\
&+ h\lambda(y(x+k,t+h)) \qquad (0 < \theta < 1)
\end{aligned}$$

だから,

$$\begin{aligned}
|k| \ge& (1 + t\lambda'(y(x,t) + \theta(y(x+k,t+h) - y(x,t)))|y(x+k,t+h) - y(x,t)| \\
&- h|\lambda(y(x+k,t+h))| \\
\ge& (1 - K_0 t)|y(x+k,t+h) - y(x,t)| - M_0 h
\end{aligned}$$

である．さらに, 式 (1.14) の両辺を形式的に微分して

$$\partial_x y(x,t) = \frac{1}{1 + t\lambda'(y(x,t))}, \quad \partial_t y(x,t) = \frac{-\lambda(y(x,t))}{1 + t\lambda'(y(x,t))}$$

となるので, 実際に $y(x,t)$ は $-\infty < x < \infty$, $0 \le t < 1/K_0$ で C^1 級になることが示せる． 得られた $y = y(x,t)$ をもちいて,

$$\rho(x,t) = \rho_0(y(x,t))$$

とおけば, この ρ は初期条件を満たす, $-\infty < x < \infty$, $0 \le t < 1/K_0$ において C^1 級の一意解になることを示すことができる．以上のようにして解を求める方法を**特性曲線法**という．

上の議論で求まった C^1 級の一意解の存在範囲は $-\infty < x < \infty$, $0 \le t < 1/K_0$ であり, $1/K_0$ を超えて延長することはできない． 簡単のため, 線形モデルを考える． 制限速度 v_m と 数珠つなぎ交通密度 ρ_m をいずれも 1 とする．

$$V(\rho) = 1 - \rho,\ Q(\rho) = \rho(1-\rho),\ Q'(\rho) = 1 - 2\rho$$

であり, 保存則は

$$\partial_t \rho + \partial_x (\rho(1-\rho)) = 0$$

である．いま, 初期密度 $\rho_0(x)$ は C^1 級で $x \le -1$ で 恒等的に 0, $-1 < x \le 1$ で単調増大で, $x > 1$ で恒等的に 1 とする．

$$\lambda(x) = 1 - 2\rho_0(x),\ \lambda'(x) = -2\rho_0'(x) \le 0$$

であり, 平均値の定理から, ある $x_0 \in (-1,1)$ で $\rho_0'(x_0) = 1/2$ となるから, $K_0 \geq 1$ すなわち $1/K_0 \leq 1$ である．いま C^1 級の解が $-\infty < x < \infty$, $t_0 > 1$ まで定まったとする． x 軸上の $x = x_0 = -t_0 < -1$ を通る特性直線は

$$x = x_0 + tQ'(\rho_0(x_0)) = x_0 + tQ'(0) = x_0 + t$$

で $(0, t_0)$ を通る． よって $\rho(0, t_0) = \rho_0(x_0) = 0$ でなければならない．一方, $x_0 = t_0 > 1$ を通る特性直線は

$$x = x_0 + tQ'(\rho(x_0)) = x_0 + tQ'(1) = x_0 - t$$

で やはり $(0, t_0)$ を通る． したがって $\rho(0, t_0) = \rho_0(x_0) = 1$ でもなければならない．これは矛盾である． さらに詳しく様子を見るために

$$\rho_0(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ (x+1)/2, & -1 < x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

とする.（この関数は C^1 級でないがリプシッツ連続な一意解を時間局所的に与える.） $-1 < x_0 < 1$ を通る特性直線は

$$x = x_0 + tQ'(\rho_0(x_0)) = x_0 + tQ'((x_0+1)/2) = x_0 - x_0 t$$

で $(0,1)$ を通る．$0 \leq t < 1$ の範囲ではリプシッツ連続な解

$$\rho(x,t) = \begin{cases} 0, & x \leq -1 + t \\ (1 + x/(1-t))/2, & -1 + t < x \leq 1 - t \\ 1, & x > 1 - t \end{cases}$$

が求まる． ここで $t \uparrow 1$ とすると

$$\lim_{t \uparrow 1} \rho(x,t) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1/2, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

となる． このことから, 解は $t = 1$ を超えて延長できないことがわかる．今考えている初期密度は $x \geq 1$ のおいて数珠つなぎ交通密度 1 に等しく, $x \geq 1$ にいる車は赤信号や交通事故の発生などの原因ですべて停止している状態である． 後続の車はこの渋滞の列にあって次々に停止し, 時刻 $t = 1$ ですべての車が停止したと考えられる．微分方程式の C^1 級の解は, この時刻 $t = 1$ までしか求まらないが, 現実

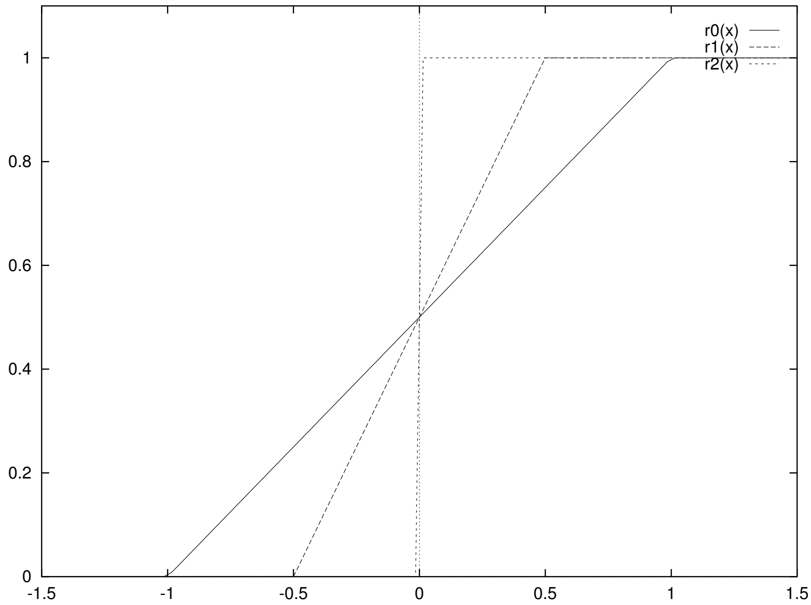

図 4: 赤信号による衝撃波の発生

の現象では, この時刻以降はこのままの状態が続くと考えられる．すなわち $t > 1$ においても

$$\rho(x,t) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1/2, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

であると考えられる． これは $x = 0$ で微分可能でないが, 積分形の保存則は満たす． 今の場合

$$\begin{aligned} &\int_{x_0}^{x_1} (\rho(x,t_1) - \rho(x,t_0))\, dx \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} (\rho(x_1,t)(1-\rho(x_1,t)) - \rho(x_0,t)(1-\rho(x_0,t)))\, dt = 0 \\ &0 \le t_0 < t_1,\ -\infty < x_0 < x_1 < \infty \end{aligned} \tag{1.15}$$

である． このように積分形の保存則を満たす解を微分方程式の**弱解** (weak solution) という．これに対し C^1 級の解を**古典解** (classical solution) という．(弱解の正確な定義は後に与える．) 今 $-\infty < x < \infty$, $t > 0$ の範囲で求まった解は考えている問題の弱解を与えることになる． 特に 時刻 $t = 1$ 以降の不連続な弱解を**衝撃波** (shock wave) という．

次に, 初期密度として,

$$\rho_0(x) = \begin{cases} 1, & x \le 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$$

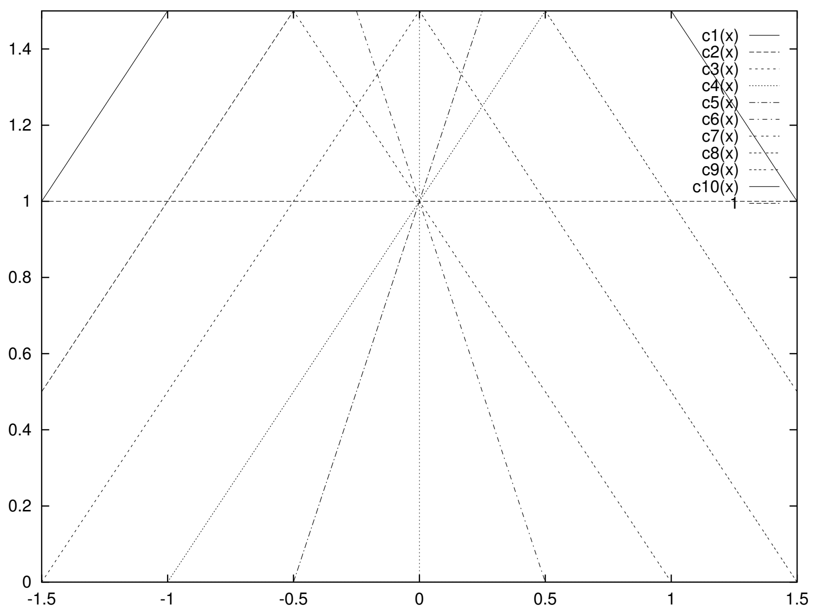

図 5: 赤信号による衝撃波の特性曲線

を考える．

$$\rho(x,t) = \begin{cases} 1, & x \le 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$$

を考えると, これはこの初期関数に対する上の意味の弱解になる．しかしこの解で与えられる現象は実現するであろうか．これを観るために $\varepsilon > 0$ とし, 初期密度として,

$$\rho_0^\varepsilon(x) = \begin{cases} 1, & x \le -\varepsilon \\ (1 - x/\varepsilon)/2, & -\varepsilon < x \le \varepsilon \\ 0, & x > \varepsilon \end{cases}$$

を考える．$x = x_0$ を通る特性直線は

$$x = \begin{cases} x_0 - t, & x_0 \le -\varepsilon \\ x_0 + x_0 t/\varepsilon, & -\varepsilon < x_0 \le \varepsilon \\ x_0 + t, & x_0 > \varepsilon \end{cases}$$

となり, $-\infty < x < \infty$, $t \ge 0$ の範囲でリプシッツ連続な解

$$\rho^\varepsilon(x,t) = \begin{cases} 1, & x \le -\varepsilon - t \\ (1 - x/(\varepsilon + t))/2, & -\varepsilon - t < x \le \varepsilon + t \\ 0, & x > \varepsilon + t \end{cases}$$

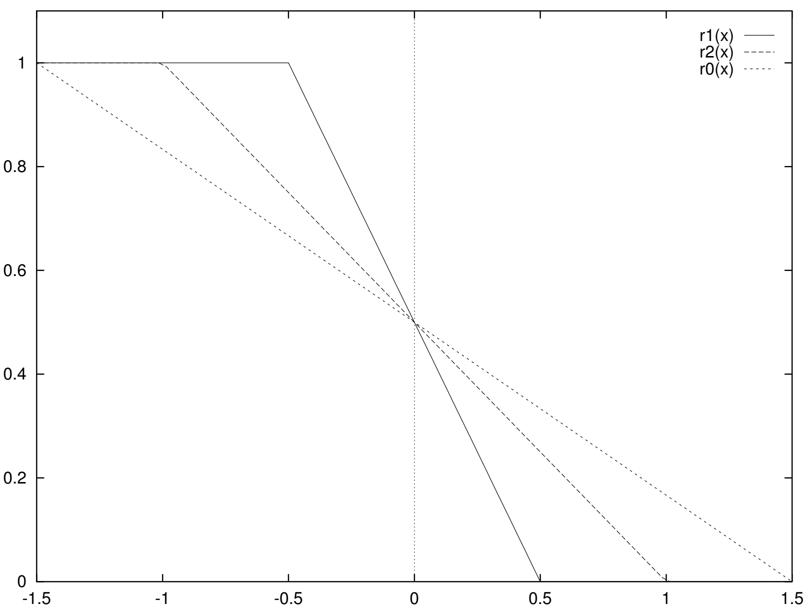

図 6: 青信号後の交通波

を得る． ここで $\varepsilon\downarrow 0$ とした極限

$$\rho(x,t)=\begin{cases}1, & x\le -t\\ (1-x/t)/2, & -t<x\le t\\ 0, & x>t\end{cases}$$

として, 不連続な初期密度 $\rho_0(x)$ に対する一つの解が求まる． これはリプシッツ連続な解であり弱解にもなる． ρ^ε が現実に実現する解とすれば, $\varepsilon\downarrow 0$ とした極限として得られた上の解が現実に実現する解であろう． 今考えている初期密度は, $x=0$ の位置に信号機があり, 赤信号でその後方に車の渋滞が生じたが, 時刻 $t=0$ で信号が青に変わった場合に相当する． このとき, まず先頭の車が発進し後続の車が次々と発進することになるであろう． 上のリプシッツ連続な解が実際に実現する解であると考えられる． このような解を**希薄波** (rarefaction wave) という．

交通流の方程式, 特にその線形モデルについて, 赤信号や青信号により車の流れがどのように変化するかを観察した． このことにより, 次のことが分かった．

(1) 現実の現象は古典解だけでは捉えることができない．

(2) 一方, 弱解には非現実的な解が含まれている．

このことをどのように考えたらよいか． 一つの考えは, この交通流の方程式が現実の現象を十分には捉えていないとするものである． しかし, 上で観たように, 方程式は現実の現象に対応する解を含んでおり, それは現実の現象を理解する上で十

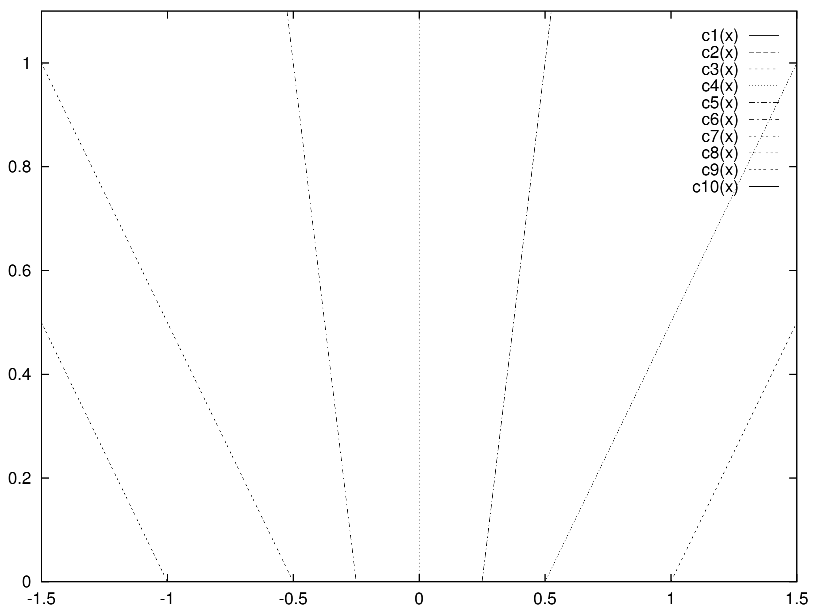

図 7: 青信号後の交通波の特性曲線

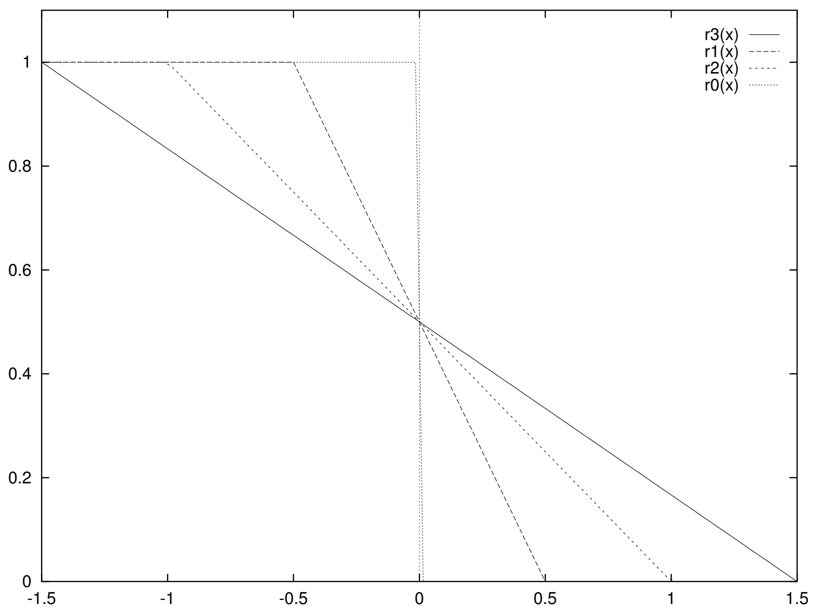

図 8: 青信号直後の希薄波の発生

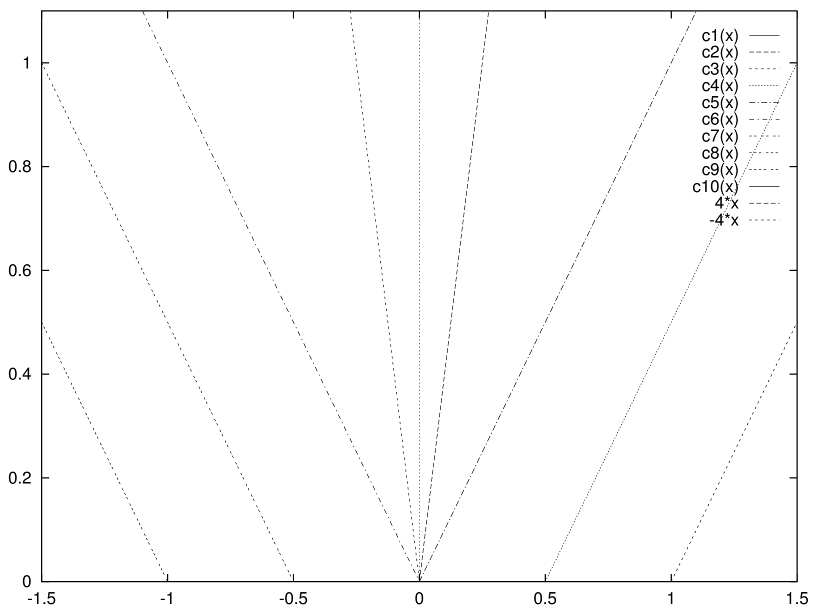

図 9: 青信号直後の希薄波の特性曲線

分に役立つと考えられる． 弱解の中から現実の現象に相応する解を見出す法則が分かれば十分に有用であると期待される．

現実の現象に相応する解はどのようにして見出すか． 当然に, これは場当たり的にではなく, 適切な法則に則って見出されなければならない． 現実の現象に相応する解は次のような条件を満たすべきである．

(1) 解は 任意の初期関数に対して $-\infty < x < \infty$, $t \geq 0$ で存在し, 初期関数に対して一意的に定まらなければならない．

(2) 解は初期関数に連続的に依存しなければならない．

このような条件を満たす問題を J. Hadamard(1865–1963) は**適切な問題** (well posed problem) とよんだ． また, このほかに,

(1) 方程式に含まれるパラメータなどに解が連続的に依存する．

(2) 解を数値的に求める手段がある．

などの要請も満たされるべきである． これらの事柄を解明することはすべて数学 (数理科学) の問題である．

演習問題 1.1. 交通流は線形モデル

$$\partial_t \rho + \partial_x \left(\rho(1-\rho)\right) = 0$$

に従うとし, 初期密度を

$$\rho_0(x) = \begin{cases} 1, & x \le 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$$

とする．時刻 $t=0$ で $x_0<0$ にいた車の, 時刻 $t>0$ での位置 $X(t)$ を求めよ．ただし, 位置 $X(t)$ での車の速度は

$$V(\rho(X(t),t)) = 1 - \rho(X(t),t)$$

に等しい.

演習問題 1.2. 交通流の方程式

$$\partial_t \rho + \partial_x (\rho V(\rho)) = 0$$

は, 初期条件

$$\rho(x,0) = \rho_0(x)$$

を満たす古典解を $-\infty < x < \infty$, $0 \le t \le T_0$ で持つと仮定する． 時刻 $t=0$ で $x_0 < x_1$ にいる車の時刻 $t>0$ での位置をそれぞれ $X_0(t)$, $X_1(t)$ とする．このとき

$$\int_{X_0(t)}^{X_1(t)} \rho(x,t)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} \rho_0(x)\,dx, \quad 0 \le t \le T_0$$

が成り立つことを示せ． また, 現実の現象において, この等式はどのようなことを意味するかを述べよ.

2　試験関数

関数 $f(t)$ を

$$f(t) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{t}\right), & t > 0, \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

で定める． $n = 0, 1, 2, \ldots$ に関する帰納法を用いると, $p_n(t)$ を適当な t の多項式として,

$$f^{(n)}(t) = \frac{p_n(t)}{t^{2n}} \exp\left(-\frac{1}{t}\right),\ t > 0$$

となることを確かめることができる． したがって,

$$\lim_{t \downarrow 0} f^{(n)}(t) = \lim_{x \to \infty} p_n\left(\frac{1}{x}\right) x^{2n} \exp(-x) = 0$$

であり, $f(t)$ は $-\infty < t < \infty$ で C^∞ 級であることが分かる． $x \in (-1, 1)$ において, $f(1 - x^2) > 0$ であるから,

$$I = \int_{-1}^{1} f(1 - x^2)\, dx$$

が正の有限値として定まる． この定数 I を用いて, $(-\infty, \infty)$ 上の関数 φ を

$$\varphi(x) = f(1 - x^2)/I \tag{2.1}$$

で定める．この φ は $(-\infty, \infty)$ 全体で C^∞ 級であり, $-1 < x < 1$ のとき $\varphi(x) > 0$ で, それ以外の x に対しては $\varphi(x) = 0$ である． また,

$$\varphi(-x) = \varphi(x),\ x \in (-\infty, \infty)$$

である． さらに, 定数 I の定め方から,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, dx = \int_{-1}^{1} \varphi(x)\, dx = 1$$

が満たされる．

$-\infty \leq a < b \leq \infty$ とする． 開区間 (a, b) 上の (実数値) 連続関数の全体を $C(a, b)$ と書く． (a, b) 上の関数で, そこで C^k 級の関数の全体を $C^k(a, b)$ と書く $(k = 0, 1, 2, \ldots, \infty)$． $\varphi \in C(-\infty, \infty)$ に対して

$$\mathrm{supp}(\varphi) = \overline{\{x \in (-\infty, \infty);\ \varphi(x) \neq 0\}}$$

を φ の**台** (support) という．台が $(-\infty, \infty)$ の有界集合であり, その台が開区間 (a, b) に含まれる $(-\infty, \infty)$ 上の連続関数の全体を $C_0(a, b)$ と書く． さらに,

$C_0^k(a,b) = C_0(a,b) \cap C^k(a,b)$ と書く $(k = 0,1,2,\ldots,\infty)$. $C_0^\infty(a,b)$ に属する関数を (a,b) 上の**試験関数** (test function) という. (2.1) で与えられる φ は $(-\infty,\infty)$ 上の 試験関数 であり, $\mathrm{supp}(\varphi) = [-1,1]$ である.

$\varepsilon > 0$ に対し, (2.1) で与えられる φ を用いて,

$$\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\varphi(\frac{x}{\varepsilon}),\ x \in (-\infty,\infty)$$

と定める. 関数の族 φ_ϵ を Friedrichs の**軟化子**という. $\varphi_\varepsilon \in C_0^\infty(-\infty,\infty)$ であり, φ_ε は次の性質を持つ.

命題 2.1.

$$\varphi_\varepsilon(x) \geq 0,\ \varphi_\varepsilon(-x) = \varphi_\varepsilon(x),\ x \in (-\infty,\infty)$$
$$\mathrm{supp}(\varphi_\varepsilon) = [-\varepsilon,\varepsilon]$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_\varepsilon(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(x)\,dx = 1$$
$$\sup_{x\in(-\infty,\infty)} |x\varphi_\varepsilon(x)| = \sup_{x\in(-\infty,\infty)} |x\varphi_1(x)| = \sup_{x\in[-1,1]} |x\varphi_1(x)| < \infty$$
$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \varphi_\varepsilon(x) = 0,\ x \neq 0,\ \lim_{\varepsilon\downarrow 0} x\varphi_\varepsilon(x) = 0,\ x \in (-\infty,\infty).$$

$\varepsilon > 0$ に対し

$$h_\varepsilon(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi_\varepsilon(s)\,ds = \int_{-\varepsilon}^{x} \frac{1}{\varepsilon}\varphi_1(\frac{s}{\varepsilon})\,ds = \int_{-1}^{x/\varepsilon} \varphi_1(s)\,ds,\ x \in (-\infty,\infty)$$

と定める. $h_\varepsilon \in C^\infty(-\infty,\infty)$ は次の性質を持つ.

命題 2.2.

$$h_\varepsilon(x) = 0,\ x \leq -\varepsilon;\ 0 < h_\varepsilon(x) < 1,\ -\varepsilon < x < \varepsilon;\ h_\varepsilon(x) = 1,\ x \geq \varepsilon,$$
$$h_\varepsilon(x) \leq h_\varepsilon(y),\ x \leq y$$
$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} h_\varepsilon(x) = \mathrm{sign}^+(x)\ \ x \in (-\infty,\infty).$$

ただし,

$$\mathrm{sign}^+(x) = (\mathrm{sign}(x)+1)/2,\ \mathrm{sign}^-(x) = (\mathrm{sign}(x)-1)/2,\ x \in (-\infty,\infty),$$
$$\mathrm{sign}(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

である. sign を**符号関数**, sign^+ を **ヘビサイド関数**という. 一般に,

$$\mathrm{sign}^+(x) + \mathrm{sign}^-(x) = \mathrm{sign}(x),\ \mathrm{sign}^+(-x) = -\,\mathrm{sign}^-(x)$$

である．

　$\varepsilon > 0$ に対し

$$\Phi_\varepsilon(x) = \int_{-\infty}^{x} h_\varepsilon(s)\,ds = \int_{-\varepsilon}^{x} h_\varepsilon(s)\,ds,\ x \in (-\infty, \infty)$$

と定める． $\Phi_\varepsilon \in C^\infty(-\infty, \infty)$ は次の性質を持つ．

命題 2.3.

$$\begin{gathered}\Phi_\varepsilon(\theta x + (1-\theta)y) \le \theta\Phi_\varepsilon(x) + (1-\theta)\Phi_\varepsilon(y),\ \theta \in [0,1],\ x, y \in (-\infty, \infty),\\ \Phi_\varepsilon(x) \le \Phi_\varepsilon(y),\ x \le y,\ x, y \in (-\infty, \infty),\\ 0 \le \Phi_\varepsilon(x) \le (x+\varepsilon)^+ \le x^+ + \varepsilon,\ x \in (-\infty, \infty),\\ \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \Phi_\varepsilon(x) = x^+,\ x \in (-\infty, \infty).\end{gathered}$$

　ただし,

$$x^+ = (|x| + x)/2,\ x^- = (|x| - x)/2,\ x \in (-\infty, \infty)$$

と書く．一般に,

$$x^+ + x^- = |x|,\ x^+ - x^- = x,\ (-x)^+ = x^-,\ (-x)^- = x^+$$

である．また,

$$x^+ = x \vee 0, \quad x^- = -x \wedge 0,$$

とかける。ただし,

$$a \vee b = \max\{a, b\}, \quad a \wedge b = \min\{a, b\}$$

である。

　$-\infty \le a < b \le \infty$ とする．開区間 (a, b) 上で (Lebesgue) 可積分な関数の全体を $L^1(a, b)$ と書く．(a, b) 上で本質的に有界な関数の全体を $L^\infty(a, b)$ と書く．$1 < p < \infty$ のとき, 開区間 (a, b) 上で p 乗可積分な関数の全体を $L^p(a, b)$ と書く．$f \in L^p(a, b)$ のとき, その (標準) ノルムを

$$\|f\|_{L^p} = \begin{cases} \inf\{M;\ |f(x)| \le M \text{ a.a. } x \in (a, b)\}, & \text{if } p = \infty \\ \left(\displaystyle\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}, & \text{if } 1 \le p < \infty \end{cases}$$

と書く．(a, b) の任意の有界閉部分区間上で可積分な関数の全体を $L^1_{loc}(a, b)$ と書く． このような関数を (a, b) 上で局所可積分な関数という．(a, b) 上で連続な関数は (a, b) 上で局所可積分である．また，$L^p(a, b) \subset L^1_{loc}(a, b)$ である．

$f \in L^p(a,b)$ とする $(1 \le p \le \infty)$．各 $\varepsilon > 0$ に対し，$(-\infty,\infty)$ で定義される関数 $f_\varepsilon(x)$ を

$$f_\varepsilon(x) = \int_a^b f(y)\varphi_\varepsilon(x-y)\,dy,\ x \in (-\infty,\infty)$$

と定めると, $\varphi_\varepsilon \in C_0^\infty(-\infty,\infty)$ であることから $f_\varepsilon \in C^\infty(-\infty,\infty)$ となる．この $f_\varepsilon(x)$ について, 次が成り立つ.

命題 2.4.(1) ほとんどすべての $x \in (a,b)$ で

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} f_\varepsilon(x) = f(x)$$

となる.

(2) $f \in L^p(a,b)$ ならば, $f_\varepsilon \in L^p(-\infty,\infty)$ で

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f_\varepsilon(x)|^p\,dx \le \int_a^b |f(x)|^p\,dx$$

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \int_a^b |f_\varepsilon(x) - f(x)|^p\,dx = 0$$

となる．ただし, $1 \le p < \infty$ である.

(3) $f \in C[a,b]$ ならば, 任意の $a < c < d < b$ に対して

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left(\sup_{x\in[c,d]} |f_\varepsilon(x) - f(x)|\right) = 0$$

となる.

証明. $x \notin (a,b)$ に対して $f(x) = 0$ とおき, $f(x)$ を $(-\infty,\infty)$ 全体に拡張しておく．このとき

$$f_\varepsilon(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\varphi_\varepsilon(x-y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\varphi_\varepsilon(y)\,dy$$

である．一方,

$$f(x) = f(x)\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_\varepsilon(y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi_\varepsilon(y)\,dy$$

である．よって,

$$f_\varepsilon(x) - f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (f(x-y) - f(x))\varphi_\varepsilon(y)\,dy$$

$$|f_\varepsilon(x) - f(x)| \le \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |f(x-y) - f(x)|\varphi_\varepsilon(y)\,dy \tag{2.2}$$

であり,

$$|f_\varepsilon(x)-f(x)|\le\frac{M}{\varepsilon}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}|f(x-y)-f(x)|\,dy \tag{2.3}$$

となる．ただし, $M=\sup\{\varphi_1(y);\ y\in(-\infty,\infty)\}$ である．x が f の Lebesgue 点ならば, この右辺は $\varepsilon\downarrow 0$ のとき消える．

$f\in L^1(a,b)$ とする．このとき,

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f_\varepsilon(x)|\,dx\le\int_a^b|f(y)|\left(\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_\varepsilon(x-y)\,dx\right)dy\le\int_a^b|f(y)|\,dy$$

である．(2.2) の両辺を (a,b) 上で積分して

$$\begin{aligned}\int_a^b|f_\varepsilon(x)-f(x)|\,dx&\le\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\left(\int_a^b|f(x-y)-f(x)|\,dx\right)\varphi_\varepsilon(y)\,dy\\&\le\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\varphi_\varepsilon(y)\,dy\sup_{|y|\le\varepsilon}\left(\int_a^b|f(x-y)-f(x)|\,dx\right)\\&=\sup_{|y|\le\varepsilon}\left(\int_a^b|f(x-y)-f(x)|\,dx\right)\end{aligned}$$

となる．

$$\lim_{y\to 0}\int_a^b|f(x-y)-f(x)|\,dx=0$$

だから, 上の最右辺は $\varepsilon\downarrow 0$ のとき消える．

次に，$f\in L^p(a,b)$ とする．$(1<p<\infty)$ このとき, Hölder の不等式により

$$\begin{aligned}&\int_a^b|f(y)|\varphi_\varepsilon(x-y)\,dy\\&=\int_a^b|f(y)|\varphi_\varepsilon(x-y)^{1/p}\varphi_\varepsilon(x-y)^{1/q}\,dy\\&\le\left(\int_a^b|f(y)|^p\varphi_\varepsilon(x-y)\,dy\right)^{1/p}\left(\int_a^b\varphi_\varepsilon(x-y)\,dy\right)^{1/q}\\&\le\left(\int_a^b|f(y)|^p\varphi_\varepsilon(x-y)\,dy\right)^{1/p}\end{aligned}$$

であるから $(1/p+1/q=1)$,

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f_\varepsilon(x)|^p\,dx\le\int_a^b|f(y)|^p\left(\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_\varepsilon(x-y)\,dx\right)dy=\int_a^b|f(y)|^p\,dy$$

を得る．同様にして,

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}|f(x-y)-f(x)|\varphi_\varepsilon(y)\,dy\\&\le\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(x-y)-f(x)|^p\varphi_\varepsilon(y)\,dy\right)^{1/p}=\left(\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}|f(x-y)-f(x)|^p\varphi_\varepsilon(y)\,dy\right)^{1/p}\end{aligned}$$

であるから, (2.2) より,

$$\int_a^b |f_\varepsilon(x)-f(x)|^p\,dx \le \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \varphi_\varepsilon(y)\left(\int_a^b |f(x-y)-f(x)|^p\,dx\right)dy$$
$$\le \sup_{|y|\le\varepsilon}\left(\int_a^b |f(x-y)-f(x)|^p\,dx\right)$$

となる． Lebesgue の定理により

$$\lim_{y\to 0}\int_a^b |f(x-y)-f(x)|^p\,dx = 0$$

だから, 上の最右辺は $\varepsilon\downarrow 0$ のとき消える.

最後に, $f\in C[a,b]$ とし, $a<c<d<b$ とする．(2.2) より,

$$\begin{aligned}&\sup\{|f_\varepsilon(x)-f(x)|;\ x\in[c,d]\}\\ \le&\sup\{|f(y)-f(\hat{y})|;\ y,\hat{y}\in[c-\varepsilon,d+\varepsilon],\ |y-\hat{y}|\le\varepsilon\}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\varphi_\varepsilon(y)\,dy\end{aligned}$$

である．この右辺は $\varepsilon\downarrow 0$ のとき消える.

系 2.1. $C_0^\infty(a,b)$ は $L^p(a,b)$ で稠密である．ただし, $1\le p<\infty$ である.

証明．$a<a_n<b_n<b$ を $n\to\infty$ のとき, $a_n\downarrow a$, $b_n\uparrow b$ であるように選ぶ. $f\in L^p(a,b)$ に対して,

$$f_n(x)=\begin{cases} f(x), & x\in(a_n,b_n)\\ 0, & x\in(a,b)\setminus(a_n,b_n)\end{cases}$$

で定めれば, $n\to\infty$ のとき, $L^p(a,b)$ において, f_n は f に収束する．$\varepsilon>0$ に対して

$$f_{n,\varepsilon}(x)=\int_a^b f_n(y)\varphi_\varepsilon(x-y)\,dy$$

と定めれば, $\varepsilon>0$ のとき, $L^p(a,b)$ において, $f_{n,\varepsilon}$ は f_n に収束する．さらに, $\mathrm{supp}(f_{n,\varepsilon})\subset[a_n-\varepsilon,b_n+\varepsilon]$ であるから, $\varepsilon>0$ が十分に小さければ, $\mathrm{supp}(f_{n,\varepsilon})\subset(a,b)$ である.

系 2.2. $f\in L^p(a,b)$ とする ($1\le p\le\infty$)．$\varphi\ge 0$ であるようなすべての $\varphi\in C_0^\infty(-\infty,\infty)$ に対して,

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx\ge 0$$

ならば, ほとんどすべての $x\in(a,b)$ において $f(x)\ge 0$ である．また, $\varphi\ge 0$ であるようなすべての $\varphi\in C_0^\infty(-\infty,\infty)$ に対して,

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx=0$$

ならば, ほとんどすべての $x\in(a,b)$ において $f(x)=0$ である.

系 2.3. $f \in C[a,b]$ とする．$\varphi \geq 0$ であるようなすべての $\varphi \in C_0^\infty(-\infty,\infty)$ に対して，

$$\int_a^b f(x)\varphi'(x)\,dx \geq 0$$

ならば，

$$f(c) \geq f(d),\ a \leq c < d \leq b$$

である．また，$\varphi \geq 0$ であるようなすべての $\varphi \in C_0^\infty(-\infty,\infty)$ に対して，

$$\int_a^b f(x)\varphi'(x)\,dx = 0$$

ならば，適当な定数 k に対して，

$$f(x) = k, \quad x \in (a,b)$$

である．

証明. $a < c < d < b$ とする．$\varepsilon > 0$ に対して

$$\tilde{\varphi}(x) = h_\varepsilon(x-c) - h_\varepsilon(x-d),\ x \in (-\infty,\infty)$$

とおくと，$\tilde{\varphi} \in C_0^\infty(-\infty,\infty)$ で $\tilde{\varphi} \geq 0$ がみたされる．

$$\tilde{\varphi}'(x) = \varphi_\varepsilon(x-c) - \varphi_\varepsilon(x-d),\ x \in (-\infty,\infty)$$

である． したがって

$$\int_a^b f(x)(\varphi_\varepsilon(x-c) - \varphi_\varepsilon(x-d))\,dx = \int_{-\infty}^\infty f(x)(\varphi_\varepsilon(c-x) - \varphi_\varepsilon(d-x))\,dx \geq 0$$

が成り立つ． ここで，$\varepsilon \downarrow 0$ とすれば $f(c) - f(d) \geq 0$ が従う． $f(x)$ の連続性から，$c = a$ や $d = b$ のときも成り立つ．

命題 2.5. $[c,d]$ を有界閉区間，(a,b) を有界開区間で

$$[c,d] \subset (a,b)$$

を満たすものとする．このとき次を満たす $\varphi \in C_0^\infty(-\infty,\infty)$ が存在する．

(1) $$0 \leq \varphi(x) \leq 1,\ -\infty < x < \infty,$$

(2) $$\mathrm{supp}(\varphi) \subset (a,b)$$

(3) $$\varphi(x) = 1,\ x \in [c,d]$$

証明. $\varepsilon > 0$ を $\varepsilon < (c-a)/2$ と $\varepsilon < (b-d)/2$ を満たすようにとり, $x_0 = (a+c)/2$, $x_1 = (b+d)/2$ とおいて,

$$\varphi(x) = h_\varepsilon(x - x_0)h_\varepsilon(x_1 - x)$$

とおけばよい.

命題 2.6. $[c,d]$ を有界閉区間, (aj, b_j), $(j = 1, 2, \cdots, N)$, を有界開区間で

$$[c,d] \subset \cup_{j=1}^N (a_j, b_j)$$

を満たすものとする．このとき次を満たす $\varphi_j \in C_0^\infty(-\infty, \infty)$, $(j = 1, 2, \cdots, N)$, が存在する.

$$\mathrm{supp}(\varphi_j) \subset (a_j, b_j),\ j = 1, 2, \cdots, N, \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^N \varphi_j(x) \le 1,\ \varphi_j(x) \ge 0,\ j = 1, 2, \cdots, N,\ -\infty < x < \infty, \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^N \varphi_j(x) = 1,\ x \in [c,d] \tag{3}$$

証明. 有界閉区間 $[c_j, d_j]$ を

$$[c,d] \subset \cup_{j=1}^N (c_j, d_j),\ [c_j, d_j] \subset (a_j, b_j),\ j = 1, 2, \cdots, N$$

を満たすように選ぶ．このとき, $\psi_j \in C_0^\infty(-\infty, \infty)$ を

$$\mathrm{supp}(\psi_j) \subset (a_j, b_j),\ \psi_j(x) = 1,\ x \in [c_j, d_j],$$
$$0 \le \psi_j(x) \le 1, x \in (-\infty, \infty),\ j = 1, 2, \cdots, N$$

を満たすようにとる $(j = 1, 2, \cdots, N)$．このとき,

$$\varphi_1 = \psi_1,\ \varphi_j = \psi_j(1 - \psi_1)\cdots(1 - \psi_{j-1}),\ j = 2, \cdots, N$$

と定めればよい．なぜなら,

$$\sum_{j=1}^N \varphi_j = 1 - (1 - \psi_1)\cdots(1 - \psi_N)$$

が成り立つからである.

定理 2.1. $1 \le p < \infty$ とする．集合 $\mathcal{F} \subset L^p(-\infty, \infty)$ に対して次を仮定する.

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \|f\|_{L^p} < \infty \tag{1}$$

(2)
$$\lim_{y\to 0}\left(\sup_{f\in\mathcal{F}}\|\tau_y f - f\|_{L^p}\right)=0$$

(3)
$$\lim_{R\to\infty}\left(\sup_{f\in\mathcal{F}}\int_{|x|>R}|f(x)|\,dx\right)=0$$

このとき, $\mathcal{F}$ は $L^p(-\infty,\infty)$ で全有界になる． ただし, $f \in L^p(-\infty,\infty)$, $y \in (-\infty,\infty)$ のとき, $(\tau_y f)(x)=f(x+y)$ である．

証明. $\varepsilon>0$, $f\in\mathcal{F}$ のとき,

$$f_\varepsilon(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(y)\varphi_\varepsilon(x-y)\,dy$$

と書き, $\mathcal{F}_\varepsilon=\{f_\varepsilon;\ f\in\mathcal{F}\}$ とおく．$\mathcal{F}_\varepsilon\subset L^p(-\infty,\infty)$ であり, $f\in\mathcal{F}$ のとき,

$$\|f_\varepsilon - f\|_{L^p}\le\sup_{|y|\le\varepsilon}\|\tau_y f-f\|_{L^p}\le\sup_{|y|\le\varepsilon}\sup_{f\in\mathcal{F}}\|\tau_y f-f\|_{L^p}$$

であるから, $\varepsilon\downarrow 0$ のとき,

$$\inf\{\|g-f\|_{L^p};\ g\in\mathcal{F}_\varepsilon,\ f\in\mathcal{F}\}\to 0$$

である．よって, 各 $\varepsilon>0$ に対して, $\mathcal{F}_\varepsilon$ が $L^p(-\infty,\infty)$ で全有界であることを示せばよい．

$\varepsilon>0$ を固定する． $f\in\mathcal{F}$ とする．

$$\begin{aligned}|f_\varepsilon(x)|&\le\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(y)|^p\varphi_\varepsilon(x-y)\,dy\right)^{1/p}\\&\le\|\varphi_\varepsilon\|_{L^\infty}\|f\|_{L^p}\\|f_\varepsilon(x+y)-f_\varepsilon(x)|&\le\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(s+y)-f(s)|^p\varphi_\varepsilon(x-s)\,ds\right)^{1/p}\\&\le\|\varphi_\varepsilon\|_{L^\infty}\|\tau_y f-f\|_{L^p}\end{aligned}$$

が成り立つ．よって,

$$\begin{aligned}\sup_{f\in\mathcal{F}}\|f_\varepsilon\|_{L^\infty}&\le\|\varphi_\varepsilon\|_{L^\infty}\sup_{f\in\mathcal{F}}\|f\|_{L^p}\\\sup_{f\in\mathcal{F}}\|\tau_y f_\varepsilon-f_\varepsilon\|_{L^\infty}&\le\|\varphi_\varepsilon\|_{L^\infty}\sup_{f\in\mathcal{F}}\|\tau_y f-f\|_{L^p}\end{aligned}$$

である．すなわち, $\mathcal{F}_\varepsilon$ は $(-\infty,\infty)$ において, 一様有界で同程度連続である．$\delta>0$ とする．$R>\varepsilon$ を

$$\sup_{f\in\mathcal{F}}\left(\int_{|x|>R-\varepsilon}|f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}\le\frac{\delta}{4}$$

であるようにとる．Ascoli-Arzelà の定理により，$f_1, f_2, \cdots, f_N \in \mathcal{F}$ が取れて，任意の $f \in \mathcal{F}$ に対して，

$$\min_{i=1,2,\cdots,N}\left(\sup_{|x|\le R}|f_{i,\varepsilon}(x) - f_\varepsilon(x)|\right) \le \frac{\delta}{2(2R)^{1/p}}$$

となる．このとき，任意の $f \in \mathcal{F}$ に対して，

$$\begin{aligned}
&\min_{j=1,2,\cdots,N}\|f_{j,\varepsilon} - f_\varepsilon\|_{L^p}\\
\le&\left(\int_{|x|\le R}|f_{i,\varepsilon}(x) - f_\varepsilon(x)|^p\,dx\right)^{1/p} + \left(\int_{|x|>R}|f_{i,\varepsilon}(x)|^p\,dx\right)^{1/p} + \left(\int_{|x|>R}|f_\varepsilon(x)|^p\,dx\right)^{1/p}\\
\le&(2R)^{1/p}\left(\sup_{|x|\le R}|f_{i,\varepsilon}(x) - f_\varepsilon(x)|\right) + \left(\int_{|x|>R-\varepsilon}|f_i(x)|^p\,dx\right)^{1/p} + \left(\int_{|x|>R-\varepsilon}|f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}\\
\le&(2R)^{1/p}\left(\sup_{|x|\le R}|f_{i,\varepsilon}(x) - f_\varepsilon(x)|\right) + 2\sup_{f\in\mathcal{F}}\left(\int_{|x|>R-\varepsilon}|f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}
\end{aligned}$$

である．よって，

$$\begin{aligned}
&\min_{j=1,2,\cdots,N}\|f_{j,\varepsilon} - f_\varepsilon\|_{L^p}\\
\le&(2R)^{1/p}\min_{i=1,2,\cdots,N}\left(\sup_{|x|\le R}|f_{i,\varepsilon}(x) - f_\varepsilon(x)|\right) + 2\sup_{f\in\mathcal{F}}\left(\int_{|x|>R-\varepsilon}|f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}\\
\le&\delta/2 + \delta/2 = \delta
\end{aligned}$$

となる．$\delta > 0$ は任意だから，$\mathcal{F}_\varepsilon$ は $L^p(-\infty, \infty)$ で全有界である．

$(-\infty, \infty) \times (-\infty, \infty)$ 上の C^k 級関数の全体を $C^k((-\infty, \infty) \times (-\infty, \infty))$ と書く．$(k = 0, 1, \cdots, \infty)$ $\varphi \in C((-\infty, \infty) \times (-\infty, \infty)) = C^0((-\infty, \infty) \times (-\infty, \infty))$ に対して，

$$\mathrm{supp}(\varphi) = \overline{\{(x, y);\ \varphi(x, y) \neq 0\}}$$

を φ の台という．$\Omega \subset (-\infty, \infty) \times (-\infty, \infty)$ を開集合とする．$\mathrm{supp}(\varphi) \subset \Omega$ である $\varphi \in C^\infty((-\infty, \infty) \times (-\infty, \infty))$ の全体を $C_0^\infty(\Omega)$ と書き，Ω 上の試験関数という．

演習問題 2.1. 任意の $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ に対して，φ_1，$\varphi_2 \ge 0$ であるような φ_1，$\varphi_2 \in C_0^\infty(\Omega)$ がとれて，$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ となることを示せ.

3　単独保存則のエントロピー解

単独保存則

$$\partial_t u + \partial_x F(u) = 0 \tag{3.1}$$

に対する初期値問題を考える．ただし F は C^1 級であると仮定する．今 $u(x,t)$ と $\hat{u}(x,t)$ を $0 \le t \le T_0$, $-\infty < x < \infty$ で有界な (3.1) の古典解とする．定数 M を $|u(x,t)|$, $|\hat{u}(x,t)| \le M$ であるようにとり，さらに定数 L を $\sup_{r\in[-M,M]}|F'(r)| \le L$ であるようにとる．このとき，

$$|F(u) - F(\hat{u})| \le L|u - \hat{u}|$$

が成り立つ．$\varphi \in C_0^\infty((-\infty,\infty)\times(0,T_0))$ とする．部分積分により，

$$\begin{aligned}
&\int_0^{T_0}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_\varepsilon(u-\hat{u})\partial_t\varphi\,dx\right)dt\\
&= -\int_0^{T_0}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\partial_t\Phi_\varepsilon(u-\hat{u})\varphi\,dx\right)dt\\
&= -\int_0^{T_0}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\Phi'_\varepsilon(u-\hat{u})\partial_t(u-\hat{u})\varphi\,dx\right)dt\\
&= \int_0^{T_0}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\Phi'_\varepsilon(u-\hat{u})\varphi\partial_x(F(u)-F(\hat{u}))\,dx\right)dt\\
&= -\int_0^{T_0}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\partial_x\left(\Phi'_\varepsilon(u-\hat{u})\varphi\right)(F(u)-F(\hat{u}))\,dx\right)dt\\
&= -\int_0^{T_0}\left(\int_{-\infty}^{\infty}h_\varepsilon(u-\hat{u})(F(u)-F(\hat{u}))\partial_x\varphi\,dx\right)dt\\
&-\int_0^{T_0}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_\varepsilon(u-\hat{u})\partial_x(u-\hat{u})(F(u)-F(\hat{u}))\varphi\,dx\right)dt
\end{aligned}\tag{3.2}$$

を得る．命題 2.1 により，

$$|\varphi_\varepsilon(u-\hat{u})(F(u)-F(\hat{u}))| \le L\varphi_\varepsilon(u-\hat{u})|u-\hat{u}|$$

の右辺は有界で $\varepsilon \downarrow 0$ のとき消える．したがって，等式 (3.2) の右辺第 2 項も $\varepsilon \downarrow 0$ のとき消える．故に (3.2) で $\varepsilon \downarrow 0$ とすることにより，

$$\begin{aligned}
&\int_0^{T_0}\left(\int_{-\infty}^{\infty}(u-\hat{u})^+\partial_t\varphi\,dx\right)dt\\
&= -\int_0^{T_0}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{sign}^+(u-\hat{u})(F(u)-F(\hat{u}))\partial_x\varphi\,dx\right)dt
\end{aligned}$$

すなわち，

$$\int_0^{T_0}\left(\int_{-\infty}^{\infty}(u-\hat{u})^+\partial_t\varphi + \mathrm{sign}^+(u-\hat{u})(F(u)-F(\hat{u}))\partial_x\varphi\,dx\right)dt = 0 \tag{3.3}$$

を得る.

$R>0$ とし, 各 $\varepsilon>0$ に対し,

$$\varphi(x,t)=h_\varepsilon(x+R-Lt)h_\varepsilon(R-Lt-x)\psi(t)$$

とおく. ただし, $\psi\in C_0^\infty(0,T_0)$ で $\psi\geq 0$ であるとする. このとき, $\varphi\in C_0^\infty((-\infty,\infty)\times(0,T_0))$ である. また, $\varphi\geq 0$ である.

$$\begin{aligned}
&\partial_x\varphi(x,t)\\
&=\left(h_\varepsilon'(x+R-Lt)h_\varepsilon(R-Lt-x)-h_\varepsilon(x+R-Lt)h_\varepsilon'(R-Lt-x)\right)\psi(t)\\
&\partial_t\varphi(x,t)\\
&=-L\left(h_\varepsilon'(x+R-Lt)h_\varepsilon(R-Lt-x)+h_\varepsilon(x+R-Lt)h_\varepsilon'(R-Lt-x)\right)\psi(t)\\
&+h_\varepsilon(x+R-Lt)h_\varepsilon(R-Lt-x)\psi'(t)
\end{aligned}$$

である. よって,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{sign}^+(u(x,t)-\hat{u}(x,t))(F(u(x,t))-F(\hat{u}(x,t)))\partial_x\varphi(x,t)\\
&\leq L(u(x,t)-\hat{u}(x,t))^+(h_\varepsilon'(x+R-Lt)h_\varepsilon(R-Lt-x)\\
&+h_\varepsilon(x+R-Lt)h_\varepsilon'(R-Lt-x))\psi(t)
\end{aligned}\tag{3.4}$$

である. 一方,

$$\begin{aligned}
&(u(x,t)-\hat{u}(x,t))^+\partial_t\varphi(x,t)\\
&=-L(u(x,t)-\hat{u}(x,t))^+(h_\varepsilon'(x+R-Lt)h_\varepsilon(R-Lt-x)\\
&+h_\varepsilon(x+R-Lt)h_\varepsilon'(R-Lt-x))\psi(t)\\
&+(u(x,t)-\hat{u}(x,t))^+h_\varepsilon(x+R-Lt)h_\varepsilon(R-Lt-x)\psi'(t)
\end{aligned}\tag{3.5}$$

である. 式 (3.4), (3.5) より,

$$\begin{aligned}
&(u(x,t)-\hat{u}(x,t))^+\partial_t\varphi(x,t)\\
&+\mathrm{sign}^+(u(x,t)-\hat{u}(x,t))(F(u(x,t))-F(\hat{u}(x,t)))\partial_x(x,t)\\
&\leq(u(x,t)-\hat{u}(x,t))^+h_\varepsilon(x+R-Lt)h_\varepsilon(R-Lt-x)\psi'(t)
\end{aligned}$$

であることがわかる. (3.3) に代入して

$$\int_0^{T_0}\left(\int_{-\infty}^{\infty}(u(x,t)-\hat{u}(x,t))^+h_\varepsilon(x+R-Lt)h_\varepsilon(R-Lt-x)\psi'(t)\,dx\right)dt\geq 0$$

を得る. $\varepsilon\downarrow 0$ とすると,

$$\begin{aligned}
&h_\varepsilon(x+R-Lt)h_\varepsilon(R-Lt-x)\to\mathrm{sign}^+(x+R-Lt)\,\mathrm{sign}^+(R-Lt-x)\\
&=\begin{cases}1, & -R+Lt<x<R-Lt,\ 0<t<R/L\\ 0, & x<-R+Lt\\ 0, & x>R-Lt\\ 1/2, & x=-R+Lt,\ x=R-Lt\end{cases}
\end{aligned}$$

であるから,
$$\int_0^{T_0} f(t)\psi'(t)\,dt \geq 0$$
を得る．ただし, $0 \leq t \leq T_0$ のとき,
$$f(t) = \int_{-R+Lt<x<R-Lt} (u(x,t) - \hat{u}(x,t))^+\,dx$$
とし,$t < 0$ のとき，$f(t) = f(0)$，$t > T_0$ のとき，$f(t) = f(T_0)$ である．故に, $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq T_0$ のとき,
$$f(t_1) \leq f(t_0)$$
となる．故に, $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq T_0$, $R > 0$ に対して
$$\begin{aligned}&\int_{-R+Lt_1<x<R-Lt_1} (u(x,t_1) - \hat{u}(x,t_1))^+\,dx \\ &\leq \int_{-R+Lt_0<x<R-Lt_0} (u(x,t_0) - \hat{u}(x,t_0))^+\,dx \end{aligned} \tag{3.6}$$
が成り立つ．$u(x,0) = u_0(x)$, $\hat{u}(x,0) = \hat{u}_0(x)$ とし, $u_0 \leq \hat{u}_0$ であると仮定すると,
$$\int_{-R<x<R} (u_0(x) - \hat{u}_0(x))^+\,dx = 0$$
である．よって, (3.6) で $t_0 = 0$, $t_1 = t$ とおくことにより,
$$\int_{-R+Lt<x<R-Lt} (u(x,t) - \hat{u}(x,t))^+\,dx = 0, \quad 0 \leq t \leq T_0$$
を得る．$R > 0$, $0 \leq t \leq T_0$ は任意だから, $x \in (-\infty, \infty)$, $0 \leq t \leq T_0$ にたいして,
$$(u(x,t) - \hat{u}(x,t))^+ \leq 0$$
となる．すなわち, $u_0(x) \leq \hat{u}_0(x)$ ならば
$$u(x,t) \leq \hat{u}(x,t)$$
が成り立つことになる．単独保存則の古典解はこの意味で**順序保存性**を持つことが分かった. (3.6) で u と $\hat{u}$ を入れ替えて,
$$\begin{aligned}&\int_{-R+Lt_1<x<R-Lt_1} (\hat{u}(x,t_1) - u(x,t_1))^+\,dx \\ &\leq \int_{-R+Lt_0<x<R-Lt_0} (\hat{u}(x,t_0) - u(x,t_0))^+\,dx \end{aligned} \tag{3.7}$$

も成り立つ. (3.6) と (3.7) より

$$\int_{-R+Lt_1<x<R-Lt_1} |\hat{u}(x,t_1) - u(x,t_1)|\, dx \\ \le \int_{-R+Lt_0<x<R-Lt_0} |\hat{u}(x,t_0) - u(x,t_0)|\, dx$$

$(0 \le t_0 \le t_1 \le T_0,\ R > 0)$ となる．特に

$$\int_{-R+Lt<x<R-Lt} |\hat{u}(x,t) - u(x,t)|\, dx \le \int_{-R<x<R} |\hat{u}_0(x) - u_0(x)|\, dx$$

$(0 \le t \le T_0,\ R > 0)$ である．このことは古典解が上の意味で初期値に連続的に依存することを示している. またこの式に 自明解 $\hat{u}(x,t) = 0$ を代入して,

$$\int_{-R+Lt<x<R-Lt} |u(x,t)|\, dx \le \int_{-R<x<R} |u_0(x)|\, dx,\ 0 \le t \le T_0,\ R > 0$$

であることもわかる.

等式 (3.3) は弱解に対しては一般には成立しない. しかし, 現実の現象に対応する解は順序保存性は持っていると考えられる. あるいは逆に順序保存性を持っている解は現実の現象に対応すると考えられる. なぜなら, そのような解は上と同じ意味で初期値に連続的に依存するからである.

$(-\infty,\infty)\times(0,T_0)$ 上で本質的に有界な可測関数の全体を $L^\infty((-\infty,\infty)\times(0,T_0))$ とかく. このうち任意の $-\infty < a < b < \infty$ と $0 \le t \le T_0$ に対して

$$\lim_{s\to t} \int_a^b |u(x,t) - u(x,s)|\, dx = 0$$

となる $u \in L^\infty((-\infty,\infty)\times(0,T_0))$ の全体を $L^\infty((-\infty,\infty)\times(0,T_0)) \cap C([0,T_0] : L^1_{loc}(-\infty,\infty))$ とかく．上の議論と同様にして，次が示される.

定理 3.1. $u, \hat{u} \in L^\infty((-\infty,\infty)\times(0,T_0)) \cap C([0,T_0] : L^1_{loc}(-\infty,\infty))$ とする．$\varphi \ge 0$ であるような任意の $\varphi \in C_0^\infty((-\infty,\infty)\times(0,T_0))$ に対して，不等式

$$\int_0^{T_0} \left(\int_{-\infty}^{\infty} (u-\hat{u})^+ \partial_t\varphi + \mathrm{sign}^+(u-\hat{u})(F(u)-F(\hat{u}))\partial_x\varphi\, dx \right) dt \ge 0 \qquad (3.8)$$

が成り立つと仮定する. 定数 L を

$$|F(u(x,t)) - F(\hat{u}(x,t))| \le L|u(x,t) - \hat{u}(x,t)|,\ (x,t) \in (-\infty,\infty)\times(0,T_0)$$

を満たすようにとる．このとき

$$\int_{-R+Lt<x<R-Lt} (u(x,t) - \hat{u}(x,t))^+\, dx \\ \le \int_{-R<x<R} (u(x,0) - \hat{u}(x,0))^+\, dx, \quad 0 \le t \le T_0,\ R > 0$$

が成り立つ.

現実の現象に対応する解を $u,\ \hat{u}$ とするとき, 不等式 (3.8) が満たされると考える．$\hat{u} \equiv k$ は方程式 (3.1) の自明解であることを考慮して, 次のように定義する．

定義 3.1. $u, \hat{u} \in L^\infty((-\infty,\infty)\times(0,T_0)) \cap C([0,T_0] : L^1_{loc}(-\infty,\infty))$ とする．$\varphi \geq 0$ であるような任意の $\varphi \in C_0^\infty((-\infty,\infty)\times(0,T_0))$ と任意の定数 $k \in (-\infty,\infty)$ に対して

$$\int_0^{T_0}\left(\int_{-\infty}^{\infty}(u-k)^+\partial_t\varphi + \mathrm{sign}^+(u-k)(F(u)-F(k))\partial_x\varphi\,dx\right)dt \geq 0 \tag{3.9}$$

が成り立つとき, u を保存則 (3.1) の $0 \leq t \leq T_0$ における**エントロピー劣解** (entropy subsolution) という．$\varphi \geq 0$ であるような任意の $\varphi \in C_0^\infty((-\infty,\infty)\times(0,T_0))$ と任意の定数 $k \in (-\infty,\infty)$ に対して

$$\int_0^{T_0}\left(\int_{-\infty}^{\infty}(k-\hat{u})^+\partial_t\varphi + \mathrm{sign}^+(k-\hat{u})(F(k)-F(\hat{u}))\partial_x\varphi\,dx\right)dt \geq 0 \tag{3.10}$$

が成り立つとき, $\hat{u}$ を保存則 (3.1) の $0 \leq t \leq T_0$ における**エントロピー優解** (entropy supersolution) という．(3.1) の $0 \leq t \leq T_0$ におけるエントロピー劣解でかつエントロピー優解である $u \in L^\infty((-\infty,\infty)\times(0,T_0)) \cap C([0,T_0] : L^1_{loc}(-\infty,\infty))$ を保存則 (3.1) の $0 \leq t \leq T_0$ における**エントロピー解** (entropy solution) という

定義 3.2. $u \in L^\infty((-\infty,\infty)\times(0,T_0)) \cap C([0,T_0] : L^1_{loc}(-\infty,\infty))$ とする．任意の $\varphi \in C_0^\infty((-\infty,\infty)\times(0,T_0))$ に対して

$$\int_0^{T_0}\left(\int_{-\infty}^{\infty}u\partial_t\varphi + F(u)\partial_x\varphi\,dx\right)dt = 0 \tag{3.11}$$

が成り立つとき, u を保存則 (3.1) の $0 \leq t \leq T_0$ における**弱解** (weak solution) という．

注意 3.1. u がエントロピー劣解ならば, u は有界だから k を十分小にとれば $u-k>0$ となる．よって, (3.9) より,

$$\int_0^{T_0}\left(\int_{-\infty}^{\infty}(u-k)\partial_t\varphi + (F(u)-F(k))\partial_x\varphi\,dx\right)dt \geq 0$$

である． $\mathrm{supp}(\varphi) \subset (-\infty,\infty)\times(0,T_0)$ だから,

$$\int_0^{T_0}\left(\int_{-\infty}^{\infty}u\partial_t\varphi + F(u)\partial_x\varphi\,dx\right)dt \geq 0$$

である．同様にして, u がエントロピー優解ならば

$$-\int_0^{T_0}\left(\int_{-\infty}^{\infty}u\partial_t\varphi + F(u)\partial_x\varphi\,dx\right)dt \geq 0$$

が成り立つ. 故に, u がエントロピー解ならば

$$\int_0^{T_0}\left(\int_{-\infty}^{\infty} u\partial_t\varphi + F(u)\partial_x\varphi\, dx\right) dt = 0$$

が成り立つ. すなわちエントロピー解は弱解である.

注意 3.2. $u \in C^1((-\infty,\infty)\times[0,T_0])$ とする． u がエントロピー劣解ならば部分積分により,

$$-\int_0^{T_0}\left(\int_{-\infty}^{\infty}(\partial_t u + \partial_x F(u))\varphi\, dx\right) dt \geq 0$$

である．故に, $(x,t)\in(-\infty,\infty)\times(0,T_0)$ に於て,

$$\partial_t u + \partial_x F(u) \leq 0$$

である． u がエントロピー優解ならば, 同様に， $(x,t)\in(-\infty,\infty)\times(0,T_0)$ に於て,

$$\partial_t u + \partial_x F(u) \geq 0$$

となる． u がエントロピー解ならば， $(x,t)\in(-\infty,\infty)\times(0,T_0)$ に於て,

$$\partial_t u + \partial_x F(u) = 0$$

となる．すなわち u は古典解である.

注意 3.3. 任意の $\varphi \in C_0^\infty((-\infty,\infty)\times(0,T_0))$ と任意の定数 $k\in(-\infty,\infty)$ に対して

$$\int_0^{T_0}\left(\int_{-\infty}^{\infty}(u\vee k)\partial_t\varphi + F(u\vee k)\partial_x\varphi\, dx\right) dt \geq 0$$

が成り立つことが, u が保存則 (3.1) の $0\leq t\leq T_0$ におけるエントロピー劣解であるための必要十分条件である． $\varphi\geq 0$ であるような任意の $\varphi\in C_0^\infty((-\infty,\infty)\times(0,T_0))$ と任意の定数 $k\in(-\infty,\infty)$ に対して

$$\int_0^{T_0}\left(\int_{-\infty}^{\infty}(u\wedge k)\partial_t\varphi + F(u\wedge k)\partial_x\varphi\, dx\right) dt \leq 0$$

が成り立つことが, $\hat{u}$ が保存則 (3.1) の $0\leq t\leq T_0$ におけるエントロピー優解であるための必要十分条件である.

次の定理がなりたつ.

定理 3.2. $u,\ \hat{u}$ を保存則 (3.1) の $0 \le t \le T_0$ におけるエントロピー解とする．定数 L を

$$|F(u(x,t)) - F(\hat{u}(x,t))| \le L|u(x,t) - \hat{u}(x,t)|,\ (x,t) \in (-\infty,\infty) \times (0,T_0)$$

を満たすようにとる．このとき $0 \le t_0 \le t_1 \le T_0$, $R > 0$ に対して，

$$\begin{aligned}&\int_{-R+Lt_1<x<R-Lt_1} |u(x,t_1) - \hat{u}(x,t_1)|\,dx \\ &\le \int_{-R+Lt_0<x<R-Lt_0} |u(x,t_0) - \hat{u}(x,t_0)|\,dx \end{aligned} \tag{3.12}$$

が成り立つ．とくに $u(x,0) = \hat{u}(x,0)$, $-\infty < x < \infty$ ならば, $u(x,t) = \hat{u}(x,t)$, $-\infty < x < \infty$, $0 \le t \le T_0$ である．

定理3.1 により, 定理3.2 を確かめるためには, 次の定理3.3 を示せば十分である．

定理 3.3. $u,\ \hat{u}$ をそれぞれ保存則 (3.1) の $0 \le t \le T_0$ におけるエントロピー劣解とエントロピー優解とする．このとき, $\varphi \ge 0$ であるような, 任意の $\varphi \in C_0^\infty((-\infty,\infty) \times (0,T_0))$ に対して, 不等式

$$\int_0^{T_0} \left(\int_{-\infty}^{\infty} (u-\hat{u})^+ \partial_t \varphi + \mathrm{sign}^+(u-\hat{u})(F(u) - F(\hat{u}))\partial_x \varphi\,dx \right) dt \ge 0$$

が成り立つ．

証明. $\varphi \in C_0^\infty((-\infty,\infty) \times (0,T_0))$ は $\varphi \ge 0$ であるとする．$\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ に対し

$$\psi(x,y,t,s) = \varphi((x+y)/2, (t+s)/2)\varphi_\varepsilon(x-y)\varphi_\delta(t-s)$$

とおく．$\delta > 0$ が十分小さければ, $\psi \in C_0^\infty((-\infty,\infty)\times(-\infty,\infty)\times(0,T_0)\times(0,T_0))$ である．u が保存則 (3.1) の $0 \le t \le T_0$ におけるエントロピー劣解であるから,

$$\begin{aligned}&\int_0^{T_0} dt \int_{-\infty}^{\infty} dx \big\{(u(x,t) - \hat{u}(y,s))^+ \partial_t \psi(x,y,t,s) \\ &+ \mathrm{sign}^+(u(x,t) - \hat{u}(y,s))(F(u(x,t)) - F(\hat{u}(y,s)))\partial_x \psi(x,y,t,s)\big\} \ge 0 \end{aligned} \tag{3.13}$$

が成り立つ．$\hat{u}$ が保存則 (3.1) の $0 \le t \le T_0$ におけるエントロピー優解であるから,

$$\begin{aligned}&\int_0^{T_0} ds \int_{-\infty}^{\infty} dy \big\{(u(x,t) - \hat{u}(y,s))^+ \partial_s \psi(x,y,t,s) \\ &+ \mathrm{sign}^+(u(x,t) - \hat{u}(y,s))(F(u(x,t)) - F(\hat{u}(y,s)))\partial_y \psi(x,y,t,s)\big\} \ge 0 \end{aligned} \tag{3.14}$$

が成り立つ．不等式 (3.13) の両辺を $-\infty < y < \infty$, $0 < s < T_0$ 上で積分したものと, 不等式 (3.14) の両辺を $-\infty < x < \infty$, $0 < t < T_0$ 上で積分したものとを辺々加えて,

$$\int_0^{T_0} dt \int_0^{T_0} ds \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \big\{ (u(x,t) - \hat{u}(y,s))^+ (\partial_t \psi(x,y,t,s) + \partial_s \psi(x,y,t,s))$$
$$+ \operatorname{sign}^+(u(x,t) - \hat{u}(y,s))(F(u(x,t)) - F(\hat{u}(y,s)))(\partial_x \psi(x,y,t,s) + \partial_y \psi(x,y,t,s)) \big\}$$
$$\geq 0$$

を得る.

$$\partial_t \psi(x,y,t,s) + \partial_s \psi(x,y,t,s) = (\partial_t \varphi)((x+y)/2, (t+s)/2) \varphi_\varepsilon(x-y) \varphi_\delta(t-s)$$
$$\partial_x \psi(x,y,t,s) + \partial_y \psi(x,y,t,s) = (\partial_x \varphi)((x+y)/2, (t+s)/2) \varphi_\varepsilon(x-y) \varphi_\delta(t-s)$$

であるから,

$$\int_0^{T_0} dt \int_0^{T_0} ds \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \, \varphi_\varepsilon(x-y) \varphi_\delta(t-s)$$
$$\big\{ (u(x,t) - \hat{u}(y,s))^+ (\partial_t \varphi)((x+y)/2, (t+s)/2)$$
$$+ \operatorname{sign}^+(u(x,t) - \hat{u}(y,s))(F(u(x,t)) - F(\hat{u}(y,s)))(\partial_x \varphi)((x+y)/2, (t+s)/2) \big\}$$
$$\geq 0$$

である． ここで, $\varepsilon \downarrow 0$ とし, 次に, $\delta \downarrow 0$ とすれば, 不等式 (3.8) を得る.

演習問題 3.1.

$$\partial_t \rho + \partial_x (\rho(1-\rho)) = 0$$

について, 次を示せ.

(1)

$$\rho(x,t) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1/2, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

はエントロピー解である.

(2)

$$\rho(x,t) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 1/2, & x = 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$$

はエントロピー解でない.

4　縮小半群と消散作用素, 指数公式

X を実バナッハ空間とし, そのノルムを $\|\cdot\|$ で表わす. D を X の部分集合とする.

定義 4.1. D からそれ自身への作用素の族 $\{T(t)\}_{t\in[0,\infty)}$ は, 次の条件が満たされるとき, D 上の作用素の**半群** (semi-group) と呼ばれる.

(S1) $t, s \in [0, \infty)$, $x \in D$ に対して, $T(t)T(s)x = T(t+s)x$, $T(0)x = x$ が成り立つ.

(S2) $x \in D$. のとき, $t \to T(t)x$ は,$[0, \infty)$ 上で X 値関数として, 連続になる.

定義 4.2. $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ を D 上の半群とする. 次で定まる作用素 A_0 をその半群の**無限小生成素** (infinitesimal generator) と呼ぶ.

$$A_0 x = \lim_{h\downarrow 0} h^{-1}(T(h)x - x).$$

ただし, その定義域 $D(A_0)$ は上の極限が存在する $x \in D$ の全体である. 適当な $x_h \in D$, $h \in (0, \infty)$ が存在して,

$$(x_h, h^{-1}(T(h)x_h - x_h)) \to (x, \xi), \quad h \downarrow 0$$

となるような $(x, \xi) \in X \times X$ の全体 A を半群の**一般無限小生成素** (generalized infinitesimal generator) と呼ぶ.

一般に, X における**関係** (relation)$A \subset X \times X$ を X からそれ自身への **(多価) 作用素** (multi-valued operator) ともいい, $Ax = \{\xi; (x, \xi) \in A\}$ を A の $x \in X$ での**値 (集合)** , $D(A) = \{x \in X; Ax \neq \emptyset\}$ と $R(A) = \bigcup_{x\in D(A)} Ax$ をそれぞれ A の**定義域** (domain) と**値域** (range) という. (一価) 作用素 $A_0 : D(A_0)(\subset X) \to X$ はそのグラフ $\{(x, A_0 x); x \in D(A_0)\}$ と同一視する. A, $B \subset X \times X$ とし, $\alpha \in (-\infty, \infty)$ とする. $A + B$, αA, A^{-1} を

$$A + B = \{(x, \xi + \eta);\ (x, \xi) \in A,\ (x, \eta) \in B\}$$
$$\alpha A = \{(x, \alpha\xi);\ (x, \xi) \in A\}$$
$$A^{-1} = \{(\xi, x);\ (x, \xi) \in A\}$$

で定義する. $A \subset B$ のとき, B は A の**拡張**であるという. $\overline{A}$ を A の**閉包**といい, $\overline{A} = A$ のとき, A は**閉作用素**であるという. 恒等作用素を $I = I_X = \{(x, x);\ x \in X\}$ と書く.

定義 4.3. ある $\omega \in (-\infty, \infty)$ が存在して,

$$\|T(t)x - T(t)y\| \leq e^{\omega t}\|x - y\|, \quad t \in [0, \infty),\ x, y \in D \tag{4.1}$$

が満たされるとき, D 上の半群 $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ は**準縮小的** (quasi-contractive) であると呼ばれる．特に, $\omega = 0$ にとれるとき, すなわち

$$\|T(t)x - T(t)y\| \leq \|x - y\|, \quad t \in [0,\infty),\ x, y \in D$$

が成り立つとき, **縮小的** (contractive)，または，**非拡大的** (nonexpansive) であるという．(4.1) を満たす D 上の半群の全体を $\mathcal{S}(D,\omega)$ と書く．

例 4.1. $X = (-\infty,\infty)$ を $|\cdot|$ をノルムとする, バナッハ空間とする．$D = [0,\infty)$, $t \in [0,\infty)$ のとき,

$$T(t)x = (x-t)^+ = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq t \\ x - t, & x > t \end{cases} \tag{4.2}$$

と定める．$\{T(t)\}_{t\geq 0}$ は D 上の縮小半群になり, その無限小生成素 A_0 は

$$A_0 x = \begin{cases} -1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \tag{4.3}$$

となる．その一般無限小生成素は A

$$Ax = \begin{cases} -1, & x > 0 \\ [-1,0], & x = 0 \end{cases} \tag{4.4}$$

で与えられる．実際に, $x_h \in [0,\infty)$ とし, $(x_h, A_h x_h) \to (x,\xi)$ とする．

$$A_h x_h = \begin{cases} -1, & x_h > h \\ -x_h/h, & 0 \leq x_h \leq h \end{cases}$$

だから, $0 \geq \xi \geq -1$ である．$\alpha \in [0,1]$ とし, $x_h = \alpha h$ とすると, $A_h x_h = -\alpha$ だから, $A0 = [-1,0]$ である．$(x,\xi) \in A$ で $x > 0$ とする．もし, $\xi > -1$, であると仮定すると, ある h_0 が定まり, $0 < h \leq h_0$ のとき, $A_h x_h < -1$, したがって, $0 \leq x_h < h$ となり, $\lim_{h\downarrow 0} x_h = x > 0$ に矛盾する．よって, $\xi \leq -1$，従って，$\xi = -1$ である．

定義 4.4. $A \subset X \times X$ とする．ある $\omega \in (-\infty,\infty)$ が存在して,

$$\|x - y - \lambda(\xi - \eta)\| \geq (1 - \lambda\omega)\|x - y\| \quad \lambda > 0,\ (x,\xi),\ (y,\eta) \in A \tag{4.5}$$

が満たされるとき, A は**準消散的** (quasi-dissipative) であると呼ばれる．特に, $\omega = 0$ にとれるとき, すなわち,

$$\|x - y - \lambda(\xi - \eta)\| \geq \|x - y\| \quad \lambda > 0,\ (x,\xi),\ (y,\eta) \in A$$

が成り立つとき, **消散的** (dissipative) であるという．(4.5) をみたす, 準消散作用素の全体を $\mathcal{G}(\omega)$ と書く．

命題 4.1. $\omega \in (-\infty, \infty)$, $D \subset X$ とする．A_0, A をそれぞれ $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in \mathcal{S}(D,\omega)$ の無限小生成素, 一般無限小生成素とする．このとき, $A_0, A \in \mathcal{G}(\omega)$ である．

証明. $h > 0$ のとき,

$$A_h x = h^{-1}(T(h)x - x), \quad x \in D$$

と書く. $\lambda > 0$ とし, x, $y \in D$ とする．このとき,

$$\begin{aligned} \|x - y - \lambda(A_h x - A_h y)\| &= \|(1+\lambda/h)(x-y) - \lambda/h(T(h)x - T(h)y)\| \\ &\geq (1+\lambda/h)\|x-y\| - \lambda/h\|T(h)x - T(h)y\| \\ &\geq (1+\lambda/h)\|x-y\| - e^{\omega h}\lambda/h\|x-y\| \\ &= (1 - \lambda(e^{\omega h}-1)/h)\|x-y\| \end{aligned}$$

が成り立つ. このとき, $h \downarrow 0$ として,

$$\|x - y - \lambda(A_0 x - A_0 y)\| \geq (1-\lambda\omega)\|x-y\|$$

となる．$h \downarrow 0$ のとき, $(x_h, A_h x_h) \to (x, \xi)$, $(y_h, A_h y_h) \to (y, \eta)$ とする．

$$\|x_h - y_h - \lambda(A_h x_h - A_h y_h)\| \geq (1 - \lambda(e^{\omega h}-1)/h)\|x_h - y_h\|$$

において, $h \downarrow 0$ として,

$$\|x - y - \lambda(\xi - \eta)\| \geq (1-\lambda\omega)\|x-y\|$$

を得る.

定義 4.5. $A \in \mathcal{G}(\omega)$ とする．$1 - \lambda\omega > 0$ のとき, $I - \lambda A$ は 1 対 1 作用素である. $\lambda \in (0, 1/\omega^+)$ をパラメーターとする一価作用素の族

$$J_\lambda = (I - \lambda A)^{-1}, \quad \lambda \in (0, 1/\omega^+)$$

を A の**レゾルベント** (resolvent) という．ただし, $\omega^+ = 0$ のとき, $1/\omega^+ = \infty$ とする.

命題 4.2. $A \in \mathcal{G}(\omega)$ とする．J_λ $(\lambda \in (0, 1/\omega^+))$ を A のレゾルベントとする. $\lambda, \mu \in (0, 1/\omega^+)$ のとき, 次が成り立つ.

(1) $x \in D(J_\lambda)$ ならば,
$$\lambda^{-1}(J_\lambda x - x) \in AJ_\lambda x.$$

(2) x, $y \in D(J_\lambda)$ ならば,

$$\|J_\lambda x - J_\lambda y\| \leq (1-\lambda\omega)^{-1}\|x-y\|.$$

(3) $x \in D(A) \cap D(J_\lambda^n)$, $n = 1, 2, \cdots$, ならば,

$$\|J_\lambda^n x - x\| \le \lambda \sum_{k=1}^{n} (1 - \lambda\omega)^{-k} \inf\{\|\xi\|;\ \xi \in Ax\}.$$

(4) $x \in D(J_\lambda)$ のとき, $\dfrac{\mu}{\lambda}x + \dfrac{\lambda - \mu}{\lambda} J_\lambda x \in D(J_\mu)$ で,

$$J_\lambda x = J_\mu(\frac{\mu}{\lambda}x + \frac{\lambda - \mu}{\lambda} J_\lambda x)$$

が成り立つ.

(5) $x \in D(J_\lambda) \cap D(J_{\lambda+\mu})$ のとき,

$$\|J_{\lambda+\mu}x - J_\lambda x\| \le (1 - (\lambda + \mu)\omega)^{-1}\, \mu \|J_\lambda x - x\|/\lambda$$

が成り立つ.

(6) $x \in D(J_\lambda)$, $y \in D(J_\mu)$ ならば,

$$\|J_\lambda x - J_\mu y\| \le \left(1 - \omega\frac{\lambda\mu}{\lambda + \mu}\right)^{-1} \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu}\|J_\lambda x - y\| + \frac{\mu}{\lambda + \mu}\|x - J_\mu y\|\right).$$

証明. $u = J_\lambda x$ とする. ある $\xi \in Au$ に対して,

$$u - \lambda\xi = x, \quad \lambda^{-1}(u - x) = \xi \in Au$$

となる.

$x,\ y \in D(J_\lambda)$ とし, $u = J_\lambda x$, $v = J_\lambda y$ とする. ある $\xi \in Au$, $\eta \in Av$ に対して,

$$u - \lambda\xi = x, \quad v - \lambda\eta = y$$

となる.

$$\|x - y\| = \|u - \lambda\xi - (v - \lambda\eta)\| \ge (1 - \lambda\omega)\|u - v\|$$

だから,

$$\|J_\lambda x - J_\lambda y\| \le (1 - \lambda\omega)^{-1}\|x - y\|$$

である.

$x \in D(J_\lambda^n) \cap D(A)$ とし, $u = J_\lambda x$ とする. ある $\xi \in Au$ に対して,

$$u - \lambda\xi = x$$

となる. $(x, \eta) \in A$ とする.

$$\|\lambda\eta\| = \|u - \lambda\xi - (x - \lambda\eta)\| \ge (1 - \lambda\omega)\|u - x\|$$

だから,

$$\|J_\lambda x - x\| \le \lambda(1-\lambda\omega)^{-1}\|\eta\|$$

である． したがって,

$$\begin{aligned}
\|J_\lambda^n x - x\| &\le \sum_{k=1}^{n} \|J_\lambda^k x - J_\lambda^{k-1} x\| \\
&\le \sum_{k=1}^{n} (1-\lambda\omega)^{-(k-1)} \|J_\lambda x - x\| \\
&\le \sum_{k=1}^{n} (1-\lambda\omega)^{-(k-1)} \lambda(1-\lambda\omega)^{-1}\|\eta\| \\
&= \lambda \sum_{k=1}^{n} (1-\lambda\omega)^{-k}\|\eta\|
\end{aligned}$$

である．

$x \in D(J_\lambda)$ とし, $u = J_\lambda x$ とする．ある $\xi \in Au$ に対して,

$$u - \lambda\xi = x$$

である．

$$\begin{aligned}
\frac{\mu}{\lambda}x + \frac{\lambda-\mu}{\lambda}J_\lambda x &= \frac{\mu}{\lambda}(u-\lambda\xi) + \frac{\lambda-\mu}{\lambda}u \\
&= u - \mu\xi \in R(I-\mu A)
\end{aligned}$$

だから, $\dfrac{\mu}{\lambda}x + \dfrac{\lambda-\mu}{\lambda}J_\lambda x \in D(J_\mu)$ で,

$$J_\mu(\frac{\mu}{\lambda}x + \frac{\lambda-\mu}{\lambda}J_\lambda x) = u = J_\lambda x$$

である．

$x \in D(J_\lambda) \cap D(J_{\lambda+\mu})$ とする．

$$\begin{aligned}
&\|J_{\lambda+\mu}x - J_\lambda x\| \\
=&\|J_{\lambda+\mu}x - J_{\lambda+\mu}\left(\frac{\lambda+\mu}{\lambda}x - \frac{\mu}{\lambda}J_\lambda x\right)\| \\
\le&(1-(\lambda+\mu)\omega)^{-1}\,\mu\|J_\lambda x - x\|/\lambda
\end{aligned}$$

となる．

$x \in D(J_\lambda)$, $y \in D(J_\mu)$ とし, $\sigma = \lambda\mu/(\lambda+\mu)$ とする．

$$0 < \sigma < \lambda, \quad 0 < \sigma < \mu$$

である.

$$
\begin{aligned}
\frac{\sigma}{\lambda}x + \frac{\lambda-\sigma}{\lambda}J_\lambda x &= \frac{\mu}{\lambda+\mu}x + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}J_\lambda x \in D(J_\sigma) \\
\frac{\sigma}{\mu}y + \frac{\mu-\sigma}{\mu}J_\mu y &= \frac{\lambda}{\lambda+\mu}y + \frac{\mu}{\lambda+\mu}J_\mu y \in D(J_\sigma)
\end{aligned}
$$

だから,

$$
\begin{aligned}
J_\lambda x &= J_\sigma\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}x + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}J_\lambda x\right) \\
J_\mu y &= J_\sigma\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}y + \frac{\mu}{\lambda+\mu}J_\mu y\right)
\end{aligned}
$$

が成り立つ. よって,

$$
\begin{aligned}
\|J_\lambda x - J_\mu y\| &\le (1-\omega\sigma)^{-1}\left\|\frac{\mu}{\lambda+\mu}x + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}J_\lambda x - \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}y + \frac{\mu}{\lambda+\mu}J_\mu y\right)\right\| \\
&\le (1-\omega\sigma)^{-1}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\|J_\lambda x - y\| + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\|x - J_\mu y\|\right)
\end{aligned}
$$

が成り立つ.

補題 4.1. $\lambda,\ \mu > 0$ とし, $\alpha_{n,m} \in (-\infty, \infty),\ n, m = 0, 1, 2, \cdots$ は

$$
\alpha_{n,0} = (n\lambda)^2 + n\lambda^2, \quad \alpha_{0,m} = (m\mu)^2 + m\mu^2, \quad m,\ n = 0, 1, 2, \cdots
$$

と

$$
\alpha_{n,m} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\alpha_{n,m-1} + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\alpha_{n-1,m}, \quad n,\ m = 1, 2, \cdots
$$

を満たすとする. このとき

$$
\alpha_{n,m} = (n\lambda - m\mu)^2 + n\lambda^2 + m\mu^2,\ n,\ m = 0, 1, 2, \cdots \tag{4.6}
$$

である.

証明. 仮定から, $n = 0$ または $m = 0$ のとき, (4.6) は成り立つ. (4.6) が $(n, m-1)$, $(n-1, m)$ に対して成り立つと仮定する.

$$
\begin{aligned}
\alpha_{n,m} &= \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\alpha_{n,m-1} + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\alpha_{n-1,m} \\
&= \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\big((n\lambda - (m-1)\mu)^2 + n\lambda^2 + (m-1)\mu^2\big) \\
&+ \frac{\mu}{\lambda+\mu}\big(((n-1)\lambda - m\mu)^2 + (n-1)\lambda^2 + m\mu^2\big) \\
&= \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\big((n\lambda - m\mu)^2 + 2(n\lambda - m\mu)\mu + n\lambda^2 + m\mu^2\big) \\
&+ \frac{\mu}{\lambda+\mu}\big((n\lambda - m\mu)^2 - 2(n\lambda - m\mu)\lambda + n\lambda^2 + m\mu^2\big) \\
&= (n\lambda - m\mu)^2 + n\lambda^2 + m\mu^2
\end{aligned}
$$

となる.

$D \subset X$ とする. $A \in \mathcal{G}(\omega)$ について, つぎの条件を考える.

(R; D) $D(A) \subset D$ で, ある $\lambda_0 \in (0, 1/\omega^+)$ に対して

$$R(I - \lambda A) \supset D, \quad \lambda \in (0, \lambda_0].$$

例 4.2. (4.4) で与えられる, 消散作用素 A について, $u \in D(A)$ のとき,

$$u - \lambda Au = \begin{cases} [0, \lambda], & u = 0 \\ u + \lambda, & u > 0 \end{cases}$$

だから, $R(I - \lambda A) = [0, \infty) = D = D(A)$ であり, $x \in D(A)$ のとき,

$$J_\lambda x = (x - \lambda)^+ = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq \lambda \\ x - \lambda, & x > \lambda \end{cases}$$

である. 一方, (4.3) で与えられる消散作用素 A_0 については

$$R(I - \lambda A_0) = \{0\} \cup (\lambda, \infty), \quad \lambda > 0$$

である.

命題 4.3. $A \in \mathcal{G}(\omega)$ とし, 条件 (R; D) を仮定する. $x \in D(A)$, $\lambda,\ \mu \in (0, \lambda_0]$ ならば,

$$\begin{aligned} &\|J_\lambda^n x - J_\mu^m x\| \\ &\leq (1 - \omega^+\lambda)^{-n}(1 - \omega^+\mu)^{-m} \left((n\lambda - m\mu)^2 + n\lambda^2 + m\mu^2\right)^{1/2} \inf\{\|\xi\|;\ \xi \in Ax\} \end{aligned} \tag{4.7}$$

$n, m = 0, 1, 2, \cdots$

が成り立つ.

証明. $x \in D(A)$ とする.

$$\begin{aligned} \|J_\lambda^n x - x\| &\leq \lambda \sum_{k=1}^{n} (1 - \lambda\omega)^{-k} L_0 \\ &\leq n\lambda(1 - \omega^+\lambda)^{-n} L_0 \end{aligned}$$

である. ただし, $L_0 = \inf\{\|\xi\|;\ \xi \in A\}$ である. よって,

$$\begin{gathered} a_{n,m} = (1 - \omega^+\lambda)^{2n}(1 - \omega^+\mu)^{2m}\|J_\lambda^n x - J_\mu^m x\|^2 \\ n,\ m = 0, 1, 2, \cdots \end{gathered}$$

とおくと,

$$a_{n,0} \leq (n\lambda)^2 L_0^2 \leq \alpha_{n,0} L_0^2, \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

が成り立つ. ただし,

$$\alpha_{n,m} = (n\lambda - m\mu)^2 + n\lambda^2 + m\mu^2$$

である. 同様に

$$a_{0,m} \leq \alpha_{0,m} L_0^2, \quad m = 0, 1, 2, \cdots$$

が成り立つ.

$$\begin{aligned}
a_{n,m} &\leq (1-\omega^+\lambda)^{2n}(1-\omega^+\mu)^{2m}(1-\omega\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu})^{-2} \\
&\quad \times \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\|J_\lambda^n x - J_\mu^{m-1}x\| + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\|J_\lambda^{n-1}x - J_\mu^m x\|\right)^2 \\
&\leq (1-\omega^+\lambda)^{2n}(1-\omega^+\mu)^{2m}(1-\omega\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu})^{-2} \\
&\quad \times \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\|J_\lambda^n x - J_\mu^{m-1}x\|^2 + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\|J_\lambda^{n-1}x - J_\mu^m x\|^2\right) \\
&\leq \frac{\lambda}{\lambda+\mu}a_{n,m-1} + \frac{\mu}{\lambda+\mu}a_{n-1,m}
\end{aligned}$$

を得る. ただし,

$$(1-\omega\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu})^{-1} \leq (1-\omega^+\lambda)^{-1}, \quad (1-\omega\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu})^{-1} \leq (1-\omega^+\mu)^{-1}$$

を用いた. 故に,

$$a_{n,m} \leq \alpha_{n,m} L_0^2$$

である.

定理 4.1. $A \in \mathcal{G}(\omega)$ とし, 条件 $(\mathrm{R}; D)$ を仮定する. このとき, $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in \mathcal{S}(\overline{D(A)}, \omega)$ が存在して, $x \in \overline{D(A)}$, $x_\lambda \in D$ とし, $\lambda \downarrow 0$ のとき, $x_\lambda \to x$ であるとき,

$$T(t)x = \lim_{\lambda\downarrow 0} J_\lambda^{[t/\lambda]} x_\lambda \tag{4.8}$$

となる. (4.8) で収束は有界な $t \in [0, \infty)$ に関して一様で, 特に, $x \in D(A)$ のとき,

$$\|T(t)x - J_\lambda^n x\| \leq e^{\omega^+ t}(1-\omega^+\lambda)^{-n}\left((t-n\lambda)^2 + n\lambda^2\right)^{1/2} \inf\{\|\xi\|;\ \xi \in Ax\} \tag{4.9}$$

$$\|T(t)x - T(s)x\| \leq \inf\{\|\xi\|;\ \xi \in Ax\}\left|\int_t^s e^{\omega\tau}\,d\tau\right| \tag{4.10}$$

が成り立つ.

証明. $x \in \overline{D(A)}$, λ, $\mu \in (0, \lambda_0]$ とし, $y \in D(A)$, $t \geq 0$ とする.

$$\|J_\lambda^{[t/\lambda]}y - J_\mu^{[t/\mu]}y\| \leq (1-\lambda\omega^+)^{-[t/\lambda]}(1-\mu\omega^+)^{-[t/\mu]}\left\{(\lambda \vee \mu)^2 + t(\lambda+\mu)\right\}^{1/2} L(y)$$

が成り立つ. ただし,

$$L(y) = \inf\{\|\eta\|;\ \eta \in Ay\}$$

である.

$$\|J_\lambda^{[t/\lambda]}x_\lambda - J_\lambda^{[t/\lambda]}y\| \leq (1-\lambda\omega^+)^{-[t/\lambda]}\|x_\lambda - y\|$$
$$\|J_\mu^{[t/\mu]}x_\mu - J_\mu^{[t/\mu]}y\| \leq (1-\mu\omega^+)^{-[t/\mu]}\|x_\mu - y\|$$

であるから, 任意の $\tau > 0$ に対して

$$\begin{aligned}&\sup_{t\in[0,\tau]}\|J_\lambda^{[t/\lambda]}x_\lambda - J_\mu^{[t/\mu]}x_\mu\| \\ &\leq (1-\lambda\omega^+)^{-[\tau/\lambda]}\|x_\lambda - y\| + (1-\mu\omega^+)^{-[\tau/\mu]}\|x_\mu - y\| \\ &+ (1-\lambda\omega^+)^{-[\tau/\lambda]}(1-\mu\omega^+)^{-[\tau/\mu]}\left\{(\lambda\vee\mu)^2 + \tau(\lambda+\mu)\right\}^{1/2} L(y)\end{aligned}$$

を得る. 故に,

$$\limsup_{\lambda,\mu\downarrow 0}\left(\sup_{t\in[0,\tau]}\|J_\lambda^{[t/\lambda]}x_\lambda - J_\mu^{[t/\mu]}x_\mu\|\right) \leq 2e^{\omega^+\tau}\|y - x\|$$

である. $y \in D(A)$ は任意だから,

$$\limsup_{\lambda,\mu\downarrow 0}\left(\sup_{t\in[0,\tau]}\|J_\lambda^{[t/\lambda]}x_\lambda - J_\mu^{[t/\mu]}x_\mu\|\right) = 0$$

である. $\hat{x}_\lambda \in D$ で $\lambda \downarrow 0$ のとき, $\hat{x}_\lambda \to \hat{x} \in \overline{D(A)}$ とする.

$$\|J_\lambda^{[t/\lambda]}x_\lambda - J_\lambda^{[t/\lambda]}\hat{x}_\lambda\| \leq (1-\lambda\omega)^{-[t/\lambda]}\|x_\lambda - \hat{x}_\lambda\|$$

であるから, $\lambda \downarrow 0$ として,

$$\|T(t)x - T(t)\hat{x}\| \leq e^{\omega t}\|x - \hat{x}\|$$

が成り立ち, 各 $t \in [0,\infty)$ に対し, $T(t) : \overline{D(A)} \to \overline{D(A)}$ が定まる.

$x \in D(A)$ のとき,

$$\begin{aligned}&\|J_\lambda^n x - J_\mu^{[t/\mu]}x\| \\ &\leq (1-\lambda\omega^+)^{-n}(1-\mu\omega^+)^{-[t/\mu]}\{(n\lambda - [t/\mu]\mu)^2 + n\lambda^2 + [t/\mu]\mu^2\}^{1/2} L(x)\end{aligned}$$

であるから,

$$\|J_\lambda^n x - T(t)x\| \leq (1-\lambda\omega^+)^{-n}e^{\omega^+ t}\{(n\lambda - t)^2 + n\lambda^2\}^{1/2} L(x)$$

が成り立つ.

$x, y \in D(A)$ のとき,

$$\begin{aligned}&\|J_\lambda^{[(t+s)/\lambda]}x - J_\lambda^{[t/\lambda]}y\| \\ &\le (1-\lambda\omega)^{-[t/\lambda]}\|J_\lambda^{[(t+s)/\lambda]-[t/\lambda]}x - y\|\end{aligned}$$

だから，$\lambda \downarrow 0$ として,

$$\|T(t+s)x - T(t)y\| \le e^{\omega t}\|T(s)x - y\|$$

を得る． 各 $T(t)$ は $\overline{D(A)}$ でリプシッツ連続だから, これは $x, y \in \overline{D(A)}$ のときも成り立つ. よって，任意の $x \in \overline{D(A)}$ に対して,

$$T(t+s)x = T(t)T(s)x, \quad t,\ s \ge 0$$

が成り立つ. $x \in D(A)$ のとき,

$$\|J_\lambda^{[t/\lambda]}x - x\| \le \lambda \sum_{k=1}^{[t/\lambda]}(1-\lambda\omega)^{-k}L(x)$$

だから,

$$\|T(t)x - x\| \le \int_0^t e^{\omega\tau}\,d\tau\,L(x), \quad t \ge 0$$

$$\|T(t+s)x - T(s)x\| \le e^{\omega s}\int_0^t e^{\omega\tau}\,d\tau\,L(x) = \int_s^{t+s} e^{\omega\tau}\,d\tau\,L(x), \quad t,\ s \ge 0$$

である.

定義 4.6. $A \in \mathcal{G}(\omega)$ は条件 (R; D) を満たすとする．上の定理の半群 $\{T(t)\}_{t\ge0} \in \mathcal{S}(\overline{D(A)}, \omega)$ を A で生成された半群という.

例 4.3. (4.4) で与えられる消散作用素 A で生成される半群は (4.2) である.

演習問題 4.1. $\lambda,\ \mu > 0$ とし, $\alpha_{n,m} \in (-\infty, \infty),\ n, m = 0, 1, 2, \cdots$ は補題 4.1 の条件を満たすとする．$\alpha_{n,m}$ の母関数

$$f(t,s) = \sum_{n,m=0}^{\infty} \alpha_{n,m}t^n s^m$$

求め, これを用いて,

$$\alpha_{n,m} = (n\lambda - m\mu)^2 + n\lambda^2 + m\mu^2,\ n,\ m = 0, 1, 2, \cdots \tag{4.11}$$

を示せ.

5　抽象コーシー問題

命題 5.1. $\varPhi : (-\infty, \infty) \to (-\infty, \infty)$ は凸とする．このとき，

$$\partial_x^+ \varPhi(x) = \lim_{h\downarrow 0}(\varPhi(x+h) - \varPhi(x))/h = \inf_{h>0}(\varPhi(x+h) - \varPhi(x))/h$$
$$\partial_x^- \varPhi(x) = \lim_{h\downarrow 0}(\varPhi(x) - \varPhi(x-h))/h = \sup_{h>0}(\varPhi(x) - \varPhi(x-h))/h$$

が存在して, $h > 0$ のとき,

$$(\varPhi(x) - \varPhi(x-h))/h \le \partial_x^- \varPhi(x) \le \partial_x^+ \varPhi(x) \le (\varPhi(x+h) - \varPhi(x))/h$$

が成り立つ．また, $\partial_x^- \varPhi$, $\partial_x^+ \varPhi$ は非減少である．

証明. $\varPhi : (-\infty, \infty) \to (-\infty, \infty)$ は凸とする．$x < y < z$ のとき,

$$y = \frac{z-y}{z-x}x + \frac{y-x}{z-x}z$$

と書けるから,

$$\varPhi(y) \le \frac{z-y}{z-x}\varPhi(x) + \frac{y-x}{z-x}\varPhi(z)$$

が成り立つ．これから,

$$\frac{\varPhi(y) - \varPhi(x)}{y-x} \le \frac{\varPhi(z) - \varPhi(x)}{z-x} \le \frac{\varPhi(z) - \varPhi(y)}{z-y}$$

が成り立つことが分る. このことから従う.

例 5.1. $\varPhi(x) = x^+$ とする．

$$\partial_x^- \varPhi(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}, \quad \partial_x^+ \varPhi(x) = \begin{cases} 1, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases},$$

であり,

$$\partial_x^- \varPhi(x) = \varPhi'_-(x) \le \operatorname{sign}^+(x) \le \varPhi'_+(x) = \partial_x^+ \varPhi(x)$$

が成り立つ．このことから, $h > 0$ のとき,

$$(x+h)^+ - x^+ \ge \partial_x^+ \varPhi(x)h \ge \operatorname{sign}^+(x)h \ge \partial_x^- \varPhi(x)h$$

が成り立つことがわかる.

X は実バナッハ空間とする．x, $\xi \in X$ とし, $\varPhi(t) = \|x + t\xi\|$, $t \in (-\infty, \infty)$, とおくと, $\varPhi(t)$ は凸である．よって, $\partial_t^\pm \varPhi(0)$ が定まる．これを $[x, \xi]_\pm$ とかく．

$$[x, \xi]_+ = \lim_{h\downarrow 0}(\|x + h\xi\| - \|x\|)/h = \inf_{h>0}(\|x + h\xi\| - \|x\|)/h$$
$$[x, \xi]_- = \lim_{h\downarrow 0}(\|x\| - \|x - h\xi\|)/h = \sup_{h>0}(\|x\| - \|x - h\xi\|)/h.$$

である．

$$[x,\xi]_- \le [x,\xi]_+,\ [x,\xi]_- = -[x,-\xi]_+,\ [x,\xi]_+ = -[x,-\xi]_-$$

が成り立つ．また，

$$[0,\xi]_+ = \|\xi\|, \quad [0,\xi]_- = -\|\xi\|$$

である．

例 5.2. X は $\langle\cdot,\cdot\rangle$ を内積とする実ヒルベルト空間とする．このとき，

$$[x,\xi]_+ = \langle x,\xi\rangle/\|x\|, \quad x \ne 0$$

である．

例 5.3. $X = L^1(a,b)$ とする．$f,g \in X$ のとき

$$[f,g]_+ = \int_{f(s)\ne 0} \mathrm{sign}(f(s))g(s)\,ds + \int_{f(s)=0} |g(s)|\,ds.$$

例 5.4. $X = L^p(a,b)$, $(1<p<\infty)$ とする．$f,g \in X$, $f \ne 0$ のとき

$$[f,g]_+ = \int_a^b |f(s)|^{p-1}\,\mathrm{sign}(f(s))g(s)\,ds \Bigg/ \left(\int_a^b |f(s)|^p\,ds\right)^{(p-1)/p}.$$

例 5.5. $X = C[a,b]$, $(-\infty<a<b<\infty)$ とする，$f,g \in X$, $f \ne 0$ のとき

$$[f,g]_+ = \sup\{\mathrm{sign}(f(s))g(s);\ s \in [a,b],\ |f(s)| = \|f\|_{L^\infty}\}.$$

命題 5.2. $x,\ \xi,\ \eta \in X$, $\alpha > 0$ とする．また，X において，$x_n \to x$, $\xi_n \to \xi$, $(n\to\infty)$, とする．このとき，次が成り立つ．

(1) $$[x,\pm\alpha x+\xi]_+ = \pm\alpha\|x\| + [x,\xi]_+$$

(2) $$[x,\alpha\xi]_+ = \alpha[x,\xi]_+, \quad [x,\xi+\eta]_+ \le [x,\xi]_+ + [x,\eta]_+$$

(3) $$[-x,-\xi]_+ = [x,\xi]_+, \quad [\alpha x,\xi]_+ = [x,\xi]_+$$

(4) $$|[x,\xi]_+| \le \|\xi\|$$

(5) $$\limsup_{n\to\infty}[x_n,\xi_n]_+ \le [x,\xi]_+$$

証明．$h>0$ を十分小とする．このとき，次が成り立つ．

$$(\|x+h(\pm\alpha x+\xi)\| - \|x\|)/h = \pm\alpha\|x\| + (1\pm\alpha h)(\|x+h(1\pm\alpha h)^{-1}\xi\| - \|x\|)/h$$

$$(\|x+h(\alpha\xi)\| - \|x\|)/h = \alpha(\|x+(\alpha h)\xi\| - \|x\|)/(\alpha h)$$

$$(\|x+h(\xi+\eta)\| - \|x\|)/h \le (\|x+2h\xi\| - \|x\|)/(2h) + (\|x+2h\eta\| - \|x\|)/(2h)$$

$$(\|-x+h(-\xi)\| - \|-x\|)/h = (\|x+h\xi\| - \|x\|)/h$$

$$(\|\alpha x+h\xi\| - \|\alpha x\|)/h = (\|x+(h/\alpha)\xi\| - \|x\|)/(h/\alpha)$$

$$|(\|x+h\xi\| - \|x\|)/h| \le \|\xi\|$$

$$\limsup_{n\to\infty}[x_n,\xi_n]_+ \le \limsup_{n\to\infty}(\|x_n+h\xi_n\| - \|x_n\|)/h = (\|x+h\xi\| - \|x\|)/h.$$

これらにおいて, それぞれ $h \downarrow 0$ とすればよい.

命題 5.3. $u : (a,b) \to X$, $t \in (a,b)$ とする．もし, $\partial_t^+ u(t)$ (resp. $\partial_t^- u(t)$) が存在すれば, $\partial_t^+ \|u(t)\|$ (resp. $\partial_t^- \|u(t)\|$) も存在して,

$$\partial_t^+ \|u(t)\| = [u(t), \partial_t^+ u(t)]_+ \quad (\text{resp. } \partial_t^- \|u(t)\| = [u(t), \partial_t^- u(t)]_-)$$

が成り立つ. もし, $\partial_t \|u(t)\|$ と $\partial_t u(t)$ が存在すれば

$$\partial_t \|u(t)\| = [u(t), \partial_t u(t)]_+ = [u(t), \partial_t u(t)]_-$$

が成り立つ.

証明. $h > 0$ のとき,

$$\big| \|u(t+h)\| - \|u(t) + h\partial_t^+ u(t)\| \big| \le \|u(t+h) - u(t) - h\partial_t^+ u(t)\|$$

だから,

$$\begin{aligned} &\big| (\|u(t+h)\| - \|u(t)\|)/h - (\|u(t) + h\partial_t^+ u(t)\| - \|u(t)\|)/h \big| \\ &\le \|h^{-1}(u(t+h) - u(t)) - \partial_t^+ u(t)\| \end{aligned}$$

である．ここで, $h \downarrow 0$ とすればよい. 左微分に関しても同様.

命題 5.4. $A \subset X \times X$, $\omega \in (-\infty, \infty)$ とする.

(1) $A \in \mathcal{G}(\omega)$ であるためには, 任意の (x,ξ), $(y,\eta) \in A$ に対して,

$$[x - y, \xi - \eta]_- \le \omega \|x - y\| \tag{5.1}$$

が成り立つことが必要十分である.

(2) $A \in \mathcal{G}(\omega)$ であるとき, 任意の (x,ξ), $(y,\eta) \in A$ に対して,

$$[x - y, \xi]_- + [y - x, \eta]_- \le \omega \|x - y\| \tag{5.2}$$

が成り立つ.

証明. (x,ξ), $(y,\eta) \in A$ とする．$A \in \mathcal{G}(\omega)$ と仮定し, $\lambda > 0$ とすると,

$$\begin{aligned} \|x - y - \lambda(\xi - \eta)\| &\ge (1 - \lambda\omega)\|x - y\| \\ \lambda^{-1}(\|x - y - \lambda(\xi - \eta)\| - \|x - y\|) &\ge -\omega\|x - y\| \end{aligned}$$

が成り立つ．$\lambda \downarrow 0$ として,

$$[x - y, -(\xi - \eta)]_+ \ge -\omega \|x - y\|$$

を得る．両辺に -1 を乗じて, (5.1) を得る．逆に (5.1) が成り立つとすると, 任意の $\lambda > 0$ に対して,

$$\lambda^{-1}(\|x-y\| - \|x-y-\lambda(\xi-\eta)\|) \le [x-y, \xi-\eta]_- \le \omega\|x-y\|$$

が成り立つ.

一般に,

$$\begin{aligned}[x-y,\xi]_- + [y-x,\eta]_- &= -([x-y,-\xi]_+ + [y-x,-\eta]_+) \\ &= -([x-y,-\xi]_+ + [x-y,\eta]_+) \\ &\le -[x-y,-\xi+\eta]_+ \\ &= [x-y,\xi-\eta]_-\end{aligned}$$

であるから, (5.1) から, (5.2) が従う.

$A \subset X \times X$ とする．与えられた $x \in X$ に対して

$$u'(t) \in Au(t),\ t > 0; \quad u(0) = x$$

を満たす関数 $u(t)$ を求める問題を**抽象コーシー問題**と言う．但し, $u'(t) = \partial_t u(t)$ である．この問題を $\mathrm{ACP}(A,x)$ とかく.

定義 5.1. $\tau > 0$ とする. $u : [0,\tau] \to X$ は $[0,\tau]$ 上で連続的に微分可能で, すべての $t \in [0,\tau]$ で $(u(t), u'(t)) \in A$ を満たし, $u(0) = x$ であるとき, $\mathrm{ACP}(A,x)$ の $[0,\tau]$ 上の**古典解**であると言う. $u : [0,\tau] \to X$ は $[0,\tau]$ 上で絶対連続でかつ $(0,\tau)$ 上でほとんど至るところで微分可能で, ほとんどすべての $t \in (0,\tau)$ で $(u(t), u'(t)) \in D(A)$ を満たし, $u(0) = x$ であるとき, $\mathrm{ACP}(A,x)$ の $[0,\tau]$ 上の**強解**であると言う. $\varepsilon > 0$ に対して, u_ε が $\mathrm{ACP}(A,x_\varepsilon)$ の $[0,\tau]$ 上の強解で, $u : [0,\tau] \to X$ が u_ε の $\varepsilon \downarrow 0$ のときの $t \in [0,\tau]$ について一様な極限になっているとき, u を $\mathrm{ACP}(A,x)$ の**弱解**と言う.

注意 5.1. 古典解は強解であり, 強解は弱解である.

注意 5.2. u が $\mathrm{ACP}(A,x)$ の $[0,\tau]$ 上の古典解であるとき, すべての $t \in [0,\tau]$ に対して, $u(t) \in D(A)$ である. u が $\mathrm{ACP}(A,x)$ の $[0,\tau]$ 上の強解あるいは弱解であるとき, すべての $t \in [0,\tau]$ に対して, $u(t) \in \overline{D(A)}$ である.

注意 5.3. $u : [0,\tau] \to X$ は任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\delta > 0$ を適当にとれば, 互いに素な $[s_i, t_i] \subset [0,\tau]$, $(i = 1, 2, \cdots, n)$ に対し,

$$\sum_{i=1}^n (t_i - s_i) < \delta \quad \text{ならば} \quad \sum_{i=1}^n \|u(t_i) - u(s_i)\| < \varepsilon$$

が満たされるとき, $[0,\tau]$ 上で**絶対連続**であると言う．X が無限次元のとき, $[0,\tau]$ 上で絶対連続な関数は $(0,\tau)$ 上で至るところ微分可能とは限らない．実際に, $X =$

$L^1(0,\infty)$ とし, $t \in [0,\infty)$ のとき,

$$u(x,t) = \begin{cases} 0, & x > t \\ 1, & \text{その他} \end{cases}$$

とおくと,

$$\int_0^\infty |u(x,t) - u(x,s)|\,dx = |t-s|$$

であるが, $\varphi \in C_0^\infty(0,\infty)$ のとき,

$$\lim_{h\to 0} \int_0^\infty h^{-1}(u(x,t+h) - u(x,t))\varphi(x)\,dx = \varphi(t)$$

であることから, すべての $t \in (0,\infty)$ で u は微分可能でないことが従う. すべての絶対連続な $u : [0,\tau] \to X$ が $(0,\tau)$ 上でほとんどいたるところ微分可能であるとき, ノルム空間 X は **Radon-Nikodým 性**を持つと言う. 回帰的な空間は Radon-Nikodým 性を持つことが知られている. 証明については [50] または [63] を参照.

例 5.6. $X = (-\infty,\infty)$ を $|\cdot|$ をノルムとする, バナッハ空間とする. $D = [0,\infty)$, $t \in [0,\infty)$ のとき,

$$T(t)x = (x-t)^+ \tag{5.3}$$

と定める. $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ の一般無限小生成素を A とする:

$$Ax = \begin{cases} [-1,0], & x = 0 \\ -1, & x > 0. \end{cases} \tag{5.4}$$

各 $x \in D$ に対して,

$$u(t) = T(t)x$$

は $\mathrm{ACP}(A,x)$ の強解になる.

以下では $A \in \mathcal{G}(\omega)$ とする.

命題 5.5. *u, $\hat{u}$ を それぞれ, $\mathrm{ACP}(A,x)$, $\mathrm{ACP}(A,\hat{x})$ の $[0,\tau]$ 上の弱解とする. このとき,*

$$\|u(t) - \hat{u}(t)\| \leq e^{\omega t}\|x - \hat{x}\|, \quad t \in [0,\tau]$$

が成り立つ. 特に, $\mathrm{ACP}(A,x)$ の弱解は存在すれば, 初期値 x により一意に決まる.

証明. u, $\hat{u}$ を それぞれ, $\mathrm{ACP}(A,x)$, $\mathrm{ACP}(A,\hat{x})$ の $[0,\tau]$ 上の強解とする. $f(t) = \|u(t) - \hat{u}(t)\|$ は $[0,\tau]$ 上で絶対連続にあり, $(0,\tau)$ 上でほとんどいたるところ微分可

能である. $u(t)-\hat{u}(t)$ も $(0,\tau)$ 上でほとんどいたるところ微分可能であるから, ほとんどすべての $t\in(0,\tau)$ に対して

$$\partial_t\|u(t)-\hat{u}(t)\| = [u(t)-\hat{u}(t), u'(t)-\hat{u}'(t)]_-$$

が成り立つ. ところが, ほとんどすべての $t\in(0,\tau)$ に対して, $(u(t),u'(t))$, $(\hat{u}(t),\hat{u}'(t))\in A$ で, $A\in\mathcal{G}(\omega)$ であるから, ほとんどすべての $t\in(0,\tau)$ に対して

$$[u(t)-\hat{u}(t), u'(t)-\hat{u}'(t)]_- \le \omega\|u(t)-\hat{u}(t)\|$$

が成り立つ. 故に, ほとんどすべての $t\in(0,\tau)$ に対して

$$\partial_t\|u(t)-\hat{u}(t)\| \le \omega\|u(t)-\hat{u}(t)\|$$
$$\partial_t\left(e^{-\omega t}\|u(t)-\hat{u}(t)\|\right) \le 0$$

が成り立つ. 積分して, $t\in[0,\tau]$ のとき,

$$e^{-\omega t}\|u(t)-\hat{u}(t)\| - \|u(0)-\hat{u}(0)\| \le 0$$

となる. u_ε, $\hat{u}_\varepsilon$ をそれぞれ $\mathrm{ACP}(A,x_\varepsilon)$, $\mathrm{ACP}(A,\hat{x}_\varepsilon)$ $[0,\tau]$ 上の強解とする.

$$e^{-\omega t}\|u_\varepsilon(t)-\hat{u}_\varepsilon(t)\| - \|u_\varepsilon(0)-\hat{u}_\varepsilon(0)\| \le 0$$

が成り立つ. u, $\hat{u}$ をそれぞれ u_ε, $\hat{u}_\varepsilon$ の $\varepsilon\downarrow 0$ としたときの一様極限とすれば

$$e^{-\omega t}\|u(t)-\hat{u}(t)\| - \|u(0)-\hat{u}(0)\| \le 0$$

となる.

定義 5.2. $u:[0,\tau]\to X$ は連続で, $u(0)=x$ とする. 任意の $[s,t]\subset[0,\tau]$ と $(y,\eta)\in A$ に対して,

$$\|u(t)-y\| - \|u(s)-y\| + \int_s^t [y-u(\sigma),\eta]_-\,d\sigma \le \omega\int_s^t \|u(\sigma)-y\|\,d\sigma$$

が成り立つとき, u は $\mathrm{ACP}(A,x)$ の（タイプ ω の）**積分解**と呼ばれる.

命題 5.6. $\mathrm{ACP}(A,x)$ の弱解は $\mathrm{ACP}(A,x)$ の一意的な積分解を与える.

証明. u を $\mathrm{ACP}(A,x)$ の $[0,\tau]$ 上の強解とする. $(y,\eta)\in A$ とする. ほとんどすべての $t\in(0,\tau)$ に対して,

$$\partial_t\|u(t)-y\| = [u(t)-y, u'(t)]_-$$
$$[u(t)-y, u'(t)]_- + [y-u(t),\eta]_- \le \omega\|u(t)-y\|$$

が成り立つ. よって,

$$\partial_t\|u(t)-y\|+[y-u(t),\eta]_-\leq\omega\|u(t)-y\|$$

が成り立つ. 積分して, 任意の $[s,t]\subset[0,\tau]$ に対して,

$$\|u(t)-y\|-\|u(s)-y\|+\int_s^t[y-u(\sigma),\eta]_-\,d\sigma\leq\omega\int_s^t\|u(\sigma)-y\|\,d\sigma$$

が成り立つ. よって, u は $\mathrm{ACP}(A,x)$ の $[0,\tau]$ 上の積分解である. 極限移行により, 弱解も積分解であることがわかる. 但し, 汎関数 $[\cdot,\cdot]_-$ が $X\times X$ で下半連続であることを用いる.

v を $\mathrm{ACP}(A,x)$ の $[0,\tau]$ 上の積分解, u を $\mathrm{ACP}(A,x)$ の $[0,\tau]$ 上の強解とする. 任意の $[s,t]\subset[0,\tau]$, $(y,\eta)\in A$ に対して,

$$\|v(t)-y\|-\|v(s)-y\|+\int_s^t[y-v(\sigma),\eta]_-\,d\sigma\leq\omega\int_s^t\|v(\sigma)-y\|\,d\sigma$$

が成り立つ. ほとんどすべての $\hat\sigma\in(0,\tau)$ に対して, $(u(\hat\sigma),u'(\hat\sigma))\in A$ だから, 上で $(y,\eta)=(u(\hat\sigma),u'(\hat\sigma))$ として, ほとんどすべての $\hat\sigma\in(0,\tau)$ に対して,

$$\begin{aligned}\|v(t)-u(\hat\sigma)\|-\|v(s)-u(\hat\sigma)\|+\int_s^t[u(\hat\sigma)-v(\sigma),u'(\hat\sigma)]_-\,d\sigma\\ \leq\omega\int_s^t\|v(\sigma)-u(\hat\sigma)\|\,d\sigma\end{aligned}$$

が成り立つ.

$$[u(\hat\sigma)-v(\sigma),u'(\hat\sigma)]_-=\partial_{\hat\sigma}\|u(\hat\sigma)-v(\sigma)\|$$

であるから, $\hat\sigma$ に対して, $[\hat s,\hat t]\subset[0,\tau]$ 上で積分すると,

$$\begin{aligned}\int_{\hat s}^{\hat t}(\|v(t)-u(\hat\sigma)\|-\|v(s)-u(\hat\sigma)\|)\,d\hat\sigma+\int_s^t\left(\|u(\hat t)-v(\sigma)\|-\|u(\hat s)-v(\sigma)\|\right)\,d\sigma\\ \leq\omega\int_s^t\int_{\hat s}^{\hat t}\|v(\sigma)-u(\hat\sigma)\|\,d\hat\sigma d\sigma\end{aligned}$$

を得る. 極限移行により, これは u が弱解のときも成り立つ. 次の補題により, $t\in[0,\tau]$ に対して,

$$\|v(t)-u(t)\|\leq e^{\omega t}\|v(0)-u(0)\|=0$$

が成り立つ.

補題 5.1. $\omega \in (-\infty, \infty)$ とする．$f : [0,\tau] \times [0,\tau] \to (-\infty, \infty)$ は連続で，任意の $[s,t]$, $[\hat{s},\hat{t}] \in [0,\tau]$ に対して，

$$\int_{\hat{s}}^{\hat{t}} \left(f(t,\hat{\sigma}) - f(s,\hat{\sigma})\right) d\hat{\sigma} + \int_s^t \left(f(\sigma,\hat{t}) - f(\sigma,\hat{s})\right) d\sigma \\ \leq \omega \int_s^t \int_{\hat{s}}^{\hat{t}} f(\sigma,\hat{\sigma})\, d\hat{\sigma} d\sigma$$

が成り立つものとする．このとき任意の $[s,t] \subset [0,\tau]$ に対して

$$e^{-\omega t} f(t,t) \leq e^{-\omega s} f(s,s)$$

が成り立つ．

証明. $\tau > h > 0$ を固定する．$t \in [0, \tau - h]$ に対して，

$$F(t) = \int_t^{t+h} \int_t^{t+h} f(\sigma,\hat{\sigma})\, d\sigma d\hat{\sigma}$$

とおく．仮定から，$t \in (0, \tau - h)$ に対して，

$$\partial_t F(t) \leq \omega F(t)$$

が成り立つから，

$$\partial_t (e^{-\omega t} F(t)) \leq 0$$

である．よって，$[s,t] \subset [0, \tau - h]$ のとき，

$$e^{-\omega t} \int_t^{t+h} \int_t^{t+h} f(\sigma,\hat{\sigma})\, d\sigma d\hat{\sigma} \leq e^{-\omega s} \int_s^{s+h} \int_s^{s+h} f(\sigma,\hat{\sigma})\, d\sigma d\hat{\sigma}$$

となる．両辺を h^2 で除してから $h \downarrow 0$ とすればよい．

A の $X \times X$ における閉包を $\overline{A}$ とかく．$A \in \mathcal{G}(\omega)$ だから，$\overline{A} \in \mathcal{G}(\omega)$ である．$D \subset X$, $y \in X$ に対し，

$$d(D,y) = \inf\{\|z - y\|;\ z \in D\}$$

とかく．

命題 5.7. u を $\mathrm{ACP}(A,x)$ の $[0,\tau]$ 上の積分解とする．$t \in (0,\tau)$ において u は微分可能とする．このとき，$(u(t), u'(t)) \in \overline{A}$ であるためには

$$\liminf_{h \downarrow 0} h^{-1} d(R(I - hA), u(t-h)) = 0 \tag{5.5}$$

であることが必要十分である．

証明. u は t で微分可能だから,

$$u(t+h) = u(t) + hu'(t) + h\rho(h) \tag{5.6}$$

とかくと, $h \to 0$ のとき, $\rho(h) \to 0$ である. u は積分解であるので, $(\hat{x}, \hat{\xi}) \in A$, $h > 0$ とすると,

$$\begin{aligned} h^{-1}\left(\|u(t+h) - \hat{x}\| - \|u(t) - \hat{x}\|\right) + h^{-1}\int_t^{t+h} [\hat{x} - u(\sigma), \hat{\xi}]_- \, d\sigma \\ \leq \omega h^{-1}\int_t^{t+h} \|u(\sigma) - \hat{x}\| \, d\sigma \end{aligned}$$

である. よって, $h \downarrow 0$ として,

$$[u(t) - \hat{x}, u'(t)]_+ + [\hat{x} - u(t), \hat{\xi}]_- \leq \omega\|u(t) - \hat{x}\|$$

を得る.

$$\begin{aligned} [u(t) - \hat{x}, u'(t)]_+ + [\hat{x} - u(t), \hat{\xi}]_- &= [u(t) - \hat{x}, u'(t)]_+ - [u(t) - \hat{x}, \hat{\xi}]_+ \\ &\geq -[u(t) - \hat{x}, \hat{\xi} - u'(t)]_+ \\ &= [u(t) - \hat{x}, u'(t) - \hat{\xi}]_- \end{aligned}$$

であるから,

$$[u(t) - \hat{x}, u'(t) - \hat{\xi}]_- \leq \omega\|u(t) - \hat{x}\| \tag{5.7}$$

が成り立つ.

$(u(t), u'(t)) \in \overline{A}$ と仮定する. $h \downarrow 0$ のとき

$$\begin{aligned} h^{-1}d(R(I - hA), u(t-h)) &= h^{-1}d(R(I - h\overline{A}), u(t-h)) \\ &\leq h^{-1}\|u(t) - hu'(t) - u(t-h)\| = \|\rho(h)\| \to 0 \end{aligned}$$

である.

逆に, (5.5) を仮定する. $h_n > 0$, $(x_n, \xi_n) \in A$ が存在して, $n \to \infty$ のとき, $h_n \to 0$, $\varepsilon_n = h_n^{-1}((x_n - h_n\xi_n) - u(t - h_n)) \to 0$ となる. このと,

$$u(t - h_n) = x_n - h_n\xi_n - h_n\varepsilon_n$$

である. (5.6) において, $h = -h_n$ とおいて,

$$u(t - h_n) = u(t) - h_n u'(t) - h_n\rho(-h_n)$$

であるから,

$$\begin{aligned} u(t) - x_n &= h_n(u'(t) - \xi_n) + h_n(\rho(-h_n) - \varepsilon_n) \\ u'(t) - \xi_n &= h_n^{-1}(u(t) - x_n) - (\rho(-h_n) - \varepsilon_n) \end{aligned} \tag{5.8}$$

である．(5.7) で，$(\hat{x},\hat{\xi}) = (x_n, \xi_n)$ にとって

$$\begin{gathered}
[u(t) - x_n, u'(t) - \xi_n]_- \le \omega\|u(t) - x_n\| \\
[u(t) - x_n, h_n^{-1}(u(t) - x_n) - (\rho(-h_n) - \varepsilon_n)]_- \le \omega\|u(t) - x_n\| \\
h_n^{-1}\|u(t) - x_n\| + [u(t) - x_n, -(\rho(-h_n) - \varepsilon_n)]_- \le \omega\|u(t) - x_n\| \\
h_n^{-1}\|u(t) - x_n\| \le \omega\|u(t) - x_n\| + \|\rho(-h_n) - \varepsilon_n\| \\
(1 - h_n\omega)h_n^{-1}\|u(t) - x_n\| \le \|\rho(-h_n) - \varepsilon_n\|
\end{gathered}$$

を得る．よって, $n \to \infty$ のとき $h_n^{-1}(u(t) - x_n) \to 0$ である．したがって, (5.8) により，$(x_n, \xi_n) \to (u(t), u'(t))$ である．故に, $(u(t), u'(t)) \in A$ である．

以下では, $D \supset D(A)$ で, ある $\lambda_0 \in (0, 1/\omega^+)$ に対し,

$$R(I - \lambda A) \supset D, \quad \lambda \in (0, \lambda_0] \tag{5.9}$$

が成り立つことを仮定する．A が生成する半群を $\{T(t)\}_{t\ge 0} \in \mathcal{S}(\overline{D(A)}, \omega)$ とかく．また, $J_\lambda = (I - \lambda A)^{-1}$ と書く．$\lambda \in (0, \lambda_0]$, $x \in D$ とする．$t \in [0, \infty)$ のとき

$$u_\lambda(t) = J_\lambda^{[t/\lambda]}x$$

とおく．このとき

$$\lambda^{-1}(u_\lambda(t) - u_\lambda(t - \lambda)) \in Au_\lambda(t), \quad t \ge \lambda \tag{5.10}$$

$$u_\lambda(t) = x, \quad 0 \le t < \lambda \tag{5.11}$$

が成り立つ.

定理 5.1. 任意の $x \in \overline{D(A)}$ に対して, $u(t) = T(t)x$ は $\mathrm{ACP}(A, x)$ の一意的な積分解になる.

証明．極限操作により, $x \in D(A)$ の場合に調べれば十分である．$x \in D(A)$, $u_\lambda(t) = J_\lambda^{[t/\lambda]}x$ とし, $(\hat{x},\hat{\xi}) \in A$ とする．$t \ge \lambda$ のとき, (5.10) から,

$$\begin{gathered}
[u_\lambda(t) - \hat{x}, \lambda^{-1}(u_\lambda(t) - u_\lambda(t - \lambda))]_- + [\hat{x} - u_\lambda(t), \hat{\xi}]_- \le \omega\|u_\lambda(t) - \hat{x}\|, \\
\lambda^{-1}\left(\|u_\lambda(t) - \hat{x}\| - \|u_\lambda(t - \lambda) - \hat{x}\|\right) + [\hat{x} - u_\lambda(t), \hat{\xi}]_- \le \omega\|u_\lambda(t) - \hat{x}\|
\end{gathered}$$

を得る．$n \ge m \ge 1$ を整数とし, 両辺を t に関して, $m\lambda$ から $n\lambda$ まで積分すると,

$$\begin{gathered}
\lambda^{-1}\left(\int_{m\lambda}^{n\lambda}\|u_\lambda(t) - \hat{x}\|\,dt - \int_{m\lambda}^{n\lambda}\|u_\lambda(t - \lambda) - \hat{x}\|\,dt\right) + \int_{m\lambda}^{n\lambda}[\hat{x} - u_\lambda(t), \hat{\xi}]_-\,dt \\
\le \omega\int_{m\lambda}^{n\lambda}\|u_\lambda(t) - \hat{x}\|\,dt
\end{gathered}$$

である.

$$
\begin{aligned}
&\lambda^{-1}\left(\int_{m\lambda}^{n\lambda}\|u_\lambda(t)-\hat{x}\|\,dt-\int_{m\lambda}^{n\lambda}\|u_\lambda(t-\lambda)-\hat{x}\|\,dt\right)\\
&=\lambda^{-1}\left(\int_{m\lambda}^{n\lambda}\|u_\lambda(t)-\hat{x}\|\,dt-\int_{(m-1)\lambda}^{(n-1)\lambda}\|u_\lambda(t)-\hat{x}\|\,dt\right)\\
&=\lambda^{-1}\left(\int_{(n-1)\lambda}^{n\lambda}\|u_\lambda(t)-\hat{x}\|\,dt-\int_{(m-1)\lambda}^{m\lambda}\|u_\lambda(t)-\hat{x}\|\,dt\right)\\
&=\|u_\lambda((n-1)\lambda)-\hat{x}\|-\|u_\lambda((m-1)\lambda)-\hat{x}\|
\end{aligned}
$$

であるから, $t\geq s>0$ に対して, $n=[t/\lambda]$, $m=[s/\lambda]$ とおいて, $\lambda\downarrow 0$ とすれば, $[\hat{x}-u(\sigma),\hat{\xi}]_-\leq\liminf_{\lambda\downarrow 0}[\hat{x}-u_\lambda(\sigma),\hat{\xi}]_-$ であるから,

$$
\begin{aligned}
\|u(t)-\hat{x}\|-\|u(s)-\hat{x}\|+\int_s^t[\hat{x}-u(\sigma),\hat{\xi}]_-\,d\sigma\\
\leq\omega\int_s^t\|u(\sigma)-\hat{x}\|\,d\sigma
\end{aligned}
$$

となる. 連続性から, これは $s=0$ のときも成り立つ. よって, u は $\mathrm{ACP}(A,x)$ の積分解である.

v を $\mathrm{ACP}(A,x)$ の積分解とする. 任意の $[s,t]\subset[0,\infty)$ と $(\hat{x},\hat{\xi})\in A$ に対して,

$$
\begin{aligned}
\|v(t)-\hat{x}\|-\|v(s)-\hat{x}\|+\int_s^t[\hat{x}-v(\sigma),\hat{\xi}]_-\,d\sigma\\
\leq\omega\int_s^t\|v(\sigma)-\hat{x}\|\,d\sigma
\end{aligned}
$$

が成り立つ. $\hat{\sigma}\geq\lambda$ のとき, $(\hat{x},\hat{\xi})=(u_\lambda(\hat{\sigma}),\lambda^{-1}(u_\lambda(\hat{\sigma})-u_\lambda(\hat{\sigma}-\lambda)))$ を代入して,

$$
\begin{gathered}
\|v(t)-u_\lambda(\hat{\sigma})\|-\|v(s)-u_\lambda(\hat{\sigma})\|\\
+\int_s^t[u_\lambda(\hat{\sigma})-v(\sigma),\lambda^{-1}(u_\lambda(\hat{\sigma})-u_\lambda(\hat{\sigma}-\lambda))]_-\,d\sigma\leq\omega\int_s^t\|v(\sigma)-u_\lambda(\hat{\sigma})\|\,d\sigma\\
\|v(t)-u_\lambda(\hat{\sigma})\|-\|v(s)-u_\lambda(\hat{\sigma})\|\\
+\int_s^t\lambda^{-1}\left(\|u_\lambda(\hat{\sigma})-v(\sigma)\|-\|u_\lambda(\hat{\sigma}-\lambda)-v(\sigma)\|\right)\,d\sigma\leq\omega\int_s^t\|v(\sigma)-u_\lambda(\hat{\sigma})\|\,d\sigma
\end{gathered}
$$

を得る. $\hat{t}\geq\hat{s}\geq\lambda$ とし, 両辺を $\hat{\sigma}$ に関して, $[\hat{s}/\lambda]\lambda$ から, $[\hat{t}/\lambda]\lambda$ まで積分して, $\lambda\downarrow 0$ とすることにより,

$$
\begin{gathered}
\int_{\hat{s}}^{\hat{t}}\left(\|v(t)-u(\hat{\sigma})\|-\|v(s)-u(\hat{\sigma})\|\right)\,d\hat{\sigma}+\int_s^t\left(\|u(\hat{t})-v(\sigma)\|-\|u(\hat{s})-v(\sigma)\|\right)\,d\sigma\\
\leq\omega\int_s^t\int_{\hat{s}}^{\hat{t}}\|v(\sigma)-u(\hat{\sigma})\|\,d\sigma d\hat{\sigma}
\end{gathered}
$$

を得る．補題 5.1 により, $t \geq 0$ のとき

$$\|u(t)-v(t)\| \leq e^{\omega t}\|u(0)-v(0)\| = 0$$

を得る．

定理 5.2. X は *Radon-Nikodým* 性を持つと仮定する．任意の $x \in \overline{D(A)}$ に対して, $u(t)=T(t)x$ は $\mathrm{ACP}(\overline{A},x)$ の一意的な弱解になる．特に, $x \in D(A)$ のとき, $u(t)=T(t)x$ は $\mathrm{ACP}(\overline{A},x)$ の一意的な強解になる．

証明. $x \in D(A)$ とすると, $u(t)$ は局所的にリプシッツ連続になる．X は Radon-Nikodým 性を持つと仮定しているから, ほとんどすべての $t \in (0,\infty)$ で微分可能である．仮定 (5.9) から条件 (5.5) が満されていて，u は $\mathrm{ACP}(A,x)$ の積分解であるから, 命題 5.7 により, ほとんどすべての $t \in (0,\infty)$ に対し $(u(t),u'(t)) \in \overline{A}$ である．すなわち u は $\mathrm{ACP}(\overline{A},x)$ の強解になる．$x \in \overline{D(A)}$ のとき, $x_n \in D(A)$ を $x_n \to x$ であるようにとり, $u_n(t)=T(t)x_n$ とおく．u_n は $\mathrm{ACP}(\overline{A},x_n)$ の強解であり, u に $[0,\infty)$ 上で広義一様収束する．よって, $u(t)$ は $\mathrm{ACP}(\overline{A},x)$ の弱解になる．

定理 5.3. $D(A)$ は閉で, A は $D(A)$ 上で一価連続とする．任意の $x \in D(A)$ に対して, $u(t)=T(t)x$ は $\mathrm{ACP}(A,x)$ の一意的な古典解になる．

空間 X が Radon-Nikodým 性をもたないときは, 次の例が示すように, 半群は弱解を与えるとは限らない.

例 5.7. $X=C[0,1]$ とし, $u \in X$ に対して,

$$(T(t)u)(s) = (u(s)-t)^+ - (u(s)+t)^-, \quad s \in [0,1],\ t \in [0,\infty)$$

と定めると, $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ は X 上の縮小半群になる．ある $v \in X$ に対して

$$s \in [0,1] \text{ のとき}, |v(s)| \leq 1,\ u(s) \neq 0 \text{ のとき}, v(s) = -\operatorname{sign}(u(s))$$

となる $u \in X$ の全体を $D(A)$ とし，このような v の全体を Au とする．$\{T(t)\}t \geq 0$ の一般無限小生成素は A で与えられる．$\overline{D(A)}=X$ で, A は

$$R(I-\lambda A) = X, \quad \lambda > 0$$

をみたし,

$$(I-\lambda A)^{-1}u = T(\lambda)u, \quad \lambda > 0$$

である．よって, $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ は A で生成される半群である．$u_0 \in X$ を集合 $\{s \in [0,1];\ u_0(s) > 0\}$ と $\{s \in [0,1];\ u_0(s) < 0\}$ が空でない関数とする．このとき, $u(t)=T(t)u_0$ は, $\mathrm{ACP}(A,u_0)$ の弱解にならない.

演習問題 5.1. 例 5.2,5.3,5.4,5.5 を検証せよ.

演習問題 5.2. 定理 5.3 を証明せよ.

演習問題 5.3. 例 5.7 を詳しく検証せよ.

6　ソボレフ空間

$u \in L^2(-\infty,\infty)$ とする．ある $v \in L^2(-\infty,\infty)$ が存在して, 任意の $\varphi \in C_0^\infty(-\infty,\infty)$ に対して,

$$\int_{-\infty}^{\infty} u\partial_x\varphi\,dx = -\int_{-\infty}^{\infty} v\varphi\,dx,$$

が成り立つとき, u は $(-\infty,\infty)$ 上で **L^2-微分可能**という．このとき, $v \in L^2(-\infty,\infty)$ は一意に定まるので, $v = \partial_x u$ とかく．また, このような u の全体を $H^1(-\infty,\infty)$ とかく．$H^1(-\infty,\infty)$ は $L^2(-\infty,\infty)$ の線形部分空間になり, $u, v \in H^1(-\infty,\infty)$, $\alpha \in (-\infty,\infty)$ のとき,

$$\partial_x(u+v) = \partial_x u + \partial_x v,\ \partial_x(\alpha u) = \alpha\partial_x u$$

が成り立つ．$u,\ v \in H^1(-\infty,\infty)$ のとき,

$$\langle u,v\rangle_{H^1} = \int_{-\infty}^{\infty} (uv + \partial_x u\partial_x v)\ dx$$

と定めて, $H^1(-\infty,\infty)$ は内積空間になる．対応 $u \to (u,\partial_x u)$ は $H^1(-\infty,\infty)$ から $L^2(-\infty,\infty) \times L^2(-\infty,\infty)$ の中への等距離作用素で, その像は $L^2(-\infty,\infty) \times L^2(-\infty,\infty)$ の閉線形部分空間になる．よって, $H^1(-\infty,\infty)$ は可分な Hilbert 空間である．帰納的に,

$$H^{k+1}(-\infty,\infty) = \{u \in H^k(-\infty,\infty);\ \partial_x u \in H^k(-\infty,\infty)\},\ k = 1,2,\ldots$$

と定める．$H^k(-\infty,\infty)$ を**ソボレフ空間**と言う．

命題 6.1. $C_0^\infty(-\infty,\infty)$ は $H^1(-\infty,\infty)$ で稠密である．

証明. $\zeta \in C_0^\infty(-\infty,\infty)$ は $0 \le \zeta \le 1$ を満たし, $|x| \le 1$ のとき, $\zeta(x) = 1$, $|x| \ge 2$ のとき $\zeta(x) = 0$ であるとする．$\varepsilon > 0$ に対して,

$$\zeta_\varepsilon(x) = \zeta(\varepsilon x)$$

とおく．$u \in H^1(-\infty,\infty)$ に対して,

$$u_\varepsilon(x) = \int_{-\infty}^{\infty} u(y)\varphi_\varepsilon(x-y)\,dy$$

とおく．このとき $\zeta_\varepsilon u_\varepsilon \in C_0^\infty(-\infty,\infty)$ である．

$$\begin{aligned}\|\zeta_\varepsilon u_\varepsilon - u\|_{L^2} &\le \|\zeta_\varepsilon u_\varepsilon - \zeta_\varepsilon u\|_{L^2} + \|\zeta_\varepsilon u - u\|_{L^2} \\ &\le \|u_\varepsilon - u\|_{L^2} + \|\zeta_\varepsilon u - u\|_{L^2}\end{aligned}$$

より $\varepsilon \downarrow 0$ のとき, $\zeta_\varepsilon u_\varepsilon$ は u に $L^2(-\infty,\infty)$ で収束する.

$$
\begin{aligned}
(\partial_x u_\varepsilon)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(y)(\partial_x \varphi_\varepsilon)(x-y)\,dy \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} u(y)\partial_y\left(\varphi_\varepsilon(x-y)\right)\,dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (\partial_x u)(y)\varphi_\varepsilon(x-y)\,dy
\end{aligned}
$$

である. よって, 上と同様に $\zeta_\varepsilon \partial_x u_\varepsilon$ は $\partial_x u$ に $L^2(-\infty,\infty)$ で収束する. 一方,

$$
|(\partial_x \zeta_\varepsilon)(x)| = \varepsilon |(\partial_x \zeta)(\varepsilon x)| \le \varepsilon \|\partial_x \zeta\|_{L^\infty}
$$

である. よって,

$$
\|u_\varepsilon \partial_x \zeta_\varepsilon\|_{L^2} \le \varepsilon \|\partial_x \zeta\|_{L^\infty} \|u_\varepsilon\|_{L^2} \le \varepsilon \|\partial_x \zeta\|_{L^\infty} \|u\|_{L^2}
$$

であり, $u_\varepsilon \partial_x \zeta_\varepsilon$ は $L^2(-\infty,\infty)$ で 0 に収束する. 故に,

$$
\partial_x(\zeta_\varepsilon u_\varepsilon) = \zeta_\varepsilon \partial_x u_\varepsilon + u_\varepsilon \partial_x \zeta_\varepsilon
$$

は $\partial_x u$ に $L^2(-\infty,\infty)$ で収束する.

命題 6.2.(1) $u \in H^1(-\infty,\infty)$ は 零集合を無視して, $u \in C(-\infty,\infty) \cap L^\infty(-\infty,\infty)$ と考えてよく, さらに

$$
\begin{gathered}
|u(x)-u(y)| \le \|\partial_x u\|_{L^2} |x-y|^{1/2},\ x,y \in (-\infty,\infty), \\
\|u\|_{L^\infty} \le \|u\|_{H^1}, \quad \lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0
\end{gathered}
$$

が成り立つ.

(2) $u,\ v \in H^1(-\infty,\infty)$ のとき, $uv \in H^1(-\infty,\infty)$ で,

$$
\begin{gathered}
\partial_x(uv) = u\partial_x v + v\partial_x u \\
\int_{-\infty}^{\infty} u\partial_x v\,dx = -\int_{-\infty}^{\infty} v\partial_x u\,dx
\end{gathered}
$$

が成り立つ.

(3) $G \in C^1(-\infty,\infty)$ は $G(0)=0$ を満たすとする. $u \in H^1(-\infty,\infty)$ に対して, $G(u) = G \circ u \in H^1(-\infty,\infty)$ で,

$$
\partial_x G(u) = G'(u)\partial_x u
$$

となる.

証明. $u \in C_0^\infty(-\infty,\infty)$ のとき,

$$\begin{aligned} u(x)^2 &= \int_{-\infty}^{x} 2u(y)(\partial_x u)(y)\,dy \\ &\le \int_{-\infty}^{x} u(y)^2 + (\partial_x u)(y)^2\,dy \\ &\le \|u\|_{H^1}^2 \end{aligned}$$

である. $u \in H^1(-\infty,\infty)$ に対して, $u_\varepsilon \in C_0^\infty(-\infty,\infty)$ を $\varepsilon \downarrow 0$ のとき, u_ε が u に $H^1(-\infty,\infty)$ で収束するようにとる. このとき, 上の評価から, u_ε はある $v \in C(-\infty,\infty) \cap L^\infty(-\infty,\infty)$ に一様収束する. u_ε は u に $L^2(-\infty,\infty)$ で収束しているから, ほとんどいたるところ, $u(x) = v(x)$ である. また, 上の評価から,

$$v(x)^2 \le \int_{-\infty}^{x} u(y)^2 + (\partial_x u)(y)^2\,dy$$

が成り立ち, $x \to -\infty$ のとき, $v(x) \to 0$ である. 同様にして,

$$v(x)^2 \le \int_{x}^{\infty} u(y)^2 + (\partial_x u)(y)^2\,dy$$

も成り立ち, $x \to \infty$ のとき, $v(x) \to 0$ である. $u \in C_0^\infty(-\infty,\infty)$ のとき,

$$u(x) - u(y) = \int_{y}^{x} (\partial_x u)(t)\,dt$$

$$|u(x) - u(y)| \le \left| \int_{y}^{x} |(\partial_x u)(t)|\,dt \right| \le |x-y|^{1/2} \|\partial_x u\|_{L^2}$$

が成り立つ. よって,

$$|v(x) - v(y)| \le |x-y|^{1/2} \|\partial_x u\|_{L^2}$$

も成り立つ.

$u,\ v \in H^1(-\infty,\infty)$ に対して, $u_\varepsilon,\ v_\varepsilon \in C_0^\infty(-\infty,\infty)$ を $\varepsilon \downarrow 0$ のとき $H^1(-\infty,\infty)$ で, それぞれ $u,\ v$ に収束するようにとる. このとき, $u_\varepsilon,\ v_\varepsilon$ は $\varepsilon \downarrow 0$ のとき $L^\infty(-\infty,\infty)$ で, それぞれ $u,\ v$ に収束する. したがって, $u_\varepsilon v_\varepsilon$ は uv に $L^2(-\infty,\infty)$ で収束し,

$$\partial_x(u_\varepsilon v_\varepsilon) = u_\varepsilon \partial_x v_\varepsilon + v_\varepsilon \partial_x u_\varepsilon$$

は $u\partial_x v + v\partial_x u$ に $L^2(-\infty,\infty)$ で収束する. 故に, $\varphi \in C_0^\infty(-\infty,\infty)$ のとき,

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_\varepsilon v_\varepsilon \partial_x \varphi\,dx = -\int_{-\infty}^{\infty} (u_\varepsilon \partial_x v_\varepsilon + v_\varepsilon \partial_x u_\varepsilon)\,\varphi\,dx$$

で, $\varepsilon \downarrow 0$ として, $uv \in H^1(-\infty,\infty)$ で, $\partial_x(uv) = u\partial_x v + v\partial_x u$ であることがわかる. また,

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_\varepsilon \partial_x v_\varepsilon\,dx = -\int_{-\infty}^{\infty} v_\varepsilon \partial_x u_\varepsilon\,dx$$

において, $\varepsilon \downarrow 0$ として,

$$\int_{-\infty}^{\infty} u\partial_x v\,dx = -\int_{-\infty}^{\infty} v\partial_x u\,dx$$

を得る.

$G \in C^1(\infty, \infty)$ は $G(0) = 0$ とする. このとき, $G(u_\varepsilon) \in C_0^1(-\infty, \infty)$ で, $\varepsilon \downarrow 0$ のとき $G(u_\varepsilon)$ は $L^\infty(-\infty, \infty)$ で, $G(u)$ に一様収束する.

$$|G(u(x))| \leq |u(x)| \sup\{|G'(r)|;\ |r| \leq \|u\|_{L^\infty}\}$$

であるから, $G(u) \in L^2(-\infty, \infty)$ である. $\varphi \in C_0^\infty(-\infty, \infty)$ のとき,

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(u_\varepsilon)\partial_x\varphi\,dx = -\int_{-\infty}^{\infty} G'(u_\varepsilon)\varphi\partial_x u_\varepsilon\,dx$$

において, $\varepsilon \downarrow 0$ とすることにより,

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(u)\partial_x\varphi\,dx = -\int_{-\infty}^{\infty} G'(u)\varphi\partial_x u\,dx$$

を得る. $G'(u)\partial_x u \in L^2(-\infty, \infty)$ だから, $G(u) \in H^1(-\infty, \infty)$ で, $\partial_x G(u) = G'(u)\partial_x u$ である.

7 粘性を伴う単独保存則に支配される半群

ν を正の定数, F を既知関数とするとき, スカラー量 $u = u(x,t)$ に関する

$$\partial_t u + \partial_x F(u) = \nu \partial_x^2 u$$

という形の偏微分方程式で記述される法則を u に関する**粘性を伴う単独保存則**という. $\nu \partial_x^2 u$ を粘性項と言う.

例えば, 交通流の方程式

$$\partial_t \rho + \partial_x(\rho v) = 0$$

において,

$$v = V(\rho) - \nu \frac{\partial_x \rho}{\rho}$$

とおいてこのような方程式を得る. $\partial_x \rho / \rho$ の値が正で大きいほど前方が渋滞していることを意味し, $\partial_x \rho / \rho$ の値が負で小さいほど後方が渋滞していることを意味する. v が上の形で与えられるのは, 前方が渋滞しているときは, それに見合って速度を落とし, 後方が渋滞してときは, それに見合って速度を上げる場合である. このとき, 車はスムーズに流れるであろう.

$F \in C^1(-\infty,\infty)$ とし, $\nu > 0$ とする.

命題 7.1. $F'(r)$ は $-\infty < r < \infty$ で有界であると仮定する. $\lambda_0 > 0$ を

$$\lambda_0 \|F'\|_{L^\infty}^2 < 2\nu,$$

を満たすようにとる. $\lambda \in (0,\lambda_0]$ と, $f \in L^2(-\infty,\infty)$ に対して, $u \in H^2(-\infty,\infty)$ で, 次を満たすものが存在する.

$$u - \lambda \left(\nu \partial_x^2 u - F'(u)\partial_x u\right) = f. \tag{7.1}$$

もし, さらに, $f \in L^1(-\infty,\infty) \cap L^\infty(-\infty,\infty)$ ならば, $u \in L^1(-\infty,\infty) \cap L^\infty(-\infty,\infty)$ で

$$\|u\|_{L^p} \le \|f\|_{L^p}, \quad p = 1,\ \infty$$

が成り立つ.

証明. $\lambda \in (0,\lambda_0]$, $f \in L^2(-\infty,\infty)$ とし, 固定する. $H = H^1(-\infty,\infty)$ を

$$\langle u, v\rangle_H = \int_{-\infty}^{\infty} (uv + \lambda\nu \partial_x u \partial_x v)\, dx$$

を内積とする Hilbert 空間と考える．$u \in H = H^1(-\infty,\infty)$ とする．$v \in H = H^1(-\infty,\infty)$ のとき,

$$
\begin{aligned}
&|\int_{-\infty}^{\infty} (f - \lambda F'(u)\partial_x u)\, v\, dx| \\
&\le \int_{-\infty}^{\infty} (|f| + \lambda \|F'\|_{L^\infty} |\partial_x u|)\, |v|\, dx \\
&\le 1 \vee (\lambda \|F'\|_{L^\infty}) \int_{-\infty}^{\infty} (|f| + |\partial_x u|)\, |v|\, dx \\
&\le 1 \vee (\lambda \|F'\|_{L^\infty})(\|f\|_{L^2} + \|\partial_x u\|_{L^2})\|v\|_{L^2} \\
&\le 1 \vee (\lambda \|F'\|_{L^\infty})(\|f\|_{L^2} + \|\partial_x u\|_{L^2})\|v\|_{H}
\end{aligned}
$$

であるから, Riesz の定理により, $w \in H = H^1(-\infty,\infty)$ が一意的に存在して, 任意の $v \in H = H^1(-\infty,\infty)$ に対して

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} (wv + \lambda\nu\partial_x w \partial_x v)\; dx &= \int_{-\infty}^{\infty} (fv - \lambda F'(u) v \partial_x u)\; dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (fv - \lambda \partial_x (F(u) - F(0)) v)\; dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (fv + \lambda (F(u) - F(0)) \partial_x v)\; dx
\end{aligned}
$$

が成り立つ．このとき, $w = Tu$ とおいて, $T : H \to H$ を定める．$u,\ \hat{u} \in H$ とし, $w = Tu,\ \hat{w} = T\hat{u}$ とする．このとき,

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} ((w - \hat{w})v + \lambda\nu\partial_x (w - \hat{w})\partial_x v)\; dx \\
&= \lambda \int_{-\infty}^{\infty} (F(u) - F(\hat{u}))\partial_x v\, dx
\end{aligned}
$$

である． ここで, $v = w - \hat{w}$ とおくと,

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} \left((w - \hat{w})^2 + \lambda\nu(\partial_x (w - \hat{w}))^2\right)\; dx \\
&= \lambda \int_{-\infty}^{\infty} (F(u) - F(\hat{u}))\partial_x (w - \hat{w})\, dx \\
&\le \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \|F'\|_{L^\infty} |u - \hat{u}| |\partial_x (w - \hat{w})|\, dx \\
&\le \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\|F'\|_{L^\infty}^2}{\nu} |u - \hat{u}|^2 + \nu |\partial_x (w - \hat{w})|^2\, dx
\end{aligned}
$$

であるから,

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}\left((w-\hat{w})^2+\frac{\lambda\nu}{2}(\partial_x(w-\hat{w}))^2\right)dx\\&\le\frac{\lambda\|F'\|_{L^\infty}^2}{2\nu}\int_{-\infty}^{\infty}(u-\hat{u})^2\,dx\end{aligned}$$

である． $H=H^1(-\infty,\infty)$ を

$$d(u,\hat{u})=\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left((u-\hat{u})^2+\frac{\lambda\nu}{2}(\partial_x(u-\hat{u}))^2\right)dx\right)^{1/2}$$

を距離とする完備な距離空間と考える．上の評価から,

$$d(Tu,T\hat{u})\le\sqrt{\frac{\lambda\|F'\|_{L^\infty}^2}{2\nu}}d(u,\hat{u}),\quad u,\ \hat{u}\in H$$

が成り立つから,縮小写像の原理により, $Tu=u$ となる $u\in H=H^1(-\infty,\infty)$ が存在する．すなわち $u\in H^1(-\infty,\infty)$ が存在して, 任意の $v\in H^1(-\infty,\infty)$ に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty}(uv+\lambda\nu\partial_xu\partial_xv)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}(fv-\lambda F'(u)v\partial_xu)\,dx \tag{7.2}$$

が成り立つ． $f\in L^2(-\infty,\infty)$ で， $u\in H^1(-\infty,\infty)$ だから, $u\in H^2(-\infty,\infty)$ が従い,

$$u-\lambda\nu\partial_x^2u=f-\lambda F'(u)\partial_xu$$

が成り立つ.

とくに, $f\in L^1(-\infty,\infty)\cap L^\infty(-\infty,\infty)$ とする． $\varepsilon>0$ のとき, $v=h_\varepsilon(u-\varepsilon)\in H^1(-\infty,\infty)$ で $\partial_xv=h'_\varepsilon(u-\varepsilon)\partial_xu$ だから, これを (7.2) に代入して,

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}(u-f)h_\varepsilon(u-\varepsilon)\,dx\\&=-\lambda\nu\int_{-\infty}^{\infty}h'_\varepsilon(u-\varepsilon)(\partial_xu)^2\,dx-\lambda\int_{-\infty}^{\infty}F'(u)h_\varepsilon(u-\varepsilon)\partial_xu\,dx\\&\le-\lambda\int_{-\infty}^{\infty}\partial_x\left(\int_0^uF'(r)h_\varepsilon(r-\varepsilon)\,dr\right)dx\end{aligned}$$

となる． $\displaystyle\int_0^uF'(r)h_\varepsilon(r-\varepsilon)\,dr$ は C^1 級で $\lim_{|x|\to\infty}u(x)=0$ だから, 上の最右辺は 0 である．故に,

$$\int_{-\infty}^{\infty}uh_\varepsilon(u-\varepsilon)\,dx\le\int_{-\infty}^{\infty}fh_\varepsilon(u-\varepsilon)\,dx\le\int_{-\infty}^{\infty}f^+h_\varepsilon(u-\varepsilon)\,dx\le\int_{-\infty}^{\infty}f^+\,dx$$

である．$uh_\varepsilon(u-\varepsilon) \geq 0$ だから, Fatou の補題により

$$\int_{-\infty}^{\infty} u^+ \, dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} f^+ \, dx$$

となる．$v = -h_\varepsilon(-u-\varepsilon)$ とし，同様に議論すれば,

$$\int_{-\infty}^{\infty} u^- \, dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} f^- \, dx$$

も示せる. 故に, $u \in L^1(-\infty, \infty)$ で

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u| \, dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f| \, dx$$

である．$M \geq 0$ とし, ほとんどいたるところ $f(x) \leq M$ であるとする．$v = h_\varepsilon(u-\varepsilon-M)$ とおくと, $v \in H^1(-\infty, \infty)$ だから, 上と同様に

$$\int_{-\infty}^{\infty} uh_\varepsilon(u-\varepsilon-M) \, dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} fh_\varepsilon(u-\varepsilon-M) \, dx$$

が従う.

$$|h_\varepsilon(u-\varepsilon-M)| = |h_\varepsilon(u-\varepsilon-M) - h_\varepsilon(-\varepsilon-M)| \leq |u| \|h'_\varepsilon\|_\infty$$

だから, $h_\varepsilon(u-\varepsilon-M) \in L^1(-\infty, \infty)$ である． そこで, 上の両辺から

$$\int_{-\infty}^{\infty} Mh_\varepsilon(u-\varepsilon-M) \, dx$$

を減じて,

$$\int_{-\infty}^{\infty} (u-M)h_\varepsilon(u-\varepsilon-M) \, dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} (f-M)h_\varepsilon(u-\varepsilon-M) \, dx \leq 0$$

となる. $(u-M)h_\varepsilon(u-\varepsilon-M) \geq 0$ だから, ほとんどいたるところ

$$(u-M)h_\varepsilon(u-\varepsilon-M) = 0$$

である．$\varepsilon \downarrow 0$ として, ほとんどいたるところ

$$(u-M)^+ = 0$$

である． よって, ほとんどいたるところ $u \leq M$ である．同様にして, ほとんどいたるところ $f \geq -M$ のとき, ほとんどいたるところ $u \geq -M$ である.

定義 7.1.

$$D(A_\nu) = \{u \in L^1(-\infty,\infty) \cap H^2(-\infty,\infty); \nu\partial_x^2 u - F'(u)\partial_x u \in L^1(-\infty,\infty)\}$$

とし,

$$A_\nu u = \nu\partial_x^2 u - F'(u)\partial_x u, \quad u \in D(A_\nu)$$

で $L^1(-\infty,\infty)$ の作用素を定める.

定理 7.1. A_ν は $L^1(-\infty,\infty)$ で消散的で, $R(I-\lambda A_\nu) \supset L^1(-\infty,\infty) \cap L^\infty(-\infty,\infty)$, $(\lambda > 0)$ が成り立つ. さらに, $f \in L^1(-\infty,\infty) \cap L^\infty(-\infty,\infty)$, $(\lambda > 0)$ のとき,

$$\|(I-\lambda A_\nu)^{-1} f\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p},\ p = 1, \infty$$

が成り立つ.

証明. $u,\ \hat{u} \in D(A_\nu)$, $\lambda > 0$ とする.

$$u - \lambda A_\nu u = f,\ \hat{u} - \lambda A_\nu \hat{u} = \hat{f}$$

とかく.

$$\lambda^{-1}(u - \hat{u} - (f - \hat{f})) = \nu\partial_x^2(u - \hat{u}) - \partial_x(F(u) - F(\hat{u}))$$

と書ける. $\varphi \in C_0^\infty(-\infty,\infty)$ を非負とし, $v = h_\varepsilon(u - \hat{u})\varphi$ とする.

$$\partial_x v = h'_\varepsilon(u - \hat{u})\partial_x(u - \hat{u})\varphi + h_\varepsilon(u - \hat{u})\partial_x\varphi$$

であるから,

$$\begin{aligned}
&\lambda^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} \Big((u - \hat{u}) - (f - \hat{f})\Big) h_\varepsilon(u - \hat{u})\varphi\, dx \\
&= \nu\int_{-\infty}^{\infty} \partial_x^2(u - \hat{u}) h_\varepsilon(u - \hat{u})\varphi\, dx - \int_{-\infty}^{\infty} \partial_x(F(u) - F(\hat{u})) h_\varepsilon(u - \hat{u})\varphi\, dx \\
&= -\nu\int_{-\infty}^{\infty} \partial_x(u - \hat{u})\left(h'_\varepsilon(u - \hat{u})\partial_x(u - \hat{u})\varphi + h_\varepsilon(u - \hat{u})\partial_x\varphi\right) dx \\
&+ \int_{-\infty}^{\infty} (F(u) - F(\hat{u}))\left(h'_\varepsilon(u - \hat{u})\partial_x(u - \hat{u})\varphi + h_\varepsilon(u - \hat{u})\partial_x\varphi\right) dx \\
&\leq -\nu\int_{-\infty}^{\infty} \partial_x(u - \hat{u}) h_\varepsilon(u - \hat{u})\partial_x\varphi\, dx \\
&+ \int_{-\infty}^{\infty} (F(u) - F(\hat{u})) h'_\varepsilon(u - \hat{u})\partial_x(u - \hat{u})\varphi\, dx \\
&+ \int_{-\infty}^{\infty} (F(u) - F(\hat{u})) h_\varepsilon(u - \hat{u})\partial_x\varphi\, dx
\end{aligned}$$

である． よって,

$$\begin{aligned}
&\lambda^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\Big((u-\hat{u})-(f-\hat{f})\Big)\,h_\varepsilon(u-\hat{u})\varphi\,dx\\
&\le \nu\int_{-\infty}^{\infty}\varPhi_\varepsilon(u-\hat{u})\partial_x^2\varphi\,dx\\
&+\int_{-\infty}^{\infty}|(u-\hat{u})h'_\varepsilon(u-\hat{u})||\partial_x(u-\hat{u})\varphi|\,dx\cdot\sup\{|F'(r)|;\ |r|\le\|u\|_{L^\infty}\vee\|\hat{u}\|_{L^\infty}\}\\
&+\int_{-\infty}^{\infty}(F(u)-F(\hat{u}))h_\varepsilon(u-\hat{u})\partial_x\varphi\,dx
\end{aligned}$$

である．$|(u-\hat{u})h'_\varepsilon(u-\hat{u})|$ は有界で, かつ $\varepsilon\downarrow 0$ のとき消えるから, 上の式の右辺第 2 項は $\varepsilon\downarrow 0$ のとき消える．第 1 項と第 3 項はそれぞれ, $\varepsilon\downarrow 0$ のとき

$$\nu\int_{-\infty}^{\infty}(u-\hat{u})^+\partial_x^2\varphi\,dx,\qquad\qquad \int_{-\infty}^{\infty}(F(u)-F(\hat{u}))\,\mathrm{sign}^+(u-\hat{u})\partial_x\varphi\,dx$$

に収束する．一方, 最左辺より,

$$\lambda^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\Big((u-\hat{u})h_\varepsilon(u-\hat{u})-(f-\hat{f})^+\Big)\,\varphi\,dx$$

の方が小さいかまたは等しく, これは $\varepsilon\downarrow 0$ のとき

$$\lambda^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\Big((u-\hat{u})^+-(f-\hat{f})^+\Big)\,\varphi\,dx$$

に近づく．故に,

$$\begin{aligned}
&\lambda^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\Big((u-\hat{u})^+-(f-\hat{f})^+\Big)\,\varphi\,dx\\
&\le\nu\int_{-\infty}^{\infty}(u-\hat{u})^+\partial_x^2\varphi\,dx+\int_{-\infty}^{\infty}(F(u)-F(\hat{u}))\,\mathrm{sign}^+(u-\hat{u})\partial_x\varphi\,dx
\end{aligned}$$

が成り立つ．$\zeta\in C_0^\infty(-\infty,\infty)$ は $0\le\zeta\le 1$ であり, $|x|\le 1$ で 1 に等しく, $|x|\ge 2$ で 0 に等しいとする．このとき, 上で, $\varphi(x)=\zeta(\varepsilon x)$ とおいて, $\varepsilon\downarrow 0$ とすれば, 右辺は消えて,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Big((u-\hat{u})^+-(f-\hat{f})^+\Big)\,dx\le 0$$

となる．

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Big((\hat{u}-u)^+-(\hat{f}-f)^+\Big)\,dx\le 0$$

も成り立つから,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Big(|u-\hat{u}|-|f-\hat{f}|\Big)\,dx\le 0$$

である． これで, A_ν が $L^1(-\infty,\infty)$ で消散的であることが分かった.

値域条件を調べるために, $M>0$ とする．$\zeta\in C_0^\infty(-\infty,\infty)$ は $0\le\zeta\le 1$ であり, $|r|\le M$ で $\zeta(r)=1$ となり, $|r|\ge M+1$ で $\zeta(r)=0$ となるとする．このとき,

$$\tilde F(r)=F(\int_0^r\zeta(s)\,ds)$$

とおくと, $\tilde F\in C^1(-\infty,\infty)$ で $\tilde F'$ は $(-\infty,\infty)$ で有界で, さらに $|r|\le M$ のとき, $\tilde F(r)=F(r)$ である．$\lambda_M>0$ を

$$\lambda_M\|\tilde F'\|_{L^\infty}^2<2\nu,$$

であるように定める, 命題 7.1 により, 任意の $\lambda\in(0,\lambda_M]$, $f\in L^1(-\infty,\infty)\cap L^\infty(-\infty,\infty)$ に対して, $u\in H^2(-\infty,\infty)\cap L^1(-\infty,\infty)$ が存在して,

$$u-\lambda\left(\nu\partial_x^2u-\partial_x\tilde F(u)\right)=f$$

が成り立ち,

$$\|u\|_{L^p}\le\|f\|_{L^p},\ p=1,\infty$$

となる．特に , ほとんどいたるところ $|f(x)|\le M$ であるならば, ほとんどいたるところ, $|u(x)|\le M$ であるから, $\tilde F(u)=F(u)$ である. よって,

$$u-\lambda\left(\nu\partial_x^2u-\partial_xF(u)\right)=f$$

が成り立つ．$u-f\in L^1(-\infty,\infty)$ であるから, $\nu\partial_x^2-\partial_xF(u)\in L^1(-\infty,\infty)$ である．故に, $u\in D(A_\nu)$ で

$$u-\lambda A_\nu u=f$$

が成り立ち, $\|u\|_{L^p}\le\|f\|_{L^p}$ である.

$\lambda>0$ とし $\mu\in(0,\lambda_M]$ を $\mu<\lambda$ であるように選ぶ. $f\in L^1(-\infty,\infty)$ は $|f(x)|\le M$ を満たすとする. $D_M=\{u\in L^1(-\infty,\infty);\ \|u\|_{L^\infty}\le\|f\|_{L^\infty},\|u\|_{L^1}\le\|f\|_{L^1}\}$ とおくと, D_M は $L^1(-\infty,\infty)$ の閉凸集合である. $u\in D_M$ とすると, $(\mu/\lambda)f+((\lambda-\mu)/\lambda)u\in D_M$ であり, したがって, $(I-\mu A_\nu)^{-1}((\mu/\lambda)f+((\lambda-\mu)/\lambda)u)\in D_M$ である．$u\in D_M$ に対して,

$$Tu=(I-\mu A_\nu)^{-1}(\frac{\mu}{\lambda}f+\frac{\lambda-\mu}{\lambda}u)$$

とおいて, $T:D_M\to D_M$ を定める. $u,\ \hat u\in D_M$ のとき,

$$\|Tu-T\hat u\|_{L^1}\le\frac{\lambda-\mu}{\lambda}\|u-\hat u\|_{L^1}$$

であるから, $Tu=u$ をみたす $u\in D_M$ が存在する. このとき, $u\in D(A_\nu)$ で

$$u-\mu A_\nu u=\frac{\mu}{\lambda}f+\frac{\lambda-\mu}{\lambda}u,\quad u-\lambda A_\nu u=f$$

であり, $\|u\|_{L^p}\le\|f\|_{L^p}$ である $(p=1,\infty)$.

$M>0$ とし, $D_M=\{u\in L^2(-\infty,\infty);\ \|u\|_{L^\infty}\le M\}$ とおく. D_M は $L^2(-\infty,\infty)$ の閉凸集合になる.

定義 7.2. $A_{\nu,M}$ を

$$A_{\nu,M}u=\nu\partial_x^2u-F'(u)\partial_xu,\quad u\in D(A_{\nu,M})=\{u\in H^2(-\infty,\infty);\ \|u\|_{L^\infty}\le M\}$$

で定める.

定理 7.2. $A_{\nu,M}$ は $L^2(-\infty,\infty)$ で閉で準消散的になる. $L^2(-\infty,\infty)$ において, $\overline{D(A_{\nu,M})}=D_M$ で, 条件 (R;D_M) が満たされる. $A_{\nu,M}$ が D_M で生成する半群を $\{T_{\nu,M}(t)\}_{t\ge0}$ とすると, $u_0\in D(A_{\nu,M})$ のとき, $u(t)=T_{\nu,M}(t)u_0$ は

$$u'(t)=A_{\nu,M}u(t),\ t>0,\quad u(0)=u_0$$

の一意的な強解になる.

証明. $u_n\in D(A_{\nu,M})$, $v_n=A_{\nu,M}u_n$ とし, $L^2(-\infty,\infty)\times L^2(-\infty,\infty)$ において, $(u_n,v_n)\to(u,v)$ であるとする.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}u_nv_n\,dx&=\int_{-\infty}^{\infty}u_nA_{\nu,M}u_n\,dx\\&=-\nu\int_{-\infty}^{\infty}|\partial_xu_n|^2\,dx-\int_{-\infty}^{\infty}F'(u_n)u_n\partial_xu_n\,dx\\&\le-\frac{\nu}{2}\int_{-\infty}^{\infty}|\partial_xu_n|^2\,dx+\frac{1}{2\nu}\int_{-\infty}^{\infty}|F'(u_n)u_n|^2\,dx\\&\le-\frac{\nu}{2}\int_{-\infty}^{\infty}|\partial_xu_n|^2\,dx+\frac{1}{2\nu}\sup_{|s|\le M}|F'(s)|\int_{-\infty}^{\infty}|u_n|^2\,dx\end{aligned}$$

であるから,

$$\frac{\nu}{2}\int_{-\infty}^{\infty}|\partial_xu_n|^2\,dx\le\frac{1}{2\nu}\sup_{|s|\le M}|F'(s)|\int_{-\infty}^{\infty}|u_n|^2\,dx+\frac12\int_{-\infty}^{\infty}|u_n|^2+|v_n|^2\,dx$$

を得る. 右辺は有界であるから, u_n は $H^1(-\infty,\infty)$ で有界で, $u\in H^1(-\infty,\infty)$ である. $\varphi\in C_0^\infty(-\infty,\infty)$ とする.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\nu\varphi\partial_x^2u_n-\varphi F'(u_n)\partial_xu_n\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi v_n\,dx$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}\nu u_n\partial_x^2\varphi+(F(u_n)-F(0))\partial_x\varphi\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi v_n\,dx$$

である．u_n の部分列は概収束するから,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \nu u \partial_x^2 \varphi + (F(u) - F(0))\partial_x \varphi \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi v \, dx$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} (-\nu \partial_x u \partial_x \varphi - F'(u)(\partial_x u)\varphi) \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi v \, dx$$

である．よって, $u \in D(A_{\nu,M})$ で $v = A_{\nu,M}u$ である．すなわち, $A_{\nu,M}$ は $L^2(-\infty,\infty)$ で閉である．

$u,\ \hat{u} \in D(A_{\nu,M}),\ v = A_{\nu,M}u,\ \hat{v} = A_{\nu,M}\hat{u}$ とする．

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} (v - \hat{v})(u - \hat{u}) \, dx &= \nu \int_{-\infty}^{\infty} (u - \hat{u}) \partial_x^2 (u - \hat{u}) \, dx \\
&\quad - \int_{-\infty}^{\infty} (F'(u)\partial_x u - F'(\hat{u})\partial_x \hat{u})(u - \hat{u}) \, dx \\
&= -\nu \int_{-\infty}^{\infty} |\partial_x (u - \hat{u})|^2 \, dx \\
&\quad + \int_{-\infty}^{\infty} (F(u) - F(\hat{u}))\partial_x (u - \hat{u}) \, dx \\
&\le -\frac{\nu}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |\partial_x (u - \hat{u})|^2 \, dx \\
&\quad + \frac{1}{2\nu} \int_{-\infty}^{\infty} |F(u) - F(\hat{u})|^2 \, dx \\
&\le \omega_{\nu,M} \int_{-\infty}^{\infty} |u - \hat{u}|^2 \, dx
\end{aligned}$$

となり, $A_{\nu,M}$ は $L^2(-\infty,\infty)$ で準消散的である．ただし,

$$\omega_{\nu,M} = \frac{1}{2\nu} \sup\{|F'(s)|^2;\ |s| \le M\}$$

である．

$D_M \cap C_0^\infty(-\infty,\infty) \subset D(A_{\nu,M})$ で, $D_M \cap C_0^\infty(-\infty,\infty)$ は，$L^2(-\infty,\infty)$ の位相で, D_M で稠密である．$f \in D_M$ とする．$f_n \in L^1(-\infty,\infty) \cap D_M$ で $n \to \infty$ のとき, $\|f - f_n\|_{L^2} \to 0$ となるものが存在する．定理 7.1 により, $\lambda > 0$ のとき, $u_n \in D(A_{\nu,M})$ で

$$u_n - \lambda A_{\nu,M} u_n = f_n$$

を満すものが存在する．$\lambda \in (0, 1/\omega_{\nu,M})$ のとき,

$$\|u_n - u_m\|_{L^2} \le (1 - \lambda\omega_{\nu,M})^{-1} \|f_n - f_m\|$$

であるから, u_n は $n \to \infty$ のとき，ある $u \in L^2(-\infty,\infty)$ に，$L^2(-\infty,\infty)$ で収束する．$A_{\nu,M}$ は $L^2(-\infty,\infty)$ で閉じているので, $u \in D(A_{\nu,M})$ で

$$u - \lambda A_{\nu,M} u = f$$

となる．すなわち, $\lambda \in (0, 1/\omega_{\nu,M})$ のとき,

$$R(I - \lambda A_{\nu,M}) \supset D_M = \overline{D(A_{\nu,M})}$$

である．

$A_{\nu,M}$ が生成する半群を $\{T_{\nu,M}(t)\}_{t\geq 0}$ とすると, $L^2(-\infty, \infty)$ は, 回帰的で, Radon-Nikodým 性を持つので, $u_0 \in D(A_{\nu,M})$ のとき, $u(t) = T_{\nu,M}(t)u_0$ は

$$u'(t) = A_{\nu,M}u(t),\ t > 0, \quad u(0) = u_0$$

の一意的な強解になる．

8　半群の収束

X を実バナッハ空間とし, $D \subset X$ とする. $A \in \mathcal{G}(\omega)$ は条件 (R: D) を満たすとする：ある $\lambda_0 \in (0, 1/\omega^+)$ に対して

$$R(I - \lambda A) \supset D \supset D(A), \quad \lambda \in (0, \lambda_0].$$

$A_\nu \in \mathcal{G}(\omega_\nu)$,($\nu \in (0, \nu_0]$), も条件 (R: D) を満たすとする：ある $\lambda_\nu \in (0, 1/\omega_\nu^+)$ に対し

$$R(I - \lambda A_\nu) \supset D \supset D(A_\nu), \quad \lambda \in (0, \lambda_\nu].$$

A, A_ν で生成される半群をそれぞれ $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in \mathcal{S}(\overline{D(A)}, \omega)$, $\{T_\nu(t)\}_{t\geq 0} \in \mathcal{S}(\overline{D(A_\nu)}, \omega_\nu)$ と書く. また, $\lambda > 0$ のとき

$$J_\lambda = (I - \lambda A)^{-1}, \quad J_{\nu,\lambda} = (I - \lambda A_\nu)^{-1}$$

と書く.

定理 8.1. 上の A, A_ν に関して次の条件を仮定する.

(1)
$$\limsup_{\nu\downarrow 0} \omega_\nu \leq \omega$$

(2) $\lambda_0 \leq \lambda_\nu$ で, $x \in D(A)$, $\lambda \in (0, \lambda_0]$ のとき

$$\lim_{\nu\downarrow 0} J_{\nu,\lambda} x = J_\lambda x.$$

(3) 任意の $x \in \overline{D(A)}$ に対して, $x_\nu \in \overline{D(A_\nu)}$ が取れて $\lim_{\nu\downarrow 0} x_\nu = x$ となる.

このとき, $x_\nu \in \overline{D(A_\nu)}$, $x \in \overline{D(A)}$ で, $\lim_{\nu\downarrow 0} x_\nu = x$ ならば, 任意の $\tau > 0$ に対して

$$\sup_{t\in[0,\tau]} \|T_\nu(t)x_\nu - T(t)x\| \to 0, \quad \nu \downarrow 0$$

となる.

証明. $x \in \overline{D(A)}$, $x_\nu \in \overline{D(A_\nu)}$ とし, $x_\nu \to x$ であると仮定する. $\tau > 0$ とし, $t \in [0, \tau]$ とする.

$$\begin{aligned}
&\|T_\nu(t)x_\nu - T(t)x\| \\
&\leq \|T_\nu(t)x_\nu - J_{\nu,\lambda}^{[t/\lambda]} y]\| + \|J_{\nu,\lambda}^{[t/\lambda]} y - J_\lambda^{[t/\lambda]} y\| + \|J_\lambda^{[t/\lambda]} y - T(t)x\|
\end{aligned}$$

である．$\mu \in (0, \lambda_0)$ とする．

$$
\begin{aligned}
&\|T_\nu(t)x_\nu - J_{\nu,\lambda}^{[t/\lambda]}y\| \\
&\leq \|T_\nu(t)x_\nu - T_\nu(t)J_{\nu,\mu}y\| + \|T_\nu(t)J_{\nu,\mu}y - J_{\nu,\lambda}^{[t/\lambda]}J_{\nu,\mu}y\| + \|J_{\nu,\lambda}^{[t/\lambda]}J_{\nu,\mu}y - J_{\nu,\lambda}^{[t/\lambda]}y\| \\
&\leq e^{\omega_\nu t}\|x_\nu - J_{\nu,\mu}y\| + e^{\omega_\nu^+ t}(1-\lambda\omega_\nu)^{-[t/\lambda]}\left(\lambda^2 + \lambda t\right)^{1/2}\|J_{\nu,\mu}y - y\|/\mu \\
&+ (1-\lambda\omega_\nu)^{-[t/\lambda]}\|J_{\nu,\mu}y - y\|
\end{aligned}
$$

が成り立つ．ここで，$\mu^{-1}(J_{\nu,\mu}y - y) \in A_\nu J_{\nu,\mu}y$ であることを用いた．$y \in D(A) \subset D$ であるから，

$$
\begin{aligned}
&\limsup_{\nu\downarrow 0}\sup_{t\in[0,\tau]}\left(\|T_\nu(t)x_\nu - J_{\nu,\lambda}^{[t/\lambda]}y\|\right) \\
&\leq e^{\omega\tau}\|x - J_\mu y\| + e^{\omega^+\tau}(1-\lambda\omega)^{-[\tau/\lambda]}\left(\lambda^2 + \lambda\tau\right)^{1/2}\mu^{-1}\|J_\mu y - y\| \\
&+ (1-\lambda\omega)^{-[\tau/\lambda]}\|J_\mu y - y\|
\end{aligned}
$$

である．一方，

$$
\begin{aligned}
&\|J_{\nu,\lambda}^{[t/\lambda]}y - J_\lambda^{[t/\lambda]}y\| \\
&\leq \sum_{k=1}^{[t/\lambda]}\|J_{\nu,\lambda}^k J_\lambda^{[t/\lambda]-k}y - J_{\nu,\lambda}^{k-1}J_\lambda^{[t/\lambda]+1-k}y\| \\
&\leq \sum_{k=1}^{[t/\lambda]}(1-\lambda\omega_\nu^+)^{-(k-1)}\|J_{\nu,\lambda}J_\lambda^{[t/\lambda]-k}y - J_\lambda^{[t/\lambda]+1-k}y\| \\
&\leq \sum_{k=1}^{[\tau/\lambda]}(1-\lambda\omega_\nu^+)^{-(k-1)}\max_{k=0,1,\cdots,[\tau/\lambda]-1}\left(\|J_{\nu,\lambda}J_\lambda^k y - J_\lambda J_\lambda^k y\|\right)
\end{aligned}
$$

である．よって，

$$
\lim_{\nu\downarrow 0}\sup_{t\in[0,\tau]}\left(\|J_{\nu,\lambda}^{[t/\lambda]}y - J_\lambda^{[t/\lambda]}y\|\right) = 0
$$

である．故に，

$$
\begin{aligned}
&\limsup_{\nu\downarrow 0}\sup_{t\in[0,\tau]}\|T_\nu(t)x_\nu - T(t)x\| \\
&\leq e^{\omega\tau}\|x - J_\mu y\| + e^{\omega^+\tau}(1-\lambda\omega)^{-[\tau/\lambda]}\left(\lambda^2 + \lambda\tau\right)^{1/2}\mu^{-1}\|J_\mu y - y\| \\
&+ (1-\lambda\omega)^{-[\tau/\lambda]}\|J_\mu y - y\| + \sup_{t\in[0,\tau]}\|J_\lambda^{[t/\lambda]}y - T(t)x\|
\end{aligned}
$$

である．ここで，$\lambda \downarrow 0$ とし，次に $\mu \downarrow 0$, $y \to x$ とすればよい．

$A \in \mathcal{G}(\omega)$ とする．$\mu \in (0, 1/\omega^+)$ をパラメーターとする族 $A_\mu = \mu^{-1}(J_\mu - I)$ を A の**吉田近似** (Yosida approximation) という．但し，$J_\mu = (I - \mu A)^{-1}$ である．

$x, y \in D(A_\mu) = R(J_\mu)$ とする．

$$\begin{aligned}\|x - y - \lambda(A_\mu x - A_\mu y)\| &= \|(1 + \frac{\lambda}{\mu})(x - y) - \frac{\lambda}{\mu}(J_\mu x - J_\mu y)\| \\ &\geq (1 + \frac{\lambda}{\mu})\|x - y\| - \frac{\lambda}{\mu}\|J_\mu x - J_\mu y\| \\ &\geq (1 + \frac{\lambda}{\mu})\|x - y\| - (1 - \mu\omega)^{-1}\frac{\lambda}{\mu}\|x - y\| \\ &= (1 - \lambda\omega_\mu)\|x - y\|\end{aligned}$$

が成り立ち, $A_\mu \in \mathcal{G}(\omega_\mu)$ である．但し, $\omega_\mu = \mu^{-1}((1 - \mu\omega)^{-1} - 1) = \omega(1 - \mu\omega)^{-1}$ である．さらに, A_μ は Lipshitz 連続である．実際に

$$\begin{aligned}\|A_\mu x - A_\mu y\| &\leq \frac{1}{\mu}(\|J_\mu x - J_\mu y\| + \|x - y\|) \\ &\leq \frac{1}{\mu}((1 - \mu\omega)^{-1} + 1)\|x - y\|\end{aligned}$$

が成り立つ.

D は凸であると仮定し, A は条件 (R; D) を満たすとする．$x \in D$ とし, $\lambda + \mu \in (0, \lambda_0)$ とする.

$$y = \frac{\mu}{\lambda + \mu}x + \frac{\lambda}{\lambda + \mu}J_{\lambda+\mu}x$$

とおくと, $y \in D$ で,

$$J_{\lambda+\mu}x = J_\mu y$$

が成り立つ. 一方, y の定め方から,

$$J_{\lambda+\mu}x = y + \frac{\mu}{\lambda}(y - x)$$

である．よって,

$$y - \lambda A_\mu y = x$$

である. 故に，$A_\mu|D$ は，$D(A_\mu|D) = D$ として，条件 (R; D) を満たし, $x \in D$ のとき

$$(I - \lambda A_\mu|D)^{-1}x = \frac{\mu}{\lambda + \mu}x + \frac{\lambda}{\lambda + \mu}J_{\lambda+\mu}x$$

である.

A, $A_\mu|D$ が生成する半群をそれぞれ $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in \mathcal{S}(\overline{D(A)}, \omega)$, $\{T_\mu(t)\}_{t\geq 0} \in \mathcal{S}(D, \omega_\mu)$ とする. このとき, 次が成り立つ.

定理 8.2. 任意の $x \in \overline{D(A)}$ と $\tau > 0$ に対して,

$$\sup_{t\in[0,\tau]}\|T_\mu(t)x - T(t)x\| \to 0, \quad \mu \downarrow 0$$

が成り立つ.

演習問題 8.1. $\lambda \in (0, \lambda_0)$, $x \in \overline{D(A)}$ のとき,

$$(I - \lambda A_\mu | D)^{-1} x \to J_\lambda x, \quad \mu \downarrow 0$$

であることを示すことにより, 定理 8.2 を証明せよ.

9 単独保存則に支配される半群

$F \in C^1(-\infty,\infty)$ とする．$f \in L^\infty(-\infty,\infty)$ に対して,

$$u + \partial_x F(u) = f, -\infty < x < \infty \tag{9.1}$$

を満たす $u \in L^\infty(-\infty,\infty)$ を求めることを考える．

定義 9.1. $-\infty \le a < b \le \infty$ とする．u, $f \in L^\infty(a,b)$ とする．$\varphi \ge 0$ であるような任意の $\varphi \in C_0^\infty(a,b)$ と任意の定数 $k \in (-\infty,\infty)$ に対して

$$\int_a^b \mathrm{sign}^+(u-k)(u-f)\varphi\,dx \le \int_a^b \mathrm{sign}^+(u-k)(F(u)-F(k))\partial_x\varphi\,dx \tag{9.2}$$

が成り立つとき, u を (9.1) の (a,b) 上の**エントロピー劣解** (entropy subsolution) という．$\varphi \ge 0$ であるような任意の $\varphi \in C_0^\infty(a,b)$ と任意の定数 $k \in (-\infty,\infty)$ に対して

$$\int_a^b \mathrm{sign}^+(k-u)(f-u)\varphi\,dx \le \int_a^b \mathrm{sign}^+(k-u)(F(k)-F(u))\partial_x\varphi\,dx \tag{9.3}$$

が成り立つとき, u を (9.1) の (a,b) 上の**エントロピー優解** (entropy supersolution) という．(9.1) の (a,b) におけるエントロピー劣解でかつエントロピー優解である $u \in L^\infty(a,b)$ を (9.1) の (a,b) 上の**エントロピー解** (entropy solution) という

定理 9.1. u, $\hat{u}$, f, $\hat{f} \in L^\infty(-\infty,\infty)$ とする．u が (9.1) の $(-\infty,\infty)$ 上のエントロピー劣解で, $\hat{u}$ が

$$\hat{u} + \partial_x F(\hat{u}) = \hat{f}, -\infty < x < \infty \tag{9.4}$$

の $(-\infty,\infty)$ 上のエントロピー優解であるとする．このとき,

$$\int_{-\infty}^\infty (u-\hat{u})^+\,dx \le \int_{-\infty}^\infty (f-\hat{f})^+\,dx \tag{9.5}$$

である． 特に, もし, $(-\infty,\infty)$ 上で $f \le \hat{f}$ であるならば, $(-\infty,\infty)$ 上で $u \le \hat{u}$ である．さらに, u と $\hat{u}$ が, それぞれ (9.1) と (9.4) のエントロピー解ならば,

$$\int_{-\infty}^\infty |u-\hat{u}|\,dx \le \int_{-\infty}^\infty |f-\hat{f}|\,dx$$

である．

証明. $\psi \in C_0^\infty((-\infty,\infty)\times(-\infty,\infty))$ は $\psi \ge 0$ とする．このとき,

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty dxdy\,\mathrm{sign}^+(u(x)-\hat{u}(y))\,(u(x)-f(x))\,\psi(x,y) \\
&\le \int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty dxdy\,\mathrm{sign}^+(u(x)-\hat{u}(y))\,(F(u(x))-F(\hat{u}(y)))\,\partial_x\psi(x,y) \\
&\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty dxdy\,\mathrm{sign}^t(u(x)-\hat{u}(y))\left(\hat{f}(y)-\hat{u}(y)\right)\psi(x,y) \\
&\le \int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty dxdy\,\mathrm{sign}^+(u(x)-\hat{u}(y))\,(F(u(x)-F(\hat{u}(y))))\,\partial_y\psi(x,y)
\end{aligned}$$

が成り立つ．第2式は

$$
\begin{aligned}
&-\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dxdy\,\mathrm{sign}^+(u(x)-\hat{u}(y))\left(\hat{u}(y)-\hat{f}(y)\right)\psi(x,y)\\
&\le \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dxdy\,\mathrm{sign}^+(u(x)-\hat{u}(y))\,(F(u(x))-F(\hat{u}(y)))\,\partial_y\psi(x,y)
\end{aligned}
$$

と書き直すことができるので,

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dxdy\left((u(x)-\hat{u}(y))^+-(f(x)-\hat{f}(y))^+\right)\psi(x,y)\\
&\le \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dxdy\,\mathrm{sign}^+(u(x)-\hat{u}(y))\left(u(x)-\hat{u}(y)-(f(x)-\hat{f}(y))\right)\psi(x,y)\\
&\le \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dxdy\,\mathrm{sign}^+(u(x)-\hat{u}(y))\,(F(u(x))-F(\hat{u}(y)))\,(\partial_x\psi(x,y)+\partial_y\psi(x,y))
\end{aligned}
$$

が成り立つ. $\varphi \in C_0^\infty(-\infty,\infty)$ は $\varphi \ge 0$ とする.

$$\psi(x,y)=\varphi((x+y)/2)\varphi_\varepsilon(x-y)$$

を代入して, $\varepsilon \downarrow 0$ として,

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty}\left((u(x)-\hat{u}(x))^+-(f(x)-\hat{f}(x))^+\right)\varphi(x)\,dx\\
&\le \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{sign}^+(u(x)-\hat{u}(x))\,(F(u(x))-F(\hat{u}(x)))\,\partial_x\varphi(x)\,dx
\end{aligned}
$$

を得る．$r>1$ とし,

$$\varphi(x)=h_1(x+r)-h_1(x-r),\ \partial_x\varphi(x)=\varphi_1(x+r)-\varphi_1(x-r)$$

とおくと,

$$
\begin{aligned}
&\int_{-r+1}^{r-1}(u(x)-\hat{u}(x))^+\,dx-\int_{-r-1}^{r+1}(f(x)-\hat{f}(x))^+\,dx\\
&\le LC_1\left(\int_{r-1}^{r+1}(u(x)-\hat{u}(x))^+\,dx+\int_{-r-1}^{-r+1}(u(x)-\hat{u}(x))^+\,dx\right)\\
&= LC_1\left(\int_{-r-1}^{r+1}(u(x)-\hat{u}(x))^+\,dx-\int_{-r+1}^{r-1}(u(x)-\hat{u}(x))^+\,dx\right)
\end{aligned}
$$

を得る． ただし, $L>0$, $C_1>0$ を

$$|F(u)-F(\hat{u})|\le L|u-\hat{u}|,\quad \varphi_1\le C_1$$

を満たすようにとった.

$$g(r)=\int_{-r+1}^{r-1}(u(x)-\hat{u}(x))^+\,dx,\ h(r)=\int_{-r-1}^{r+1}(f(x)-\hat{f}(x))^+\,dx,\ r\ge 1$$

とおくと,

$$g(r) - h(r) \leq LC_1(g(r+2) - g(r))$$
$$g(r) \leq \frac{LC_1}{1+LC_1} g(r+2) + \frac{1}{1+LC_1} h(r)$$

であるから, 帰納的に

$$g(r) \leq \left(\frac{LC_1}{1+LC_1}\right)^n g(r+2n) + \frac{1}{1+LC_1} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{LC_1}{1+LC_1}\right)^k h(r+2k)$$

を得る. $M > 0$ を

$$|u| \leq M,\ |\hat{u}| \leq M$$

であるようにとれば,

$$g(r+2n) \leq 4M(r+2n-1),\ h(r+2k) \leq \int_{-\infty}^{\infty} (f(x) - \hat{f}(x))^+ \, dx$$

であるから, 上で $n \to \infty$ として,

$$g(r) \leq \int_{-\infty}^{\infty} (f(x) - \hat{f}(x))^+ \, dx$$

を得る. 故に, $r \to \infty$ として,

$$\int_{-\infty}^{\infty} (u(x) - \hat{u}(x))^+ \, dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} (f(x) - \hat{f}(x))^+ \, dx$$

を得る.

定理 9.2. $u,\ f \in L^\infty(a,b)$ とする. このとき, 次の 3 条件は互いに同値である.

(1) u が (9.1) の (a,b) 上のエントロピー劣解 (resp. エントロピー優解) である.

(2) $\varphi \geq 0$ であるような任意の $\varphi \in C_0^\infty(a,b)$ と凸で非減少 (resp. 非増大) な任意の $\Phi \in C^2(-\infty,\infty)$ に対して

$$\int_a^b \Phi'(u)(u-f)\varphi \, dx \leq \int_a^b \left(\int_0^u \Phi'(r)F'(r)\, dr\right) \partial_x \varphi \, dx \tag{9.6}$$

が成り立つ.

(3) $\varphi \geq 0$ であるような任意の $\varphi \in C_0^\infty(a,b)$, 凸で非減少 (resp. 非増大) な任意の $\Phi \in C^2(-\infty,\infty)$ と任意の $-\infty < k < \infty$ に対して, 次の (9.7)(resp. (9.8)) が成り立つ.

$$\int_a^b \Phi'(u \vee k) \operatorname{sign}^+(u-k)(u \vee k - f)\varphi \, dx \leq \int_a^b \left(\int_0^{u \vee k} \Phi'(r)F'(r)\, dr\right) \partial_x \varphi \, dx \tag{9.7}$$

$$\int_a^b \Phi'(u \wedge k) \operatorname{sign}^-(u-k)(u \wedge k - f)\varphi \, dx \leq \int_a^b \left(\int_0^{u \wedge k} \Phi'(r)F'(r)\, dr\right) \partial_x \varphi \, dx \tag{9.8}$$

証明．(1) を仮定する．$\Phi \in C^2(-\infty,\infty)$ は凸で非減少とする．$\varphi \in C_0^\infty(a,b)$ は $\varphi \geq 0$ とする．$M > 0$ を $|u| < M$ であるようにとる．仮定から，任意の $-\infty < k < \infty$ に対して

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \operatorname{sign}^+(u-k)(u-f)\varphi\,dx \\
&\leq \int_a^b \left(\int_k^u \operatorname{sign}^+(r-k)F'(r)\,dr\right)\partial_x\varphi\,dx \\
&= \int_a^b \left(\int_{-M}^u \operatorname{sign}^+(r-k)F'(r)\,dr\right)\partial_x\varphi\,dx
\end{aligned}$$

が成り立つ．ただし，ここで，$\displaystyle\int_a^b \partial_x\varphi\,dx = 0$ であることを用いた． 上式の両辺に $\Phi''(k)$ を掛けて k について $-M$ から M まで積分する．$-M < r < M$ とき，

$$\int_{-M}^M \Phi''(k)\operatorname{sign}^+(r-k)\,dk = \int_{-M}^r \Phi''(k)\,dk = \Phi'(r) - \Phi'(-M)$$

であるから，

$$\begin{aligned}
&\int_a^b (\Phi'(u)-\Phi'(-M))(u-f)\varphi\,dx \\
&\leq \int_a^b \left(\int_{-M}^u (\Phi'(r)-\Phi'(-M))F'(r)\,dr\right)\partial_x\varphi\,dx \\
&= \int_a^b \left(\int_0^u (\Phi'(r)-\Phi'(-M))F'(r)\,dr\right)\partial_x\varphi\,dx
\end{aligned}$$

が成り立つ．

$$\begin{aligned}
&-\int_a^b \Phi'(-M)(u-f)\varphi\,dx - \int_a^b \left(\int_0^u (-\Phi'(-M))F'(r)\,dr\right)\partial_x\varphi\,dx \\
&= -\Phi'(-M)\int_a^b \left((u-f)\varphi - (F(u)-F(0))\,\partial_x\varphi\right)\,dx \\
&= -\Phi'(-M)\int_a^b \left((u-f)\varphi - F(u)\partial_x\varphi\right)\,dx
\end{aligned}$$

が成り立つ．$\Phi'(-M) \geq 0$ であり, (9.2) で $k = -M$ として，

$$\int_a^b \left((u-f)\varphi - F(u)\partial_x\varphi\right)\,dx \leq 0$$

が従うから, 上の式は負にならない．よって (2) が成り立つ．

次に, (2) を仮定する．$\Phi \in C^2(-\infty,\infty)$ は凸で非減少と仮定する．$-\infty < k < \infty$ とする．$\Psi(r) = \Phi(\Phi_\varepsilon(r-k)+k)$ はやはり凸で非減少であり，

$$\Psi'(r) = \Phi'(\Phi_\varepsilon(r-k)+k)h_\varepsilon(r-k)$$

である．よって, $\varphi \in C_0^\infty(-\infty,\infty)$, $\varphi \geq 0$ のとき,

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \Phi'(\Phi_\varepsilon(u-k)+k)h_\varepsilon(u-k)(u-f)\varphi\,dx \\
&\leq \int_a^b \left(\int_0^u \Phi'(\Phi_\varepsilon(r-k)+k)h_\varepsilon(r-k)F'(r)\,dr\right)\partial_x\varphi\,dx
\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで $\varepsilon \downarrow 0$ とすれば, 次を得る．

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \Phi'((u-k)^+ +k)\,\mathrm{sign}^+(u-k)(u-f)\,dx \\
&\leq \int_a^b \left(\int_0^u \Phi'((r-k)^+ +k)\,\mathrm{sign}^+(r-k)F'(r)\,dr\right)\partial_x\varphi\,dx \\
&= \int_a^b \left(\int_{-M}^u \Phi'(r\vee k)\,\mathrm{sign}^+(r-k)F'(r)\,dr\right)\partial_x\varphi\,dx \\
&= \int_a^b \left(\int_k^u \Phi'(r\vee k)\,\mathrm{sign}^+(r-k)F'(r)\,dr\right)\partial_x\varphi\,dx \\
&= \int_a^b \mathrm{sign}^+(u-k)\left(\int_k^u \Phi'(r)F'(r)\,dr\right)\partial_x\varphi\,dx \\
&= \int_a^b \left(\int_k^{u\vee k} \Phi'(r)F'(r)\,dr\right)\partial_x\varphi\,dx \\
&= \int_a^b \left(\int_0^{u\vee k} \Phi'(r)F'(r)\,dr\right)\partial_x\varphi\,dx.
\end{aligned}$$

これから, (3) が従う．最後に，(3) で $\Phi(r)=r$ とすれば, (1) が従う．

系 9.1. $u_n \in L^\infty(a,b)$, $f_n \in L^\infty(a,b)$ は一様に有界で それぞれ $u \in L^\infty(a,b)$, $f \in L^\infty(a,b)$ に (a,b) 上ほとんど至るところ収束しているとする．もし u_n が

$$u_n + \partial_x F(u_n) = f_n$$

のエントロピー劣解 (resp. エントロピー優解) ならば, u は

$$u + \partial_x F(u) = f$$

のエントロピー劣解 (resp. エントロピー優解) になる．

定義 9.2. $F \in C^1(-\infty,\infty)$ とする．u, $f \in L^1(-\infty,\infty)$ に対し, u, $f \in L^\infty(-\infty,\infty)$ であって任意の C^2 級の凸関数 $\mathit{\Phi}$ と任意の非負な $\varphi \in C_0^\infty(-\infty,\infty)$ に対し

$$\int_{-\infty}^\infty \mathit{\Phi}'(u)f\varphi\,dx \leq \int_{-\infty}^\infty \left(\int_0^u \mathit{\Phi}'(r)F'(r)\,dr\right)\partial_x\varphi\,dx$$

でが成り立つとき，$(u,f) \in A$ であるとして, $L^1(-\infty,\infty)$ の作用素 A を定める．

A_ν は定義 7.1 で与えられる $L^1(-\infty,\infty)$ の消散作用素とする．

定理 9.3. 作用素 A は, 一価で, $L^1(-\infty,\infty)$ での消散作用素になる．$C_0^1(-\infty,\infty) \subset D(A)$ で, 任意の $\lambda > 0$ に対して $R(I-\lambda A) \supset L^1(-\infty,\infty) \cap L^\infty(-\infty,\infty)$ となる．さらに, $\lambda > 0$, $f \in L^1(-\infty,\infty) \cap L^\infty(-\infty,\infty)$ とすると, $\nu \downarrow 0$ のとき, $L^1(\infty,\infty)$ において,

$$(I-\lambda A_\nu)^{-1} f \to (I-\lambda A)^{-1} f$$

となる．ただし，A_ν は，定義 *7.1* で定めた $L^1(-\infty,\infty)$ の作用素とする．

証明．$(u,f) \in A$ とする．定義で $\Phi(r) = \pm r$ とおくと, 任意の非負な $\varphi \in C_0^\infty(-\infty,\infty)$ に対して,

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty} f\varphi\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (F(u)-F(0))\partial_x\varphi\,dx\end{aligned}$$

が成り立つことがわかる．任意の $\varphi \in C_0^\infty(-\infty,\infty)$ は, 非負な φ_1, $\varphi_2 \in C_0^\infty(-\infty,\infty)$ により, $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ と書けるから, この等式は任意の $\varphi \in C_0^\infty(-\infty,\infty)$ に対して成り立つ． よって, f は u に対して一意的に決まる．

$u \in C_0^1(-\infty,\infty)$ のとき,

$$\partial_x \left(\int_0^u \Phi'(r)F'(r)\,dr \right) = \Phi'(u)F'(u)\partial_x u$$

だから, $u \in D(A)$ で $f = -F'(u)\partial_x u \in Au$ となる．

$\lambda > 0$, u, $\hat{u} \in D(A)$ とし,

$$u - \lambda Au = f,\ \hat{u} - \lambda A\hat{u} = \hat{f}$$

であるとする． このとき, f, $\hat{f} \in L^1(-\infty,\infty) \cap L^\infty(-\infty,\infty)$ であり, u, $\hat{u} \in L^1(-\infty,\infty) \cap L^\infty(-\infty,\infty)$ はそれぞれ,

$$u + \partial_x(\lambda F(u)) = f,\ \hat{u} + \partial_x(\lambda F(\hat{u})) = \hat{f}$$

のエントロピー解になる．したがって,

$$\|u-\hat{u}\|_{L^1} \le \|f-\hat{f}\|_{L^1}$$

となる．すなわち, A は $L^1(-\infty,\infty)$ において消散的である．

$\lambda > 0$, $f \in L^1(-\infty,\infty) \cap L^\infty(-\infty,\infty)$ とする．各 $\nu > 0$ に対して, $u_\nu \in D(A_\nu)$ を

$$u_\nu - \lambda A_\nu u_\nu = f$$

とする. $\nu \downarrow 0$ とすると, u_ν は $L^1(-\infty,\infty)$ において, ある $u \in D(A)$ に収束して,

$$u - \lambda A u = f$$

となることを示す. 簡単のため, 以下では, $\lambda = 1$ とする.

A_ν の定義から, $u_\nu \in H^2(-\infty,\infty)$ で,

$$u_\nu - \left(\nu \partial_x^2 u_\nu - F'(u_\nu)\partial_x u_\nu\right) = f$$

が成り立つ. $\Phi \in C^2(-\infty,\infty)$ は凸で, $\varphi \in C_0^\infty(-\infty,\infty)$ は非負とする. $\Phi'(u_\nu)\varphi \in C_0^1(-\infty,\infty)$ で,

$$\partial_x(\Phi'(u_\nu)\varphi) = \Phi''(u_\nu)\varphi\partial_x u_\nu + \Phi'(u_\nu)\partial_x\varphi$$

が成り立つ. したがって,

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} \Phi'(u_\nu)(u_\nu - f)\varphi\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \Phi'(u_\nu)\left(\nu\partial_x^2 u_\nu - F'(u)\partial_x u_\nu\right)\varphi\,dx \\
&= -\nu \int_{-\infty}^{\infty} \partial_x u_\nu \left(\Phi''(u_\nu)\varphi\partial_x u_\nu + \Phi'(u_\nu)\partial_x\varphi\right)\,dx \\
&- \int_{-\infty}^{\infty} \Phi'(u_\nu)F'(u_\nu)\partial_x(u_\nu)\varphi\,dx \\
&\le -\nu \int_{-\infty}^{\infty} \partial_x\left(\Phi(u_\nu) - \Phi(0)\right)\partial_x\varphi\,dx \\
&- \int_{-\infty}^{\infty} \partial_x\left(\int_0^{u_\nu} \Phi'(r)F'(r)\,dr\right)\varphi\,dx \\
&= \nu \int_{-\infty}^{\infty} \left(\Phi(u_\nu) - \Phi(0)\right)\partial_x^2\varphi\,dx \\
&+ \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^{u_\nu} \Phi'(r)F'(r)\,dr\right)\partial_x\varphi\,dx
\end{aligned} \tag{9.9}$$

が成り立つ. $\Phi = \Phi_\varepsilon$ として, $\varepsilon \downarrow 0$ とすれば,

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sign}^+(u_\nu)(u_\nu - f)\varphi\,dx \\
&\le \nu \int_{-\infty}^{\infty} u_\nu^+ \partial_x^2\varphi\,dx + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^{u_\nu} \operatorname{sign}^+(r)F'(r)\,dr\right)\partial_x\varphi\,dx \\
&= \nu \int_{-\infty}^{\infty} u_\nu^+ \partial_x^2\varphi\,dx + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^{u_\nu \vee 0} F'(r)\,dr\right)\partial_x\varphi\,dx
\end{aligned}$$

となる. これから,

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} (u_\nu^+ - f^+)\varphi\,dx \\
&\le \nu \int_{-\infty}^{\infty} u_\nu^+ \partial_x^2\varphi\,dx + \int_{-\infty}^{\infty} \left(F(u_\nu \vee 0) - F(0)\right)\partial_x\varphi\,dx
\end{aligned}$$

を得る．$\Phi(r)=\Phi_\varepsilon(-r)$ として，同様に議論すれば,

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}(u_\nu^- - f^-)\varphi\,dx\\ &\le \nu\int_{-\infty}^{\infty}u_\nu^-\partial_x^2\varphi\,dx+\int_{-\infty}^{\infty}(F(0)-F(u_\nu\wedge 0))\,\partial_x\varphi\,dx\end{aligned}$$

を得る．よって,

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}(|u_\nu|-|f|)\varphi\,dx\\ &\le \nu\int_{-\infty}^{\infty}|u_\nu|\partial_x^2\varphi\,dx+\int_{-\infty}^{\infty}(F(u_\nu\vee 0)-F(u_\nu\wedge 0))\,\partial_x\varphi\,dx\end{aligned}$$

が成り立つ. $\psi\in C^\infty(-\infty,\infty)$ は非負で, ψ, $\partial_x\psi$, $\partial_x^2\psi$ が $(-\infty,\infty)$ で有界なものとする．$\zeta\in C_0^\infty(-\infty,\infty)$ は $0\le\zeta\le 1$ を満たし,$|x|\le 1$ で $\zeta(x)=1$, $|x|\ge 2$ で $\zeta(x)=0$ となるものとする．$\varepsilon>0$ に対し, $\varphi(x)=\psi(x)\zeta(\varepsilon x)$ を代入し, $\varepsilon\downarrow 0$ とすれば,

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}(|u_\nu|-|f|)\psi\,dx\\ &\le \nu\int_{-\infty}^{\infty}|u_\nu|\partial_x^2\psi\,dx+\int_{-\infty}^{\infty}(F(u_\nu\vee 0)-F(u_\nu\wedge 0))\,\partial_x\psi\,dx\end{aligned}$$

を得る．ただし，$u_\nu\in L$‘$\infty(-\infty,\infty)$ で，$F(u_\nu\vee 0)-F(u_\nu\wedge 0)\in L^1(-\infty,\infty)$ であることを用いた．$R_2>R_1>0$ とし,

$$\psi(x)=h_1\left(\frac{2|x|-R_1-R_2}{R_2-R_1}\right)$$

とおく． $\psi\in C^\infty(-\infty,\infty)$ で，$0\le\psi\le 1$ が満たされ, $|x|\le R_1$ で $\psi(x)=0$, $|x|\ge R_2$ で $\psi(x)=1$ となる．さらに,

$$\begin{aligned}\psi'(x)&=\frac{2\,\mathrm{sign}(x)}{R_2-R_1}h_1'\left(\frac{2|x|-R_1-R_2}{R_2-R_1}\right)\\ \psi''(x)&=\frac{4}{(R_2-R_1)^2}h_1''\left(\frac{2|x|-R_1-R_2}{R_2-R_1}\right)\end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned}&\int_{|x|\ge R_2}|u_\nu(x)|\,dx-\int_{|x|\ge R_1}|f(x)|\,dx\\ &\le \nu\frac{4}{(R_2-R_1)^2}\|u_\nu\|_{L^1}\|h_1''\|_{L^\infty}+\frac{2}{R_2-R_1}\|u_\nu\|_{L^1}\|h_1'\|_{L^\infty}\cdot\sup\{|F'(r)|;\ |r|\le\|u_\nu\|_{L^\infty}\}\end{aligned}$$

を得る．定理 7.1 により，$\|u_\nu\|_{L^p} \le \|f\|_{L^p}$, $(p=1,\infty)$, だから,

$$\limsup_{R_2\to\infty}\left(\sup_{0<\nu\le 1}\left(\int_{|x|\ge R_2}|u_\nu(x)|\,dx\right)\right) \le \int_{|x|\ge R_1}|f(x)|\,dx$$

となり, したがって,

$$\lim_{R_2\to\infty}\left(\sup_{0<\nu\le 1}\left(\int_{|x|\ge R_2}|u_\nu(x)|\,dx\right)\right) = 0$$

となる．また,

$$\int_{-\infty}^{\infty}|u_\nu(x)|\,dx \le \int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,dx$$

である．さらに，$\hat{f}(x)=f(x+y)$ のとき，$\hat{u}_\nu(x)=u_\nu(x+y)$ が，$\hat{u}_\nu - A\hat{u}_\nu = \hat{f}$ を満す．よって,

$$\int_{-\infty}^{\infty}|u_\nu(x+y)-u_\nu(x)|\,dx \le \int_{-\infty}^{\infty}|f(x+y)-f(x)|\,dx,\ -\infty<y<\infty$$

である． 故に，定理 2.1 により，$\mathcal{F}=\{u_\nu;\ 0<\nu\le 1\}$ は $L^1(-\infty,\infty)$ で全有界である. 適当な 零列 $\{\nu(n)\}$ に対して, $u_{\nu(n)}$ は ある $u\in L^1(-\infty,\infty)$ に $L^1(-\infty,\infty)$ で収束する. $u_{\nu(n)}$ は u に概収束すると 仮定してよい．$u\in L^\infty(-\infty,\infty)$ である．不等式 (9.9) で $\nu=\nu(n)\to 0$ として, $u\in D(A)$ で $u-Au=f$ であることがわかる. よって, $f\in R(I-A)$ であり, $\nu\downarrow 0$ のとき, $L^1(-\infty,\infty)$ において, $u_\nu\to(I-A)^{-1}f$ であることが分かった．さらに，極限の一意性により，$u=(I-\lambda A)^{-1}f$ である.

A_ν, A の生成する $L^1(-\infty,\infty)$ 上の半群をそれぞれ $\{T_\nu(t)\}_{t\ge 0}$, $\{T(t)\}_{t\ge 0}$ とする．定理 9.3 により, 任意の $u_0\in L^1(-\infty,\infty)$ に対して $L^1(-\infty,\infty)$ において,

$$T_\nu(t)u_0 \to T(t)u_0,\quad \nu\downarrow 0$$

である．ただし収束は有界な t に関して一様である.

定理 9.4. $u_0\in L^1(-\infty,\infty)\cap L^\infty(-\infty,\infty)$ とし，$u(x,t)=(T(t)u_0)(x)$ とおく. $u(x,t)$ は

$$\partial_t u + \partial_x F(u) = 0$$

のエントロピー解である.

証明．$u\in L^\infty((-\infty,\infty)\times(0,\infty))\cap C([0,\infty);L^1(-\infty,\infty))$ である．$\lambda>0$ のとき

$$u_\lambda(\cdot,t)=(I-\lambda A)^{-[t/\lambda]}u_0(\cdot)$$

と書く.

$$\lambda^{-1}(u_\lambda(x,t)-u_\lambda(x,t-\lambda)) = Au_\lambda(x,t),\quad t\ge\lambda$$

である．$\Phi \in C^2(-\infty,\infty)$ は凸で, $\varphi \in C_0^\infty((-\infty,\infty)\times(0,\infty))$ は非負とする．

$$
\begin{aligned}
&\int_\lambda^\infty \left\{ \int_{-\infty}^\infty \Phi'(u_\lambda(x,t))\lambda^{-1}(u_\lambda(x,t)-u_\lambda(x,t-\lambda))\varphi(x,t)\,dx \right\} dt \\
&\le \int_\lambda^\infty \left\{ \int_{-\infty}^\infty \left(\int_0^{u_\lambda(x,t)} \Phi'(r)F'(r)\,dr \right) \partial_x\varphi(x,t)\,dx \right\} dt
\end{aligned}
\tag{9.10}
$$

である．この左辺より,

$$
\begin{aligned}
&\int_\lambda^\infty \left\{ \int_{-\infty}^\infty \lambda^{-1}(\Phi(u_\lambda(x,t))-\Phi(u_\lambda(x,t-\lambda)))\varphi(x,t)\,dx \right\} dt \\
&= \int_\lambda^\infty \left\{ \int_{-\infty}^\infty \Phi(u_\lambda(x,t))\lambda^{-1}(\varphi(x,t)-\varphi(x,t+\lambda))\,dx \right\} dt \\
&- \lambda^{-1}\int_0^\lambda \left\{ \int_{-\infty}^\infty \Phi(u_\lambda(x,t))\varphi(x,t+\lambda)\,dx \right\} dt
\end{aligned}
$$

の方が小さいかまたは等しい．よって, (9.10) で $\lambda \downarrow 0$ として,

$$
\begin{aligned}
&-\int_0^\infty \left\{ \int_{-\infty}^\infty \Phi(u(x,t))\partial_t\varphi(x,t)\,dx \right\} dt \\
&\le \int_0^\infty \left\{ \int_{-\infty}^\infty \left(\int_0^{u(x,t)} \Phi'(r)F'(r)\,dr \right) \partial_x\varphi(x,t)\,dx \right\} dt
\end{aligned}
$$

を得る．ただし，ここで $\varphi(x,0)=0$，$x\in(-\infty,\infty)$ であることを用いた．$\Phi(r)=\Phi_\varepsilon(r-k)$，$k\in(-\infty,\infty)$, として, $\varepsilon\downarrow 0$ とすれば,

$$
\begin{aligned}
&-\int_0^\infty \left\{ \int_{-\infty}^\infty \mathrm{sign}^+(u(x,t)-k)\partial_t\varphi(x,t)\,dx \right\} dt \\
&\le \int_0^\infty \left\{ \int_{-\infty}^\infty \left(\int_0^{u(x,t)} \mathrm{sign}^+(r-k)F'(r)\,dr \right) \partial_x\varphi(x,t)\,dx \right\} dt \\
&= \int_0^\infty \left\{ \int_{-\infty}^\infty \left(\int_k^{u(x,t)} \mathrm{sign}^+(r-k)F'(r)\,dr \right) \partial_x\varphi(x,t)\,dx \right\} dt \\
&= \int_0^\infty \left\{ \int_{-\infty}^\infty \mathrm{sign}^+(u(x,t)-k)(F(u(x,t))-F(k))\partial_x\varphi(x,t)\,dx \right\} dt
\end{aligned}
$$

を得る．よって，$u(x,t)$ は

$$
\partial_t u + \partial_x F(u) = 0
$$

のエントロピー劣解であることがわかる．同様に $\Phi(r)=\Phi_\varepsilon(k-r)$ として, $\varepsilon\downarrow 0$ とすれば, エントロピー優解であることがわかる．

定理 9.5. $F_\varepsilon \in C^1(-\infty,\infty)$, $(\varepsilon \geq 0)$ とする．$u,\ f \in L^1(-\infty,\infty)$ に対し, $u,\ f \in L^\infty(-\infty,\infty)$ であって任意の C^2 級の凸関数 $\varPhi$ と任意の非負な $\varphi \in C_0^\infty$ に対し

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varPhi'(u) f\varphi\, dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^u \varPhi'(r)F_\varepsilon'(r)\, dr\right)\partial_x\varphi\, dx$$

でが成り立つとき，$(u,f) \in A_\varepsilon$ であるとして, $L^1(-\infty,\infty)$ の作用素 A_ε を定める．A_ε の生成する $L^1(-\infty,\infty)$ 上の半群を $\{T_\varepsilon(t)\}_{t\geq 0}$ とする．$\varepsilon\downarrow 0$ のとき F_ε は F_0 に $(-\infty,\infty)$ 上で広義一様収束すると仮定する．このとき, $\varepsilon \downarrow 0$ とすると, 任意の $u_0 \in L^1(-\infty,\infty)$ に対して, $T_\varepsilon(t)u_0$ は $T_0(t)u_0$ に $L^1(-\infty,\infty)$ で $t\in[0,\infty)$ に関して広義一様収束する.

演習問題 9.1. 系 9.1 を証明せよ.

演習問題 9.2. 定理 9.5 を証明せよ.

演習問題 9.3. $u_0 \in L^\infty(-\infty,\infty)$ とする．$R>0$ に対して,

$$u_0^R(x) = \begin{cases} u_0(x) & ,|x|<R \\ 0 & ,|x|\geq R \end{cases}$$

とおくと, $u_0^R \in L^1(-\infty,\infty)\cap L^\infty(-\infty,\infty)$ である．$u_0^R(x)$ を初期関数とするエントロピー解を $u^R(x,t)$ とする．このとき, $u_0(x)$ を初期関数とするエントロピー解 $u(x,t)$ が存在して, 任意の $\tau>0$ と $(a,b)\subset(-\infty,\infty)$ に対して, $R\uparrow\infty$ のとき

$$\sup_{t\in[0,\tau]}\int_a^b |u^R(x,t)-u(x,t)|\, dx \to 0$$

となる．このことを示せ.

10 半群の近似

X を実バナッハ空間とし, $D \subset X$, $\omega \in (-\infty, \infty)$, $h_0 \in (0, 1/\omega^+)$ とする．D からそれ自身の中への作用素の族 $\{C_h\}_{h \in (0,h_0]}$ で

$$\|C_h x - C_h y\| \le (1 - h\omega)^{-1} \|x - y\|, \quad x, y \in D,\ h \in (0, h_0]$$

を満たすものを考える．$h \in (0, h_0]$, $x \in D = D(A_h)$ のとき, $A_h x = h^{-1}(C_h x - x)$ とおく．$\lambda > 0$ のとき,

$$\begin{aligned}
\|x - y - \lambda(A_h x - A_h y)\| &= \|(1 + \frac{\lambda}{h})(x - y) - \frac{\lambda}{h}(C_h x - C_h y)\| \\
&\ge (1 + \frac{\lambda}{h})\|x - y\| - \frac{\lambda}{h}\|C_h x - C_h y\| \\
&\ge (1 + \frac{\lambda}{h})\|x - y\| - (1 - h\omega)^{-1}\frac{\lambda}{h}\|x - y\| \\
&= (1 - \lambda\omega_h)\|x - y\|
\end{aligned}$$

が成り立ち, $A_h \in \mathcal{G}(\omega_h)$ である．但し, $\omega_h = h^{-1}((1 - h\omega)^{-1} - 1) = \omega(1 - h\omega)^{-1}$ である．さらに,

$$\begin{aligned}
\|A_h x - A_h y\| &\le \frac{1}{h}(\|C_h x - C_h y\| + \|x - y\|) \\
&\le \frac{1}{h}((1 - h\omega)^{-1} + 1)\|x - y\|
\end{aligned}$$

が成り立つ.

D が凸閉集合のとき, $\lambda_0 > 0$ を $\lambda_0 + h_0 \in (0, 1/\omega^+)$ を満たすようにとれば

$$R(I - \lambda A_h) \supset D, \quad \lambda \in (0, \lambda_0], h \in (0, h_0] \tag{10.1}$$

が成り立つ. 実際に, $\lambda \in (0, \lambda_0]$, $h \in (0, h_0]$ とし,

$$\kappa = \frac{\lambda}{\lambda + h}(1 - h\omega^+)^{-1} = \frac{\lambda}{\lambda + h(1 - (\lambda + h)\omega^+)} < 1$$

とおく. $x \in D$ のとき,

$$Jy = \frac{h}{\lambda + h}x + \frac{\lambda}{\lambda + h}C_h y, \quad y \in D$$

とおいて, $J : D \to D$ を定める.

$$\begin{aligned}
\|Jy - J\hat{y}\| &= \frac{\lambda}{\lambda + h}\|C_h y - C_h \hat{y}\| \\
&\le \frac{\lambda}{\lambda + h}(1 - h\omega^+)^{-1}\|y - \hat{y}\| \\
&= \kappa\|y - \hat{y}\|
\end{aligned}$$

であるから, 縮小写像の原理により, $y \in D$ で $y = Jy$ を満たすものが存在する. すなわち

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{h}{\lambda + h}x + \frac{\lambda}{\lambda + h}C_h y \\
(\lambda + h)y &= hx + \lambda C_h y = hx + \lambda(y + hA_h y) \\
hy &= hx + h\lambda A_h y \\
y - \lambda A_h y &= x
\end{aligned}
$$

となる.

以下, D が凸閉集合でなくとも，A_h は (10.1) を満たすと仮定する. 各 A_h は $\overline{D}$ 上の半群 $\{T_h(t)\}_{t \geq 0} \in \mathcal{S}(D, \omega_h)$ を生成する. $A \in \mathcal{G}(\omega)$ は条件

(R; D) ある $\lambda_0 \in (0, 1/\omega^+)$ に対して,

$$
R(I - \lambda A) \supset D \supset D(A), \quad \lambda \in (0, \lambda_0].
$$

を満たすと仮定する. A が生成する半群を $\{T(t)\}_{t \geq 0} \in \mathcal{S}(\overline{D(A)})$ とする. $\lambda > 0$ のとき

$$
J_\lambda = (I - \lambda A)^{-1}, \quad J_{h,\lambda} = (I - \lambda A_h)^{-1}
$$

と書く.

上の A, A_h に関して次の条件を仮定する.

(1)
$$
\limsup_{h \downarrow 0} \omega_h \leq \omega
$$

(2) $\lambda_0 \leq \lambda_h$ で $x \in D(A)$, $\lambda \in (0, \lambda_0]$ のとき

$$
\lim_{h \downarrow 0} J_{h,\lambda} x = J_\lambda x.
$$

(3) 任意の $x \in \overline{D(A)}$ に対して, $x_h \in \overline{D(A_h)} = \overline{D}$ が取れて $\lim_{h \downarrow 0} x_h = x$ となる.

このとき, 定理 8.1 により， 次が成り立つ.

定理 10.1. $x_h \in \overline{D(A_h)} = \overline{D}$, $x \in \overline{D(A)}$ で, $\lim_{h \downarrow 0} x_h = x$ ならば, 任意の $\tau > 0$ に対して

$$
\sup_{t \in [0, \tau]} \|T_h(t)x_h - T(t)x\| \to 0, \quad h \downarrow 0
$$

となる.

また, 次も成り立つ.

定理 10.2. $x_h \in \overline{D(A_h)} = \overline{D}$, $x \in \overline{D(A)}$ で, $\lim_{h\downarrow 0} x_h = x$ ならば, 任意の $\tau > 0$ に対して

$$\sup_{t\in[0,\tau]} \|C_h^{[t/h]}x_h - T(t)x\| \to 0, \quad h \downarrow 0$$

となる.

定理 10.2 を示すために, 命題を用意する.

命題 10.1. $\lambda \in (0, \lambda_0)$ のとき, 次が成り立つ.

(1) $x \in D$ ならば,

$$\|C_h^n x - x\| \leq h \sum_{k=1}^{n} (1 - h\omega)^{-(k-1)} \|A_h x\|$$

(2) $x,\ \hat{x} \in D$ ならば,

$$\|C_h x - J_{h,\lambda}\hat{x}\| \leq \frac{h}{\lambda + h}\|C_h x - \hat{x}\| + \frac{\lambda}{\lambda + h}(1 - h\omega)^{-1}\|x - J_{h,\lambda}\hat{x}\|$$

証明. $x \in D$ とする.

$$\begin{aligned}
\|C_h^n x - x\| &\leq \sum_{k=1}^{n} \|C_h^k x - C_h^{k-1}x\| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} (1 - h\omega)^{-(k-1)} \|C_h x - x\| \\
&= h \sum_{k=1}^{n} (1 - h\omega)^{-(k-1)} \|A_h x\|
\end{aligned}$$

である.

$x,\ \hat{x} \in D$ とする.

$$J_{h,\lambda}\hat{x} = \frac{h}{\lambda + h}\hat{x} + \frac{\lambda}{\lambda + h} C_h J_{h,\lambda}\hat{x}$$

であるから,

$$\begin{aligned}
C_h x - J_{h,\lambda}\hat{x} &= C_h x - \left(\frac{h}{\lambda + h}\hat{x} + \frac{\lambda}{\lambda + h} C_h J_{h,\lambda}\hat{x}\right) \\
&= \frac{h}{\lambda + h}(C_h x - \hat{x}) + \frac{\lambda}{\lambda + h}(C_h x - C_h J_{h,\lambda}\hat{x})
\end{aligned}$$

が成り立つ. よって,

$$\begin{aligned}
\|C_h x - J_{h,\lambda}\hat{x}\| &\leq \frac{h}{\lambda + h}\|C_h x - \hat{x}\| + \frac{\lambda}{\lambda + h}\|C_h x - C_h J_{h,\lambda}\hat{x}\| \\
&\leq \frac{h}{\lambda + h}\|C_h x - \hat{x}\| + \frac{\lambda}{\lambda + h}(1 - h\omega)^{-1}\|x - J_{h,\lambda}\hat{x}\|
\end{aligned}$$

が成り立つ.

命題 10.2. $x \in D$, $\lambda \in (0, \lambda_0]$ $h \in (0, h_0]$ ならば,

$$\begin{aligned}
&\|C_h^n x - J_{h,\lambda}^m x\| \\
&\leq (1 - h\omega^+)^{-n}(1 - \lambda\omega_h^+)^{-m} \left((nh - m\lambda)^2 + nh^2 + m\lambda^2\right)^{1/2} \|A_h x\| \qquad (10.2) \\
&n, m = 0, 1, 2, \cdots
\end{aligned}$$

が成り立つ.

証明. $x \in D$ とする. 命題 4.2 により,

$$\begin{aligned}
\|J_{h,\lambda}^m x - x\| &\leq \lambda \sum_{k=1}^{m} (1 - \lambda\omega_h)^{-k} \|A_h x\| \\
&\leq m\lambda(1 - \lambda\omega_h^+)^{-m} \|A_h x\|
\end{aligned}$$

である. また,

$$\begin{aligned}
\|C_h^n x - x\| &\leq h \sum_{k=1}^{n} (1 - h\omega)^{-(k-1)} \|A_h x\| \\
&\leq nh(1 - h\omega^+)^{-n} \|A_h x\|
\end{aligned}$$

である. よって,

$$\begin{gathered}
a_{n,m} = (1 - h\omega^+)^{2n}(1 - \lambda\omega_h^+)^{2m} \|C_h^n x - J_{h,\lambda}^m x\|^2 \\
n,\ m =, 1, 2, \cdots
\end{gathered}$$

とおくと,

$$a_{n,0} = (nh)^2 \|A_h x\|^2 \leq \alpha_{n,0} \|A_h x\|^2, \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

が成り立つ. ただし,

$$\alpha_{n,m} = (nh - m\lambda)^2 + nh^2 + m\lambda^2$$

である. 同様に,

$$a_{0,m} \leq \alpha_{0,m} \|A_h x\|^2, \quad m = 0, 1, 2, \cdots$$

が成り立つ.

$$\begin{aligned}
a_{n,m} &\leq (1 - h\omega^+)^{2n}(1 - \lambda\omega_h^+)^{2m} \\
&\quad \times \left(\frac{h}{\lambda + h} \|C_h^n x - J_{h,\lambda}^{m-1} x\| + \frac{\lambda}{\lambda + h}(1 - \lambda\omega^+)^{-1} \|C_h^{n-1} x - J_{h,\lambda}^m x\|\right)^2 \\
&\leq (1 - h\omega^+)^{2n}(1 - \lambda\omega_h^+)^{2m} \left(\frac{h}{\lambda + h} + \frac{\lambda}{\lambda + h}\right) \\
&\quad \times \left(\frac{h}{\lambda + h} \|C_h^n x - J_{h,\lambda}^{m-1} x\|^2 + \frac{\lambda}{\lambda + h}(1 - \lambda\omega^+)^{-2} \|C_h^{n-1} x - J_{h,\lambda}^m x\|^2\right) \\
&= \frac{h}{\lambda + h}(1 - \lambda\omega_h^+)^2 a_{n,m-1} + \frac{\lambda}{\lambda + h} a_{n-1,m} \\
&\leq \frac{h}{\lambda + h} a_{n,m-1} + \frac{\lambda}{\lambda + h} a_{n-1,m}
\end{aligned}$$

を得る. 故に, 命題 4.3 のときと同様に,

$$a_{n,m} \le \alpha_{n,m}\|A_h x\|^2$$

である.

命題 10.3. $x \in D,\ t \in [0,\infty)\ h \in (0,h_0]$ ならば,

$$\begin{aligned}
&\|C_h^n x - T_h(t)x\| \\
&\le (1-h\omega^+)^{-n} e^{\omega_h^+ t} \left((nh-t)^2 + nh^2\right)^{1/2} \|A_h x\| \\
&n = 0,1,2,\cdots
\end{aligned} \tag{10.3}$$

が成り立つ.

証明. (10.2) において, $m = [t/\lambda]$ とおき, $\lambda \downarrow 0$ とすればよい.

定理 10.2 の証明. $x \in \overline{D(A)}$, $x_h \in \overline{D}$ は, $h \downarrow 0$ のとき, $x_h \to x$ であるとする. $y \in D(A) \subset D$ とする. $y_{h,\mu} = J_{h,\mu} y$ とおく. $A_h y_{h,\mu} = \mu^{-1}(y_{h,\mu} - y)$ だから, 命題 10.3 より,

$$\begin{aligned}
&\|C_h^{[t/h]} y_{h,\mu} - T_h(t) y_{h,\mu}\| \\
&\le (1-h\omega^+)^{-[t/h]} e^{\omega_h^+ t} (h^2 + ht)^{1/2} \mu^{-1} \|y_{h,\mu} - y\|
\end{aligned}$$

が成り立つ. よって,

$$\begin{aligned}
&\|C_h^{[t/h]} x_h - T_h(t)x\| \\
&\le \|C_h^{[t/h]} x_h - C_h^{[t/h]} y_{h,\mu}\| + \|T_h(t) y_{h,\mu} - T_h(t)x\| \\
&+ (1-h\omega^+)^{-[t/h]} e^{\omega_h^+ t} (h^2 + ht)^{1/2} \mu^{-1} \|y_{h,\mu} - y\| \\
&\le (1-h\omega^+)^{-[t/h]} \|x_h - y_{h,\mu}\| + e^{\omega_h t} \|y_{h,\mu} - x\| \\
&+ (1-h\omega^+)^{-[t/h]} e^{\omega_h^+ t} (h^2 + ht)^{1/2} \mu^{-1} \|y_{h,\mu} - y\|
\end{aligned}$$

を得る. よって, $\tau > 0$ のとき,

$$\limsup_{h \downarrow 0} \left(\sup_{t \in [0,\tau]} \left(\|C_h^{[t/h]} x_h - T_h(t)x\| \right) \right) \le 2e^{\omega^+ \tau} \|x - y_\mu\|$$

である. 但し, $y_\mu = J_\mu y$ である. $\mu \downarrow 0$ とし, $y \to x$ とすればよい.

11　単独保存則の差分近似

単独保存則

$$\partial_t u + \partial_x F(u) = 0 \tag{11.1}$$

に対する**差分近似**を考える．$\Delta t > 0$, $\Delta x > 0$ とする．$r = \Delta t/\Delta x$ と書き，r は定数とする．一般には r に依存する $F_r \in C^1((-\infty,\infty)\times(-\infty,\infty))$ を用いて,

$$\begin{aligned}&\frac{u(x,t+\Delta t)-u(x,t)}{\Delta t}\\ &+\frac{F_r(u(x,t),u(x+\Delta x,t))-F_r(u(x-\Delta x,t),u(x,t))}{\Delta x}=0\end{aligned} \tag{11.2}$$

の形の差分近似を考える．ただし, 保存則 (11.1) との適合性のために,

$$F_r(s,s) = F(s), \quad -\infty < s < \infty$$

である仮定する．$u(x,t+\Delta t)$ は $u(x,t)$ から

$$\begin{aligned}u(x,t+\Delta t) &= u(x,t) - rF_r(u(x,t),u(x+\Delta x,t)) + rF_r(u(x-\Delta x,t),u(x,t))\\ &= G_r(u(x-\Delta x,t),u(x,t),u(x+\Delta x,t))\end{aligned}$$

で定まる．初期条件 $u(x,0) = u_0(x)$ から順次 $u(x,n\Delta t)$, $n = 1,2,\ldots$ が定まる．$M > 0$ とする．$s_{-1}, s_0, s_1 \in [-M,M]$ のとき, $G_r(s_{-1},s_0,s_1)$ が各変数 s_{-1}, s_0, s_1 に関して非減少のとき, 差分近似 (11.2) は 区間 $[-M,M]$ 上で**単調**であるという．

例 11.1.

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\Delta t}(u(x,t+\Delta t)-(u(x+\Delta x,t)+u(x-\Delta x,t))/2)\\ &\quad+\frac{1}{2\Delta x}(F(u(x+\Delta x,t))-F(u(x-\Delta x,t)))=0\end{aligned} \tag{11.3}$$

の形の差分近似を **Friedrichs-Lax の差分近似**という．この差分近似は

$$\begin{aligned}F_r(s_1,s_2) &= (F(s_1)+F(s_2))/2 + (s_1-s_2)/2r\\ G_r(s_{-1},s_0,s_1) &= \frac{1}{2}\int_0^{s_{-1}}(1+rF'(s))\,ds + \frac{1}{2}\int_0^{s_1}(1-rF'(s))\,ds\end{aligned}$$

とおいて, (11.2) の形になる．したがって, 定数 $r > 0$ を

$$r\sup\{|F'(s)|;\ s \in [-M,M]\} \le 1$$

を満たすように固定すれば, Friedrichs-Lax の差分法は $[-M,M]$ 上で 単調である．

例 11.2.

$$\frac{1}{\Delta t}(u(x,t+\Delta t)-u(x,t))$$
$$+\frac{1}{\Delta x}\left(\int_{u(x-\Delta x,t)}^{u(x,t)} F'(r)^+\,dr-\int_{u(x,t)}^{u(x+\Delta x,t)} F'(r)^-\,dr\right)=0 \tag{11.4}$$

の形の差分近似を**上流差分近似**という．この差分近似は

$$F_r(s_1,s_2)=\frac{1}{2}(F(s_1)+F(s_2))-\frac{1}{2}\int_{s_1}^{s_2}|F'(s)|\,ds$$
$$G_r(s_{-1},s_0,s_1)=r\int_0^{s_{-1}} F'(s)^+\,ds+r\int_0^{s_1} F'(s)^-\,ds+\int_0^{s_0}(1-r|F'(s)|)\,ds$$

とおいて, (11.2) の形になる．したがって, やはり $r>0$ を

$$r\sup\{|F'(s)|;\ s\in[-M,M]\}\le 1$$

を満たすように固定すれば, 上流差分近似は $[-M,M]$ 上で 単調である．

$M>0$ とし, 以下で，差分近似 (11.2) は $[-M,M]$ で単調であると仮定する．$\|u\|_{L^\infty}\le M$ である $u\in L^\infty(-\infty,\infty)$ に対して,

$$\begin{aligned}u_{\Delta t}(x)&=u(x)-rF_r(u(x),u(x+\Delta x))+rF_r(u(x-\Delta x),u(x))\\&=G_r(u(x-\Delta x),u(x),u(x+\Delta x))\end{aligned}$$

と書く． $k\in[-M,M]$ とする．G_r は各変数に関して, 非減少だから,

$$u_{\Delta t}(x)\le G_r(k\vee u(x-\Delta x),k\vee u(x),k\vee u(x+\Delta x))$$

である．一方,

$$k=G_r(k,k,k)\le G_r(k\vee u(x-\Delta x),k\vee u(x),k\vee u(x+\Delta x))$$

である．したがって,

$$k\vee u_{\Delta t}(x)\le G_r(k\vee u(x-\Delta x),k\vee u(x),k\vee u(x+\Delta x))$$

である．これを, 書き直すと,

$$\begin{aligned}&k\vee u_{\Delta t}(x)\\&\le k\vee u(x)-rF_r(k\vee u(x),k\vee u(x+\Delta x))+rF_r(k\vee u(x-\Delta x),k\vee u(x))\end{aligned}$$

となる．両辺から, k を減じて整理すると,

$$\begin{aligned}&(u_{\Delta t}(x)-k)^+-(u(x)-k)^+\le\\&-rF_r(k\vee u(x),k\vee u(x+\Delta x))+rF_r(k\vee u(x-\Delta x),k\vee u(x))\end{aligned} \tag{11.5}$$

を得る. 同様にして,

$$
\begin{aligned}
&(u_{\Delta t}(x)-k)^- - (u(x)-k)^- \le \\
&+ rF_r(k\wedge u(x), k\wedge u(x+\Delta x)) - rF_r(k\wedge u(x-\Delta x), k\wedge u(x))
\end{aligned}
\tag{11.6}
$$

を得る. (11.5), (11.6) において, それぞれ, $k=\|u\|_{L^\infty}$, $k=-\|u\|_{L^\infty}$ とおいて, $\|u_{\Delta t}\|_{L^\infty}\le\|u\|_{L^\infty}\le M$ であることがわかる. さらに, (11.5), (11.6) を辺々加えて,

$$
\begin{aligned}
&|u_{\Delta t}(x)-k| - |u(x)-k| \le \\
&- rF_r(k\vee u(x), k\vee u(x+\Delta x)) + rF_r(k\vee u(x-\Delta x), k\vee u(x)) \\
&+ rF_r(k\wedge u(x), k\wedge u(x+\Delta x)) - rF_r(k\wedge u(x-\Delta x), k\wedge u(x))
\end{aligned}
$$

を得る. ここで, 特に, $k=0$ として,

$$
\begin{aligned}
&|u_{\Delta t}(x)| - |u(x)| \le \\
&- rF_r(u(x)^+, u(x+\Delta x)^+) + rF_r(u(x-\Delta x)^+, u(x)^+) \\
&+ rF_r(-u(x)^-, -u(x+\Delta x)^-) - rF_r(-u(x-\Delta x)^-, -u(x)^-)
\end{aligned}
$$

である. よって, もし, $u\in L^1(-\infty,\infty)$ ならば, $u_{\Delta t}\in L^1(-\infty,\infty)$ で,

$$
\|u_{\Delta t}\|_{L^1}\le\|u\|_{L^1}
$$

である.

$\hat{u}\in L^\infty(-\infty,\infty)$ を $\|\hat{u}\|_{L^\infty}\le M$ であるとする. $w(x)=u(x)\vee\hat{u}(x)$ とおくと, $w\in L^\infty(-\infty,\infty)$ で, $\|w\|_{L^\infty}\le M$ である.

$$
\begin{aligned}
\hat{u}_{\Delta t}(x) &= G_r(\hat{u}(x-\Delta x), \hat{u}(x), \hat{u}(x+\Delta x)) \\
w_{\Delta t}(x) &= G_r(w(x-\Delta x), w(x), w(x+\Delta x))
\end{aligned}
$$

と書く. 単調性から,

$$
u_{\Delta t}(x)\vee\hat{u}_{\Delta t}(x)\le G_r(w(x-\Delta x), w(x), w(x+\Delta x)) = w_{\Delta t}(x)
$$

である. $u\in L^1(-\infty,\infty)$, $\hat{u}\in L^1(-\infty,\infty)$ と仮定する. このとき $w\in L^1(-\infty,\infty)$ で, また,

$$
\hat{u}_{\Delta t},\ w_{\Delta t}\in L^1(-\infty,\infty)
$$

であり,

$$
\int_{-\infty}^{\infty}\hat{u}_{\Delta t}\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{u}\,dx,\ \int_{-\infty}^{\infty}w_{\Delta t}\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}w\,dx
$$

が成り立つ. したがって,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}(u_{\Delta t}-\hat{u}_{\Delta t})^{+}\,dx &= \int_{-\infty}^{\infty}(u_{\Delta t}\vee\hat{u}_{\Delta t}-\hat{u}_{\Delta t})\,dx\\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty}(w_{\Delta t}-\hat{u}_{\Delta t})\,dx\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}(w-\hat{u})\,dx\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}(u\vee\hat{u}-\hat{u})\,dx\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}(u-\hat{u})^{+}\,dx\end{aligned}$$

が成り立つ. 同様にして,

$$\int_{-\infty}^{\infty}(u_{\Delta t}-\hat{u}_{\Delta t})^{-}\,dx \leq \int_{-\infty}^{\infty}(u-\hat{u})^{-}\,dx$$

も成り立つ. 故に,

$$\int_{-\infty}^{\infty}|u_{\Delta t}-\hat{u}_{\Delta t}|\,dx \leq \int_{-\infty}^{\infty}|u-\hat{u}|\,dx$$

が成り立つ.

$L^1(-\infty,\infty)$ の閉凸集合 D_M を

$$D_M=\{u\in L^1(-\infty,\infty)\cap L^{\infty}(-\infty,\infty);\ \|u\|_{L^\infty}\leq M\}$$

で定める. $h>0$ とし, 各 $u\in D_M$ に対して, $C_h u$ を

$$(C_h u)(x)=G_r(u(x-\Delta x),u(x),u(x+\Delta x)),\ h=\Delta t$$

で定める. 以上で調べたことから, 次が成り立つ.

命題 11.1. 各 $h>0$ に対し, C_h は D_M からそれ自身の中への作用素であり, 次が成り立つ.

(1) $u,\ \hat{u}\in D_M$ のとき,

$$\|C_h u-C_h\hat{u}\|_{L^1}\leq\|u-\hat{u}\|_{L^1}.$$

(2) 任意の $y\in(-\infty,\infty)$ に対して,

$$\tau_y C_h=C_h\tau_y.$$

(3) $u \in D_M$, $k \in [-M, M]$ のとき,

$$\begin{aligned} &((C_h u)(x) - k)^+ - (u(x) - k)^+ \le \\ &- rF_r(k \vee u(x), k \vee u(x + \Delta x)) + rF_r(k \vee u(x - \Delta x), k \vee u(x)), \qquad (11.7) \\ &((C_h u)(x) - k)^- - (u(x) - k)^- \le \\ &+ rF_r(k \wedge u(x), k \wedge u(x + \Delta x)) - rF_r(k \wedge u(x - \Delta x), k \wedge u(x)) \qquad (11.8) \end{aligned}$$

(4) $u \in D_M$ のとき,

$$\begin{aligned} &|(C_h u)(x)| - |u(x)| \le \qquad (11.9) \\ &- rF_r(u(x)^+, u(x + \Delta x)^+) + rF_r(u(x - \Delta x)^+, u(x)^+) \\ &+ rF_r(-u(x)^-, -u(x + \Delta x)^-) - rF_r(-u(x - \Delta x)^-, -u(x)^-). \end{aligned}$$

A を 定義 9.2 で定めた $L^1(-\infty, \infty)$ の消散作用素, $\{T(t)\}_{t \ge 0}$ をそれから生成される $L^1(-\infty, \infty)$ 上の半群とする.

定理 11.1. $u_0 \in D_M$ とする. $L^1(-\infty, \infty)$ において,

$$C_h^{[t/h]} u_0 \to T(t) u_0, \quad h \downarrow 0$$

となる. ただし, 収束は有界な $t \in [0, \infty)$ に関して一様である.

証明. $h > 0$, $u \in D_M$ のとき, $A_h u = h^{-1}(C_h u - u)$ と書く. D_M は $L^1(-\infty, \infty)$ の閉凸集合だから, $\lambda > 0$ のとき, $R(I - \lambda A_h) \supset D_M$ が成り立つ. $f \in D_M$, $\lambda > 0$ とする. $L^1(-\infty, \infty)$ において,

$$(I - \lambda A_h)^{-1} f \to (I - \lambda A)^{-1} f, \quad h \downarrow 0$$

を示せばよい. 簡単のため $\lambda = 1$ とする.

$$u_h = (I - \lambda A_h)^{-1} f = (I - A_h)^{-1} f$$

と書く. $\{u_h\}$ が $L^1(-\infty, \infty)$ で全有界であることを示す.

$$u_h = \frac{h}{h+1} f + \frac{1}{h+1} C_h u_h$$

だから, $p = 1, \ \infty$ のとき

$$\begin{aligned} \|u_h\|_{L^p} &\le \frac{h}{h+1} \|f\|_{L^p} + \frac{1}{h+1} \|C_h u_h\|_{L^p} \\ &\le \frac{h}{h+1} \|f\|_{L^p} + \frac{1}{h+1} \|u_h\|_{L^p} \end{aligned}$$

であり,
$$\|u_h\|_{L^p} \le \|f\|_{L^p}$$
である. $y \in (-\infty, \infty)$ のとき,
$$\tau_y u_h = \frac{h}{h+1}\tau_y f + \frac{1}{h+1}C_h \tau_y u_h u_h$$
も成り立つから, これを変形して，$\tau_y u_h = (I - A_h)^{-1}\tau_y f$ である．よって,
$$\|\tau_y u_h - u_h\|_{L^1} = \|(I - A_h)^{-1}\tau_y f - (I - A_h)^{-1} f\|_{L^1} \le \|\tau_y f - f\|_{L^1}$$
である．したがって,
$$\sup_{h>0}\|\tau_y u_h - u_h\|_{L^1} \to 0, \quad y \to 0$$
である. (11.9) において, $u = u_h$ とおく.
$$\begin{aligned}
|(C_h u_h)(x)| - |u_h(x)| &\ge \operatorname{sign}(u_h(x))((C_h u_h)(x) - u_h(x)) \\
&= h \operatorname{sign}(u_h(x))(u_h(x) - f(x)) \\
&\ge h(|u_h(x)| - |f(x)|)
\end{aligned}$$
であり, $r/h = 1/\Delta x$ であるから,
$$\begin{aligned}
&|u_h(x)| - |f(x)| \\
&\le \frac{1}{\Delta x}\big(F_r(u_h(x-\Delta x)^+, u_h(x)^+) - F_r(u_h(x)^+, u_h(x+\Delta x)^+) \\
&+ F_r(-u_h(x)^-, -u_h(x+\Delta x)^-) - F_r(-u_h(x-\Delta x)^-, -u_h(x)^-)\big)
\end{aligned} \tag{11.10}$$
が従う．$R_2 > R_1 > 0$ とし,
$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & |x| > R_2 \\ (|x| - R_1)/(R_2 - R_1), & R_1 < |x| \le R_2 \\ 0, & |x| \le R_1 \end{cases}$$
を (11.10) の両辺に乗じて $(-\infty, \infty)$ 上で積分して
$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} |u_h(x)|\psi(x)\,dx - \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\psi(x)\,dx \\
&\le \int_{-\infty}^{\infty} \big(F_r(u_h(x-\Delta x)^+, u_h(x)^+) - F_r(-u_h(x-\Delta x)^-, -u_h(x)^-)\big) \\
&\qquad \times \frac{1}{\Delta x}(\psi(x) - \psi(x-\Delta x))\,dx
\end{aligned}$$

となる．$|s_1|$, $|s_2| \leq M$ のとき,

$$|\partial_1 F_r(s_1, s_2)|,\ |\partial_2 F_r(s_1, s_2)| \leq K_r$$

であるとすると,

$$\begin{aligned}
&|F_r(u_h(x-\Delta x)^+, u_h(x)^+) - F_r(-u_h(x-\Delta x)^-, -u_h(x)^-)| \\
&\leq K_r(|u_h(x-\Delta x)^+ + u_h(x-\Delta x)^-| + |u_h(x)^+ + u_h(x)^-|) \\
&= K_r(|u_h(x-\Delta x)| + |u_h(x)|)
\end{aligned}$$

である．故に,

$$\int_{|x|>R_2} |u_h(x)|\, dx - \int_{|x|>R_1} |f(x)|\, dx \leq \frac{2K_r}{R_2 - R_1} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx$$

を得る．よって

$$\sup_{h>0} \int_{|x|>R_2} |u_h(x)|\, dx \to 0, \quad R_2 \uparrow \infty$$

である．定理 2.1 により, $h(n)$ を適当な零列とし $u_{h(n)}$ は $L^1(-\infty, \infty)$ で, ある $u \in L^1(-\infty, \infty)$ に強収束する．$u_{h(n)}(x)$, $u_{h(n)}(x - \Delta x_n)$ は $u(x)$ に概収束すると仮定してよい．ただし, $\Delta x_n = h(n)/r$ である．

$u = (I - A)^{-1} f$ であることを示せばよい．$u_h - f = A_h u_h$ で,

$$u_h(x) - f(x) = \frac{1}{\Delta x} \left(F_r(u_h(x-\Delta x), u_h(x)) - F_r(u_h(x), u_h(x+\Delta x)) \right)$$

である．$\varphi \in C_0^\infty(-\infty, \infty)$, $\varphi \geq 0$, とする．

$$\int_{-\infty}^{\infty} (u_h(x) - f(x)) \varphi(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} F_r(u_h(x-\Delta x), u_h(x)) \frac{\varphi(x) - \varphi(x-\Delta x)}{\Delta x}\, dx$$

である．$h = h(n) \to 0$ として,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} (u(x) - f(x)) \varphi(x)\, dx &= \int_{-\infty}^{\infty} F_r(u(x), u(x)) \partial_x \varphi(x)\, dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} F(u(x)) \partial_x \varphi(x)\, dx \qquad (11.11)
\end{aligned}$$

を得る．$\Phi \in C^2(-\infty, \infty)$ は凸で非減少とする．(11.7) より,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{h} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-M}^{M} \Phi''(k) \left(((C_h u_h)(x) - k)^+ - (u_h(x) - k)^+ \right) dk \right\} \varphi(x)\, dx \\
&\leq \frac{1}{\Delta x} \int_{-\infty}^{\infty} \Big\{ \int_{-M}^{M} \Phi''(k) \big(F_r(k \vee u_h(x-\Delta x), k \vee u_h(x)) \\
&\quad - F_r(k \vee u_h(x), k \vee u_h(x+\Delta x)) \big)\, dk \Big\} \varphi(x)\, dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-M}^{M} \Phi''(k) F_r(k \vee u_h(x-\Delta x), k \vee u_h(x)) \frac{1}{\Delta x} (\varphi(x) - \varphi(x-\Delta x))\, dk \right\} dx
\end{aligned}$$

をえる．

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{h}\int_{-M}^{M} \Phi''(k)\left(((C_h u_h)(x)-k)^+ - (u_h(x)-k)^+\right)\,dk \\
&\geq \int_{-M}^{M} \Phi''(k)\,\mathrm{sign}^+(u_h(x)-k)\frac{1}{h}\left((C_h u_h)(x)-u_h(x)\right)\right)\,dk \\
&= \int_{-M}^{u_h(x)} \Phi''(k)\left(u_h(x)-f(x)\right)\,dk
\end{aligned}
$$

だから，

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-M}^{u_h(x)} \Phi''(k)\left(u_h(x)-f(x)\right)\,dk\right\}\varphi(x)\,dx \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-M}^{M} \Phi''(k)F_r(k\vee u_h(x-\Delta x), k\vee u_h(x))\frac{1}{\Delta x}\left(\varphi(x)-\varphi(x-\Delta x)\right)\,dk\right\}\,dx
\end{aligned}
$$

となる．ここで $h=h(n)\to 0$ として，

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-M}^{u(x)} \Phi''(k)\left((u(x)-f(x)\right)\,dk\right\}\varphi(x)\,dx \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-M}^{M} \Phi''(k)F_r(k\vee u(x), k\vee u(x))\partial_x\varphi(x)\,dk\right\}\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-M}^{M} \Phi''(k)F(k\vee u(x))\partial_x\varphi(x)\,dk\right\}\,dx
\end{aligned}
\tag{11.12}
$$

を得る．この右辺は

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-M}^{u(x)} \Phi''(k)F(u(x))\,dk + \int_{u(x)}^{M}\Phi''(k)F(k)\,dk\right\}\partial_x\varphi(x)\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\Bigg\{(\Phi'(u(x))-\Phi'(-M))F(u(x)) \\
&\qquad + \Big[\Phi'(k)F(k)\Big]_{u(x)}^{M} - \int_{u(x)}^{M}\Phi'(k)F'(k)\,dk\Bigg\}\partial_x\varphi(x)\,dx \\
&= -\Phi'(-M))\int_{-\infty}^{\infty}F(u(x))\partial_x\varphi(x)\,dx + \Phi'(M))F(M)\int_{-\infty}^{\infty}\partial_x\varphi(x)\,dx \\
&\qquad + \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{M}^{u(x)}\Phi'(k)F'(k)\,dk\right\}\partial_x\varphi(x)\,dx \\
&= -\Phi'(-M))\int_{-\infty}^{\infty}F(u(x))\partial_x\varphi(x)\,dx + \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{0}^{u(x)}\Phi'(k)F'(k)\,dk\right\}\partial_x\varphi(x)\,dx
\end{aligned}
$$

となる．(11.11) を用いて (11.12) を整理すると,

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} \varPhi'(u(x))\,(u(x)-f(x))\,\varphi(x)\,dx \\
&\le \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_0^{u(x)} \varPhi'(s)F'(s)\,ds \right\} \partial_x\varphi(x)\,dx
\end{aligned}$$

を得る．ゆえに, $u(x)$ は

$$u + \partial_x F(u) = f$$

のエントロピー劣解である．同様に, $u(x)$ がエントロピー優解であることが示せる．

線形モデルの交通流の方程式の

$$\partial_t \rho + \partial_x \left(\rho(1-\rho)\right) = 0$$

に関する数値実験例を図 10, 11, 12, 13, 14 に示す．図 13 では Friedrichs-Lax の差分近似を, それ以外は上流差分近似を用いた．図 10 の初期密度は

$$\rho_0(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1 \\ (x+1)/2, & -1 < x \le 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

で衝撃波が観測される．図 11 の初期密度は

$$\rho_0(x) = \begin{cases} 1, & x \le 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$$

で稀薄波が観測される．図 12, 13 の初期密度は

$$\rho_0(x) = \exp(-5x^2)$$

である．かなり早い時期に衝撃波が生じている．上流差分近似の方が Friedrichs-Lax 差分法より衝撃波をシャープに与えている．図 14 の初期密度は

$$\rho_0(x) = \exp(-5x^2) + 0.5\exp(-5(x+0.5)^2)$$

である．後方の小集団が前方の大集団に追いつき吸収されていく様子がわかる．

演習問題 11.1. 例 11.1 と例 11.2 を検証せよ．

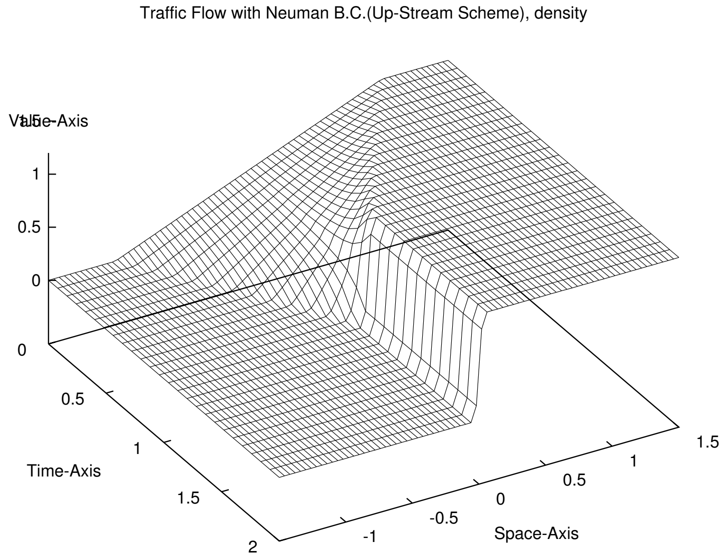

図 10: 数値計算例 1

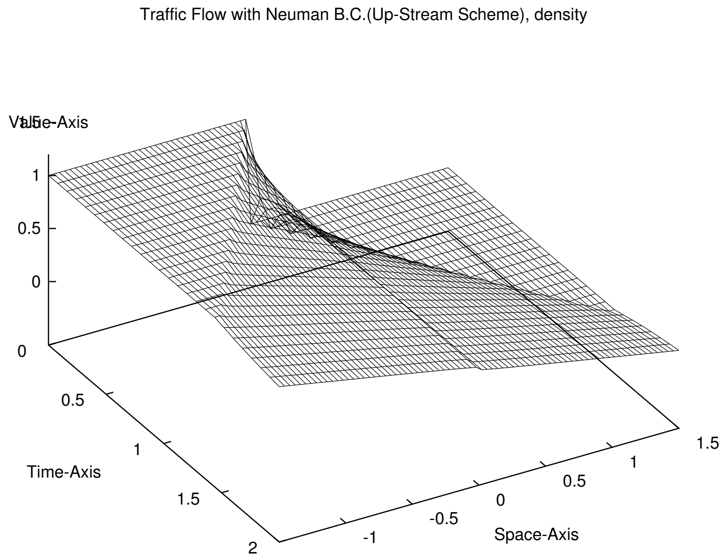

図 11: 数値計算例 2

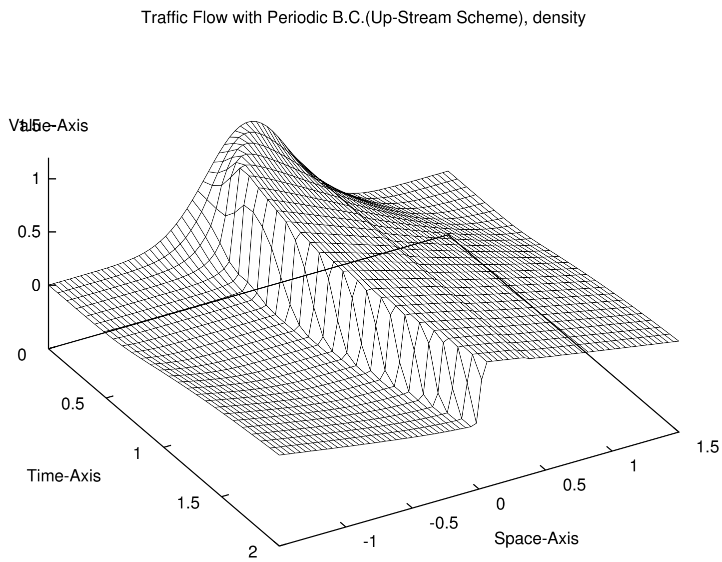

図 12: 数値計算例 3

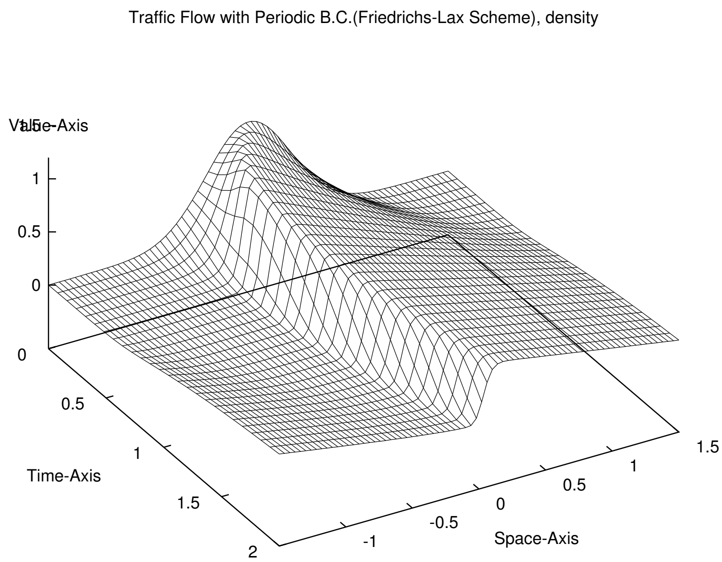

図 13: 数値計算例 4

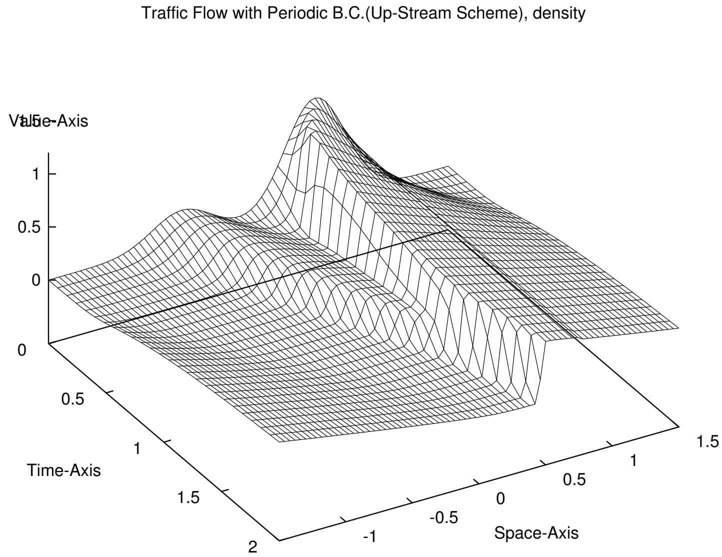
Traffic Flow with Periodic B.C.(Up-Stream Scheme), density
Value-Axis
1.5
1
0.5
0
0
0.5
1
1.5
2
Time-Axis
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
Space-Axis

図 14: 数値計算例 5

あとがき

交通流の方程式については [27] が読み物風で楽しい．この数理モデルの提案者の一人である Whitham の講義録 [65] にも簡潔な解説がある．mesoscopic なモデルに関する解説も含んだ総合報告として [40] がある．保存則や非線形双曲型方程式に関して本格的に学ぶには Bardos[4], Majda[45], Hörmander[28], Smoller[59] などがある．物理的背景も込めて学ぶには Chorin-Marsden[20] がある．

非線形半群または非線形発展方程式に関する専門書に関しては高村・小西 [39] と Walker[64] が入門的な性格であるが高度な内容も持つ．本格的に学ぶ為には Barbu[3], Brézis[10], 田辺 [62], 増田 [48], 宮寺 [51], Showalter[58] がある．[51],[62] には英訳もある．[42],[46],[57], [21],[2] も関連する専門書である．[66] にも非線形半群論の簡潔な解説がある．総合報告としては Crandall[12] がもっとも新しいものである．Kōmura[38], Minty[49] は単調作用素と非線形半群に関する記念碑的論文である．

関数解析や Lebesgue 積分については, 例えば教科書 [60] 程度の知識を仮定した．必要に応じて, [37],[50],[63],[9], [26],[9] などを参照していただきたい．[37], [9] には邦訳がある．なお, [50],[63],[9] には線形半群論が含まれている．

定義 3.1 と定理 3.2 は Kružkov[41] による．定理 4.1 は Crandall–Liggett[16] による．証明は Kobayashi[32] にあるものを適用した．定理 8.1, 10.1, 10.2 は Miyadera–Oharu[54], Brézis–Pazy[11] による．証明は Miyadera–Kobayashi[53] にあるものを適用した．定理 5.1 は Bénilan[5] による．定理 5.2 は Crandall–Liggett[16], Miyadera[52] による．なお, 命題 5.7 はこれらにあるものの拡張を与える．定理 7.1,9.1,9.2,9.3,9.4 は実質的に Crandall[13] による．Bénilan[5], Kružkov[41] などを参考にして若干の整備をした．定理 11.1 は Crandall–Majda[17] による．証明は Oharu–Takahashi[56], Kobayashi[33],[34] にならって半群の近似定理を用いたものを与えた．(粘性を伴う) 単独保存則は空間次元が 1 次元の場合に限定して取り扱ったが, 証明は空間次元が 2 次元以上の場合にも容易に拡張できる形で与えた.

非線形半群論は単独保存則の方程式以外にも, Hamilton-Jacbi 方程式や多孔性媒質中の流体の方程式 (porus medium equation) などに適用される．これらについては Bénilan–Brézis–Crandall[6], Crandall–Lions[18], Brézis[8] などを参照.

交通流の方程式は車密度 ρ の他に車速度 v の時間発展も考慮すると例えば

$$
\begin{gathered}
\partial_t \rho + \partial_x(\rho v) = 0 \\
\partial_t v + \partial_x(v^2/2 + a\rho^{\gamma-1}) = (V(\rho) - v)/\tau
\end{gathered}
$$

となる．ただし,$a > 0$, $\gamma > 1$, $\tau > 0$ は定数である．$\tau \downarrow 0$ とした極限が今まで扱った方程式である．このような保存則系に適用可能なように非線形半群の理論を整備拡張することができるであろうか？このことについては Bressan[7] を参照.

参考文献

[1] J. P. Aubin and H. Frankowska, Set-Valued Analysis, Birkhäuser, Boston, 1990.

[2] J. P. Aubin and A. Cellina, Differential Inclusions, Springer-Verlag, Berlin–New York–Tokyo, 1984.

[3] V. Barbu, Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach Spaces, Noordhoff International Publishing, Leyden, 1976.

[4] C. Bardos, Introduction aux problèmes hyperboliques non linéaires, Fluid Dynamics, Varenna 1982, Lecture Notes in Math., Springer, **1047**(1984), 1–74.

[5] Ph. Bénilan, Dévolution dans un espace de Banach quelconque et application, Thèse Orsay, (1972).

[6] Ph. Bénilan, H. Brézis and M. G. Crandall, A semilinear elliptic equation in $L^1(\boldsymbol{R})^N$, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa(5)*, **2**(1975), 523–555.

[7] A. Bressan, The semigroup approach to systems of conservation laws, *Mathmatica Contemp.*, **10**(1996), 21–74.

[8] H. Brézis, Monotonicity methods in Hilbert spaces and some applications to nonlinear partial differential equations, Contribution to Nonlinear Functional Analysis, E. Zarantonello ed., Academic Press, (1970), 101–156.

[9] H. Brézis, Analyse Fonctionell, Théorie et applications, Collection Mathématiques appliquées pours la matîtrise, Masson, Paris, 1987.

[10] H. Brézis, Operateurs Maximaux Monotones et semi-groupes de contractions-dans les espaces de Hilbert, North-Holland Mathematics Studies, **5**, North-Holland, Amsterdam, 1973.

[11] H. Brézis and A. Pazy, Convergence and approximation of semigroups of nonlinear operators in Banach spaces, *J. Funct. Anal.*, **7**(1972), 63–74.

[12] M. G. Crandall, Nonlinear semigroups and evolution governed by accretive operators, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, **45**Part-1(1986), 305–337.

[13] M. G. Crandall, The semigroup approach to first-order quasilinear equations in several space variables, *Israel J. Math.*, **12**(1972), 108–132.

[14] M. G. Crandall and L. Evans, On the relation of the operator $\partial/\partial\tau + \partial/\partial s$ to evolution governed by accretive operators, *Israel J. Math.*, **21**(1975), 261–278.

[15] M. G. Crandall and T. Liggett, Generation of semi-groups of nonlinear transformations on general Banach spaces, *Amer. J. Math.*, **93**(1971), 265–298.

[16] M. G. Crandall and T. Liggett, A theorem and a counterexample in the theory of semigroups of nonlinear transformations, *Tran. Amer. Math. Soc.*, **160**(1971), 263–278.

[17] M. G. Crandall and A. Majda, Monotone difference approximations for scalar conservation laws. *Math. Comp.*, **34**(1980), 1–21.

[18] M. G. Crandall and P. L. Lions, Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **277**(1983), 1–42.

[19] M. G. Crandall and P. Souganidis, On nonlinear equations of evolution, *Nonlinear Analysis, TMA*, **13**(1989), 1375–1392.

[20] A. J. Chorin and J. E. Marsden, A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics, Springer-Ferlag, New York, 1979.

[21] K. Deimling, Multivalued Differential Equations, Walter de Gruyter, Berlin–NewYork, 1992.

[22] K. Deimling, Ordinary Differential Equations in Banach Spaces, Lecture Note in Math., **596**, Springer-Verlag, 1977.

[23] I. Ekeland and R. Temam, Convex Analysis and Variational Problems, North-Holland, 1976.

[24] T. M. Flett, Differential Analysis, Differentiation, Differential Equations and Differential Inequalities, Cambridge Univ. (1980).

[25] H. Greenberg, An analysis of trafic flow, *Oper. Res.*, **4**(1959), 79–85.

[26] E. Hewitt and K. Stromberg, Real and Abstract Analysis, Springe-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1965.

[27] R. ハーバーマン (竹之内脩監訳), 交通流の数学モデル, 現代数学社, 京都, 1981.

[28] L. Hörmander, Lectures on Nonlinear Hyperbolic Differential Euqaions, Mathématiques and Applications 26, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1997.

[29] T. Kato, Nonlinear semigroups and evolutin equations, *J. Math. Soc. Japan*, **19**(1967), 508–520.

[30] N. Kenmochi and S. Oharu, Diffeence approximation of nonlinear evolution equations, *Publ. Res. Inst. Math. Sci., Kyoto Univ.*, **10**(1974), 147–207.

[31] A. Klar, R. D. Kühne, R. Wegner, Mathematical models for vehicular traffic, *Surv. Math. Ind.*, **6**(1996), 215–239.

[32] Y. Kobayashi, Difference approximation of Cauchy Problems for quasi-dissipative operators and generation of nonlinear semigroups, *J. Math. Soc. Japan*, **27**(1975), 640–665.

[33] Y. Kobayashi, A Product Formula Approach to First Order Quasilinear Equations, *Hiroshima Math. J.*, **14**(1985), 489-509.

[34] Y. Kobayashi, A New Operator Theoretic Algorithm for Solving First Order Scalar Quasilinear Equations, *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, **43**Part-2(1986), 65-75.

[35] Y. Kobayashi and S. Oharu, Semigroups of Locally Lipschitzian Operators in Banach Space, *Hiroshima Math. J.*, **20**(1990), 578-611.

[36] Y. Kobayashi, Semigroups of Locally Lipschitzian Operators, 京都大学数理解析研究所考究録, **755**(1991), 134–155.

[37] A. N. Kolmogorov and S. V. Formin, Introductory Real Analysis, Dover Publications, INC., New York, 1975.

[38] Y. Kōmura, Nonlinear semigroups in Hilbert spaces, *J. Math. Soc. Japan*, **19**(1967), 503–520.

[39] 高村幸男, 小西芳雄, 非線型発展方程式, 岩波基礎講座, 基礎数学, 岩波書店, 東京, 1977.

[40] R. D. Kühne and M. B. Rödinger, Macroscopic simulation model for freeway traffic with jams and stop-start waves, Proceedings of the 1991 Winter Simulation Conference, Phoenix, AZ, 762–770, 1991.

[41] S. Kružkov, First order quasilinear equations in several independent variables, *Math. USSR Sbornik*, **10**(1970), 217–243.

[42] V. Lakshmikantham and S. Leela, Nonlinear Differential Equations in Abstract Spaces, International Series in Nonlinear Mathematics, **2**, Pergamon Press, 1981.

[43] M. J. Lighthill and G. B. Whitham, On kinematic waves II. A theory of traffic flow on long crowded roads, *Proc. Roy. Sci. A*, (1955), 317–345.

[44] J. L. Lions, Quelques Méthods de résolution des problèmes aux limites non linéaires, Dunod et Gauthier-Villars, Paris, 1968.

[45] A. Majda, Compressible Fluid Flow and Systems of Conservation Laws in Several Space Variables, Springer-Verlag, New York, 1984.

[46] R. H. Martin Jr., Differential equations on closed subsets of a Banach space, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **179**(1973), 399–414.

[47] R. H. Martin Jr., Nonlinear Operators and Differential Equations in Banach Spaces, John Wiley and Sons, New York, 1976.

[48] 増田久弥, 発展方程式, 紀伊国屋書店, 東京, 1975.

[49] G. J. Minty, Monotone (nonlinear) operators in Hilbert Spaces, *Duke Math. J.*, **29**(1962), 341–346.

[50] 宮寺功, 関数解析 (第 2 番), 理工学社, 東京, 1996.

[51] 宮寺功, 非線形半群, 紀伊国屋書店, 東京, 1977.

[52] I. Miyadera, Some remarks on semi-groups of nonlinear operators, *Tôhoku Math. J.*, **23**(1971), 245–248.

[53] I. Miyadera and Y. Kobayashi, Convergence and Approximation of Nonlinear Semigroups, *Proceedings of Japan–france Seminar on Functional Analysis and Numerical Analysis*, 277-295, (1978).

[54] I. Miyadera and S. Oharu, Approximation of semi-groups of nonlinear operators, *Tôhoku Math. J.*, **22**(1970), 24–47.

[55] M. Nagumo, Über die Lage der Integralkurven gewöhnlicher Differentialgleichungen, *Proc. Phys. Math. Soc. Japan*, **24**(1942), 551–559.

[56] S. Oharu and T. Takahashi, A convergence theorem of nonlinear semi-groups and its application to first order quasilinear equations, *J. Math. Soc. Japan*, **26**(1974), 124–160.

[57] N. H. Pavel, Differential Equations, Flow Invariance and Applications, Research Notes in Math., **113**, Pitman, London, 1984.

[58] R. E. Showalter, Monotone Operators in Banach Space and Nonlinear Partial Differential Equations, Mathematical Surveys and Monographs, **49**, Amer. Math. Soc., 1997.

[59] J. Smoller, Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations, Springer-Vwelag, New York-Berlin, 1983.

[60] 州之内治男, 関数解析入門, サイエンス社, 東京, 1977.

[61] T. Takahashi, Convergence of difference approximation of nonlinear evolution equations and generation of semigroups, *J. Math. Soc. Japan*, **28**(1976), 96–113.

[62] 田辺広城, 発展方程式, 岩波書店, 東京, 1975.

[63] 田辺広城, 関数解析（上, 下）, 実教出版, 東京, 1978, 1981.

[64] J. A. Walker, Dynamical Systems and Evolution Equations, Theory and Applications, Plenum Press, New York–London, 1980.

[65] G. B. Whitham, Lectures on Wave Propagation, Lectures on Mathematics and Physics, **61**, Springer-Verlag, Berlin, 1979.

[66] K. Yosida, Functional Analysis, 4th edition, Springer-Verlag, Berlin, 1974.

[67] T. Yoshizawa, Stability Theory by Liapunov's Second Method, Publications of the Math. Soc. of Japan, **9**, The Math. Soc. of Japan, 1966.

索 引