damping term を持つ wave equation

$$\partial_t^2 w = \partial_x (\sigma(\partial_x w)) - \nu \partial_t w, \quad -\infty < x < \infty, \quad t \geq 0$$

の初期値問題を考える. ここで, $\nu > 0$ は定数,

$$\sigma : (-\infty, \infty) \rightarrow (-\infty, \infty)$$

は, 滑らかな単調増大関数で

$$\sigma'(r) \geq \delta_0 > 0$$

を満たすものとする. さらに,

$$\sigma(0) = 0, \quad \|\sigma^{(j)}\|_{L^\infty} < \infty, \quad j = 0, 1, 2, 3$$

であると仮定する. 標準 L^2 norm を $\|\cdot\|$ で表す.

$u = \partial_x w$, $v = \partial_t w$ とおき, 方程式を一階連立方程式

$$(1) \quad \partial_t u = \partial_x v$$

$$(2) \quad \partial_t v = \partial_x \sigma(u) - \nu v$$

に書き直す.

$(u, v), (\hat{u}, \hat{v})$ を, それぞれ $(u_0, v_0), (\hat{u}_0, \hat{v}_0)$ を初期値とする滑らかな解とすると,

$$\begin{aligned} & \partial_t \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{\hat{u}}^u \sqrt{\sigma'(r)} dr \right)^2 + (v - \hat{v})^2 dx \right\} \\ & \leq 2 \|\sigma''\|_{L^\infty} \max\{\|\partial_x v\|_{H^1}, \|\partial_x \hat{v}\|_{H^1}\} \|u - \hat{u}\|^2 \end{aligned}$$

が成り立つ.

$$V((u, v), (\hat{u}, \hat{v})) = \left(\left(\int_{\hat{u}}^u \sqrt{\sigma'(r)} dr \right)^2 + (v - \hat{v})^2 \right)^{1/2}$$

とおくと, $V((\cdot, \cdot), (\cdot, \cdot))$ は $L^2 \times L^2$ 上の標準距離と同値な距離になる:

$$\begin{aligned} \delta_0 \|u - \hat{u}\|^2 + \|v - \hat{v}\|^2 & \leq V((u, v), (\hat{u}, \hat{v}))^2 \\ & \leq \|\sigma'\|_{L^\infty} \|u - \hat{u}\|^2 + \|v - \hat{v}\|^2 \end{aligned}$$

定数 $\omega \geq 0$ を

$$\frac{\|\sigma''\|_{L^\infty}}{\delta_0} \max\{\|\partial_x v\|_{H^1}, \|\partial_x \hat{v}\|_{H^1}\} \leq \omega$$

を満たすようにとれば, Gronwall の不等式により

$$V((u, v), (\hat{u}, \hat{v})) \leq e^{\omega t} V((u_0, v_0), (\hat{u}_0, \hat{v}_0))$$

となる. また, $M \geq 1$ を適当に選べば

$$\|(u, v) - (\hat{u}, \hat{v})\|_{L^2 \times L^2} \leq M e^{\omega t} \|(u_0, v_0) - (\hat{u}_0, \hat{v}_0)\|_{L^2 \times L^2}$$

となる.

$(u, v) \in H^2 \times H^2$ に対して,

$$\begin{aligned} H(u, v) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^u \sigma(r) dr + \frac{1}{2}v^2 \right) dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sigma'(u)(\partial_x u)^2 + (\nu u + \partial_x v)^2 \right) dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sigma'(u)(\partial_x^2 u)^2 + (\nu \partial_x u + \partial_x^2 v)^2 \right) dx \end{aligned}$$

と定める. ある $0 < c_0 \leq C_0 < \infty$ に対して

$$c_0 \|(u, v)\|_{H^2 \times H^2}^2 \leq H(u, v) \leq C_0 \|(u, v)\|_{H^2 \times H^2}^2$$

が成り立つ.

(u, v) を (u_0, v_0) を初期値とする滑らかな解とする.

$\partial_t H(u, v) \leq (g(H(u, v)) - \nu)(\|\partial_x u\|^2 + \|\partial_x^2 u\|^2)$
が成り立つ. ただし, $g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ は $g(0) = 0$ を満たす単調増大な連続関数である. $r_0 > 0$ を $g(r_0) \leq \nu$ を満たすようにとり, $D \subset L^2 \times L^2$ を

$$D = \{(u, v) \in H^2 \times H^2; H(u, v) \leq r_0\}$$

で定める. D は $L^2 \times L^2$ の (凸でない) 閉集合になる. 初期値 (u_0, v_0) を D からとれば解 $(u(t, x), v(t, x))$ は

$$(u(t, \cdot), v(t, \cdot)) \in D, \quad t \in [0, \infty)$$

を満たす.

E は $\|\cdot\|$ をノルムとする実バナッハ空間とし, $D \subset E$ とする.

Definition 1. D からそれ自身の中への作用素の族 $\{T(t)\}_{t \in [0, \infty)}$ は, 次の条件(S1), (S2) が満たされるとき, D 上の半群と呼ばれる. さらに, 次の条件(S3) も満たされるとき, $\{T(t)\}_{t \in [0, \infty)}$ は D 上のリプシッツ作用素の半群と呼ぶ.

(S1) 各 $x \in D$, $t, s \geq 0$ に対して

$$T(t)T(s)x = T(t+s)x, \quad T(0)x = x$$

(S2) 各 $x \in D$ に対して $T(t)x$ は $t \in [0, \infty)$ に関して連続である. すなわち, 任意の $t \in [0, \infty)$ に対して,

$$\lim_{s \rightarrow t} \|T(t)x - T(s)x\| = 0$$

(S3) 任意の $\tau > 0$ に対して, $M_\tau \geq 1$ が存在して, $x, y \in D$, $t \in [0, \tau]$ のとき

$$\|T(t)x - T(t)y\| \leq M_\tau \|x - y\|$$

$\{T(t)\}_{t \in [0, \infty)}$ を D 上の半群とする.

Definition 2.

$$A_0 x = \lim_{h \downarrow 0} h^{-1} (T(h)x - x)$$

で定まる作用素 A_0 をその半群の**無限小生成素**と呼ぶ. ただし, その定義域 $D(A_0)$ は上の極限が存在する $x \in D$ の全体である.

Definition 3. 適当な $x_h \in D$, $h \in (0, \infty)$, が存在して,

$$x_h \rightarrow x, \quad h^{-1} (T(h)x_h - x_h) \rightarrow \xi, \quad (h \downarrow 0)$$

となるような $(x, \xi) \in D \times E$ の全体 A を半群の**一般無限小生成素**と呼ぶ.

もし, $u(\cdot) = T(\cdot)x$, $x \in D$, が $t \in (0, \infty)$ で微分可能ならば

$$\frac{du}{dt}(t) = A_0 u(t), \quad \frac{du}{dt}(t) \in Au(t)$$

が成り立つ

Theorem 1. $\{T(t)\}_{t \in [0, \infty)}$ を D 上の半群とする。このとき、次の4条件は互いに同値である。

(1) $\{T(t)\}_{t \in [0, \infty)}$ は D 上のリプシッツ作用素の半群である。

(2) $M \geq 1$ と $\omega \in \mathbf{R}$ が存在して、

$$|T(t)x - T(t)y| \leq M e^{\omega t} |x - y|, \quad x, y \in D, \quad t \in [0, \infty)$$

が成り立つ。

(3) $M \geq m > 0$, $\omega \in \mathbf{R}$ と D 上の距離 $V(\cdot, \cdot)$ が存在して、次が成り立つ。

$$\begin{aligned} m|x - y| &\leq V(x, y) \leq M|x - y|, \quad x, y \in D, \\ V(T(t)x, T(t)y) &\leq e^{\omega t} V(x, y), \quad x, y \in D, \quad t \in [0, \infty) \end{aligned}$$

(4) $M \geq m > 0$, $\omega \in \mathbf{R}$ と $E \times E$ 上のリプシッツ連続な非負値汎函数 $V(\cdot, \cdot)$ が存在して、次が成り立つ。

$$\begin{aligned} m|x - y| &\leq V(x, y) \leq M|x - y|, \quad x, y \in D, \\ V(T(t)x, T(t)y) &\leq e^{\omega t} V(x, y), \quad x, y \in D, \quad t \in [0, \infty). \end{aligned}$$

D を E の閉集合, $D \subset X$ を E の開集合とし, $V(\cdot, \cdot)$ を $X \times X$ で定義されたリプシッツ連続な実数値汎関数で, ある $M \geq m > 0$ に対して

$$m|x - y| \leq V(x, y) \leq M|x - y|, \quad x, y \in D$$

を満たすものとする.

Definition 4. D 上の半群 $\{T(t)\}_{t \in [0, \infty)}$ に関して, ある $\omega \in \mathbf{R}$ が存在して,

$$V(T(t)x, T(t)y) \leq e^{\omega t} V(x, y), \quad x, y \in D, \quad t \in [0, \infty)$$

が満たされるとき, その半群は汎関数 $V(\cdot, \cdot)$ に関して準縮小的という. また, このような半群の全体を $\mathcal{S}(V(\cdot, \cdot), D, \omega)$ と書く.

$$D_+V, D^+V, C^+V : (X \times X) \times (E \times E) \rightarrow \mathbf{R}$$

を

$$D_+V(x, y)(\xi, \eta) =$$

$$\liminf_{h \downarrow 0} (V(x + h\xi, y + h\eta) - V(x, y))/h$$

$$D^+V(x, y)(\xi, \eta) =$$

$$\limsup_{h \downarrow 0} (V(x + h\xi, y + h\eta) - V(x, y))/h$$

$$C^+V(x, y)(\xi, \eta) =$$

$$\limsup_{(x', y') \rightarrow (x, y), h \downarrow 0} (V(x' + h\xi, y' + h\eta) - V(x', y'))/h$$

$$(x, y) \in X \times X, (\xi, \eta) \in E \times E$$

で定める。また,

$$D_-V, D^-V, C_-V : (X \times X) \times (E \times E) \rightarrow \mathbf{R}$$

を次で定める：

$$D_-V(x, y)(\xi, \eta) = -D^+V(x, y)(-\xi, -\eta)$$

$$D^-V(x, y)(\xi, \eta) = -D_+V(x, y)(-\xi, -\eta)$$

$$C_-V(x, y)(\xi, \eta) = -C^+V(x, y)(-\xi, -\eta)$$

$$(x, y) \in X \times X, (\xi, \eta) \in E \times E$$

DV を D_+V , D^+V または C^+V とし, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned} DV(x, y)(\lambda\xi, \lambda\eta) &= \lambda DV(x, y)(\xi, \eta) \\ |DV(x, y)(\xi, \eta) - DV(x, y)(\hat{\xi}, \hat{\eta})| \\ &\leq M(|\xi - \hat{\xi}| + |\eta - \hat{\eta}|) \end{aligned}$$

$$\lambda \geq 0, (x, y) \in X \times X, (\xi, \eta) \in E \times E$$

Proposition 1. (加藤の補題) $u, v \in W^{1,1}((0, \tau) : E)$ は $u(t), v(t) \in X, t \in [0, \tau]$ を満たすとする. このとき $h(\cdot) = V(u(\cdot), v(\cdot)) \in W^{1,1}((0, \tau) : \mathbf{R})$ で,

$$\begin{aligned} h'(t) &= D^\pm V(u(t), v(t))(u'(t), v'(t)) \\ &= D_\pm V(u(t), v(t))(u'(t), v'(t)) \end{aligned}$$

がほとんど至るところ成立する.

Proposition 2. $(x, y), (x_n, y_n) \in X \times X,$
 $(\xi, \eta), (\xi_n, \eta_n) \in E \times E$ とし, $(x_n, y_n) \rightarrow (x, y),$
 $(\xi_n, \eta_n) \rightarrow (\xi, \eta) \quad n \rightarrow \infty$ とする. このとき, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned} &C^+V(x, y)(\xi + \hat{\xi}, \eta + \hat{\eta}) \\ &\leq C^+V(x, y)(\xi, \eta) + C^+V(x, y)(\hat{\xi}, \hat{\eta}) \\ &C_-V(x, y)(\xi, \eta) \leq C^+V(x, y)(\xi, \eta) \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} C^+V(x_n, y_n)(\xi_n, \eta_n) &\leq C^+V(x, y)(\xi, \eta) \end{aligned}$$

Theorem 2. $\{T(t)\}_{t \in [0, \infty)} \in \mathcal{S}(V(\cdot, \cdot), D, \omega)$ とし, A_0 , A をそれぞれその無限小生成素と一般無限小生成素とする. このとき, 次が成り立つ.

$$D^+V(x, y)(A_0x, A_0y) \leq \omega V(x, y), \quad x, y \in D(A_0)$$

$$C_-V(x, y)(\xi, \eta) \leq \omega V(x, y), \quad (x, \xi), (y, \eta) \in A$$

Definition 5. $A \subset E \times E$ とする. $D(A) \subset X$ を満たし, ある $\omega \in \mathbb{R}$ に対し

$$C_-V(x, y)(\xi, \eta) \leq \omega V(x, y), \quad (x, \xi), (y, \eta) \in A$$

が満たされるとき, 作用素 A は**汎函数 $V(\cdot, \cdot)$ に関して準消散的**であると呼ぶ. このような作用素 A で $\overline{D(A)} = D$ を満たすものの全体を $\mathcal{G}(V(\cdot, \cdot), D, \omega)$ と書く.

$A \subset E \times E$ とし, つぎのような微分包含式を考える.

$$(DI) \quad u'(t) \in Au(t), \quad t > 0$$

Definition 6. $u \in C^1([0, \infty) : E)$ は $[0, \infty)$ 上で (DI) を満たすとき, (DI) の **古典解** であるといわれる. $u \in W_{loc}^{1,1}([0, \infty) : E)$ は (DI) を $(0, \infty)$ 上ほとんど至るところで満たすとき, (DI) の **強解** であるといわれる. $u \in C([0, \infty) : E)$ に対して (DI) の強解の列 u_n が存在して, $n \rightarrow \infty$ のとき, $C([0, \infty) : E)$ において $u_n \rightarrow u$ となるとき, $u \in C([0, \infty) : E)$ を (DI) の **弱解** であるという.

Theorem 3. $A \in \mathcal{G}(V(\cdot, \cdot), D, \omega)$ は

$D-V(x, y)(\xi, \eta) \leq \omega V(x, y), (x, \xi), (y, \eta) \in A$
を満たすと仮定する. 任意の $x \in D$ に対して,

$$(DI:x) \quad u'(t) \in Au(t), \quad t > 0, \quad u(0) = x$$

の弱解 $T(t)x$ が存在するならば, $\{T(t)\}_{t \in [0, \infty)} \in \mathcal{S}(V(\cdot, \cdot), D, \omega)$ となる.

Theorem 4. $A \in \mathcal{G}(V(\cdot, \cdot), D, \omega)$ は

$$D_+V(x, y)(Ax, Ay) \leq \omega V(x, y), \quad x, y \in D(A)$$

を満たし, $D(A) = D$ 上で連続であるとする. このとき, 任意の $x \in D$ に対して

$$(\mathbf{DE}:x) \quad u'(t) = Au(t), \quad t > 0, \quad u(0) = x$$

が古典解をもつための必要十分条件は任意の $x \in D$ に対して, 列 $x_n \in D$ と零列 $\lambda_n > 0$, $n = 1, 2, \dots$ が存在して,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n^{-1}(x_n - x) - Ax| = 0$$

が成り立つことである. また, このとき, $(\mathbf{DE}:x)$ の古典解を $T(t)x$ とかくと,

$$\{T(t)\}_{t \in [0, \infty)} \in \mathcal{G}(V(\cdot, \cdot), D, \omega)$$

となり, A はその無限小生成素になる.

$E = L^2 \times L^2$ を

$$\left\| \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\|_E = (\|u\|^2 + \|v\|^2)^{1/2}$$

をノルムとするヒルベルト空間とし, 空間 E における作用素 A を次で定義する.

$$A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x v \\ \partial_x \sigma(u) - \nu v \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in D(A)$$

$$D(A) = D = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in H^2 \times H^2; H(u, v) \leq r_0 \right\}$$

ただし, $r_0 > 0$ である. A は D 上で Hölder 連続である:

$$\left\| A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - A \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \end{pmatrix} \right\|_E \leq C \left\| \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \end{pmatrix} \right\|_E^{1/2}$$

適当な ω に対して,

$$D_+ V \left(\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \end{pmatrix} \right) \left(A \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} \hat{\xi} \\ \hat{\eta} \end{pmatrix} \right) \leq \omega V \left(\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{aligned} & D_+ V \left(\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \end{pmatrix} \right) \left(\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{\xi} \\ \hat{\eta} \end{pmatrix} \right) \cdot V \left(\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \end{pmatrix} \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (\sqrt{\sigma'(u)}\xi - \sqrt{\sigma'(\hat{u})}\hat{\xi}) \left(\int_{\hat{u}}^u \sqrt{\sigma'(r)} dr \right) \\ & \quad + (\eta - \hat{\eta})(v - \hat{v}) dx, \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \end{pmatrix} \in D, \quad \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{\xi} \\ \hat{\eta} \end{pmatrix} \in E$$

$\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \in H^2 \times H^2$ とする . Lax–Milgram の定理により, 適当な $\lambda_0 > 0$ が存在して, 任意の $\lambda \in (0, \lambda_0]$ に対して,

$$\begin{aligned} u_\lambda - u_0 &= \lambda \partial_x v_\lambda \\ v_\lambda - v_0 &= \lambda \sigma'(u_0) \partial_x u_\lambda - \lambda \nu v_\lambda \end{aligned}$$

を満たす $\begin{pmatrix} u_\lambda \\ v_\lambda \end{pmatrix} \in H^3 \times H^3$ が存在する. $r_0 > 0$ を十分小さくとれば, $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \in D$ のとき $\lambda \downarrow 0$ が小さければ $\begin{pmatrix} u_\lambda \\ v_\lambda \end{pmatrix} \in D$ となり, さらに

$$\left\| \lambda^{-1} \left(\begin{pmatrix} u_\lambda \\ v_\lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \right) - A \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \right\|_E \rightarrow 0, \quad \lambda \downarrow 0$$

となる .

汎関数 $V(\cdot, \cdot)$ は、次の条件を満たすと仮定する.

(V1) $(x, y) \in D \times D$, $(\xi, \eta) \in E \times E$ のとき,

$$\begin{aligned} & D^+V(x, y)(\xi, \eta) \\ & \leq D^+V(x, y)(\xi, 0) + D^+V(x, y)(0, \eta) \end{aligned}$$

(V2) 各 $(x, y) \in D \times D$ に対して, $r > 0$ と $\lim_{s \downarrow 0} \rho(s) = \rho(0) = 0$ を満たす $\rho : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ とが存在して

$$\begin{aligned} & D^+V(x', y')(x'' - x', 0) \\ & \leq V(x'', y') - V(x', y') + \rho(|x'' - x'|)|x'' - x'|, \\ & \quad D^+V(x', y')(0, y'' - y') \\ & \leq V(x', y'') - V(x', y') + \rho(|y'' - y'|)|y'' - y'|, \end{aligned}$$

$(x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m, \xi \in \mathbb{R}^n, \eta \in \mathbb{R}^m, \rho : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty))$

x

Remark 1. 条件 (V1), (V2) は次のとき満たされる: 各 $(x, y) \in D \times D$ に対して, $V(\cdot, \cdot)$ が (x, y) の近傍上で凸になるか, または $r > 0$ と $\lim_{s \downarrow 0} \rho(s) = \rho(0) = 0$ を満たす $\rho : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ とが存在して,

$$\begin{aligned} & |D^+V(x'', y'')(\xi, \eta) - D^+V(x', y')(\xi, \eta)| \\ & \leq \rho(|x'' - x'| + |y'' - y'|)(|\xi| + |\eta|), \\ & (\xi, \eta) \in E \times E, (x', y'), (x'', y'') \in D \times D, \\ & |x' - x| + |y' - y| + |x'' - x| + |y'' - y| \leq r \end{aligned}$$

が成り立つ.

Theorem 5. (1) 作用素 $A \in \mathcal{G}(V(\cdot, \cdot), D, \omega)$ は $D \text{-} V(x, y)(\xi, \eta) \leq \omega V(x, y)$, $(x, \xi), (y, \eta) \in A$ が成り立つとする .

(2) $\varphi : E \rightarrow [0, \infty]$ は $\overline{D(\varphi)} = D$ を満たし, E 上で下半連続で, 次をみたすものとする :

(φ) 任意の $\alpha \in (0, \infty)$ に対し $\beta \in (0, \infty)$ が定まり, $\varphi(x) \leq \alpha$ ならば $|Ax| \leq \beta$ となる.

ただし, $|Ax|$ はある列 $(x_n, \xi_n) \in A$ に対し, $x_n \rightarrow x$, $\sup_n |\xi_n| \leq L$ となる $L \in [0, \infty]$ の下限である.

(3) 任意の $x \in D(\varphi)$ に対し, 列 $(x_n, \xi_n) \in A$ と零列 $\lambda_n > 0$, $n = 1, 2, \dots$, が存在して, 次が成り立つ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - x| = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n^{-1}(x_n - x) - \xi_n| = 0$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \lambda_n^{-1}(\varphi(x_n) - \varphi(x)) \leq a\varphi(x).$$

ただし, $a \geq 0$ は定数である.

このとき, $\{T(t)\}_{t \in [0, \infty)} \in \mathcal{S}(V(\cdot, \cdot), D, \omega)$ が存在して, 各 $x \in D$ に対して, $u(\cdot) = T(\cdot)x$ は

$$u'(t) \in Au(t), \quad t \geq 0, \quad u(0) = x$$

の一意的な *soft solution* になる.

Definition 7. $\varepsilon > 0$ とする. $u : [0, \tau] \rightarrow E$ に対し, $[0, \tau]$ の分割 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = \tau$ と列 $(x_i, \xi_i) \in A$, $i = 1, 2, \dots, N$ が存在して, 次が満たされるとき, u を (DI) の $[0, \tau]$ 上の ε -近似解という:

$$(\varepsilon 1) \quad u(t) = x_i, \quad t \in (t_{i-1}, t_i], \\ i = 1, 2, \dots, N$$

$$(\varepsilon 2) \quad \sum_{i=1}^N |x_i - x_{i-1} - (t_i - t_{i-1})\xi_i| \leq \varepsilon, \\ x_0 = u(0) \in \overline{D(A)}$$

$$(\varepsilon 3) \quad \max_{i=1,2,\dots,N} (t_i - t_{i-1}) \leq \varepsilon$$

Definition 8. (1) $u \in C([0, \tau] : E)$ とする. 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, (DI) の $[0, \tau(\varepsilon)]$ 上の ε -近似解 u_ε が存在して,

$$\sup_{t \in [0, \tau(\varepsilon)]} |u(t) - u_\varepsilon(t)| \leq \varepsilon, \quad \tau(\varepsilon) \leq \tau < \tau(\varepsilon) + \varepsilon$$

が満たされるとき, u は (DI) の $[0, \tau]$ 上の **mild solution** であるという. ここで,

$$\sup_{\varepsilon > 0} BV(u_\varepsilon, [0, \tau(\varepsilon)]) < \infty$$

であるように取れるとき, mild solution u は $[0, \tau]$ で **正則** であるという. ただし, $v : [0, \tau] \rightarrow E$ に対し, $BV(v, [0, \tau])$ は v の $[0, \tau]$ 上の全変動を表わす.

(2) 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, (DI) の $[0, \tau]$ 上の mild solution u_ε で, $[0, \tau]$ 上で正則なものが存在して,

$$\sup_{t \in [0, \tau]} |u(t) - u_\varepsilon(t)| \leq \varepsilon$$

が満たされるとき, u は (DI) の $[0, \tau]$ 上の **soft solution** であるという.

Remark 2. $u \in C([0, \infty) : E)$ は, 任意の $\tau > 0$ に対して, $u|_{[0, \tau]}$ が (DI) の $[0, \tau]$ 上の mild solution (あるいは soft solution) であるとき, (DI) の $[0, \infty)$ 上の mild solution (あるいは soft solution) であるという.

Remark 3. (DI) の強解は (DI) の soft solution になる. (DI) の弱解は (DI) の mild solution になる.